ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

SUR LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DU PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS AUTOUR D'UN POINT FIXE,

PAR M. GUSTAF KOBB,

à Stockholm.

Dans ses célèbres Mémoires sur la Mécanique céleste M. Poincaré a étudié des solutions périodiques d'un système d'équations différentielles de la forme suivante :

$$(1) \qquad \frac{dx_\nu}{dt} = X_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

où les X_ν sont des fonctions développables d'après des puissances entières et positives de $x_1, \ldots, x_n$ et de μ, μ étant un paramètre arbitraire.

Il a montré que, si ce système admet pour $\mu = 0$ une solution

$$x_1 = \varphi_1^0(t), \qquad x_3 = \varphi_2^0(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n^0(t),$$

périodique par rapport à t avec la période τ, il admet aussi *en général* pour des valeurs très petites de μ des solutions périodiques, dont la période diffère très peu de τ. Il en admet même avec la période τ, s'il existe une intégrale du système uniforme et indépendante de τ.

Nous allons employer la méthode de M. Poincaré à la recherche des solutions périodiques d'un système bien connu d'équations différentielles de la Mécanique rationnelle, savoir le système qui définit le mouvement d'un corps grave autour d'un point fixe. Ce système est, comme on sait,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}\frac{dp}{dt} = (\mathrm{B}-\mathrm{C})qr + \mathrm{M}g(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), &\quad& \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'',\\
&\mathrm{B}\frac{dq}{dt} = (\mathrm{C}-\mathrm{A})rp + \mathrm{M}g(z_0\gamma - x_0\gamma''), && \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma,\\
&\mathrm{C}\frac{dr}{dt} = (\mathrm{A}-\mathrm{B})pq + \mathrm{M}g(x_0\gamma' - y_0\gamma), && \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'.
\end{aligned}$$

A, B, C sont les moments d'inertie principaux du corps par rapport au point fixe, x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de gravité du corps quand les axes sont les axes principaux au point fixe et M la masse du corps.

Dans une Note publiée dans les *Comptes rendus* (¹), M. Kœnigs a énoncé l'existence des solutions périodiques de ce système. M'étant aussi occupé de recherches analogues relatives à la même question, je vais développer dans la suite les résultats que j'ai obtenus.

Posons

$$\mu\xi = \mathrm{M}gx_0, \qquad \mu\eta = \mathrm{M}gy_0, \qquad \mu\zeta = \mathrm{M}gz_0,$$

on aura un système de la forme (1), savoir :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{A}\frac{dp}{dt} = (\mathrm{B}-\mathrm{C})qr + \mu(\eta\gamma'' - \zeta\gamma'), &\quad& \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'',\\
&\mathrm{B}\frac{dq}{dt} = (\mathrm{C}-\mathrm{A})rp + \mu(\zeta\gamma - \xi\gamma''), && \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma,\\
&\mathrm{C}\frac{dr}{dt} = (\mathrm{B}-\mathrm{C})pq + \mu(\xi\gamma' - \eta\gamma), && \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'.
\end{aligned}\right.$$

Si le point fixe est très près du centre de gravité, le paramètre μ a une valeur très petite. Nous savons intégrer le système (2) pour $\mu = 0$, et nous trouvons

$$p = p_0, \quad q = q_0, \quad r = r_0, \quad \gamma = \gamma_0, \quad \gamma' = \gamma'_0, \quad \gamma'' = \gamma''_0,$$

où $p_0, q_0, r_0, \gamma_0, \gamma'_0, \gamma''_0$ sont des fonctions doublement périodiques du temps (t), dont la période réelle soit τ, et cela quelles que soient les valeurs initiales des variables.

Nous allons voir, maintenant, qu'il existe des solutions périodiques du système (2) pour des valeurs petites de μ, avec la période τ, dont les valeurs initiales diffèrent très peu des valeurs initiales $\overline{p}_0, \overline{q}_0, \overline{r}_0, \overline{\gamma}_0, \overline{\gamma}'_0, \overline{\gamma}''_0$ des fonctions

---

(¹) 11 Mai 1896.

$p_0, q_0, r_0, \gamma_0, \gamma'_0, \gamma''_0$. Nous allons développer ces solutions d'après des puissances de μ et donner une méthode pour le calcul de proche en proche des coefficients.

Soient

$$\bar{p}_0+\beta_1, \quad \bar{q}_0+\beta_2, \quad \bar{r}_0+\beta_3, \quad \bar{\gamma}_0+\beta_4, \quad \bar{\gamma}'_0+\beta_5, \quad \bar{\gamma}''_0+\beta_6$$

les valeurs initiales des variables $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$; à l'époque τ ces variables prennent les valeurs

$$\begin{array}{lll} \bar{p}_0+\beta_1+\psi_1, & \bar{q}_0+\beta_2+\psi_2, & \bar{r}_0+\beta_3+\psi_3, \\ \bar{\gamma}_0+\beta_4+\psi_4, & \bar{\gamma}'_0+\beta_5+\psi_5, & \bar{\gamma}''_0+\beta_6+\psi_6, \end{array}$$

où $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_6$ sont développables d'après des puissances entières et positives de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_6$ et de μ. La condition nécessaire et suffisante pour que la solution soit périodique est ainsi

$$(3) \qquad \psi_1=\psi_2=\psi_3=\psi_4=\psi_5=\psi_6=0.$$

Ces équations ne sont pas indépendantes. En effet, nous connaissons trois intégrales uniformes du système (2), savoir :

$$(4) \qquad \begin{cases} F_1 = Ap^2+Bq^2+Cr^2-2\mu(\xi\gamma+p\gamma'+\zeta\gamma)=\bar{C}, \\ F_2 = Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''=\bar{C}_1, \\ F_3=\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1. \end{cases}$$

Les quantités ψ sont donc assujetties aux équations

$$(5) \qquad \begin{cases} F_1(\bar{p}_0+\beta_1+\psi_1, \ldots, \bar{\gamma}''_0+\beta_6+\psi_6)-F_1(\bar{p}_0+\beta_1, \ldots, \bar{\gamma}''_0+\beta_6)=0, \\ F_2(\bar{p}_0+\beta_1+\psi_1, \ldots, \bar{\gamma}''_0+\beta_6+\psi_6)-F_2(\bar{p}_0+\beta_1, \ldots, \bar{\gamma}''_0+\beta_6)=0, \\ F_0(\bar{p}_0+\beta_1+\psi_1, \ldots, \bar{\gamma}''_0+\beta_6+\psi_6)-F_3(\bar{p}_0+\beta_1, \ldots, \bar{\gamma}''_0+\beta_6)=0. \end{cases}$$

De ces équations nous tirons ψ_1, ψ_2 et ψ_6 en fonctions de ψ_3, ψ_4, ψ_5, qui s'annulent pour

$$\psi_3=\psi_4=\psi_5=0.$$

On peut donc supprimer les équations

$$\psi_1=\psi_2=\psi_6=0.$$

Cela exige que le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial p} & \dfrac{\partial F_1}{\partial q} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \gamma''} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial p} & \dfrac{\partial F_2}{\partial q} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \gamma''} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial p} & \dfrac{\partial F_3}{\partial q} & \dfrac{\partial F_3}{\partial \gamma''} \end{vmatrix} = \Delta$$

ne s'annule pas pour

$$p=\bar{p}_0, \quad q=\bar{q}_0, \quad r=\bar{r}_0, \quad \gamma=\bar{\gamma}_0, \quad \gamma'=\bar{\gamma}'_0, \quad \gamma''=\bar{\gamma}''_0, \quad \mu=0.$$

On aura

$$\Delta=4\begin{vmatrix} A\bar{p}_0 & B\bar{q}_0 & 0 \\ A\bar{\gamma}_0 & B\bar{\gamma}'_0 & C\bar{r}_0 \\ 0 & 0 & \bar{\gamma}''_0 \end{vmatrix}=4AB\bar{\gamma}''_0(\bar{p}_0\bar{\gamma}'_0-\bar{q}_0\bar{\gamma}_0)\gtrless 0.$$

Nos conditions sont maintenant

$$\psi_3=0, \qquad \psi_4=0, \qquad \psi_5=0.$$

Nous avons six variables $\beta_1, \ldots, \beta_6$; mais les trois dernières sont assujetties à la condition

$$(\bar{\gamma}_0+\beta_4)^2+(\bar{\gamma}'_0+\beta_5)^2+(\bar{\gamma}''_0+\beta_6)^2=1,$$

de sorte que nous ne pouvons donner des valeurs arbitraires qu'à deux des β. Posons, pour simplifier,

$$\beta_4=\beta_5=\beta_6=0.$$

Les fonctions ψ_3, ψ_4, ψ_5 sont des séries en β_1, β_2, β_3 et μ, qui s'annulent en même temps que ces variables. Pour pouvoir tirer des équations (6) les β_ν en séries de μ, il fallait d'abord voir si le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(\psi_3\psi_4\psi_5)}{\partial(\beta_1\beta_2\beta_3)}$$

ne s'annule pas pour

$$\beta_1=\beta_2=\beta_3=\mu=0.$$

Mais p, q, r, γ, γ', γ'' étant pour $\mu=0$ des fonctions doublement périodiques de τ, les ψ sont des fonctions assez compliquées des β, de sorte que la discussion du déterminant pourrait être difficile. Nous allons, par conséquent, adopter une autre méthode, et, dans ce but, cherchons d'abord s'il existe des séries périodiques qui satisfont formellement aux équations (2).

Nous allons ainsi essayer d'intégrer le système

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}&=(B-C)qr+\mu(\eta\gamma''-\zeta\gamma'), & \frac{d\gamma}{dt}&=r\gamma'-q\gamma'', \\ B\frac{dq}{dt}&=(C-A)rp+\mu(\zeta\gamma-\xi\gamma''), & \frac{d\gamma'}{dt}&=p\gamma''-r\gamma, \\ C\frac{dr}{dt}&=(A-B)pq+\mu(\xi\gamma'-\eta\gamma), & \frac{d\gamma''}{dt}&=q\gamma-p\gamma', \end{aligned}\right.$$

par des séries de la forme

$$
(7)\qquad \left\{\begin{aligned}
p &= \sum_0^\infty p_\lambda \mu^\lambda, & q &= \sum_0^\infty q_\lambda \mu^\lambda, & r &= \sum_0^\infty r_\lambda \mu^\lambda,\\
\gamma &= \sum_0^\infty \gamma_\lambda \mu^\lambda, & \gamma' &= \sum_0^\infty \gamma'_\lambda \mu^\lambda, & \gamma'' &= \sum_0^\infty \gamma''_\lambda \mu^\lambda,
\end{aligned}\right.
$$

où les coefficients de μ^λ sont des fonctions périodiques du temps avec la période τ. On sait que p_0, q_0, r_0, γ_0, γ'_0, γ''_0 sont des fonctions doublement périodiques, dont la période réelle est τ. Substituons ces séries dans le système (2) et comparons les coefficients de μ^λ des deux membres. Nous aurons, pour $\lambda = 1$,

$$
(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
A\frac{dp_1}{dt} &= (B-C)(r_0 q_1 + q_0 r_1) + (\eta\gamma''_0 - \zeta\gamma'_0),\\
B\frac{dq_1}{dt} &= (C-A)(p_0 r_1 + r_0 p_1) + (\zeta\gamma_0 - \xi\gamma''_0),\\
C\frac{dr_1}{dt} &= (A-B)(q_0 p_1 + p_0 q_1) + (\xi\gamma'_0 - \eta\gamma''_0)
\end{aligned}\right.
$$

et

$$
(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\gamma_1}{dt} &= r_0\gamma'_1 - q_0\gamma''_1 + r_1\gamma'_0 - q_1\gamma''_0,\\
\frac{d\gamma'_1}{dt} &= p_0\gamma''_1 - r_0\gamma_1 + p_1\gamma''_0 - r_1\gamma_0,\\
\frac{d\gamma''_1}{dt} &= q_0\gamma_1 - p_0\gamma'_1 + q_1\gamma_0 - p_1\gamma'_0;
\end{aligned}\right.
$$

ensuite, pour $\lambda = 0$, on retrouve les équations

$$
(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
A\frac{dp_0}{dt} &= (B-C)\,q_0 r_0,\\
B\frac{dq_0}{dt} &= (C-A)\,r_0 p_0,\\
C\frac{dr_0}{dt} &= (A-B)\,p_0 q_0,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\gamma_0}{dt} &= r_0\gamma'_0 - q_0\gamma''_0,\\
\frac{d\gamma'_0}{dt} &= p_0\gamma''_0 - r_0\gamma_0,\\
\frac{d\gamma''_0}{dt} &= q_0\gamma_0 - p_0\gamma'_0.
\end{aligned}\right.
$$

En général, on aura

$$(12)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp_\lambda}{dt} - (B-C)(q_0 r_\lambda + r_0 q_\lambda) = \eta\gamma''_{\lambda-1} - \zeta\gamma'_{\lambda-1} + H_1 = \Gamma_1^{(\lambda)}, \\ B\dfrac{dq_\lambda}{dt} - (C-A)(r_0 p_\lambda + p_0 r_\lambda) = \zeta\gamma_{\lambda-1} - \xi\gamma''_{\lambda-1} + H_2 = \Gamma_2^{(\lambda)}, \\ C\dfrac{dr_\lambda}{dt} - (A-B)(p_0 q_\lambda + q_0 p_\lambda) = \xi\gamma'_{\lambda-1} - \eta\gamma_{\lambda-1} + H_3 = \Gamma_3^{(\lambda)}, \end{cases}$$

où H_1, H_2, H_3 sont des polynomes qui contiennent au plus

$$p_{\lambda-1}, \quad q_{\lambda-1}, \quad r_{\lambda-1} \quad \text{et} \quad \gamma_{\lambda-2}, \quad \gamma'_{\lambda-2}, \quad \gamma''_{\lambda-2};$$

ensuite

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{d\gamma_\lambda}{dt} - (r_0\gamma'_\lambda - q_0\gamma''_\lambda) = -q_\lambda\gamma''_0 + r_\lambda\gamma'_0 + L_1 = H_1^{(\lambda)}, \\ \dfrac{d\gamma'_\lambda}{dt} - (p_0\gamma''_\lambda - r_0\gamma_\lambda) = -r_\lambda\gamma_0 + p_\lambda\gamma''_0 + L_2 = H_2^{(\lambda)}, \\ \dfrac{d\gamma''_\lambda}{dt} - (q_0\gamma_\lambda - p_0\gamma'_\lambda) = -p_\lambda\gamma'_0 + q_\lambda\gamma_0 + L_3 = H_3^{(\lambda)}, \end{cases}$$

où L_1, L_2, L_3 sont des polynomes qui contiennent au plus

$$p_{\lambda-1}, \quad q_{\lambda-1}, \quad r_{\lambda-1}, \quad \gamma_{\lambda-1}, \quad \gamma'_{\lambda-1}, \quad \gamma''_{\lambda-1}.$$

Intégrons d'abord le système (8), que nous écrivons

$$A\frac{dp_1}{dt} - (B-C)(q_0 r_1 + r_0 q_1) = \eta\gamma''_0 - \zeta\gamma'_0 = \Gamma_1^{(1)},$$

$$B\frac{dq_1}{dt} - (C-A)(r_0 p_1 + p_0 r_1) = \zeta\gamma_0 - \xi\gamma''_0 = \Gamma_2^{(1)},$$

$$C\frac{dr_1}{dt} - (A-B)(p_0 q_1 + q_0 p_1) = \xi\gamma'_0 - \eta\gamma_0 = \Gamma_3^{(1)}.$$

Ce système dépourvu des seconds membres n'est autre chose que les équations aux variations du système (10). Alors nous en connaissons trois intégrales particulières, car le temps n'entre pas explicitement dans (10), savoir

$$p_1 = \frac{dp_0}{dt} = \frac{B-C}{A} q_0 r_0, \qquad q_1 = \frac{dq_0}{dt} = \frac{C-A}{B} r_0 p_0, \qquad r_1 = \frac{dr_0}{dt} = \frac{A-B}{C} p_0 q_0.$$

Posons maintenant

$$p_1 = a_1 \frac{B-C}{A} q_0 r_0, \qquad q_1 = a_1 \frac{C-A}{B} r_0 p_0 + u_1, \qquad r_1 = a_1 \frac{A-B}{C} p_0 q_0 + v_1,$$

et l'on aura

$$\begin{aligned}
(B-C)q_0 r_0 \frac{da_1}{dt} - (B-C)(q_0 v_1 + r_0 u_1) &= \Gamma_1^{(1)},\\
B\frac{du_1}{dt} + (C-A)r_0 p_0 \frac{da_1}{dt} - (C-A)r_0 v_1 &= \Gamma_2^{(1)},\\
C\frac{dv_1}{dt} + (A-B)p_0 q_0 \frac{da_1}{dt} - (A-B)p_0 u_1 &= \Gamma_3^{(1)}.
\end{aligned}$$

De la première de ces équations, nous aurons

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{v_1}{r_0} + \frac{u_1}{q_0} + \frac{\Gamma'_1}{(B-C)q_0 r_0}, \tag{14}$$

et, en substituant cette valeur dans les deux autres,

$$\begin{aligned}
B\frac{du_1}{dt} + \frac{(C-A)r_0 p_0}{q_0} u_1 &= \frac{(B-C)q_0\Gamma_2^{(1)} - (C-A)p_0\Gamma_1^{(1)}}{(B-C)q_0},\\
C\frac{dv_1}{dt} + \frac{(A-B)p_0 q_0}{r_0} v_1 &= \frac{(B-C)r_0\Gamma_3^{(1)} - (A-B)p_0\Gamma_1^{(1)}}{(B-C)r_0}.
\end{aligned}$$

On voit aisément que

$$u_1 = \frac{\lambda_1}{q_0}, \qquad v_1 = \frac{\nu_1}{r_0}$$

sont deux intégrales particulières de ces équations, sans seconds membres. Ensuite, on aura

$$\tag{15} \left\{ \begin{aligned}
\lambda_1 &= \bar{\lambda}_1 + \int_0^t \frac{(B-C)q_0\Gamma_2^{(1)} - (C-A)p_0\Gamma_1^{(1)}}{B(B-C)}\,dt,\\
\nu_1 &= \bar{\nu}_1 + \int_0^t \frac{(B-C)r_0\Gamma_3^{(1)} - (A-B)p_0\Gamma_1^{(1)}}{C(B-C)}\,dt.
\end{aligned}\right.$$

On peut montrer que les seconds membres sont des fonctions périodiques du temps avec la période τ. Dans ce but, multiplions la première des équations (8) par p_0, la seconde par q_0, la troisième par r_0 et ajoutons; on aura ensuite, en tenant compte des équations (10),

$$p_0\Gamma'_1 + q_0\Gamma'_2 + r_0\Gamma'_3 = \frac{d}{dt}(Ap_0p_1 + Bq_0q_1 + Cr_0r_1).$$

La quantité entre parenthèses est une fonction périodique du temps. En effet, nous connaissons l'intégrale du système (2)

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2\mu(\xi\gamma + \eta\gamma' + \zeta\gamma'') = 2K_1.$$

En substituant dans cette équation nos séries (7) et en comparant les coefficients des différentes puissances de μ des deux membres, on aura

$$\mathrm{A}p_0p_1 + \mathrm{B}q_0q_1 + \mathrm{C}r_0r_1 + (\xi\gamma_0 + \eta\gamma'_0 + \zeta\gamma''_0) = \text{const.}$$

ou

$$\mathrm{A}p_0p_1 + \mathrm{B}q_0q_1 + \mathrm{C}r_0r_1 = \mathrm{U}_1,$$

U_1 étant une fonction périodique connue du temps. Ensuite, on aura

$$\gamma_0\Gamma'_1 + \gamma'_0\Gamma'_2 + \gamma''_0\Gamma'_3 = l_0(\mathrm{A}p_0\Gamma'_1 + \mathrm{B}q_0\Gamma'_2 + \mathrm{C}r_0\Gamma'_3) = 0.$$

Ainsi

$$p_0\Gamma'_1 + \quad q_0\Gamma'_1 + \quad r_0\Gamma'_3 = \frac{d\mathrm{U}_1}{dt},$$

$$\mathrm{A}p_0\Gamma'_1 + \mathrm{B}q_0\Gamma'_2 + \mathrm{C}r_0\Gamma'_3 = 0,$$

d'où résulte

$$(\mathrm{B}-\mathrm{C})q_0\Gamma'_2 - (\mathrm{C}-\mathrm{A})p_0\Gamma'_1 = -\mathrm{C}\frac{d\mathrm{U}_1}{dt},$$

$$(\mathrm{B}-\mathrm{C})r_0\Gamma'_3 - (\mathrm{A}-\mathrm{B})p_0\Gamma'_1 = \quad \mathrm{B}\frac{d\mathrm{U}_1}{dt}.$$

Substituons ces expressions dans (15), on aura enfin

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= \bar{\lambda}_1 - \frac{\mathrm{C}\mathrm{U}_1}{\mathrm{B}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}, \\ \nu_1 &= \bar{\nu}_1 + \frac{\mathrm{B}\mathrm{U}_1}{\mathrm{C}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}. \end{aligned}\right.$$

Ensuite

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\bar{\lambda}_1}{q_0^2} + \frac{\bar{\nu}_1}{r_0^2} + \frac{1}{\mathrm{B}-\mathrm{C}}\left[\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}r_0^2} - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}q_0^2}\right)\mathrm{U}_1 + \frac{\Gamma'_1}{q_0r_0}\right].$$

Pour que a_1 soit une fonction périodique du temps avec la période τ, il faut que l'accroissement du second membre pendant le temps τ soit nul ; ainsi

$$(17)\qquad \bar{\lambda}_1\left(\frac{1}{q_0^2}\right) + \bar{\nu}_1\left(\frac{1}{r_0^2}\right) = -\left[\frac{1}{\mathrm{B}-\mathrm{C}}\left\{\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}r_0^2} - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}q_0^2}\right)\mathrm{U}_1 + \frac{\Gamma'_1}{q_0r_0}\right\}\right],$$

en désignant par

$$[\mathrm{F}] = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathrm{F}\,dt,$$

la valeur moyenne de F, F étant une fonction périodique du temps avec la période τ.

Ensuite nous aurons

$$(18)\qquad a_1 = \int_0^t \left\{\frac{\bar{\lambda}_1}{q_0^2} + \frac{\bar{\nu}_1}{r_0^2} + \frac{1}{\mathrm{B}-\mathrm{C}}\left[\mathrm{U}_1\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}r_0^2} - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}q_6^2}\right) + \frac{\Gamma'_0}{q_0r_0}\right]\right\}dt + \bar{a}_1,$$

où a_1 est une nouvelle constante arbitraire, et enfin

$$(19)\quad \begin{cases} p_1 = a_1 \dfrac{B-C}{A} q_0 r_0, \\ q_1 = a_1 \dfrac{C-A}{B} r_0 p_0 + \dfrac{\lambda_1}{q_0}, \\ r_1 = a_1 \dfrac{A-B}{C} p_0 q_0 + \dfrac{\nu_1}{r_0}, \end{cases}$$

où a_1, λ_1 et ν_1 sont données par (16) et (18).

On observe que a_1 peut devenir infinie, mais d'une telle manière que p_1, q_1 et r_1 restent toujours finies. Cela résulte immédiatement de l'expression de p_0, q_0, r_0 comme des fonctions doublement périodiques.

Nous avons ainsi trouvé une solution périodique du système (8) qui renferme deux constantes arbitraires, les constantes $\overline{\lambda}_1$ et $\overline{\nu}_1$ étant assujetties à la condition (17).

Intégrons maintenant le système (9) que nous écrivons de la forme

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{d\gamma_1}{dt} - r_0\gamma'_1 + q_0\gamma''_1 = r_1\gamma'_0 - q_1\gamma''_0 = H_1^{(1)}, \\ \dfrac{d\gamma'_1}{dt} - p_0\gamma''_1 + r_0\gamma_1 = p_1\gamma''_0 - r_1\gamma_0 = H_2^{(1)}, \\ \dfrac{d\gamma''_1}{dt} - q_0\gamma_1 + p_0\gamma'_1 = q_1\gamma_0 - p_1\gamma'_0 = H_3^{(1)}. \end{cases}$$

Nous connaissons trois systèmes d'intégrales particulières de ces équations dépourvues de seconds membres, savoir les neuf cosinus directeurs

$$\begin{matrix} \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0, \\ \alpha'_0, & \beta'_0, & \gamma'_0, \\ \alpha''_0, & \beta''_0, & \gamma''_0; \end{matrix}$$

mais il est préférable, au lieu des α et β, de choisir les combinaisons linéaires

$$\begin{aligned} a &= \alpha_0 + i\beta_0, & b &= \alpha_0 - i\beta_0, \\ a' &= \alpha'_0 + i\beta'_0, & b' &= \alpha'_0 - i\beta'_0, \\ a'' &= \alpha''_0 + i\beta''_0, & b'' &= \alpha''_0 - i\beta''_0, \end{aligned}$$

i désignant le symbole $\sqrt{-1}$. La solution générale du système (20) sans second membre sera donc

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= C_1 a + C_2 b + C_3\gamma_0, \\ \gamma'_1 &= C_1 a' + C_2 b' + C_3\gamma'_0, \\ \gamma''_1 &= C_1 a'' + C_2 b'' + C_3\gamma''_0. \end{aligned}$$

Pour trouver la solution la plus générale du système (20) avec les seconds membres, appliquons la méthode de la variation des constantes. On aura

$$a\frac{dC_1}{dt}+b\frac{dC_2}{dt}+\gamma_0\frac{dC_3}{dt}=H_1^{(1)},$$

$$a'\frac{dC_1}{dt}+b'\frac{dC_2}{dt}+\gamma'_0\frac{dC_3}{dt}=H_2^{(1)},$$

$$a''\frac{dC_1}{dt}+b''\frac{dC_2}{dt}+\gamma''_0\frac{dC_3}{dt}=H_3^{(1)}.$$

En multipliant la première équation par b, la seconde par b', la troisième par b'' et en ajoutant, nous aurons

$$\frac{dC_1}{dt}=\tfrac{1}{2}(bH_1^{(1)}+b'H_2^{(1)}+b''H_3^{(1)})$$

en vertu des relations

$$ab+a'b'+a''b''=0,$$

$$b^2+b'^2+b''^2=0,$$

$$b\gamma_0+b'\gamma'_0+b''\gamma''_0=0,$$

et, d'une manière analogue,

$$\frac{dC_2}{dt}=\tfrac{1}{2}(aH_1^{(1)}+a'H_2^{(1)}+a''H_3^{(1)}),$$

$$\frac{dC_3}{dt}=\gamma_0H_1^{(1)}+\gamma'_0H_2^{(1)}+\gamma''_0H_3^{(1)}.$$

Ensuite on aura C_1, C_2 et C_3 par des quadratures. Étudions maintenant les fonctions dans les seconds membres. On a, d'après M. Hermite [1] et en adoptant ses notations,

$$a=\alpha+i\beta=\frac{\Theta_1(0)\,H(u-\omega)}{H_1(\omega)\,\Theta(u)}e^{i(\lambda u+\nu)},\qquad b=\alpha-i\beta=\frac{\Theta_1(0)\,H(u+\omega)}{H_1(\omega)\,\Theta(u)}e^{-i(\lambda u+\nu)},$$

$$a'=\alpha'+i\beta'=\frac{\Theta(0)\,H_1(u-\omega)}{H_1(\omega)\,\Theta(u)}e^{i(\lambda u+\nu)},\qquad b'=\alpha'-i\beta'=\frac{\Theta(0)\,H_1(u+\omega)}{H_1(\omega)\,\Theta(u)}e^{-i(\lambda u+\nu)},$$

$$a''=\alpha''+i\beta''=\frac{H_1(0)\,\Theta(u-\omega)}{iH_1(\omega)\,\Theta(u)}e^{i(\lambda u+\nu)},\qquad b''=\alpha''-i\beta''=\frac{H_1(0)\,\Theta(u+\omega)}{iH_1(\omega)\,\Theta(u)}e^{-i(\lambda u+\nu)},$$

$$\gamma_0=-\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{cn}\omega},\qquad \gamma'_0=\frac{\operatorname{dn}\omega\operatorname{sn}u}{\operatorname{cn}\omega},\qquad \gamma''_0=\frac{\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}u}{i\operatorname{cn}\omega},$$

---

[1] *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, p. 34.

où ω, λ et ν sont des constantes et u est une fonction linéaire du temps

$$u = n(t - t_0).$$

Ainsi, $H_1^{(1)}$, $H_2^{(1)}$, $H_3^{(1)}$ étant des fonctions périodiques du temps, on aura

$$b H_1^{(1)} + b' H_2^{(1)} + b'' H_3^{(1)} = e^{-i(\lambda u + \nu)} P(t),$$

où P est une fonction périodique. Ensuite

$$C_1 = \frac{1}{2} \int e^{-i(\lambda u + \nu)} P(t)\, dt = e^{-i(\lambda u + \nu)} P_1(t) + \overline{C}_1,$$

P_1 est une nouvelle fonction périodique et $\overline{C}_1$ une constante. De même

$$C_2 = \frac{1}{2} \int (a H_1^{(1)} + a' H_2^{(1)} + a'' H_3^{(1)})\, dt = \int e^{i(\lambda u + \nu)} \overline{P}(t) = e^{i(\lambda u + \nu)} P_2(t) + \overline{C}_2.$$

Enfin, en introduisant les valeurs de $H_1^{(1)}$, $H_2^{(1)}$, $H_3^{(1)}$ dans l'expression de $\dfrac{dC_3}{dt}$, on trouve

$$\frac{dC_3}{dt} = 0, \qquad C_3 = \text{const.}$$

Alors, nous aurons

$$(21) \quad \begin{cases} \gamma_1 = C_1 a \ + C_2 b \ + C_3 \gamma_0 = \dfrac{\Theta_1(0)[H(u-\omega) P_1(t) + H(u+\omega) P^1(t)]}{2 H_1(\omega)\Theta(u)} + C_3 \gamma_0, \\ \gamma_1' = C_1 a' + C_2 b' + C_3 \gamma_0' = \dfrac{\Theta(0)[H_1(u-\omega) P_1(t) + H_1(u+\omega) P_2(t)]}{2 H_1(\omega)\Theta(u)} + C_3 \gamma_0', \\ \gamma_1'' = C_1 a'' + C_2 b'' + C_3 \gamma_0'' = \dfrac{H_1(0)[\Theta(u-\omega) P_1(t) + \Theta(u+\omega) P_2(t)]}{2 i H_1(\omega)\Theta(u)} + C_3 \gamma_0'', \end{cases}$$

en posant

$$\overline{C}_1 = \overline{C}_2 = 0.$$

Par conséquent, γ_1, γ_1', γ_1'' sont aussi des fonctions périodiques du temps. Il est clair que les expressions de γ_1, γ_1', γ_1'' sont réelles, les quantités

$$C_1 a, \quad C_2 b, \quad \ldots$$

étant des quantités conjuguées.

Au commencement de nos recherches, nous avons posé

$$\beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0,$$

c'est-à-dire nous avons supposé que les séries γ, γ', γ'' pour $t = 0$ se réduisent à $\overline{\gamma}_0$, $\overline{\gamma}_0'$, $\overline{\gamma}_0''$.

Alors il faut que γ_1, γ'_1, γ''_1 s'annulent pour $t=0$.

Cela nous donne les équations

$$\left.\begin{aligned} &C_1 a + C_2 b + C_3 \gamma_0 = 0, \\ &C_1 a' + C_2 b' + C_3 \gamma'_0 = 0, \\ &C_1 a'' + C_2 b'' + C_3 \gamma''_0 = 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } t=0.$$

Mais le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & \gamma_0 \\ a' & b' & \gamma'_0 \\ a'' & b'' & \gamma''_0 \end{vmatrix} = -4i;$$

il s'ensuit

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0, \qquad C_3 = 0$$

pour $t=0$. C_3 étant une constante, nous la choisissons égale à zéro. Ensuite

$$C_1 = \frac{1}{2}\int (b H'_1 + b' H'_2 + b'' H'_3)\,dt = -\frac{i}{2}\int (b p_1 + b' q_1 + b'' r_1)\,dt,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\int (a H'_1 + a' H'_2 + a'' H'_3)\,dt = \quad \frac{i}{2}\int (a p_1 + a' q_1 + a'' r_1)\,dt,$$

en vertu des expressions de H'_1, H'_2, H'_3 et les relations bien connues entre le cosinus directeurs.

En substituant les valeurs de p_1, q_1, r_1, prises de (13), en tenant compte de (10), (15) et (18), nous aurons

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &a_1 \int \left(b\frac{dp_0}{dt} + b'\frac{dq_0}{dt} + b''\frac{dr_0}{dt}\right) dt \\ &+ \bar{\lambda}_1 \int \left[\left(b\frac{dp_0}{dt} + b'\frac{dq_0}{dt} + b''\frac{dr_0}{dt}\right)\int_0^t \frac{dt}{q_0^2} + \frac{b'}{q_0}\right] dt \\ &+ \bar{\nu}_1 \int \left[\left(b\frac{dp_0}{dt} + b'\frac{dq_0}{dt} + b''\frac{dr_0}{dt}\right)\int_0^t \frac{dt}{r_0^2} + \frac{b''}{r_0}\right] dt = \int A_1\,dt, \\ &a_1 \int \left(a\frac{dp_0}{dt} + a'\frac{dq_0}{dt} + a''\frac{dr_0}{dt}\right) dt \\ &+ \bar{\lambda}_1 \int \left[\left(a\frac{dp_0}{dt} + a'\frac{dq_0}{dt} + a''\frac{dr_0}{dt}\right)\int_0^t \frac{dt}{q_0^2} + \frac{a'}{q_0}\right] dt \\ &+ \bar{\nu}_1 \int \left[\left(a\frac{dp_0}{dt} + a'\frac{dq_0}{dt} + a''\frac{dr_0}{dt}\right)\int_0^t \frac{dt}{r_0^2} + \frac{a''}{r_0}\right] dt = \int A_2\,dt, \end{aligned}\right.$$

où A_1 et A_2 sont deux fonctions de t entièrement connues. Après l'intégration, il faut partout poser $t=0$.

Ces deux équations et l'équation (17) font connaître les trois constantes $\bar{a}_1$, $\bar{\lambda}_1$ et $\bar{\nu}_1$. Elles ont la forme

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} L_1\bar{a}_1 + M_1\bar{\lambda}_1 + N_1\bar{\nu}_1 &= \int A_1\,dt,\\ L_2\bar{a}_1 + M_2\bar{\lambda}_1 + N_2\bar{\nu}_1 &= \int A_2\,dt,\\ M_3\bar{\lambda}_1 + N_3\bar{\nu}_1 &= A_3,\end{aligned}\right.$$

de sorte que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse déterminer les constantes $\bar{a}_1$, $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\nu}_1$ par (23) sera

$$(24)\qquad D = \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & N_1\\ L_2 & M_2 & N_2\\ 0 & M_3 & N_3\end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Cette condition remplie, nous avons intégré les équations (8) et (9) par six fonctions périodiques de la période τ

$$p_1,\quad q_1,\quad r_1,\qquad \gamma_1,\quad \gamma'_1,\quad \gamma''_1,$$

dont, en outre, les trois dernières s'annulent pour $t = 0$. Substituons ces valeurs dans les équations (12) et (13) et posons $\lambda = 2$. En les intégrant, nous trouvons

$$p_2,\quad q_2,\quad r_2,\qquad \gamma_2,\quad \gamma'_2,\quad \gamma''_2$$

et ainsi de suite. Supposons maintenant que nous ayons trouvé tous les coefficients de p, q, r, γ, γ', γ'' jusqu'à l'ordre $n-1$; nous allons voir qu'il est possible d'intégrer les équations qui déterminent

$$p_n,\quad q_n,\quad r_n,\qquad \gamma_n,\quad \gamma'_n,\quad \gamma''_n.$$

Posons $\lambda = n$ dans les équations (12)

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} A\frac{dp_n}{dt} - (B-C)(q_0 r_n + r_0 q_n) &= \Gamma_1^{(n)},\\ B\frac{dq_n}{dt} - (C-A)(r_0 p_n + p_0 r_n) &= \Gamma_2^{(n)},\\ C\frac{dr_n}{dt} - (A-B)(p_0 q_n + q_0 p_n) &= \Gamma_3^{(n)},\end{aligned}\right.$$

où les Γ dépendent, au plus, des coefficients d'ordre $n-1$; elles sont, par conséquent, des fonctions connues périodiques du temps. Nous connaissons trois intégrales particulières des équations (25) sans seconds membres, savoir :

$$p_n = \frac{B-C}{A} q_0 r_0, \qquad q_n = \frac{C-A}{B} r_0 p_0, \qquad r_n = \frac{A-B}{C} p_0 q_0,$$

de sorte que nous posons comme auparavant

$$p_n = a_n \frac{B-C}{A} q_0 r_0, \qquad q_n = a_n \frac{C-A}{B} r_0 p_0 + u_n, \qquad r_n = a_n \frac{A-B}{C} p_0 q_0 + v_n.$$

Un calcul, tout à fait analogue à celui que nous avons fait pour $n=1$, nous donne

$$\frac{da_n}{dt} = \frac{v_n}{r_0} + \frac{u_n}{q_0} + \frac{\Gamma_1^{(n)}}{(B-C) q_0 r_0},$$

$$B \frac{du_n}{dt} + \frac{(C-A) r_0 p_0}{q_0} u_n = \frac{(B-C) q_0 \Gamma_2^{(n)} - (C-A) p_0 \Gamma_1^{(n)}}{(B-C) q_0},$$

$$C \frac{dv_n}{dt} + \frac{(A-B) p_0 q_0}{r_0} v_n = \frac{(B-C) r_0 \Gamma_3^{(n)} - (A-B) p_0 \Gamma_1^{(n)}}{(B-C) r_0}$$

et, ensuite,

$$u_n = \frac{\lambda_n}{q_0}, \qquad v_n = \frac{\nu_n}{r_0},$$

$$\lambda_n = \bar{\lambda}_n + \int_0^t \frac{(B-C) q_0 \Gamma_2^{(n)} - (C-A) p_0 \Gamma_1^{(n)}}{B(B-C)} dt,$$

$$\nu_n = \bar{\nu}_n + \int_0^t \frac{(B-C) r_0 \Gamma_3^{(n)} - (A-B) p_0 \Gamma_1^{(n)}}{C(B-C)} dt,$$

où $\bar{\lambda}_n$ et $\bar{\nu}_n$ sont des constantes arbitraires.

Nous allons montrer que les intégrales dans les seconds membres sont des fonctions périodiques du temps. En effet, on obtient aisément

$$(26) \quad \begin{cases} p_0 \Gamma_1^{(n)} + q_0 \Gamma_2^{(n)} + r_0 \Gamma_3^{(n)} = \dfrac{d}{dt} (A p_0 p_n + B q_0 q_n + C r_0 r_n) \\ \quad \text{et} \\ A p_0 \Gamma_1^{(n)} + B q_0 \Gamma_2^{(n)} + C r_0 \Gamma_3^{(n)} = l_0 \dfrac{d}{dt} (A \gamma_0 p_n + B \gamma'_0 q_n + C \gamma''_0 r_n). \end{cases}$$

D'autre part, nous avons les trois intégrales premières de notre système (2)

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 + 2\mu(\xi\gamma + \eta\gamma' + \zeta\gamma'') = 2K_1,$$
$$A p\gamma + B q\gamma' + C r\gamma'' = K_3,$$
$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

Substituons les séries (7) dans les premiers membres, développons d'après les puissances de μ et écrivons que les coefficients de μ^n doivent être des constantes. Ainsi,

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &A p_0 p_n + B q_0 q_n + C r_0 r_n = U_n + \text{const.},\\ &A\gamma_0 p_n + B\gamma'_0 q_n + C\gamma''_0 r_n + A p_0\gamma_n + B q_0\gamma'_n + C r_0\gamma''_n = V'_n + \text{const.},\\ &\gamma_0\gamma_n + \gamma'_0\gamma'_n + \gamma''_0\gamma''_n = W_n,\end{aligned}\right.$$

où U_n, V'_n et W_n dépendent seulement des coefficients d'ordre moins que n; elles sont, par conséquent, des fonctions connues périodiques du temps. En observant que

$$A p_0 = l_0\gamma_0,\qquad B q_0 = l_0\gamma'_0,\qquad C r_0 = l_0\gamma''_0,$$

on obtient, des deux dernières équations,

$$l_0(A\gamma_0 p_n + B\gamma'_0 q_n + C\gamma''_0 r_n) = V_n + \text{const.},$$

où V_n est aussi une fonction périodique connue du temps qui s'annule pour $t = 0$. Ainsi, les équations (16) prennent la forme

$$p_0\Gamma_1^{(n)} + q_0\Gamma_2^{(n)} + r_0\Gamma_3^{(n)} = \frac{dU_n}{dt},$$

$$A p_0\Gamma_1^{(n)} + B q_0\Gamma_2^{(n)} + C r_0\Gamma_3^{(n)} = \frac{dV_n}{dt};$$

d'où il résulte

$$(B - C) q_0\Gamma_2^{(n)} - (C - A) p_0\Gamma_1^{(n)} = \frac{dV_n}{dt} - C\frac{dU_n}{dt},$$

$$(B - C) r_0\Gamma_3^{(n)} - (A - B) p_0\Gamma_1^{(n)} = B\frac{dU_n}{dt} - \frac{dV_n}{dt}$$

et

$$\lambda_n = \bar{\lambda}_n + \frac{V_n - CU_n}{B(B - C)},$$

$$\nu_n = \bar{\nu}_n + \frac{BU_n - V_n}{C(B - C)}.$$

Enfin, en substituant ces valeurs dans l'expression de $\frac{da_n}{dt}$, on aura a_n par une quadrature analogue à celle obtenue pour a_1. La condition pour que a_n soit une fonction périodique, savoir :

$$\left[\frac{da_n}{dt}\right] = 0,$$

nous donne une relation de la forme

$$(28)\qquad \bar{\lambda}_n\left[\frac{1}{q_0^2}\right] + \bar{\nu}_n\left[\frac{1}{r_0^2}\right] = \text{const.}$$

Ainsi

$$(29)\qquad \begin{cases} p_n = \dfrac{B-C}{A} q_0 r_0 a_n, \\ q_n = \dfrac{C-A}{B} r_0 p_0 a_n + \dfrac{\lambda_n}{q_0}, \\ r_n = \dfrac{A-B}{C} p_0 q_0 a_n + \dfrac{\nu_n}{r_0}, \end{cases}$$

mais, a_n, λ_n, ν_n étant des fonctions périodiques du temps, p_n, q_n, r_n sont aussi des fonctions périodiques du temps. Passons, ensuite, aux équations (13) pour $\lambda = n$

$$(30)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\gamma_n}{dt} - (r_0\gamma'_n - q_0\gamma''_n) = H_1^{(n)} = r_n\gamma'_0 - q_n\gamma''_0 + L_1^{(n)}, \\ \dfrac{d\gamma'_n}{dt} - (p_0\gamma''_n - r_0\gamma_n) = H_2^{(n)} = p_n\gamma''_0 - r_n\gamma_0 + L_2^{(n)}, \\ \dfrac{d\gamma''_n}{dt} - (q_0\gamma_n - p_0\gamma'_n) = H_3^{(n)} = q_n\gamma_0 - p_n\gamma'_0 + L_3^{(n)}; \end{cases}$$

$L_1^{(n)}$, $L_2^{(n)}$, $L_3^{(n)}$ ne dépendent que des coefficients d'ordre moins que n, de sorte qu'elles sont des fonctions périodiques connues du temps.

On voit aisément qu'on peut intégrer le système (30) exactement de la même manière que le système (20). On obtient

$$\begin{aligned} \gamma_n &= C_1^{(n)} a + C_2^{(n)} b + C_3^{(n)} \gamma_0, \\ \gamma'_n &= C_1^{(n)} a' + C_2^{(n)} b' + C_3^{(n)} \gamma'_0, \\ \gamma''_n &= C_1^{(n)} a'' + C_2^{(n)} b'' + C_3^{(n)} \gamma''_0, \end{aligned}$$

où les a et les b ont la même signification qu'auparavant. Ensuite, $C_1^{(n)}$, $C_2^{(n)}$, $C_3^{(n)}$ sont déterminées par

$$\begin{aligned} a\,\frac{dC_1^{(n)}}{dt} + b\,\frac{dC_2^{(n)}}{dt} + \gamma_0\,\frac{dC_3^{(n)}}{dt} &= H_1^{(n)}, \\ a'\,\frac{dC_1^{(n)}}{dt} + b'\,\frac{dC_2^{(n)}}{dt} + \gamma'_0\,\frac{dC_3^{(n)}}{dt} &= H_2^{(n)}, \\ a''\,\frac{dC_1^{(n)}}{dt} + b''\,\frac{dC_2^{(n)}}{dt} + \gamma''_0\,\frac{dC_3^{(n)}}{dt} &= H_3^{(n)}, \end{aligned}$$

d'où résulte facilement

$$\frac{dC_3^{(n)}}{dt} = \gamma_0 H_1^{(n)} + \gamma'_0 H_2^{(n)} + \gamma''_0 H_3^{(n)}.$$

Nous allons voir que le second membre est la dérivée d'une fonction périodique du temps. En effet, nous aurons

$$\begin{aligned}\gamma_0 H_1^{(n)} + \gamma'_0 H_2^{(n)} + \gamma''_0 H_3^n &= \gamma_0 \frac{d\gamma_n}{dt} + \gamma'_0 \frac{d\gamma'_n}{dt} + \gamma''_0 \frac{d\gamma''_n}{dt} \\ &\quad + \gamma_n(r_0\gamma'_0 - q_0\gamma''_0) + \gamma'_n(p_0\gamma''_0 - r_0\gamma_0) + \gamma''_n(q_0\gamma_0 - p_0\gamma_0) \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma_0\gamma_n + \gamma'_0\gamma'_n + \gamma''_0\gamma_n),\end{aligned}$$

d'après (11). Mais la quantité entre parenthèses est égale à W_n (27), de sorte que

$$C_3^{(n)} = W_n + \text{const.}$$

Quant aux $C_1^{(n)}$ et $C_2^{(n)}$, elles ont la même forme que C_1 et C_2 et, d'après la forme de $H_1^{(n)}$, H_2^n, H_3^n, on remarque qu'elles dépendent des constantes

$$\bar{a}_n, \quad \bar{\lambda}_n, \quad \bar{\nu}_n,$$

absolument de la même manière que C_1 et C_2 dépendent de $\bar{a}_1$, $\bar{\lambda}_1$ et $\bar{\nu}_1$.

Il en résulte d'abord que γ_n, γ'_n, γ''_n sont des fonctions périodiques du temps, C_1^n et $C_2^{(n)}$ ayant la forme

$$C_1^n = e^{-i(\lambda n+\nu)} P_1^{(n(}(t), \qquad C_2^{(n)} = e^{+i(\lambda n+\nu)} P_2^{(n)}(t),$$

et, ensuite, que la condition que γ_n, γ'_n, γ''_n s'annulent pour $t = 0$ nous donnera

$$C_1^{(n)} = 0, \qquad C_2^{(n)} = 0, \qquad C_3^{(n)} = 0, \qquad t = 0.$$

Les deux premières équations ont, en employant les notations (23), la forme

$$\begin{aligned} L_1\bar{a}_n + M_1\bar{\lambda}_n + N_1\bar{\nu}_n &= \text{quantité connue}, \\ L_2\bar{a}_n + M_2\bar{\lambda}_n + N_2\bar{\nu}_n &= \text{quantité connue}. \end{aligned}$$

Mais $\bar{\lambda}_n$ et $\bar{\nu}_n$ sont encore assujetties à la condition

$$\bar{\lambda}_n\left[\frac{1}{q_0^2}\right] + \bar{\nu}_n\left[\frac{1}{r_0^2}\right] = \text{const.}$$

ou

$$M_3\bar{\lambda}_n + N_3\bar{\nu}_n = \text{quantité connue};$$

de sorte que la détermination des constantes d'intégration $\bar{a}_n$, $\bar{\lambda}_n$, $\bar{\nu}_n$ est toujours possible si le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \\ 0 & M_3 & N_3 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, ce que nous avons déjà supposé.

Ainsi, ayant supposé qu'un calcul préalable nous ait fait connaître les coefficients de nos séries (7) jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ comme des fonctions périodiques du temps, nous pouvons toujours déterminer les coefficients d'ordre n comme des fonctions périodiques du temps. Observons aussi qu'ils sont complètement déterminés par la condition

$$\gamma_n = \gamma'_n = \gamma''_n = 0, \qquad \text{pour} \qquad t = 0.$$

Par conséquent, le calcul formel ne s'arrête jamais et il existe des séries

$$p = \sum_0 p_\lambda \mu^\lambda, \qquad q_\lambda = \sum_0 q_\lambda \mu^\lambda, \qquad r = \sum_0 r_\lambda \mu^\lambda,$$
$$\gamma = \sum_0 \gamma_\lambda \mu^\lambda, \qquad \gamma' = \sum_0 \gamma'_\lambda \mu^\lambda, \qquad \gamma''_n = \sum_0 \gamma''_\lambda \mu^\lambda,$$

qui, substituées dans (2), satisfont formellement aux équations et dont les coefficients sont des fonctions périodiques du temps. Enfin, les séries de γ, γ', γ'' se réduisent, pour $t = 0$, à

$$\bar{\gamma}_0, \quad \bar{\gamma}'_0, \quad \bar{\gamma}''_0,$$

ou aux valeurs initiales de γ_0, γ'_0 et γ''_0, dont nous sommes partis.

Passons maintenant à la démonstration de la convergence de nos séries. Nous avons déjà indiqué les difficultés qui se présentent en partant de la solution périodique

$$p_0 q_0 r_0 \gamma_0 \gamma'_0 \gamma''_0$$

des équations (2) pour $\mu = 0$. Ces difficultés proviennent du fait que les accroissements ψ deviennent des fonctions assez compliquées des variables β. On peut pourtant les tourner de la manière suivante : posons

$$p = p_0 + \mu x_1, \qquad q = q_0 + \mu x_2, \qquad r = r_0 + \mu x_3,$$
$$\gamma = \gamma_0 + \mu y_1, \qquad \gamma' = \gamma'_0 + \mu y_2, \qquad \gamma'' = \gamma''_0 + \mu y_3,$$

et choisissons les x et les y comme variables au lieu de p, q, r, γ, γ', γ'', γ''. Les équations (2) deviennent

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} A\frac{dx_1}{dt} &= (B - C)(q_0 x_3 + r_0 x_2) + \eta\gamma''_0 - \zeta\gamma'_0 + \mu[(B - C)x_2 x_3 + \eta y_3 - \zeta y_2], \\ B\frac{dx_1}{dt} &= (C - A)(r_0 x_1 + p_0 x_3) + \zeta\gamma_0 - \xi\gamma''_0 + \mu[(C - A)x_3 x_1 + \zeta y_1 - \xi y_3], \\ C\frac{dx_3}{dt} &= (A - B)(p_0 x_2 + q_0 x_1) + \xi\gamma'_0 - \eta\gamma_0 + \mu[(A - B)x_1 x_2 + \xi y_2 - \eta y_1], \\ \frac{dy_1}{dt} &= r_0 y_2 - q_0 y_3 + x_3\gamma'_0 - x_2\gamma''_0 + \mu(x_3 y_2 - x_2 y_3), \\ \frac{dy_2}{dt} &= p_0 y_3 - r_0 y_1 + x_1\gamma''_0 - x_3\gamma_0 + \mu(x_1 y_3 - x_3 y_1), \\ \frac{dy_3}{dt} &= q_0 y_1 - p_0 y_2 + x_2\gamma_0 - x_1\gamma'_0 + \mu(x_2 y_1 - x_1 y_2), \end{aligned} \right.$$

Pour $\mu = 0$, ce système devient identique aux systèmes (8) et (9). Ainsi, nous connaissons une solution périodique du temps avec la période τ du système (31) pour $\mu = 0$, savoir

$$\overset{0}{x}_1 = p_1, \qquad \overset{0}{x}_2 = q_1, \qquad \overset{0}{x}_3 = r_1,$$

$$\overset{0}{y}_1 = \gamma_1, \qquad \overset{0}{y}_2 = \gamma'_1, \qquad \overset{0}{y}_3 = \gamma''_1,$$

et, du reste, nous savons qu'elle est la seule pour laquelle γ_1, γ'_1, γ''_1 s'annulent pour $t = 0$.

Appliquons, maintenant, la méthode de M. Poincaré en prenant cette solution périodique comme point de départ et voyons si le système (31) ne comporte pas aussi pour des valeurs très petites de μ une solution périodique avec la période τ, telle que y_1, y_2, y_3 s'annulent pour $t = 0$.

Au lieu de prendre comme variables les valeurs initiales des x et des y et, ensuite, de les déterminer de façon que les accroissements des x et des y, pendant la période τ, s'annulent, nous pouvons évidemment aussi bien choisir les constantes d'intégration qui se trouvent dans les expressions de p_1, q_1, r_1, γ_1, γ'_1, γ''_1. En effet, l'existence de la solution périodique pour $\mu = 0$ dépend d'un choix convenable de ses constantes.

Observons d'abord que les accroissements des x et des y ne sont pas indépendants, parce qu'il existe trois intégrales premières des équations (2). Nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 + 2\mu(\xi\gamma + \eta\gamma' + \zeta'') &= 2\mathrm{K}_1, \\ \mathrm{A}p\gamma + \mathrm{B}q\gamma' + \mathrm{C}r\gamma'' &= \mathrm{K}_2, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1, \end{aligned}$$

d'où il résulte, en introduisant nos variables x et y et en divisant par μ,

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_1 = {} & \mathrm{A}p_0 x_1 + \mathrm{B}q_0 x_2 + \mathrm{C}r_0 x_3 + \xi\gamma_0 + \eta\gamma'_0 + \zeta\gamma''_0 \\ & + \mu\left[\xi y_1 + \eta y_2 + \zeta y_3 + \frac{1}{2}(\mathrm{A}x_1^2 + \mathrm{B}x_2^2 + \mathrm{C}x_3^2)\right] = \text{const.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_2 = {} & \mathrm{A}\gamma_0 x_1 + \mathrm{B}\gamma'_0 x_2 + \mathrm{C}\gamma''_0 x_3 + \mathrm{A}p_0 y_1 + \mathrm{B}q_0 y_2 + \mathrm{C}r_0 y_3 \\ & + \mu(\mathrm{A}x_1 y_1 + \mathrm{B}x_2 y_2 + \mathrm{C}x_3 y_3) = \text{const.}, \end{aligned}$$

$$\mathrm{F}_3 = \gamma_0 y_1 + \gamma'_0 y_2 + \gamma''_0 y_3 + \frac{\mu}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 0.$$

Le déterminant fonctionnel

$$\left|\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_3}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_3}{\partial x_1} \end{array}\right|_{\mu=0} = \left|\begin{array}{ccc} Bq_0 & Cr_0 & 0 \\ B\gamma'_0 & C\gamma''_0 & Ap_0 \\ 0 & 0 & \gamma_0 \end{array}\right| = BC\gamma_0(q_0\gamma''_0 - r_0\gamma'_0)$$

n'étant pas nul, nous sommes certains que les accroissements de x_2, x_3, y_1 s'annulent si les trois autres le font. Appelons ainsi

$$\Delta x_1, \quad \Delta y_2, \quad \Delta y_3$$

les accroissements de x_1, y_2, y_3 pendant la période τ; les équations à satisfaire pour l'existence des solutions périodiques sont, par conséquent,

$$(32) \qquad \Delta x_1 = 0, \qquad \Delta y_2 = 0, \qquad \Delta y_3 = 0.$$

Soient

$$\bar{p}_1, \quad \bar{q}_1, \quad \bar{r}_1, \quad \bar{\gamma}_1, \quad \bar{\gamma}'_1, \quad \bar{\gamma}''_1$$

les valeurs initiales des variables x et y pour $\mu = 0$, et

$$\bar{p}_1+\beta_1, \quad \bar{q}_1+\beta_2, \quad \bar{r}_1+\beta_3, \quad \bar{\gamma}_1+\beta_4, \quad \bar{\gamma}'_1+\beta_5, \quad \bar{\gamma}''_1+\beta_6$$

les valeurs initiales pour $\mu \gtrless 0$; nous savons que Δx_1, Δy_2, Δy_3 sont des séries procédant d'après des puissances entières et positives de β et de μ. Ainsi des équations (32) il faut tirer trois des quantités β comme des fonctions des trois autres et de μ. Mais, au lieu de prendre les β comme variables, nous en introduisons d'autres de la manière suivante.

Les équations (31) ont pour $\mu = 0$ les intégrales (19) et (21)

$$p_1 = a_1 \frac{B-C}{A} q_0 r_0,$$

$$q_1 = a_1 \frac{C-A}{B} r_0 p_0 + \frac{\lambda_1}{q_0},$$

$$r_1 = a_1 \frac{A-B}{C} p_0 q_0 + \frac{\nu_1}{r_0},$$

$$\gamma_1 = C_1 a + C_2 b + \bar{C}_3 \gamma_0,$$

$$\gamma'_1 = C_1 a' + C_2 b' + \bar{C}_3 \gamma'_0,$$

$$\gamma''_1 = C_1 a'' + C_2 b'' + \bar{C}_3 \gamma''_0,$$

où

$$C_1 = -\frac{i}{2}\int^t (bp_1 + b'q_1 + b''r_1)\,dt + \overline{C}_1,$$

$$C_2 = \frac{i}{2}\int^t (ap_1 + a'q_1 + a''r_1)\,dt + \overline{C}_2,$$

$$\overline{C}_3 = \text{const.},$$

et α_1, λ_1, ν_1 contiennent les constantes additives $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\lambda}_1$, $\overline{\nu}_1$. La solution périodique résulte d'un choix convenable des constantes $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\lambda}_1$, $\overline{\nu}_1$, $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, $\overline{C}_3$.

De ce système de constantes d'intégration nous obtenons les valeurs initiales correspondant à la solution périodique. Donnons maintenant aux constantes de petits accroissements

$$\delta\overline{\alpha}_1,\quad \delta\overline{\lambda}_1,\quad \delta\overline{\nu}_1,\quad \delta\overline{C}_1,\quad \delta\overline{C}_2,\quad \delta\overline{C}_3;$$

les valeurs correspondantes des accroissements des valeurs initiales sont

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned}
\delta\overline{p}_1 &= \delta\overline{\alpha}_1 \frac{B-C}{A}\overline{q}_0\overline{r}_0,\\
\delta\overline{q}_1 &= \delta\overline{\alpha}_1 \frac{C-A}{B}\overline{r}_0\overline{p}_0 + \frac{\delta\overline{\lambda}_1}{\overline{q}_0},\\
\delta\overline{r}_1 &= \delta\overline{\alpha}_1 \frac{A-B}{C}\overline{p}_0\overline{q}_0 + \frac{\delta\overline{\nu}_1}{\overline{r}_0}.\\
\delta\overline{\gamma}_1 &= \delta C_1^0 a_0 + \delta C_2^0 b_0 + \delta\overline{C}_3\overline{\gamma}_0,\\
\delta\overline{\gamma}'_1 &= \delta C_1^0 a'_0 + \delta C_2^0 b'_0 + \delta\overline{C}_3\overline{\gamma}'_0,\\
\delta\overline{\gamma}''_1 &= \delta C_1^0 a''_0 + \delta C_2^0 b''_0 + \delta\overline{C}_3\overline{\gamma}''_0.
\end{aligned}\right.$$

Il est facile de voir que δC_1^0 et δC_2^0 sont des fonctions linéaires et homogènes de $\delta\overline{\alpha}_1$, $\delta\overline{\lambda}_1$, $\delta\overline{\nu}_1$, $\delta\overline{C}_1$, $\delta\overline{C}_2$. Posons maintenant

$$\beta_1 = \delta\overline{p}_1,\qquad \beta_2 = \delta\overline{q}_1,\qquad \beta_3 = \delta\overline{r}_1,\qquad \beta_4 = \delta\overline{\gamma}_1,\qquad \beta_5 = \delta\overline{\gamma}'_1,\qquad \beta_6 = \delta\overline{\gamma}''_1;$$

il est clair que

$$\Delta x_1,\quad \Delta y_2,\quad \Delta y_3$$

deviennent des séries en $\delta\overline{\alpha}_1$, $\delta\overline{\lambda}_1$, $\delta\overline{\nu}_1$, $\delta\overline{C}_1$, $\delta\overline{C}_2$, $\delta\overline{C}_3$. Calculons ces séries pour $\mu = 0$. Mais, comme x_1, y_2, y_3 pour $\mu = 0$ se réduisent à p_1, γ'_1, γ''_1, cela revient à calculer

$$\Delta p_1,\quad \Delta\gamma'_1,\quad \Delta\gamma''_1.$$

On voit immédiatement que

$$\Delta p_1 = \tau \frac{B-C}{A} \bar{q}_0 \bar{r}_0 \left[\frac{da_1}{dt}\right] = \tau \frac{B-C}{A} \left\{ \left[\frac{1}{q_0^2}\right] \delta\bar{\lambda}_1 + \left[\frac{1}{r_0^2}\right] \delta\bar{\nu}_1 \right\}$$

ou, en employant les notations (23),

$$\Delta p_1 = \tau \frac{B-C}{A} \bar{q}_0 \bar{r}_0 (M_3 \delta\bar{\lambda}_1 + N_3 \delta\bar{\nu}_1).$$

Passons maintenant à $\Delta\gamma_1'$; nous avons

$$\gamma_1' = C_1 a' + C_2 b' + \bar{C}_3 \gamma_0'$$

et

$$C_1 = -\frac{i}{2} \int^t (b p_1 + b' q_1 + b'' r_1)\, dt + \bar{C}_1.$$

La fonction sous le signe somme est de la forme

$$e^{-i(\lambda u+\nu)} \left\{ P_1(t) + \left[\frac{da_1}{dt}\right] Q_1(t) \right\},$$

où $P(t)$ est une fonction périodique du temps de la période τ.

Ainsi

$$C_1 = e^{-i(\lambda u+\nu)} \left\{ \bar{P}_1(t) + \left[\frac{da_1}{dt}\right] \bar{Q}_1(t) \right\} + \bar{C}_1,$$

où $\bar{P}_1(t)$ est aussi une fonction périodique; de même

$$C_2 = e^{i(\lambda u+\nu)} \left\{ \bar{P}_2(t) + \left[\frac{da_1}{dt}\right] \bar{Q}_2(t) \right\} + \bar{C}_2.$$

En observant que a' contient le facteur $e^{i(\lambda u+\nu)}$, b' le facteur $e^{-i(\lambda u+\nu)}$, et que γ_0' est une fonction périodique, nous voyons que γ_1' a la forme

$$\gamma_1' = \bar{C}_1 a' + \bar{C}_2 b' + \bar{C}_3 \gamma_0' + \left[\frac{da_1}{dt}\right] A_1(t) + \text{fonction périodique}$$

et de même

$$\gamma_1'' = \bar{C}_1 a'' + \bar{C}_2 b'' + \bar{C}_3 \gamma_0'' + \left[\frac{da_1}{dt}\right] A_2(t) + \text{fonction périodique}.$$

Quand t augmente avec τ, a' et a'' reprennent leurs valeurs initiales multipliées par un certain facteur e^m, et b' et b'' deviennent multipliées par e^{-m}, de sorte que nous aurons

$$\Delta\gamma_1' = \delta\bar{C}_1\, a_0' (e^m - 1) + \delta\bar{C}_2\, b_0' (e^{-m} - 1) + \bar{A}_1 \left[\frac{da_1}{dt}\right],$$

$$\Delta\gamma_1'' = \delta\bar{C}_1\, a_0'' (e^m - 1) + \delta\bar{C}_2\, b_0'' (e^{-m} - 1) + \bar{A}_2 \left[\frac{da_1}{dt}\right].$$

Par conséquent, nous aurons, en introduisant la valeur de $\left[\dfrac{da_1}{dt}\right]$,

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} o &= \Delta x_1 = \tau \frac{B-C}{A} \bar{q}_0 \bar{r}_0 (M_3 \delta\bar{\lambda}_1 + N_3 \delta\bar{\nu}_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \mu(\ldots)_2 + \ldots, \\ o &= \Delta y_2 = \qquad \bar{A}_1 (M_3 \delta\bar{\lambda}_1 + N_3 \delta\bar{\nu}_1) + \delta\bar{C}_1 a'_0 (e^m - 1) + \delta\bar{C}_2 b'_0 (e^{-m} - 1) + \mu(\ldots)_2 + \ldots, \\ o &= \Delta y_3 = \qquad \bar{A}_2 (M_3 \delta\bar{\lambda}_1 + N_3 \delta\bar{\nu}_1) + \delta\bar{C}_1 a''_0 (e^m - 1) + \delta\bar{C}_2 b''_0 (e^{-m} - 1) + \mu(\ldots)_2 + \ldots. \end{aligned}\right.$$

En supposant

$$(35)\qquad \bar{p}_0 \gtrless o, \qquad \bar{q}_0 \lessgtr o, \qquad \bar{r}_0 \gtrless o,$$

d'après quelques transformations, ces équations deviennent

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} o &= M_3 \delta\bar{\lambda}_1 + N_3 \delta\bar{\lambda}_1 + \mu P_1(\mu, \delta\bar{\lambda}_1, \delta\bar{\nu}_1, \delta\bar{a}_1, \delta\bar{C}_1\, \delta\bar{C}_2\, \delta\bar{C}_3), \\ o &= \qquad\qquad \delta\bar{C}_1 + \mu P_2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), \\ o &= \qquad\qquad \delta\bar{C}_2 + \mu P_3(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots). \end{aligned}\right.$$

Ces équations permettent d'exprimer trois des quantités $\delta\bar{\lambda}_1$, $\delta\bar{\nu}_1$, $\delta\bar{C}_1\, \delta\bar{C}_2$ comme fonctions des trois autres de nos six inconnues et de μ. Mais nous avons vu qu'en choisissant β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, β_6 comme variables il est permis de donner à deux des β des valeurs arbitraires, et, dans le calcul formel de nos séries périodiques, nous avons posé

$$\beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = o.$$

Il résulte des formules (33) que nous devons avoir

$$\begin{aligned} o &= \delta C_1^0\, a_0 + \delta C_2^0\, b_0 + \delta\bar{C}_3\, \bar{\gamma}_0, \\ o &= \delta C_1^0\, a'_0 + \delta C_2^0\, b'_0 + \delta\bar{C}_3\, \bar{\gamma}'_0, \\ o &= \delta C_1^0\, a''_0 + \delta C_2^0\, b''_0 + \delta\bar{C}_3\, \bar{\gamma}''_0 \end{aligned}$$

ou, le déterminant des seconds membres n'étant pas nul,

$$\delta C_1^0 = \delta C_2^0 = \delta\bar{C}_3 = o.$$

Nous avons

$$C_1 = -\frac{i}{2}\int^t (b p_1 + b' q_1 + b'' r_1)\, dt + \bar{C}_1,$$

et la fonction, sous le signe somme, est une fonction linéaire de $\bar{a}_1$, $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\nu}_1$, de sorte que δC_1^0 devient une fonction linéaire et homogène de $\delta\bar{a}_1$, $\delta\bar{\lambda}_1$, $\delta\bar{\nu}_1$, $\delta\bar{C}_1$ qui, en introduisant les notations (23), deviendra

$$\delta C_1^0 = L_1\, \delta\bar{a}_1 + M_1\, \delta\bar{\lambda}_1 + N_1\, \delta\bar{\nu}_1 + \delta\bar{C}_1,$$

de même

$$\partial C_2^0 = L_2\,\partial\bar{a}_1 + M_2\,\partial\bar{\lambda}_1 + N_2\,\partial\bar{\nu}_1 + \partial\bar{C}_2.$$

Ainsi, les conditions

$$\beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$$

nous donnent deux équations linéaires et homogènes entre $\partial\bar{a}_1$, $\partial\bar{\lambda}_1$, $\partial\bar{\nu}_1$, $\partial\bar{C}_1$, $\partial\bar{C}_2$ et, de plus,

$$\partial\bar{C}_3 = 0,$$

de sorte que nous aurons enfin les équations

$$(37)\qquad \begin{cases} 0 = \ldots\ldots\ M_3\,\partial\bar{\lambda}_1 + N_3\,\partial\bar{\nu}_1 \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu P_1, \\ 0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \partial\bar{C}_1 \ldots\ldots\ldots + \mu P_2, \\ 0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \partial\bar{C}_2 + \ldots + \mu P_3, \\ 0 = L_1\,\partial a_1 + M_1\,\partial\bar{\lambda}_1 + N_1\,\partial\bar{\nu}_1 + \partial\bar{C}_1, \\ 0 = L_2\,\partial a_1 + M_2\,\partial\bar{\lambda}_1 + N_2\,\partial\bar{\nu}_1 + \ldots + \partial\bar{C}_2, \\ 0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \partial\bar{C}_3. \end{cases}$$

Le déterminant des termes linéaires des seconds membres devient, après une légère transformation,

$$(38)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \\ 0 & M_3 & N_3 \end{vmatrix}.$$

Alors, si

$$\Delta \gtrless 0,$$

nous pouvons résoudre les équations (37), et nous obtenons nos six inconnues

$$\partial\bar{a}_1,\quad \partial\bar{\lambda}_1,\quad \partial\bar{\nu}_1,\quad \partial\bar{C}_1,\quad \partial\bar{C}_2,\quad \partial\bar{C}_3$$

comme des séries en μ qui s'annulent avec μ, et, par conséquent, aussi

$$\beta_1,\quad \beta_2,\quad \beta_3$$

en fonction de μ. Ainsi, pour des valeurs assez petites de μ, il existe un et un seul système de valeurs initiales de x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, tel que la solution correspondante des équations différentielles (31) sera périodique et telle que y_1, y_2, y_3 s'annulent pour $t = 0$. Ainsi, connaissant *a priori* l'existence d'une telle solution périodique, nous savons qu'elle est développable d'après des puissances de μ; mais, d'autre part, le calcul formel que nous avons fait nous a montré qu'il ne peut exister qu'un seul système de séries $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ en μ, dont les coefficients sont des fonctions périodiques du temps et telles que y_1, y_2, y_3 s'annulent pour $t = 0$.

Par conséquent, les séries obtenues par le calcul formel sont convergentes et représentent bien la solution périodique. Le déterminant (24) D est, comme nous voyons, identique au déterminant Δ.

Au lieu de choisir

$$\beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$$

et, par conséquent,

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0 \qquad \text{pour } t = 0,$$

nous avions pu donner à deux de ces quantités des valeurs arbitraires très petites, ces quantités étant assujetties à la condition

$$F_3 = 0 \qquad \text{pour } t = 0.$$

Il existe, par conséquent, une double infinité de solutions périodiques.

Enfin, pour l'existence d'une solution périodique du système (31), il suffit que les équations (34) soient satisfaites, ou, en tenant compte de la condition (35), que les équations (36)

$$\begin{aligned}
0 &= M_3 \delta\bar{\lambda}_1 + N_3 \delta\bar{\nu}_1 + \mu P_1(\mu, \delta\bar{\lambda}_1\, \delta\bar{\nu}, \delta\bar{a}, \delta\bar{C}_1, \delta\bar{C}_2, \delta\bar{C}_3),\\
0 &= \qquad\qquad + \quad \delta\bar{C}_1 + \mu P_2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots),\\
0 &= \qquad\qquad + \quad \delta\bar{C}_2 + \mu P_3(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)
\end{aligned}$$

soient satisfaites.

Alors, si une au moins des quantités

$$M_3 = \left[\frac{1}{q_0^2}\right], \qquad N_3 = \left[\frac{1}{r_0^2}\right]$$

est différente de zéro, nous pouvons toujours résoudre ce système, et l'on s'assure facilement que cela n'arrive pas en général. On trouve, en effet,

$$M_3 = \frac{l}{B}\,\frac{\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega}\,\frac{E}{k'^2 K}, \qquad N_3 = \frac{l}{C}\,\frac{\operatorname{sn}\omega}{i \operatorname{cn}\omega}\,\frac{E - K}{K},$$

où E et K désignent comme ordinairement les intégrales complètes de la seconde et de la première espèce.

Ainsi, dans le domaine de chaque système de valeurs initiales

$$\bar{p}, \quad \bar{q}, \quad \bar{r}, \quad \bar{\gamma}, \quad \bar{\gamma}', \quad \bar{\gamma}'',$$

il existe en général une double infinité de valeurs initiales, qui correspondent à des solutions périodiques des équations (2), ayant toutes la même période pourvu que la valeur de μ soit assez petite. La période commune est la même que dans la solution périodique des équations (2) pour $\mu = 0$, les variables ayant les valeurs initiales

$$\bar{p}, \quad \bar{q}, \quad \bar{r}, \quad \bar{\gamma}, \quad \bar{\gamma}', \quad \bar{\gamma}''.$$