SUR

DEUX CLASSES DE SURFACES

QUI ENGENDRENT

PAR UN MOUVEMENT HÉLICOIDAL

UNE FAMILLE DE LAMÉ,

PAR Luigi BIANCHI.

1. Plusieurs Géomètres se sont occupés de la recherche des systèmes triples orthogonaux, dans lesquels les surfaces d'une famille sont congruentes. En particulier, M. Petot, dans une Note insérée en 1894 aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. CXVIII, p. 1409, a donné une propriété caractéristique des surfaces qui engendrent, par un déplacement hélicoïdal, une famille de Lamé. Je me permets de rappeler ici l'attention sur deux classes remarquables de ces systèmes, que j'avais rencontrées dans mes anciennes recherches sur les systèmes de Dupin, et qui semblent avoir échappé aux Géomètres dans leurs recherches postérieures.

2. Dans un Mémoire de 1884, inséré au Tome XIII, 2ᵉ série, des *Annali di Matematica,* j'ai démontré l'existence de familles de Lamé, dépendantes de deux fonctions arbitraires, composées de surfaces hélicoïdales qui ont même axe et même pas.

Le mouvement hélicoïdal, qui fait glisser les hélicoïdes sur eux-mêmes, échange entre elles les surfaces de chacune des deux autres familles, qui sont donc composées de surfaces congruentes.

La détermination de ces systèmes hélicoïdaux dépend d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, que l'on forme de la manière suivante : Prenons l'axe des hélicoïdes pour axe Oz et soit

$$z = \varphi(x, t) \tag{1}$$

l'équation de leurs profils méridiens dans le plan Oxz, en indiquant par t un paramètre qui fait, en variant, changer la forme du profil. Si l'on donne aux ∞^1 courbes (1) un mouvement hélicoïdal de pas $2\pi m$ autour de Oz, on obtiendra une famille hélicoïdale de Lamé, lorsque la fonction $\varphi(x, t)$ satisfera, par un choix convenable du paramètre t, à l'équation du second ordre

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}}{\sqrt{x^2+m^2+x^2\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}}\right]=\sqrt{x^2+m^2+x^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}.$$

3. On obtient une intégrale particulière assez remarquable de l'équation (2) en cherchant si les profils (1) peuvent être congruents par translation le long de l'axe Oz. Cela donne

$$\varphi(x, t)=\psi(x)+ht,$$

h désignant une constante et l'équation (2) exprime alors que l'hélicoïde a la courbure constante et égale à $\frac{-1}{h}$. Les surfaces des deux autres familles sont aussi des hélicoïdes congruents à courbure constante, avec même axe hélicoïdal, mais de pas différent. L'élément linéaire de l'espace, rapporté à un tel système triple orthogonal (u, v, w), prend la forme caractéristique

$$(3)\qquad ds^2=A^2\operatorname{sn}^2(u+v+w)\,du^2+B^2\operatorname{cn}^2(u+v+w)\,dv^2+C^2\operatorname{dn}^2(u+v+w)\,dw^2,$$

les constantes A, B, C étant liées au module k des fonctions elliptiques par la relation

$$\frac{k^2}{A^2}=\frac{k^2}{B^2}+\frac{1}{C^2}.$$

Pour les courbures totales K_1, K_2, K_3 des surfaces u, v, w on trouve

$$K_1=\frac{k^2}{A^2},\qquad K_2=-\frac{k^2}{B^2},\qquad K_3=-\frac{1}{C^2};$$

ainsi donc : *Toute surface hélicoïdale à courbure constante engendre, par rotation autour de son axe, une famille de Lamé et les surfaces des deux autres familles, qui complètent le système triple orthogonal, sont aussi des hélicoïdes congruents à courbure constante. Dans l'une des familles la courbure est positive, négative dans les deux autres, et la somme des trois courbures est nulle.*

Nous signalerons encore, pour le système triple orthogonal (3), le cas où

$$k^2 = 1 - \frac{A^2}{B^2};$$

alors les courbes (w) ont le rayon de première courbure constant égal à C, et les hélicoïdes $w =$ const. sont applicables sur la surface de révolution engendrée par la tractrice (pseudosphère) de telle sorte que les hélices correspondent aux parallèles.

4. J'ai emprunté les résultats précédents à mon ancien Mémoire. Je vais maintenant y ajouter quelques considérations, ayant pour but de définir, dans les systèmes triples orthogonaux en question, les surfaces des deux autres familles.

Soit S une telle surface. Elle est caractérisée par ce fait que tous les points d'une ligne de courbure C de S, dans un des systèmes, décrivent, par le mouvement hélicoïdal, des hélices qui coupent orthogonalement la courbe C. Tout le long d'une telle ligne de courbure C on devra donc avoir

$$x\,dy - y\,dx + m\,dz = 0, \tag{4}$$

c'est-à-dire, avec les notations de Monge pour la surface S,

$$dx : dy = x + mq : y - mp.$$

En portant ces valeurs de dx, dy dans l'équation différentielle des lignes de courbure, nous trouvons, comme équation caractéristique pour la surface S, l'équation d'Ampère

$$\left\{\begin{aligned} &(x + mq)^2[pqr - (1 + p^2)s] + (x + mq)(y - mp)[(1 + q^2)r - (1 + p^2)t] \\ &\qquad + (y - mp)^2[(1 + q^2)s - pqt] = 0. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Toute surface S intégrale de cette équation engendre, par déplacement hélicoïdal de pas $2\pi m$ autour de Oz, une famille de Lamé, chaque ligne de courbure, dans un système, de S engendrant un hélicoïde, qui coupe orthogonalement suivant des lignes de courbure les positions successives de S.

L'équation (5) appartient à cette classe d'équations d'Ampère, considérée par MM. Du Bois-Reymond et Lie, dont les lignes caractéristiques sur chaque surface intégrale sont les lignes de courbure ([1]). Le théorème

([1]) *Voir* Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, p. 156.

général, démontré par M. Goursat au n° 85 de son Traité, prouvant que deux caractéristiques, appartenant à des systèmes différents, déterminent une surface intégrale et une seule, reçoit ici une interprétation géométrique dans la proposition suivante :

Étant donnée une surface hélicoïdale quelconque Σ, *prenons une courbe* C, *qui coupe* Σ *orthogonalement en un point et soit trajectoire orthogonale des hélices décrites par ses points, dans le mouvement hélicoïdal de* Σ, *mais du reste arbitraire.*

Il existe une et une seule famille hélicoïdale de Lamé, comprenant Σ *et coupant orthogonalement la courbe* C.

5. Rapportons maintenant une de nos surfaces S, intégrale de (5), à ses lignes de courbure (u, v) et soit

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2$$

l'élément linéaire de S. Supposons, conformément à l'équation (4), que l'on ait la relation

$$x\frac{\partial y}{\partial u} - y\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

En posant

$$\sigma = x\frac{\partial y}{\partial v} - y\frac{\partial x}{\partial v} + m\frac{\partial z}{\partial v},$$

on trouve [1]

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \sigma\frac{\partial \log \mathrm{G}}{\partial u},$$

et, par conséquent,

$$\sigma = \mathrm{G}\,\varphi^2(v),$$

en indiquant par $\varphi(v)$ une fonction de v.

Maintenant tout point (u, v) de S décrit, par le mouvement hélicoïdal, une courbe dont les coordonnées courantes $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ d'un point seront données par les équations

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x\cos w - y\sin w,\\ \bar{y} &= x\sin w + y\cos w,\\ \bar{z} &= z + mw;\end{aligned}$$

---

[1] Il faut, pour cela, se rappeler que x, y, z sont des solutions de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2\mathrm{E}}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{2\mathrm{G}}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

d'où l'on déduit, pour l'élément linéaire de l'espace,

$$ds^2 = \overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 + \overline{dz}^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2 + (x^2 + y^2 + m^2)\,dw^2 + 2\,\mathrm{G}\,\varphi^2(v)\,dv\,dw.$$

Posons

$$v_1 = \int \frac{dv}{\varphi^2(v)} + w,$$

et nous aurons

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,\varphi^4(v)\,dv_1^2 + [x^2 + y^2 + m^2 - \mathrm{G}\,\varphi^4(v)]\,dw^2, \tag{6}$$

ce qui met en évidence le système triple orthogonal, les surfaces $u = \text{const.}$ étant les hélicoïdes.

On voit que les coefficients de l'élément linéaire (6) sont des fonctions de u et $v_1 - w$. C'est là une propriété caractéristique de ces systèmes, ainsi que je l'ai démontré dans mon Mémoire cité.

6. Je vais maintenant donner un deuxième exemple, où la surface qui engendre, par un mouvement hélicoïdal, une famille de Lamé a ses lignes de courbure planes dans un système. Ici nous pourrons trouver, par de simples quadratures, autant de ces familles que l'on voudra. Je m'appuierai pour cela sur les résultats que j'ai établis dans un Mémoire inséré en 1890 au Tome XIX des *Annali di Matematica*. Prenons une surface hélicoïdale quelconque Σ et une de ses lignes de courbure, soit C. Sur le plan normal en un point P de C à l'hélice qui passe par P, traçons une courbe arbitraire Γ, qui coupe Σ orthogonalement en P. Traçons aussi tous les plans π, qui partent de chaque point de C normalement à l'hélice issue de ce point. Il résulte, du § 1 du Mémoire cité, qu'il existe une et une seule surface S, contenant C et Γ, comme lignes de courbure, et dont les lignes de courbure d'un système sont situées dans les plans π. La détermination effective de cette surface S exige seulement des quadratures.

Notre surface S coupe orthogonalement l'hélicoïde Σ le long de la ligne de courbure C et, si nous donnons à S le mouvement hélicoïdal qui fait glisser Σ sur elle-même, les considérations du § 3 de mon Mémoire prouvent que les diverses positions de S appartiennent à une famille de Lamé. Parmi les surfaces orthogonales aux lignes de courbure planes de S, dans ses diverses positions, il n'y a que l'hélicoïde Σ qui glisse sur lui-même, par le déplacement hélicoïdal, tandis que les autres surfaces s'échangent, en général, entre elles et sont, par conséquent, congruentes. En particulier, si la courbe Γ est un cercle, toutes les lignes de courbure planes sont aussi des cercles et l'on a de la sorte un système cyclique qui admet un mouvement hélicoïdal. Ces systèmes cycliques sont les systèmes osculateurs, le long des surfaces hélicoïdales, des systèmes considérés dans les numéros précédents.

7. Un cas particulier remarquable est le suivant. Prenons une de ces surfaces hélicoïdales à courbure constante négative $-\frac{1}{C^2}$, signalées plus haut, dont les hélices sont des *horicycles*. Si nous traçons, pour tout point P de la surface, le cercle de rayon égal à C qui part de P orthogonalement à l'hélicoïde et dont le centre coïncide avec le centre de courbure géodésique de l'hélice issue de P, nous aurons un système cyclique de Ribaucour et les surfaces orthogonales aux cercles seront toutes à courbure constante égale à $-\frac{1}{C^2}$. Si l'on excepte la surface initiale, ces surfaces, dont on obtient les équations finies par des quadratures, ne sont pas hélicoïdales et sont toutes congruentes entre elles.

8. A l'exemple du numéro précédent se rattachent les considérations suivantes, par lesquelles je termine.

Considérons une surface hélicoïdale quelconque à courbure constante négative $-\frac{1}{R^2}$; si d'un point quelconque de la surface comme centre et dans le plan tangent, on décrit un cercle de rayon R, tous les cercles ainsi obtenus déterminent un système cyclique de Ribaucour et sont normaux à une famille de surfaces qui sont toutes à courbure constante $-\frac{1}{R^2}$. Ces surfaces, qui sont les complémentaires de l'hélicoïde, sont (en exceptant peut-être une surface limite) toutes congruentes entre elles à l'égard du déplacement hélicoïdal. Leurs équations en termes finis s'obtiennent au moyen des fonctions elliptiques. Ce ne sont ni des hélicoïdes, ni des surfaces d'Enneper (avec un système de lignes de courbure planes). Bien plus, elles n'ont, dans aucun des deux systèmes, leurs lignes de courbure sphériques, si l'on excepte toutefois un cas particulier remarquable, que j'ai considéré dans une Note ancienne sur les systèmes cycliques (*Giornale di Matematiche*, t. XXI), et où les équations finies de la surface dépendent seulement des fonctions exponentielles. Ce cas se présente lorsque l'on prend pour surface initiale une surface hélicoïdale de M. Dini, dont le profil méridien est une tractrice admettant l'axe hélicoïdal pour asymptote. Dans le carré de l'élément linéaire

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \sin^2\theta\, dv^2$$

de cette surface complémentaire de l'hélicoïde de M. Dini, où u, v sont les paramètres des lignes de courbure, la fonction θ est donnée par la relation

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \cot\frac{\sigma}{2}\,\frac{e^{u} - e^{\frac{u+\sin\sigma v}{\cos\sigma}}}{1 + e^{\frac{u+\sin\sigma v}{\cos\sigma}+u}},$$

en désignant par σ une constante, $2\pi\sin\sigma$ étant le pas du mouvement hélicoïdal. Les lignes de courbure $u = \text{const.}$ de cette surface sont sphériques.

Les considérations précédentes établissent la proposition suivante :

Il existe des surfaces à courbure constante négative, dont les équations en termes finis s'obtiennent au moyen des fonctions elliptiques, qui ne sont ni des hélicoïdes, ni des surfaces d'Enneper, et qui engendrent, par un déplacement hélicoïdal convenable, une famille de Lamé.

Ajoutons que les surfaces hélicoïdales à courbure constante et les surfaces d'Enneper engendrent à leur tour, par simple rotation autour de leur axe, une famille de Lamé.

Addition à la Note précédente.

Les résultats contenus dans la première partie de la Note sont susceptibles, ainsi que je viens de l'observer, de la généralisation suivante :

Au lieu d'un groupe à un paramètre de mouvements prenons un groupe à un paramètre G_1 de *transformations conformes* de l'espace. Il est alors aisé d'établir l'existence de familles de Lamé, dont tous les individus se déduisent d'une surface initiale par les transformations de ce groupe G_1.

Nous rappelons que le groupe G_{10} des transformations conformes de l'espace est engendré par les dix transformations infinitésimales ([1])

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z};\qquad z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z},\quad x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x},\quad y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y};$$

$$U = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z};$$

$$2xU - (x^2+y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial x},\quad 2yU - (x^2+y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial y},\quad 2zU - (x^2+y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Soit maintenant

$$V = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}$$

([1]) *Voir* LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen,* Bd. II, p. 459, et Bd. III, p. 137.

une transformation infinitésimale quelconque de G_{10}, c'est-à-dire une combinaison linéaire, homogène, à coefficients constants, des dix transformations précédentes, et considérons le sous-groupe G_1 engendré par V. Prenons une surface S, dont les lignes de courbure d'un système coupent à angle droit toutes les *trajectoires* du groupe G_1, issues de leurs points. Ainsi qu'on le démontre pour des considérations analogues à celles du n° 4, les surfaces de cette espèce sont les intégrales de l'équation d'Ampère

$$(a)\quad \begin{cases} (\eta + q\zeta)^2[(1+p^2)s - pqr] + (\eta + q\zeta)(\xi + p\zeta) \\ \quad \times[(1+q^2)r - (1+p^2)t] + (\xi + p\zeta)^2[pqt - (1+q^2)s] = 0. \end{cases}$$

Or je dis que, si l'on transforme une telle surface S à l'aide du groupe continu G_1, on obtiendra une famille (S) de Lamé. Il suffit, pour s'en convaincre, de remarquer que les transformations de G_1 conservent les angles et les lignes de courbure. Il s'ensuit que les surfaces (Σ) engendrées par chaque ligne de *seconde* courbure de S, soumise à la transformation continue de G_1, coupent orthogonalement, suivant des lignes de courbure, les surfaces (S). Le complément donné par M. Darboux au théorème de Dupin nous démontre alors qu'il existe une troisième famille, qui complète avec (S) et (Σ) le système triple orthogonal.

Prenons comme exemple

$$V = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + h\left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

h étant une constante. Alors les trajectoires de G_1 sont des hélices *cylindro-coniques,* c'est-à-dire des lignes loxodromiques des cônes de révolution autour de l'axe Oz, ayant leur sommet à l'origine O, et les surfaces (Σ) sont des *surfaces spirales* de M. Maurice Lévy [1]. Nous voyons ainsi que *l'on peut former des familles de Lamé (qui comprennent deux fonctions arbitraires) avec des surfaces spirales ayant même axe et même paramètre.* Puisque sur toute surface intégrale de (a) les lignes caractéristiques sont encore les lignes de courbure, on prouvera, comme au n° 4, que, pour définir une telle famille de Lamé, on peut se donner d'une manière arbitraire *une* des surfaces spirales et l'une des courbes C, qui doivent être les trajectoires orthogonales de la famille, pourvu que les trajectoires du groupe G_1 issues des points de C coupent cette courbe à angle droit.

Je terminerai en observant que les considérations générales précédentes sont aussi applicables à tout espace à courbure constante, puisqu'un espace de cette nature admet une représentation conforme sur l'espace euclidien. En particulier, nous aurons, dans tout espace à courbure constante, des familles de Lamé composées de surfaces congruentes.

---

[1] *Voir* DARBOUX, *Théorie des surfaces,* t. I, p. 108.