

---

SUR

# LA GÉOMÉTRIE DITE NON EUCLIDIENNE,

PAR M. FÉLIX KLEIN.

---

[*Math. Annalen*, Tome IV, pages 573-625 (1).]

---

TRADUIT PAR M. L. LAUGEL.

—❧—

[Les développements suivants sont relatifs à la Géométrie dite *non euclidienne* de Gauss, Lobatschewsky, Bolyaï et aux considérations qui s'y rattachent, présentées par Riemann et Helmholtz sur les fondements de notre Géométrie (2). Nous ne poursuivrons pas toutefois les spéculations philosophiques qui ont conduit aux travaux en question; notre but est surtout de présenter *les résultats mathématiques de ces recherches en tant qu'ils se rapportent à la théorie des parallèles, sous une forme nouvelle et intuitive et de rendre claire et accessible à tous l'intelligence de cet ensemble de vérités.*

La voie qui nous y conduira est la *Géométrie projective*. On peut, en effet, à l'exemple de Cayley (3), construire une métrique projective

---

(1) *Comparer* une Notice sous le même titre : *Göttinger Nachrichten*; 1871. Traduite par Hoüel dans le *Bulletin* de M. Darboux (1<sup>re</sup> série, t. II, p. 341-351); 1871. F. K.

(2) Les parties du Mémoire entre crochets sont la reproduction presque littérale de la Notice précitée des *Göttinger Nachrichten*, où j'ai copié la traduction de Hoüel pour ainsi dire sans changement. Je saisis cette occasion pour cordialement remercier M. Gérard, professeur au lycée de Lyon, d'avoir bien voulu m'aider dans la correction des épreuves.

L. L.

(3) CAYLEY, *Sixth Memoir upon quantics* (*Phil. Transact.*; 1859). — *Comparer* la traduction Fiedler des *Sections Coniques* de Salmon (2<sup>e</sup> édit., Leipzig, Teubner; 1866), ou aussi FIEDLER, *Les éléments de la nouvelle Géométrie et l'Algèbre des formes binaires*. Leipzig; 1862.

F. K.

générale dans l'espace, relative à une surface du second degré choisie à volonté comme surface dite *fondamentale*. Cette détermination métrique projective fournit, suivant l'espèce de surface du second degré employée, une image pour les différentes théories des parallèles établies dans les travaux précités. Mais elle n'est pas seulement une image pour ces théories, elle en révèle en outre la nature intime.]

Je commencerai par l'analyse rapide des théories des parallèles en question (paragraphe I). Je m'occuperai ensuite de la métrique de Cayley, que je développe simultanément et corrélativement avec les théories des parallèles des diverses espèces. Je suis d'autant plus volontiers entré dans des considérations détaillées que les recherches de Cayley sur ces sujets ne semblent pas suffisamment connues et, de plus, parce que son point de vue n'est pas le même que le mien. Pour Cayley, il s'agit de démontrer que la Géométrie métrique habituelle (euclidienne) peut être présentée comme un cas particulier de la Géométrie projective. Dans ce but il établit la métrique projective générale et montre alors que de ses formules procèdent les formules de la Géométrie métrique habituelle, lorsque la surface fondamentale dégénère en une section conique déterminée, le cercle imaginaire à l'infini. Dans notre étude, au contraire, il s'agit de présenter le plus clairement possible le *contenu géométrique* de la métrique générale de Cayley et de reconnaître non seulement comment celle-ci nous fournit par une particularisation convenablement choisie la Géométrie métrique euclidienne, mais encore et surtout qu'elle a tout à fait les mêmes relations avec les diverses Géométries métriques qui dérivent des diverses théories précitées des parallèles.

Cet exposé donne lieu encore à certaines considérations nouvelles, parmi lesquelles je compte notamment, abstraction faite des détails, la manière dont la métrique de Cayley est basée sur la considération de plusieurs transformations successives dans l'espace. Ensuite je mets en évidence la forme sous laquelle se présente aux paragraphes VII et XIV la définition de la mesure de la courbure.

D'ailleurs, la définition que j'établis pour la métrique projective est un peu plus générale que celle qui est donnée par Cayley lui-même.

Pour déterminer la distance de deux points, je les suppose joints par une ligne droite. Celle-ci coupe la surface fondamentale en deux autres points qui, avec les deux points donnés, forment un certain rapport anharmonique. *Le produit du logarithme de ce rapport anharmonique par une con-*

stante  $c$ , arbitraire, mais choisie une fois pour toutes, c'est ce que je nomme la distance des deux points. Pour déterminer l'angle de deux plans, je mène par leur intersection les deux plans tangents à la surface fondamentale. Ceux-ci, avec les deux plans donnés, forment un certain rapport anharmonique. Le produit du logarithme de ce rapport anharmonique par une autre constante  $c'$ , arbitraire, mais choisie une fois pour toutes, c'est ce que je nomme l'angle des deux plans. Les définitions géométriques ainsi établies coïncident avec les définitions analytiques données par Cayley, pourvu que l'on attribue à  $c$  et  $c'$  des valeurs particulières, c'est-à-dire qu'on les fasse toutes deux égales à  $\frac{\sqrt{-1}}{2}$  (1). Mais, dans ce qui suit, il est essentiel de conserver les constantes  $c$  et  $c'$ , car, par exemple,  $c$  correspond précisément à la constante caractéristique qui se présente dans la Géométrie non euclidienne (comparez aussi paragraphe IV).

## I.

## LES DIFFÉRENTES THÉORIES DES PARALLÈLES.

[L'axiome XI d'Euclide est, comme on sait, équivalent à ce théorème que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits. Or Legendre a réussi à démontrer (2) que la somme des angles d'un triangle ne peut être plus grande que deux angles droits; il a fait voir, de plus, que, si dans un seul triangle la somme des angles vaut deux droits, il en sera de même pour la somme des angles de tout triangle. Mais il n'a pas pu prouver que la somme des angles ne saurait être moindre que deux droits.

Une série d'idées analogues semble avoir servi de point de départ aux recherches de Gauss sur le même objet. Gauss avait bien compris qu'il était réellement impossible de démontrer le théorème de l'égalité de la

---

(1) Cayley prend aussi quelquefois le *quadrant* comme unité; cela revient à prendre  $c$  et  $c'$  tous deux égaux à  $\frac{\sqrt{-1}}{\pi}$ . F. K.

(2) Cette démonstration, comme celle que Lobatschewsky a donnée de la même proposition, suppose que la longueur de la droite est infinie. Si l'on renonce à admettre cette hypothèse (voir le texte ci-après), alors les démonstrations cessent de subsister, comme on peut le voir clairement en remarquant que sans cela elles devraient avoir également lieu dans la géométrie de la sphère. F. K.

somme des angles d'un triangle à deux angles droits; que l'on pouvait au contraire construire une géométrie conséquente avec elle-même et dans laquelle cette somme serait moindre. Il appelait cette géométrie la *Géométrie non euclidienne* <sup>(1)</sup>; il s'est beaucoup occupé de ce sujet, mais malheureusement, sauf quelques simples indications, il n'a rien publié là-dessus. Dans cette géométrie non euclidienne, on rencontre une certaine constante caractéristique pour la métrique de l'espace. En attribuant à cette constante une valeur infinie, on obtient la géométrie euclidienne ordinaire. Mais, si la constante a une valeur finie, on trouve une géométrie différente, dans laquelle ont lieu, par exemple, les lois suivantes :

La somme des angles d'un triangle est moindre que deux droits et, d'autant moindre, que l'aire du triangle est plus grande. Dans un triangle dont les sommets sont à une distance infinie, la somme des angles est égale à zéro. Par un point hors d'une droite on peut mener deux parallèles à cette droite, c'est-à-dire deux lignes qui rencontrent cette droite, d'un côté ou de l'autre, en des points infiniment éloignés. Les droites passant par ce même point et situées entre les deux parallèles ne coupent nulle part la droite donnée.

Lobatschewsky, professeur de Mathématiques à l'Université de Kazan <sup>(2)</sup>, et quelques années plus tard le mathématicien hongrois Johann Bolyai <sup>(3)</sup>, ont été conduits, chacun de leur côté, à la même géométrie non euclidienne et ont traité le même sujet dans des Ouvrages détaillés. Cependant ces travaux étaient restés à peu près ignorés jusqu'au moment où la publication, faite en 1862, de la Correspondance de Gauss et de Schumacher, attira sur eux l'attention des géomètres. Depuis lors s'est répandue la con-

(1) Comparez SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN, *Gauss zum Gedächtniss*, p. 81, ainsi que quelques Lettres de la Correspondance de Gauss et de Schumacher. F. K.

Ces Lettres ont été traduites par Hoüel, en appendice à sa traduction de Bolyai (Paris; Hermann).

(2) *Messenger de Kazan*; 1829. — *Mémoires de l'Université de Kazan*; 1836-1838. — *Journal de Crelle*, t. 17 (*Géométrie imaginaire*). — *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*. Berlin; 1840. Hoüel a traduit ce Mémoire (*Mémoires de Bordeaux*, t. IV; 1866). Cette traduction a été reproduite par l'éditeur Hermann. Paris. — *Pangéométrie*. Kazan; 1855. (Traduit en italien, t. V du *Giornale di Matematiche*; 1867.) F. K.

(3) Dans un appendice à l'Ouvrage de son père, WOLFGANG BOLYAI, *Tentamen juventutem studiosam...* (*Maros-Vasarhely*; 1833), traduit en italien. (*Giornale di Matematiche*, t. VI; 1868). Également traduit par Hoüel (*Mémoires de Bordeaux*, t. V, et Hermann, Paris). F. K.

viction que dès à présent la théorie des parallèles est complète, c'est-à-dire qu'elle est acceptée avec son indétermination réelle.

Mais cette conception a dû subir une modification essentielle depuis qu'a paru, en 1867, après la mort de Riemann, son *Habilitationschrift : Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie* <sup>(1)</sup> et que peu de temps après dans les *Göttinger Nachrichten* (n° 6; 1868), Helmholtz a publié ses recherches *Sur les faits qui servent de base à la Géométrie* <sup>(2)</sup>.

Dans son écrit, Riemann fait observer que, de ce que l'espace est illimité, il ne s'ensuit pas forcément qu'il soit infini. Au contraire, on pourrait concevoir sans tomber en contradiction avec notre intuition, qui ne s'applique jamais qu'à une portion finie de l'espace, que l'espace fût fini et rentrant sur lui-même; la géométrie de notre espace se présenterait alors comme la géométrie sur une sphère à trois dimensions placée dans une *multiplicité* <sup>(3)</sup> à quatre dimensions.

Cette conception, qui se trouve aussi chez Helmholtz, entraînerait cette conséquence que la somme des angles d'un triangle (comme dans le triangle sphérique ordinaire) serait plus grande <sup>(4)</sup> que deux angles droits, et d'autant plus grande que le triangle aurait une plus grande aire. La ligne droite n'aurait plus alors de points à une distance infinie et, par un point donné, on ne pourrait mener absolument aucune parallèle à une droite donnée.

Une géométrie fondée sur ces conceptions occuperait, à côté de la géométrie euclidienne ordinaire, une place toute semblable à la géométrie de Gauss, de Lobatschewsky et de Bolyaï, dont nous parlions tout à l'heure. Tandis que cette dernière attribue à la droite deux points à l'infini, cette autre géométrie ne lui en attribue aucun (c'est-à-dire qu'elle lui attribue deux points imaginaires à l'infini)].

Conformément à un mode de s'exprimer en usage dans la nouvelle géométrie, nous désignerons dans ce qui va suivre ces trois géométries respectivement sous les noms de géométrie *hyperbolique*, *elliptique* <sup>(5)</sup>

(1) Traduit par Hoüel. Paris, Hermann, reproduit dans la traduction des *Œuvres mathématiques de Riemann*, p. 280. Paris, Gauthier-Villars et fils (sous presse).

(2) *Ibid.* Paris, Hermann.

(3) *Mannigfaltigkeit* = multiplicité = varietas (Gauss). (Note de Hoüel.)

(4) Les démonstrations contraires de Legendre et de Lobatschewsky supposent, comme nous l'avons déjà remarqué, que l'espace est infini.

F. K.

(5) La géométrie sphérique ordinaire doit être appelée, d'après ceci, *une géométrie elliptique*.

F. K.

ou *parabolique*, selon que les deux points à l'infini de la droite sont réels, imaginaires ou coïncidents <sup>(1)</sup>.

Ces trois espèces de géométrie se présentent dans ce qui suit comme des cas particuliers de la métrique générale de Cayley. On est conduit à la géométrie parabolique (habituelle) lorsque l'on fait dégénérer la surface fondamentale de la métrique de Cayley en une section conique imaginaire. Si l'on prend pour surface fondamentale une surface proprement dite du second degré, mais qui soit imaginaire, on obtient la géométrie elliptique. Enfin, l'on obtient la géométrie hyperbolique, lorsque l'on choisit pour surface fondamentale une surface réelle, mais non réglée, du second degré et que l'on s'en tient à la considération de points situés à l'intérieur de cette surface.

Je m'occupe alors d'établir la métrique générale projective de Cayley, d'abord pour les figures élémentaires à une dimension; j'examine aussi chaque fois comment les notions de la géométrie elliptique et hyperbolique sont comprises dans les notions projectives.

On peut encore indiquer ici la corrélation qui existe entre les êtres géométriques dont nous parlons et les considérations qui se rapportent à la détermination de la mesure dans des multiplicités analytiques à un nombre quelconque de dimensions.

M. Beltrami a montré le premier <sup>(2)</sup> comment la partie planimétrique de la géométrie hyperbolique (non euclidienne) trouve son interprétation dans la métrique ordinaire des surfaces à courbure constante négative. Dans la géométrie hyperbolique le plan est donc une multiplicité à deux dimensions à courbure constante négative. Mais lorsqu'eut paru le travail précité de Riemann où, pour la première fois, la conception de la mesure de la courbure fut définie pour des multiplicités d'ordre plus élevé, Beltrami <sup>(3)</sup> étendit ses recherches à des espaces à un nombre quelconque de dimensions.

(1) On désigne, par exemple, les points d'une surface sous le nom de *hyperboliques*, ou *elliptiques*, ou *paraboliques*, selon que les tangentes principales sont respectivement réelles ou imaginaires, ou coïncidentes. Steiner nomme les involutions hyperboliques, ou elliptiques, ou paraboliques, suivant que les éléments doubles sont respectivement réels ou imaginaires, ou coïncidents.

F. K.

(2) *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* (*Giornale di Matematiche*, t. VI; 1868). Traduit par Houël. (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. VI.)

(3) *Theoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*. (*Annali di Matematica*, serie 2, t. II; 1868-1869.) Traduction Houël. (*Annales de l'École Normale*, t. IV).

Il fit voir en particulier que la géométrie hyperbolique attribuée à l'espace habituel (à trois dimensions) une courbure constante négative et que faire l'hypothèse d'une courbure constante négative revient à faire l'hypothèse d'une géométrie hyperbolique. La géométrie elliptique, au contraire, ou, comme il la nomme la *Géométrie sphérique* <sup>(1)</sup> (la géométrie ordinaire sphérique en fait, en effet, partie), attribuée à l'espace une courbure constante positive. Enfin, dans la géométrie parabolique, la courbure sera encore constante mais égale à zéro.

Mais puisque, comme nous le verrons plus loin, la métrique générale de Cayley, dans l'espace à trois dimensions, comprend les géométries hyperbolique, elliptique et parabolique, on est conduit à penser que, pour un nombre quelconque de dimensions, la métrique générale de Cayley et l'hypothèse d'une courbure constante sont des notions équivalentes. Et c'est ce qui a lieu en effet; mais nous n'aborderons pas ici ce sujet. Par conséquent, pour les espaces à courbure constante, nous pouvons, sans autre discussion, employer les formules que nous allons établir dans ce qui suit pour les cas de deux et trois dimensions. Il en résulte encore que les lignes les plus courtes peuvent être représentées, comme le sont les lignes droites, par des équations linéaires <sup>(2)</sup>; les éléments situés à l'infini forment une surface du second degré, et ainsi de suite. Ce sont là des résultats qui ont été déjà démontrés par d'autres moyens par Beltrami <sup>(3)</sup>, et il n'y a qu'un pas à faire pour passer des formules de Beltrami à celles de Cayley.

Nous pouvons ici en même temps indiquer la corrélation qui existe entre ces questions et les recherches générales de MM. Christoffel <sup>(4)</sup> et Lipschitz <sup>(5)</sup> sur les expressions différentielles.

<sup>(1)</sup> Par opposition à la géométrie sphérique, Beltrami désigne la géométrie hyperbolique sous le nom de *pseudo-sphérique*.

<sup>(2)</sup> En particulier toutes les méthodes et considérations projectives subsistent dans les espaces à courbure constante. F. K.

<sup>(3)</sup> Beltrami l'a fait d'abord pour les surfaces à courbure constante, dans un Mémoire : *Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie, etc.* (*Annali di Matematica*, seria I, t. VII; 1866). Il l'a fait ensuite d'une manière générale dans le Mémoire précité (*Theoria generale, etc.*). F. K.

<sup>(4)</sup> *Journal de Crelle*, t. 70, p. 46.

<sup>(5)</sup> *Journal de Crelle*, t. 70, p. 71, et t. 72, p. 1. F. K.

## II.

## GÉNÉRALITÉS SUR LA MÉTRIQUE DANS L'ESPACE.

On sait que toutes les déterminations métriques dans l'espace peuvent se ramener à deux problèmes fondamentaux : la détermination de la *distance de deux points* et la détermination de *l'inclinaison mutuelle de deux droites qui se coupent*; c'est ainsi que les instruments dont se sert le géomètre praticien ne mesurent, en définitive, que des *segments de droites* ou des *angles*; tous les autres éléments à déterminer peuvent être évalués au moyen des premiers.

Au sens de la Géométrie projective, on peut dire que ces deux problèmes fondamentaux constituent *le problème de la mesure dans les figures à une dimension*. La mesure de la distance de deux points correspond à la métrique des ponctuelles rectilignes; la mesure de l'inclinaison mutuelle de deux droites correspond à la métrique des faisceaux de rayons dans le plan. Enfin la métrique relative au faisceau de plans n'est pas différente de celle relative au faisceau de rayons dans le plan, puisque l'inclinaison de deux plans doit être regardée comme l'inclinaison des deux droites concourantes que l'on obtient en coupant les deux plans proposés par un plan perpendiculaire à leur intersection. Ainsi, il ne reste à considérer que la métrique relative à la série ponctuelle rectiligne et la métrique relative au faisceau de rayons dans le plan; c'est ce que nous allons d'abord étudier.

En tant que nous regardons la ponctuelle rectiligne et le faisceau de rayons dans le plan comme situés dans le plan, ils sont associés par le principe de dualité. Mais il n'en est pas de même de leurs métriques respectives, qui sont au contraire essentiellement différentes; par exemple : la distance de deux points est une fonction algébrique des coordonnées, l'angle de deux droites en est une fonction transcendante (goniométrique).

La longueur d'une ponctuelle rectiligne illimitée est infiniment grande; au contraire, la somme des angles dans un faisceau de rayons est finie.

Un segment de droite est, au signe près, déterminé d'une manière uniforme, un angle ne l'est qu'aux multiples près d'une période. De même, le segment de droite peut être divisé d'une façon simple en un nombre quelconque de parties égales; pour un angle, au contraire, cette division n'est possible que dans le cas de la bissection, etc.

Malgré ces différences, les deux sortes de détermination métrique ont quelque chose de commun, et cette circonstance permet de les considérer comme des cas particuliers d'une métrique plus générale. Ces caractères communs sont de deux sortes :

1° Les deux métriques jouissent de la propriété que les différences de mesure (Maassunterschied) <sup>(1)</sup> s'ajoutent entre elles <sup>(2)</sup>; je veux dire par cela que la différence de mesure  $\overline{12}$ , augmentée de la différence de mesure  $\overline{23}$ , est égale à la différence de mesure  $\overline{13}$ , autrement dit  $\overline{12} + \overline{23} = \overline{13}$ . Cette possibilité d'additionner les différences de mesure est une loi générale qui nous est donnée *a priori* pour toutes les déterminations métriques dans les multiplicités à une dimension <sup>(3)</sup>. Cette loi a, pour la détermination de la fonction des coordonnées qui doit représenter la différence de mesure, la valeur d'une équation fonctionnelle. A cette possibilité d'additionner les différences de mesure, nous pouvons adjoindre cette propriété, qui se présente également pour toutes les déterminations métriques dans les multiplicités à une dimension, que la distance d'un élément à cet élément lui-même est égale à zéro :  $\overline{11} = 0$ . De cette propriété et de la précédente, il résulte en particulier que  $\overline{12} = -\overline{21}$ .

2° Les déterminations métriques que nous traiterons ici ont encore une seconde propriété qui les rend susceptibles d'être appliquées à la mesure dans l'espace. Cette propriété consiste en ce qu'elles ne sont pas altérées par un déplacement dans l'espace. En particulier, l'angle de deux droites d'un faisceau ne change pas quand on imprime au faisceau, dans son plan, une rotation autour de son centre; il en est de même de la distance de deux points d'une droite lorsque celle-ci glisse sur elle-même.

Les deux propriétés précédentes suffisent pour caractériser les deux déterminations métriques. Elles se montrent aussi de la manière la plus claire lorsque l'on envisage la manière dont on exécute les mesures effectives. A cet effet, l'on emploie pour la mesure des angles comme des seg-

(1) « Nous avons choisi ce mot pour réunir sous une appellation commune les expressions *distance entre deux points, angle de deux rayons ou plans, etc.* » (*Cours lithographié* de M. Klein à l'Université de Göttingue, *Sur la Géométrie non euclidienne*; 1889-90. 2<sup>e</sup> édition, p. 65; 1893.)

L. L.

(2) Ceci, naturellement, dans la mesure des angles, n'est valable que si l'on n'ajoute pas aux angles  $\overline{12}$ , ... des multiples de  $2\pi$  indépendants les uns des autres.

F. K.

(3) Il en est de même par exemple lorsque nous mesurons le temps, la pesanteur ou des intensités.

F. K.

ments de droites une échelle d'éléments équidistants que l'on applique d'une manière quelconque sur l'objet à mesurer (<sup>1</sup>). Le nombre des divisions de l'échelle, comprises entre deux éléments dont il s'agit de déterminer la différence de mesure, nous donne précisément la différence de mesure cherchée. Nous ne discuterons pas ici comment le nombre de ces subdivisions de l'échelle n'est pas en général entier, ni même rationnel, ni comment, par conséquent, la différence de mesure de deux éléments ne peut jamais être déterminée exactement, mais seulement avec une certaine approximation. Au contraire, nous allons examiner de plus près comment les deux propriétés précédentes de la détermination métrique se manifestent dans les opérations de mesure décrites ci-dessus.

La première propriété, celle de la possibilité d'additionner les différences de mesure, résulte immédiatement de ce que nous prenons tout simplement pour différence de mesure de deux éléments, le nombre des divisions de l'échelle comprises entre eux. La seconde propriété résulte de ce que nous trouvons toujours le même nombre comme différence de mesure, quelle que soit la manière dont nous appliquons l'échelle sur la figure à mesurer. A cet effet, l'échelle doit jouir de cette propriété de se recouvrir elle-même, lorsqu'on la superpose à elle-même d'une façon quelconque, ou, en d'autres termes, si l'on fait éprouver à l'échelle un déplacement pendant lequel la ponctuelle rectiligne ou le faisceau de rayons qui la portent restent inaltérés et pendant lequel en même temps une division de l'échelle se transforme en la suivante, chaque division de l'échelle doit se transformer en celle qui la suit.

Cette dernière propriété de l'échelle permet de *la construire au moyen d'une succession de déplacements*.

En particulier, pour construire une échelle sur une ponctuelle rectiligne, on prendra deux points (1) et (2) comme extrémités d'une première division de l'échelle, puis on déplacera la droite sur elle-même jusqu'à ce que (1) tombe en (2). Alors (2) vient en un point (3) qui devra former le troisième point de division. Si l'on déplace encore la droite d'une quantité

(<sup>1</sup>) Pour la mesure de segments de droites, ainsi qu'il est dit dans le texte, on emploie une échelle de points équidistants situés sur une droite, une règle à mesurer [Maasstab]. Mais, dans la mesure des angles, on ne se sert pas d'une échelle d'angles, mais d'un cercle divisé (rapporteur), qui supplée à une échelle d'angles. Mais dans le texte, nous nous en tenons à la conception d'une échelle d'angles, parce qu'au sens de la Géométrie projective le cercle n'est pas une figure élémentaire.

égale, (1) vient en (3) et (3) en un nouveau point de division (4), et ainsi de suite.

De même si l'on veut construire une échelle sur un faisceau de rayons dans le plan, on prendra avant tout deux rayons (1) et (2) comme rayons limites pour la première division de l'échelle (1).

Une rotation du faisceau dans son plan, autour de son centre, amènera (1) dans la position de (2) et (2) occupera une position (3), qui sera celle du troisième rayon de division, et ainsi de suite.

Maintenant, le déplacement d'une ponctuelle ou la rotation d'un faisceau de rayons rentrent tous deux, au point de vue de la Géométrie projective, dans la notion plus générale d'une *transformation linéaire qui transforme en elle-même la figure élémentaire en question*.

On est ainsi amené directement à la conception d'une construction généralisée de l'échelle pour la ponctuelle ou pour le faisceau de rayons et, en même temps, à une détermination métrique généralisée relative à ces figures élémentaires, qui comprend, comme cas particulier, les constructions et les déterminations métriques que l'on emploie dans la pratique. En effet, on est conduit ainsi à se construire une échelle, soit pour la ponctuelle, soit pour le faisceau de rayons, en appliquant plusieurs fois de suite à un élément de la figure dont il s'agit, une transformation linéaire arbitraire transformant la figure en elle-même. L'élément choisi primitivement donne ainsi naissance à une série d'éléments qui constitue précisément l'échelle. On prend, comme différence de mesure de deux éléments, le nombre de divisions de l'échelle que l'on trouve entre ces deux éléments (2).

Ayant ainsi défini la différence de mesure des éléments, distants entre eux d'un nombre entier de divisions de l'échelle, en subdivisant à l'infini les divisions de l'échelle (*voir* les paragraphes suivants), on pourra établir la différence de mesure de deux éléments qui sont séparés par un nombre

(1) Dans la pratique, on choisit pour division de l'échelle un angle tel que l'angle droit soit formé par un nombre entier de divisions, considération dont nous n'avons pas à nous occuper ici.

F. K.

(2) D'après cela, la nature des transformations linéaires à employer est soumise à des restrictions. En premier lieu, la transformation linéaire, qui transforme un premier élément réel en un second élément réel, doit être réelle. Il est, de plus, nécessaire que les éléments de division de l'échelle se succèdent dans l'ordre où ils prennent naissance, par exemple que le premier et le second élément ne soient pas séparés par le troisième et le quatrième... Comparer la suite du texte.

F. K.

rationnel de divisions de l'échelle; enfin, si l'on admet la notion de limites irrationnelles, on pourra parler de la différence de mesure de deux éléments quelconques.

Ce concept généralisé de la détermination métrique dans les figures élémentaires à une dimension sera traité avec plus de détails dans les paragraphes suivants. On obtiendra alors autant de déterminations métriques essentiellement différentes qu'il existe de transformations linéaires essentiellement différentes pour les figures élémentaires à une dimension. Or ces transformations sont seulement de deux espèces différentes :

- 1° Celles où deux éléments (réels ou imaginaires) de la figure élémentaire restent fixes (cas général);
- 2° Celles où un seul élément (double) de la figure élémentaire reste fixe (cas particulier).

Par conséquent, il n'y a de même que deux espèces essentiellement différentes de déterminations métriques projectives pour les figures élémentaires à une dimension : l'une, *générale*, qui fait usage des transformations de la première espèce; l'autre, *particulière*, qui fait usage de celles de la deuxième espèce.

La détermination métrique habituelle pour le faisceau de rayons est de la première espèce. En effet, pendant une rotation du faisceau dans son plan autour de son centre, deux rayons distincts restent inaltérés. Ce sont ceux qui passent par les deux points circulaires imaginaires à l'infini.

Au contraire, la métrique habituelle relative à la ligne droite est de la deuxième espèce. En effet, pour un déplacement de celle-ci sur elle-même, un seul de ses points, d'après l'hypothèse de la Géométrie parabolique ordinaire, reste fixe : c'est le point à distance infinie.

Ainsi nous voyons déjà comment, dans l'hypothèse de la Géométrie hyperbolique ou elliptique, la détermination métrique relative à la ligne droite perd le caractère particulier que lui attribue la Géométrie parabolique. La Géométrie hyperbolique attribue aux droites deux points réels à l'infini, la Géométrie elliptique deux points imaginaires à l'infini. Et, comme conséquence, ces deux Géométries présentent un déplacement d'une droite sur elle-même, comme une transformation linéaire générale qui laisse inaltérés deux points distincts, les deux points à distance infinie. Nous analyserons cela plus en détail dans la suite.

## III.

LA DÉTERMINATION MÉTRIQUE PROJECTIVE GÉNÉRALISÉE, RELATIVE AUX FIGURES  
A UNE DIMENSION.

Nous voulons ici considérer d'abord seulement le cas général de la détermination métrique projective précédemment exposée, savoir le cas où il y a deux éléments distincts qui restent inaltérés dans la transformation linéaire qui engendre l'échelle. Nous les désignerons sous le nom d'*éléments fondamentaux* et nous les prendrons comme éléments de base d'un système de coordonnées où l'on déterminera chaque élément nouveau au moyen du rapport de deux variables homogènes  $x_1 : x_2$ . Nous pouvons désigner la valeur de ce rapport tout simplement par  $z$ , en sorte que  $z = 0$  et  $z = \infty$  représentent les deux éléments fondamentaux.

Alors la transformation linéaire que nous voulons prendre comme point de départ pour la construction de l'échelle est donnée par une équation de la forme suivante :

$$z' = \lambda z,$$

où  $\lambda$  est une constante déterminant la transformation (1). Appliquons maintenant cette transformation plusieurs fois de suite à un élément pris arbitrairement,  $z = z_1$ ; nous obtenons ainsi une série d'éléments

$$z_1, \lambda z_1, \lambda^2 z_1, \lambda^3 z_1, \dots,$$

et cette série d'éléments est notre échelle. Cette échelle, comme on pouvait le voir *a priori*, est transformée en elle-même par la transformation génératrice.

Désignons maintenant *la division de l'échelle sous le nom d'unité de distance*, alors les distances des éléments  $z_1, \lambda z_1, \lambda^2 z_1, \lambda^3 z_1, \dots$  à l'élément  $z_1$ , seront respectivement égales à 0, 1, 2, 3, ...

Ensuite, pour pouvoir mesurer la distance d'autres éléments à l'élé-

---

(1) Ce  $\lambda$ , d'après une remarque faite précédemment, ne peut être pris tout à fait quelconque, car, dans la construction de l'échelle, nous ne considérons que les éléments réels de la figure élémentaire. D'abord  $\lambda$  doit être soumis à cette restriction que, par l'effet de la transformation  $z' = \lambda z$ , les éléments réels deviennent des éléments réels (indépendamment de la réalité ou de la non-réalité des deux éléments fondamentaux  $z = 0, z = \infty$ ).

Ensuite  $\lambda$  (voir la suite du texte) doit être positif pour des éléments fondamentaux réels.

ment  $z_1$ , nous subdiviserons les divisions de l'échelle, par exemple, d'abord, en  $n$  parties (égales). On y arrive en appliquant  $(n - 1)$  fois à un élément limite d'une division de l'échelle la transformation linéaire qui, répétée  $n$  fois, reproduit la transformation  $z' = \lambda z$ , c'est-à-dire, par conséquent, la transformation

$$z' = \lambda^{\frac{1}{n}} z.$$

Ici l'on doit choisir <sup>(1)</sup> la racine  $n^{\text{ième}}$ , en sorte que l'élément  $\lambda^{\frac{1}{n}} z$  vienne se placer entre les éléments  $z$  et  $\lambda z$ .

Si l'on a exécuté cette subdivision, on peut alors assigner la distance à  $z_1$  de tous les éléments dont la coordonnée  $z$  peut se ramener à la forme suivante

$$z = \lambda^{\alpha + \frac{\beta}{n}} z_1,$$

$\alpha$  et  $\beta$  désignant des nombres entiers. Cette distance sera précisément égale à l'exposant  $\alpha + \frac{\beta}{n}$ .

Si l'on conçoit maintenant la subdivision de l'échelle prolongée indéfiniment, on reconnaît que l'on doit, d'une manière générale, regarder comme distance d'un élément  $z$  à l'élément  $z_1$  l'exposant  $\alpha$  que l'on doit attribuer à  $\lambda$  pour que l'on ait  $\lambda^\alpha z_1 = z$ . Ici  $\alpha$  est un nombre quelconque rationnel ou irrationnel.

Puisque l'on a évidemment  $\alpha = \log \frac{z}{z_1} : \log \lambda$ , nous pouvons exprimer ce résultat comme il suit :

*La distance d'un élément  $z$  à l'élément  $z_1$  est égale au logarithme du quotient  $\frac{z}{z_1}$  divisé par la constante  $\log \lambda$ .*

Mais, dans ce que nous venons de dire, l'élément  $z_1$  n'a été choisi comme élément initial de l'échelle que fortuitement et n'a pas été caractérisé

<sup>(1)</sup> La raison précise de cette détermination s'aperçoit le mieux si l'on prend pour exemple la division de la circonférence. Soit, par exemple, à subdiviser sur une circonférence une division de l'échelle, par exemple un degré, c'est là, d'abord, un problème indéterminé, puisque la division de l'échelle n'est donnée qu'aux multiples près de la période  $2\pi$ . Cette indétermination est levée par l'adoption de la convention du texte. Pour les éléments fondamentaux réels, il suffit simplement de définir  $\lambda^{\frac{1}{n}}$  comme étant la racine  $n^{\text{ième}}$  réelle de  $\lambda$ . Mais pour qu'une telle racine existe, il faut, ainsi que nous l'avons déjà dit, que  $\lambda$  soit positif. Pour  $\lambda$  négatif, on obtiendrait pour l'échelle une série d'éléments, dont les éléments ne se succéderaient pas dans l'ordre même où ils sont engendrés. F. K.

autrement; on peut, au moyen d'une transformation linéaire qui n'altère ni les deux éléments fondamentaux, ni, par conséquent, la détermination métrique dans sa totalité, transporter cet élément  $z$ , partout où l'on voudra. Par conséquent,

*La distance entre deux éléments quelconques  $z$  et  $z'$  est égale à  $\log \frac{z}{z'} : \log \lambda$ .*

C'est ce que l'on peut vérifier en retranchant l'une de l'autre les distances à  $z_1$  des deux éléments  $z$  et  $z'$ , c'est-à-dire en retranchant  $\log \frac{z'}{z_1} : \log \lambda$  de  $\log \frac{z}{z_1} : \log \lambda$ .

Au lieu de la constante  $\frac{1}{\log \lambda}$ , pour abrégé, nous écrirons maintenant  $c$ , notation dont nous nous servons toujours dans la suite (1).

*Par suite, la distance entre deux éléments quelconques  $z$ ,  $z'$  est égale à  $c \log \frac{z}{z'}$ .*

On vérifie aisément sur cette expression de la différence de mesure de deux éléments l'existence des propriétés que nous avons prises pour conditions dans la construction même de cette expression.

D'abord, la possibilité d'additionner les différences de mesure résulte de ce que

$$c \log \frac{z}{z''} = c \log \frac{z}{z'} + c \log \frac{z'}{z''}.$$

Ensuite la distance d'un élément à lui-même est égale à zéro

$$c \log \frac{z}{z} = 0.$$

Enfin la distance de deux éléments

$$c \log \frac{z}{z'}$$

---

(1) De même que la constante  $\lambda$  était soumise à certaines restrictions, de même on doit conserver pour  $c$  des restrictions correspondantes, qui consistent en ce que  $c$  doit être réel ou imaginaire pure, selon que les éléments fondamentaux sont réels ou imaginaires. Si l'on choisissait  $c$  autrement, on pourrait toujours désigner l'expression analytique que nous avons obtenue sous le nom de *différence de mesure*, mais la différence de mesure de deux éléments consécutifs réels serait alors imaginaire.

reste inaltérée lorsque l'on applique simultanément à  $z$  et à  $z'$  une transformation linéaire où les deux éléments fondamentaux

$$z = 0, \quad z = \infty$$

restent inaltérés, c'est-à-dire une transformation qui change simultanément  $z$  et  $z'$  en des multiples d'eux-mêmes.

L'expression analytique que nous venons d'obtenir pour la détermination métrique est susceptible d'une interprétation géométrique simple. Le quotient  $\frac{z}{z'}$  désigne, comme l'on sait, le rapport anharmonique des éléments  $z$  et  $z'$  relativement aux deux éléments fondamentaux  $z = 0, z = \infty$ .

*Par conséquent, dans notre détermination métrique la distance entre deux éléments de la figure élémentaire est égale au produit d'une certaine constante par le logarithme du rapport anharmonique formé par ces deux éléments et les deux éléments fondamentaux.*

La constante  $c$  dont il est question est ici indéterminée et doit être prise arbitrairement.

#### IV.

##### PASSAGE AUX ÉLÉMENTS COMPLEXES. GÉNÉRALISATION DU SYSTÈME DES COORDONNÉES.

Dans la construction de l'échelle et dans la définition de la différence de mesure de deux éléments, nous n'avons jusqu'ici considéré que les éléments réels de la figure élémentaire. Mais maintenant que nous avons obtenu l'expression analytique pour la différence de mesure de deux éléments

$$c \log \frac{z}{z'},$$

nous pouvons évidemment aussi parler de la différence de mesure de deux éléments complexes de la figure élémentaire. Ici se présente alors, dans toute sa généralité, un fait que nous avons déjà rencontré à propos de la mesure de l'angle et qui, ainsi que cela sera expliqué dans les paragraphes suivants, se présente toujours pour les éléments réels lorsque les éléments fondamentaux sont imaginaires. Ce fait est celui-ci : *La différence de mesure de deux éléments n'est pas une fonction uniforme, mais une fonction multiforme ayant une infinité de déterminations et un module de périodicité.*

Ce module de périodicité, puisque la fonction logarithmique a la période  $2\pi i$ , a pour valeur  $2c\pi i$ .

Ensuite, comme le logarithme devient infiniment grand lorsque son argument a pour valeur 0 ou  $\infty$ , il est évident que les éléments pour lesquels on a  $\frac{z}{z'} = 0$  ou  $\frac{z}{z'} = \infty$  sont infiniment éloignés l'un de l'autre. Pour cela, il faut et il suffit que l'un des deux éléments coïncide avec l'un des deux éléments fondamentaux ( $z = 0$ ,  $z = \infty$ ). Par conséquent

*Dans notre détermination métrique, la figure élémentaire possède deux éléments infiniment éloignés (réels ou imaginaires) : les deux éléments fondamentaux.*

La distance de ces éléments à un autre élément quelconque est un infiniment grand du même ordre que  $\log 0$  ou  $\log \infty$ .

*Les deux éléments fondamentaux sont à une distance logarithmiquement infinie.*

En outre, nous abandonnerons désormais l'hypothèse restrictive que nous avons adoptée jusqu'ici relativement au système des coordonnées. Les deux éléments fondamentaux ne coïncideront plus avec les éléments de base des coordonnées, mais seront donnés par une équation générale du second degré

$$\Omega = az^2 + 2bz + c = 0,$$

ou, en introduisant les variables homogènes,

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 0.$$

Pour calculer la différence de mesure de deux éléments ayant pour coordonnées homogènes  $x_1, x_2$  et  $y_1, y_2$ , l'on n'a qu'à former le rapport anharmonique de ces deux points aux deux éléments  $\Omega = 0$ . Ce rapport est, d'après la règle connue,

$$\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

où  $\Omega_{xx}, \Omega_{yy}, \Omega_{xy}$  désignent les expressions suivantes.  $\Omega_{xx}, \Omega_{yy}$  sont celles que l'on tire de  $\Omega$  en mettant respectivement  $x_1, x_2$  et  $y_1, y_2$  à la place des variables; c'est-à-dire

$$\Omega_{xx} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, \quad \Omega_{yy} = ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2.$$

Fac. de T. — XI.

G. 3

Ensuite  $\Omega_{xy}$  désigne l'expression

$$\Omega_{xy} = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2.$$

En employant cette notation, la différence de mesure de deux éléments sera égale à

$$c \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}};$$

*c'est là l'expression analytique générale de la différence de mesure.*

Au lieu du logarithme, nous introduirons quelquefois un arc cosinus. On sait que

$$c \log a = 2ic \operatorname{arc} \cos \frac{a+1}{2\sqrt{a}}.$$

Par conséquent, notre différence de mesure

$$= 2ic \operatorname{arc} \cos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

C'est là la forme de l'expression analytique que l'on trouve dans Cayley. Seulement, Cayley, comme nous l'avons déjà dit, attribue à la constante  $c$  la valeur particulière  $-\frac{i}{2}$ , en sorte que, pour lui, la différence de mesure est précisément égale à l'arc cosinus en question.

## V.

### ÉTUDE PARTICULIÈRE DES ÉLÉMENTS RÉELS DE LA FIGURE ÉLÉMENTAIRE.

Nous nous proposons maintenant d'examiner en détail comment la détermination métrique, développée dans les précédents paragraphes relativement aux figures élémentaires à une dimension, se présente pour les éléments réels de la figure. Pour cela, nous aurons à distinguer les deux cas où les éléments fondamentaux sont réels ou bien imaginaires. Pour plus de clarté, de précision, nous examinerons en particulier la détermination métrique de la ponctuelle. Il va de soi que les choses se passent d'une façon tout à fait analogue pour le faisceau de rayons.

En premier lieu, supposons donnés, sur la droite, deux points fondamentaux réels  $O$  et  $O'$ .

Si, alors,  $x$  et  $y$  sont des points réels de la droite,  $x, y$  forment avec  $O, O'$

un rapport anharmonique négatif ou positif, selon que les segments  $xy$  et  $OO'$  s'enchevêtrent ou non.

Dans le premier cas, par conséquent, le logarithme du rapport anharmonique est imaginaire; dans le second, il est réel (à des périodes imaginaires près). Par suite, si nous nous imposons cette condition que la distance de deux points qui se suivent sur la droite soit réelle, alors nous devons toujours prendre la constante  $c$ , qui multiplie le logarithme, également réelle. On a alors ce théorème :

*La distance de deux points  $x, y$  est une grandeur imaginaire ou bien une grandeur réelle, selon que les segments  $xy, OO'$  s'enchevêtrent ou non.*

Il est clair qu'on pourrait attribuer à  $c$  (c'est ce que fait Cayley) une valeur imaginaire pure; il faudrait alors, dans le précédent théorème, intervertir les mots *réelle* et *imaginaire*. *A priori* cette hypothèse est tout aussi admissible que l'autre; mais alors la détermination métrique n'aurait pas du tout pour les points réels le même caractère que celle que nous employons d'habitude. Par exemple, si nous voulons construire une échelle de points 1, 2, 3, ... qui soient chacun distants l'un de l'autre de l'unité, 2 serait séparé de 1 et 3 par  $OO'$  et la distance  $\overline{13}$  ne serait égale à deux unités, qu'autant que l'on irait d'abord de 1 à 2, puis de 2 à 3, tandis que  $\overline{13}$ , mesuré directement, fournirait une valeur imaginaire. Pour cette raison, nous excluons ici l'hypothèse de  $c$  imaginaire.

Ainsi, pour  $c$  réel, nous avons d'abord le théorème ci-dessus. Par conséquent, nous nous en tiendrons à la considération de l'un des deux segments en lesquels la droite est décomposée par les deux points fondamentaux. Chacun de ces deux segments a une longueur infinie, en ce sens que les deux points qui les limitent, les points fondamentaux, sont infiniment éloignés de tous les autres points.

Concevons maintenant que l'on soit placé en un point du segment  $OO'$  en question, et que l'on ne puisse se déplacer sur la droite qu'au moyen de ces transformations linéaires qui laissent inaltérés les points  $O, O'$ , et, par conséquent, aussi la détermination métrique. Nous pouvons aussi parler d'une vitesse du déplacement, en entendant par là le rapport de l'espace parcouru (mesuré d'après cette détermination métrique) au temps employé à le parcourir. Alors, lorsque l'on se meut dans l'un ou l'autre sens sur la droite avec une vitesse constante, on se rapproche constamment soit du

point  $O$ , soit du point  $O'$ ; mais, comme ce point est infiniment éloigné, on n'y arrivera jamais. *Mais quant au second segment  $O'O$  sur lequel on ne se trouve pas, on ne pourra jamais y arriver, en sorte que l'on ne pourra même pas s'assurer de son existence.*

C'est là précisément l'idée que l'on se forme, en Géométrie *hyperbolique*, de la mesure sur la ligne droite. La Géométrie hyperbolique attribue à la droite deux points à l'infini. Si, de part et d'autre de chacun des deux points à l'infini, il existe encore une portion de la droite qui complète la portion située à distance finie, en formant ainsi une courbe fermée, c'est ce que nous ne pouvons dire, car nos déplacements ne peuvent jamais nous conduire jusqu'aux points à l'infini et encore moins au delà. En tout cas, on peut ajouter ce segment comme une portion idéale de la droite, que l'esprit peut concevoir.

En second lieu, supposons que les deux points fondamentaux, base de notre détermination métrique relative à la droite, soient imaginaires (conjugués). Alors, le logarithme du rapport anharmonique des deux points fondamentaux et de deux points réels quelconques  $x, y$  est une imaginaire pure. Nous devons donc attribuer à  $c$  une valeur imaginaire pure  $c, i$ , afin que la distance de deux points réels puisse être réelle. Mais en même temps alors, les distances mutuelles de tous les points réels seront réelles. Il n'y a pas de points réels à l'infini. La droite revient sur elle-même comme une courbe fermée. La distance réelle de deux points n'est pas complètement déterminée; elle l'est seulement à des multiples près d'une période réelle qui représente la longueur totale de la droite. Cette longueur a pour valeur  $2i\pi c = -2\pi c_1$ . La détermination métrique relative à la droite est ainsi toute pareille à la détermination métrique habituelle relative à la circonférence de rayon  $c_1$ .

La détermination métrique relative à la droite, que nous venons de décrire, est précisément celle que lui attribue la Géométrie *elliptique*.

Ce que nous venons d'exposer pour la ponctuelle, nous pouvons le répéter pour le *faisceau de rayons*.

Si les deux rayons fondamentaux, base de la détermination métrique relative au faisceau de rayons, sont réels, le faisceau possède deux rayons réels dont chacun forme avec tous les autres un angle infiniment grand. La rotation d'un rayon du faisceau, définie d'une façon entièrement analogue à celle que nous avons exposée précédemment pour le déplacement d'un point sur la droite, n'amènera jamais le rayon jusqu'à atteindre, ni encore

moins à dépasser, ces deux rayons limites. Une telle détermination métrique n'a certainement rien de commun avec la métrique angulaire à laquelle nous sommes habitués, car la rotation d'un rayon autour d'un de ses points ramène ce rayon à sa position initiale après un laps de temps fini. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les rayons fondamentaux soient imaginaires. En effet, nous avons déjà vu au paragraphe II que la détermination angulaire habituelle emploie deux rayons fondamentaux imaginaires, savoir : les deux rayons du faisceau qui passent par les points circulaires imaginaires à l'infini.

Dans les Géométries hyperbolique et elliptique la détermination angulaire relative au faisceau reste tout à fait la même que dans la Géométrie habituelle; seulement, les deux rayons fondamentaux ne seront plus définis comme étant les deux rayons qui passent par les points circulaires à l'infini, mais comme étant ceux qui sont tangents à une certaine conique, le cercle à l'infini qui se présente dans ces Géométries (*comparez* paragraphe VIII).

La constante  $c$ , qui reste indéterminée dans la formule générale du paragraphe IV, doit, afin que cette formule soit valable dans le cas de la détermination angulaire habituelle, être prise égale à  $\pm \frac{\sqrt{-1}}{2}$ . D'abord, d'après les considérations indiquées précédemment au sujet de la ponctuelle, elle doit être imaginaire pure et égale à  $\pm c, i$ . Comme, alors, la somme des angles dans le faisceau de rayons est égale à  $2\pi c$ , et que cette somme, dans la détermination habituelle, est égale à  $\pi$ , l'on devra prendre  $c_1 = \frac{1}{2}$  (<sup>1</sup>). Dans cette hypothèse, la formule du paragraphe IV donne, en effet, la formule employée dans la détermination angulaire habituelle. Soient  $x$  et  $y$  des coordonnées rectangulaires dans le plan. Le centre du faisceau de rayons que nous considérons devra coïncider avec l'origine des coordonnées. Les deux rayons passant par les points circulaires sont alors

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Si, ensuite, nous considérons deux rayons définis par les coordonnées

(<sup>1</sup>) Par somme des angles d'un faisceau il faut entendre l'angle que doit décrire un rayon tournant autour d'un de ses points jusqu'à ce que ce rayon revienne pour la première fois coïncider avec sa position initiale; c'est la moitié de l'angle que doit décrire un point sur la circonférence d'un cercle pour revenir à son point de départ. F. K.

homogènes  $x, y$  et  $x', y'$ , d'après la formule du paragraphe IV, où nous ferons encore  $c = \frac{i}{2}$ , l'angle de ces rayons sera

$$= \text{arc cos } \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

et l'on reconnaît là la détermination angulaire habituelle.

Par conséquent, l'angle de deux droites, au sens de la Géométrie projective, devra être défini comme *le produit de  $\frac{\sqrt{-1}}{2}$  par le logarithme du rapport anharmonique que forment ces deux droites avec les droites qui joignent leur point d'intersection aux deux points circulaires imaginaires à l'infini.*

En particulier, des droites forment un angle droit lorsque ce rapport est harmonique.

Nous emploierons aussi cette expression d'*angle droit* (ou de *segment droit*) à propos de la métrique générale.

## VI.

### LA DÉTERMINATION MÉTRIQUE SPÉCIALE AU CAS OU LES ÉLÉMENTS FONDAMENTAUX COINCIDENT.

Jusqu'ici nous n'avons pas encore considéré le cas particulier où les éléments fondamentaux de la détermination métrique coïncident.

Notre formule générale

$$2ic \text{ arc cos } \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{yy}}}$$

donne alors, quelque valeur que l'on attribue à  $x$  et  $y$ , une valeur nulle comme distance des deux éléments. Mais une détermination métrique est tout aussi possible que précédemment, car la loi suivant laquelle les distances d'éléments différents tendent vers zéro lorsque les éléments fondamentaux viennent coïncider est parfaitement déterminée. On a évidemment

$$\Omega_{xx} \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \Delta,$$

où  $\Delta$  est le discriminant  $ac - b^2$  de la forme quadratique  $\Omega$ . Par suite, nous pouvons écrire aussi la formule générale pour la détermination mé-

trique sous la forme

$$2ic \operatorname{arc} \sin \frac{(x_1 y_2 - y_1 x_2) \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{yy}}}.$$

Si, maintenant, les deux éléments fondamentaux coïncident,  $\Omega$  devient le carré parfait d'une expression linéaire  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_x$  et  $\Delta$  s'évanouit. Par suite, nous pouvons d'abord écrire que l'arc sin est égal au sinus même et, par conséquent, nous aurons pour expression de la distance

$$2ic\sqrt{\Delta} \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{yy}}},$$

ou bien, si nous remplaçons respectivement  $\Omega_{xx}$ ,  $\Omega_{yy}$  par  $p_x^2$  et  $p_y^2$ ,

$$2ic\sqrt{\Delta} \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{(p_1 x_1 + p_2 x_2)(p_1 y_1 + p_2 y_2)}.$$

Réunissons le facteur évanouissant  $\sqrt{\Delta}$  au facteur  $2ic$ , auquel nous pouvons attribuer une valeur aussi grande que l'on veut, en formant ainsi une nouvelle constante  $k$ .

*Nous obtenons ainsi pour la différence de mesure la formule*

$$k \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{(p_1 x_1 + p_2 x_2)(p_1 y_1 + p_2 y_2)},$$

où  $p = 0$  représente l'élément fondamental double (compté deux fois) <sup>(1)</sup>.

Il est facile de vérifier que cette expression, que nous avons trouvée par un passage à la limite, satisfait effectivement aux conditions que nous devons lui imposer conformément au paragraphe II.

A cet effet, nous l'écrivons sous une forme un peu différente

$$\frac{q_1 x_1 + q_2 x_2}{p_1 x_1 + p_2 x_2} - \frac{q_1 y_1 + q_2 y_2}{p_1 y_1 + p_2 y_2},$$

où  $q_1$ ,  $q_2$ , d'ailleurs, sont des grandeurs quelconques qui satisfont à la condition

$$q_1 p_2 - p_1 q_2 = k.$$

Sous cette forme, la possibilité d'additionner les différences de mesure est immédiatement évidente.

<sup>(1)</sup> Cayley obtient cette formule d'une manière toute pareille.

Ensuite, il est aisé de voir que cette expression n'est pas altérée par les transformations linéaires spéciales qui laissent invariable l'élément fondamental double  $p = 0$ . Ces transformations changent  $p$  en un multiple de lui-même ; elles transforment aussi toute autre expression linéaire, et par conséquent  $q$ , en le même multiple d'elle-même, augmenté d'un multiple de  $p$  ; ainsi

$$\begin{aligned} p' &= \rho p, \\ q' &= \rho q + \sigma p. \end{aligned}$$

Le quotient  $\frac{q}{p}$  varie, par conséquent, ainsi de la constante  $\sigma$  et la différence de mesure de deux éléments, qui est elle-même la différence de deux quotients analogues, reste complètement inaltérée. C. Q. F. D.

La détermination métrique ainsi trouvée s'interprète géométriquement comme il suit. Le quotient  $\frac{p_x}{q_x}$  représente, comme l'on sait, le rapport anharmonique du point  $x$  et du point pour lequel  $\frac{p}{q}$  prend la valeur 1, relativement aux deux points  $p = 0$ ,  $q = 0$ , autrement dit, l'élément fondamental double donné et un élément quelconque arbitrairement choisi.

*La différence des valeurs de ce rapport anharmonique, formé pour deux éléments, représente la différence de mesure de ces deux éléments.*

Cette détermination métrique, qui a été obtenue comme cas limite de la détermination générale, sera désignée, par opposition à cette dernière, sous le nom de *détermination métrique spéciale*. Elle se distingue, en particulier, de la métrique générale par les deux propriétés suivantes :

Elle est uniforme et non plus multiforme.

Elle ne possède plus deux éléments à une distance logarithmiquement infinie de tous les autres, mais seulement un élément à distance algébriquement infinie (l'élément fondamental double).

C'est sous cette métrique spéciale que se range, comme il a été déjà indiqué au paragraphe II, la métrique habituelle (euclidienne, parabolique) relative à la ligne droite. Aussi, dans l'intuition habituelle, la droite a seulement un point à l'infini. On peut se rapprocher indéfiniment de ce point d'un côté comme de l'autre sans d'ailleurs l'atteindre jamais. La ligne droite, en Géométrie parabolique, contrairement à ce qui arrive dans la Géométrie elliptique, a une longueur infinie ; mais elle ne possède plus,

comme dans la Géométrie hyperbolique, une portion idéale, elle s'étend d'une seule pièce à l'infini.

## VII.

DÉTERMINATION MÉTRIQUE SPÉCIALE AYANT AVEC UNE DÉTERMINATION MÉTRIQUE GÉNÉRALE UN CONTACT EN UN ÉLÉMENT. — COURBURE DE CETTE MÉTRIQUE GÉNÉRALE.

Nous allons maintenant considérer deux déterminations métriques relatives à une figure élémentaire à une dimension, l'une générale et l'autre spéciale. Ces deux déterminations métriques seront entre elles dans une certaine relation mutuelle particulière, que nous désignerons sous le nom de *contact des deux déterminations métriques en un élément*. Quelle est la nature de cette relation? C'est ce dont on se rendra le mieux compte sur un exemple.

Soit donnée, relativement à une ligne droite, une détermination métrique habituelle, qui emploie le point à l'infini de la droite comme élément double. Représentons les points de la droite par une coordonnée non homogène  $z$ ,  $z$  désignant précisément la distance à l'origine des coordonnées.

On construira ensuite, relativement à la droite, une détermination métrique générale de la manière suivante : à la distance 1 de la droite donnée, sur la perpendiculaire à cette droite élevée à l'origine, plaçons le centre d'un faisceau de rayons. Pour ce faisceau de rayons, soit encore donnée la détermination métrique habituelle, c'est-à-dire ici la détermination angulaire usuelle pour le faisceau de rayons. Cette dernière détermination métrique peut être transportée à la droite donnée, en définissant comme différence de mesure de deux points de la droite l'angle formé par les rayons du faisceau qui passent par ces points. Soit  $z$  la coordonnée de l'un des points, l'angle formé par le rayon du faisceau, passant par ce point, avec celui qui passe par l'origine est égal à  $\text{arc tang } z$ ; par conséquent, dans cette détermination métrique, la différence de mesure des deux éléments  $z$  et  $z'$  est, en définitive, égale à

$$\text{arc tang } z - \text{arc tang } z'.$$

Les points fondamentaux de cette détermination métrique sont imaginaires et déterminés par

$$z = \pm i.$$

Maintenant la détermination métrique spéciale et la métrique générale qui se présentent ici sont liées de telle sorte que pour les valeurs de  $z$ , qui diffèrent très peu de  $z = 0$ , elles sont presque coïncidentes; car, pour des angles très petits, la différence entre l'angle et la tangente trigonométrique s'évanouit.

C'est ce qu'on voit clairement en remplaçant l'arc  $\text{tang } z$  par son développement en série

$$z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots \pm \dots$$

*Les deux déterminations métriques sont, par conséquent, identiques dans le voisinage de  $z = 0$ , aux infiniment petits d'ordre supérieur près.*

C'est cette relation entre les deux déterminations que l'on désignera sous le nom de *contact*.

Lorsque, comme ci-dessus, une détermination métrique générale et une autre spéciale ont un contact, il saute aux yeux que le point de contact forme une division harmonique avec les deux points fondamentaux de la détermination métrique générale et le point fondamental double de la détermination métrique spéciale.

Par conséquent, une détermination métrique générale relative à une figure élémentaire étant donnée, si l'on veut construire une détermination métrique spéciale ayant avec la première un contact en un élément déterminé, on cherchera d'abord le conjugué harmonique de ce point de contact par rapport aux deux éléments fondamentaux de la détermination métrique générale.

Le point cherché devra être employé comme élément double de la détermination métrique cherchée. Il reste alors à déterminer les valeurs absolues des constantes qui entrent dans cette dernière, de telle sorte que, dans le voisinage de l'élément donné, il y ait coïncidence entre les deux déterminations métriques. Cette coïncidence, à cause de la position particulière de l'élément fondamental double, est une coïncidence intime, un contact.

Maintenant il existe une différence caractéristique entre la détermination métrique générale à éléments fondamentaux imaginaires, et la détermination métrique générale à éléments fondamentaux réels.

Si les deux points fondamentaux sont imaginaires, la détermination

métrique spéciale ayant un contact en un point avec la détermination métrique générale est en avance sur cette dernière. J'entends par là, dans l'exemple choisi, que la distance d'un point  $z$  à l'origine, mesuré au moyen de la détermination métrique spéciale tangente, est toujours plus grande que la distance entre ces deux mêmes éléments, mesurés au moyen de la détermination métrique générale donnée. On le voit clairement si l'on remarque que la ligne entière, mesurée au moyen de la détermination métrique spéciale, a une longueur infinie, tandis que, mesurée au moyen de la détermination métrique générale donnée, sa longueur totale est finie. Ce n'est que pour les points qui sont infiniment voisins du point de contact ( $z = 0$ ) que les deux déterminations métriques coïncident.

Au contraire, si les deux éléments fondamentaux de la détermination métrique générale donnée sont réels, alors la détermination métrique spéciale, qui a avec elle un contact en un point, est en retard sur cette détermination métrique donnée. En effet, le segment limité par les deux éléments fondamentaux est alors, dans la détermination métrique générale donnée, infiniment grand, tandis qu'il est fini dans la détermination métrique spéciale tangente.

C'est ce retard et cette avance respectifs de la détermination métrique générale par rapport à la détermination métrique spéciale tangente, que je désignerai sous le nom de *courbure de la détermination métrique générale*, en l'élément de contact, pour commencer. La courbure sera dite *positive* quand les éléments fondamentaux sont imaginaires, *negative* lorsqu'ils sont réels. Pour abrégier le langage, je désignerai, par *mesure de la courbure*, la grandeur de l'avance et du retard respectifs. Cette mesure de la courbure, comme je vais le montrer, possède la même valeur pour tous les éléments de la figure. On peut la prendre égale à  $-\frac{1}{4c^2}$ , où  $c$  est la constante caractéristique de la détermination métrique générale.

Supposons que les deux éléments fondamentaux de la détermination métrique générale soient, comme dans l'exemple ci-dessus, conjugués harmoniques par rapport à  $z = 0$  et  $z = \infty$ , par exemple, déterminés par

$$z^2 = a.$$

Alors, si l'on désigne, comme toujours, par  $c$  la constante caractéristique de la détermination métrique, on trouve comme distance d'un élément  $z$

à l'origine des coordonnées

$$2ci \operatorname{arctang} \frac{z}{\sqrt{a}},$$

ou, si l'on développe en série,

$$\frac{2ci}{\sqrt{a}} z - \frac{2ci}{3\sqrt{a^3}} z^3 + \frac{2ci}{5\sqrt{a^5}} z^5 - \dots \pm \dots$$

La détermination métrique spéciale tangente en l'élément  $z = 0$  est celle qui emploie comme distance de l'élément  $z$  à l'élément  $z = 0$  le premier terme du développement en série, c'est-à-dire l'expression

$$\frac{2ci}{\sqrt{a}} z.$$

Comme écart entre la détermination métrique générale et la détermination métrique spéciale tangente, c'est-à-dire comme mesure de la courbure de la première, on peut alors prendre, par définition, le second terme du développement en série, pris en signe contraire, divisé par la troisième puissance du premier terme, ce qui donne précisément l'expression annoncée

$$-\frac{1}{4c^2}.$$

Cette expression de la mesure de la courbure  $a$ , en même temps, le signe fixé ci-dessus (paragraphe IV).

Pour les éléments fondamentaux réels, on doit attribuer à  $c$  une valeur positive; la mesure de la courbure sera, par suite, négative; au contraire, pour les éléments fondamentaux imaginaires,  $c$  doit être pris imaginaire pure, de sorte que la mesure de la courbure est positive. La mesure de la courbure d'une détermination métrique spéciale est égale à zéro. En effet, nous avons dû, dans le paragraphe précédent, pour obtenir, au moyen d'un passage à la limite, la détermination métrique spéciale, attribuer à  $c$  une valeur infiniment grande.

Enfin, la courbure est la même en tous les éléments, car  $c$  a, pour tous les éléments, la même signification.

La mesure de la courbure d'une détermination métrique générale peut encore se définir comme il suit.

On a démontré, au paragraphe V, que la longueur de la ligne totale,

pour des éléments fondamentaux imaginaires et une constante  $c, i$ , est égale à  $2c, \pi$ . Or le produit par  $\pi^2$  de l'inverse du carré de cette expression est la mesure de la courbure. La mesure de la courbure est donc égale à la surface d'un cercle qui a pour rayon l'inverse de la longueur apparente de la droite totale.

Relativement aux éléments fondamentaux réels, on peut présenter les considérations suivantes. La distance mutuelle des deux éléments fondamentaux  $z = \pm \sqrt{a}$ , mesurée au moyen de la détermination métrique spéciale tangente, est égale à  $4c$ . La mesure de la courbure sera, par conséquent, égale au produit de  $-4$  par l'inverse du carré de la distance entre les deux éléments fondamentaux mesurée au moyen de la détermination métrique spéciale tangente.

Pour conclure, remarquons encore que les trois espèces de déterminations métriques relatives à la ligne droite, dans les Géométries elliptique, hyperbolique et parabolique, ont entre elles une relation de contact. Le contact a toujours lieu au point que nous avons devant les yeux et à partir duquel nous effectuons les mesures au sens de la Géométrie elliptique, ou hyperbolique, ou parabolique. La détermination métrique relative à la Géométrie parabolique est une détermination métrique spéciale qui a un contact avec les Géométries elliptique ou hyperbolique. Elle peut donc remplacer ces dernières pour tous les points qui sont peu éloignés du point que nous considérons.

## VIII.

### LA DÉTERMINATION MÉTRIQUE GÉNÉRALE PROJECTIVE DANS LE PLAN.

Après avoir exposé la détermination métrique projective relative aux figures élémentaires à une dimension, nous pouvons passer, presque immédiatement, aux déterminations métriques projectives relatives aux figures élémentaires à deux ou plusieurs dimensions. Nous trouverons alors une détermination métrique plus générale qui renferme, comme cas particuliers, les déterminations métriques que nous employons habituellement pour ces figures élémentaires, et aussi les déterminations métriques que la Géométrie elliptique ou hyperbolique attribue aux figures en question.

C'est cette métrique que nous allons exposer, d'abord pour le plan. Pour le point (considéré comme faisceau de rayons et de plans dans l'espace), elle

se présente tout à fait de la même manière, comme nous le verrons plus en détail au paragraphe X.

De même que dans la détermination métrique projective relative aux figures élémentaires à une dimension, l'on emploie deux éléments de cette figure comme éléments fondamentaux, on prend comme base de la détermination métrique projective pour le plan une conique, que l'on peut nommer la *conique fondamentale* (c'est l'*absolu*, « *the absolute* », de *Cayley*). A cette conique fondamentale se rattache d'abord la détermination métrique de toutes les figures élémentaires à une dimension, qui appartiennent au plan, c'est-à-dire la détermination métrique relative à la droite et au faisceau de rayons dans le plan. Chaque droite coupe la conique fondamentale en deux points (réels, ou imaginaires, ou coïncidents). Ceux-ci seront les points fondamentaux pour la détermination métrique relative à cette droite. Parmi les rayons de chaque faisceau, il se trouve deux tangentes (réelles, ou imaginaires, ou coïncidentes) à la conique. Celles-ci seront prises comme rayons fondamentaux pour la détermination métrique relative au faisceau de rayons. Ensuite nous allons encore faire une convention, relative aux constantes  $c$  que l'on doit employer. Pour la détermination métrique relative à toutes les ponctuelles rectilignes, nous emploierons la même constante  $c$ , d'ailleurs choisie arbitrairement; de même, pour la détermination métrique relative à tous les faisceaux de rayons, une même constante  $c'$ , d'ailleurs quelconque.

Nous nous proposons maintenant d'établir l'expression analytique de la détermination métrique ainsi définie.

L'équation de la conique fondamentale en coordonnées ponctuelles peut s'écrire

$$\Omega = 0.$$

Désignons alors par

$$\Omega_{xx}, \quad \Omega_{yy}$$

les expressions que l'on obtient en portant dans  $\Omega$  les coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  d'un point  $(x)$  et les coordonnées  $y_1, y_2, y_3$  d'un point  $(y)$ . Enfin désignons par

$$\Omega_{xy}$$

le résultat obtenu en portant les coordonnées  $y$  dans la polaire de  $(x)$ , ou, ce qui revient au même, en portant les coordonnées  $x$  dans la polaire de  $(y)$ . Alors, le rapport anharmonique des deux points  $(x)$  et  $(y)$  avec les

deux points d'intersection de la droite qui les joint avec la conique fondamentale est donné par le quotient des racines de l'équation quadratique en  $\lambda$

$$\lambda^2 \Omega_{xx} + 2\lambda \Omega_{xy} + \Omega_{yy} = 0.$$

Le rapport anharmonique est, par conséquent, égal à

$$\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx} \Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx} \Omega_{yy}}},$$

et la distance des deux points sera égale à

$$c \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx} \Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx} \Omega_{yy}}}$$

ou, ce qui revient au même, égale à

$$2ic \operatorname{arc} \cos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{yy}}}.$$

Ce sont donc, avec les notations employées ici, exactement les mêmes expressions qui se sont présentées pour les figures élémentaires à une dimension.

On obtient exactement de la même façon l'angle de deux droites ayant pour coordonnées  $u_1, u_2, u_3$  et  $v_1, v_2, v_3$ , lorsque

$$\Phi = 0$$

est l'équation de la conique fondamentale en coordonnées lignes, au moyen de la formule suivante. L'angle des deux droites est égal à

$$c' \log \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu} \Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu} \Phi_{vv}}},$$

ou, ce qui revient au même, égal à

$$2c' i \operatorname{arc} \cos \frac{\Phi_{uv}}{\sqrt{\Phi_{uu} \Phi_{vv}}}.$$

Maintenant se présente d'abord cette question : Quel est le lieu des points  $(y)$  équidistants d'un point  $(x)$ ? Comme la distance  $\overline{xy}$  dépend seulement de

$$\frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{yy}}},$$

nous obtiendrons l'équation du lieu géométrique de  $(y)$  en écrivant que

cette expression est égale à une constante  $k$ , ou, ce qui revient au même, en écrivant

$$\Omega_{xy}^2 = k^2 \Omega_{xx} \Omega_{yy}.$$

Mais c'est là l'équation d'une conique qui est tangente à la conique fondamentale  $\Omega_{yy} = 0$  aux deux points d'intersection avec la polaire  $\Omega_{xy} = 0$  de  $(x)$  par rapport à la conique fondamentale.

*Le point  $(x)$  est équidistant de tous les points appartenant à une même conique tangente à la conique fondamentale aux deux points d'intersection avec la polaire du point  $(x)$ .*

Ce sont par conséquent ces coniques que, pour employer la terminologie habituelle, nous devons désigner, relativement à notre détermination métrique, sous le nom de *cercles*. Le point  $(x)$  en est le centre commun. Par *rayon du cercle*, nous entendrons la distance de l'un quelconque des points  $(y)$  au centre  $(x)$ , c'est-à-dire l'expression

$$2ic \arccos k.$$

Parmi ces cercles, décrits autour de  $(x)$  comme centre, se trouve en particulier la polaire du point  $(x)$  correspondant à  $k = 0$  et, par conséquent, à un rayon égal à  $\pi ic$ . Ensuite il se trouve parmi eux (pour  $k = 1$ ) un cercle de rayon nul, formé par le couple des tangentes à la conique fondamentale issues de  $(x)$ . La distance entre deux points situés sur l'une de ces tangentes est, en effet, toujours nulle, car ces points forment avec les points d'intersection de la conique fondamentale avec la droite qui les joint, le rapport anharmonique  $+1$ , à moins qu'on n'attribue à la constante  $c$  une valeur infiniment grande, ce qui n'est pas admissible ici, car alors la distance de tous les points non situés sur une tangente à la conique serait infiniment grande. Il est naturellement permis, pour la détermination métrique sur les tangentes à la conique, d'attribuer à  $c$  une valeur particulière infiniment grande. Mais alors cette détermination métrique n'est plus comparable à la métrique générale —. Enfin, parmi les cercles concentriques en question, il en est un de rayon infiniment grand correspondant à  $k = \infty$ . Celui-ci est précisément la conique fondamentale elle-même, attendu que, sur chaque droite passant par  $(x)$ , les deux points d'intersection avec la conique fondamentale sont les deux points à l'infini :

*La conique fondamentale est le lieu des points infiniment distants d'un point quelconque.*

Des considérations tout à fait analogues à celles qui précèdent, relatives aux points du plan, peuvent être énoncées immédiatement pour les droites du plan.

*Les droites qui forment le même angle avec une droite fixe ( $u$ ) enveloppent des coniques tangentes à la conique fondamentale aux deux points d'intersection avec ( $u$ ); par conséquent, parmi ces coniques se trouve le pôle de ( $u$ ) (regardé comme faisceau de rayons). Les droites qui passent par l'un des points d'intersection de la conique fondamentale avec ( $u$ ) forment avec ( $u$ ) un angle égal à zéro. Les tangentes à la conique fondamentale forment avec ( $u$ ) un angle infiniment grand.*

Par conséquent, les coniques qui ont un double contact avec la conique fondamentale sont en même temps le lieu des points équidistants d'un point fixe, le pôle de la corde qui joint les points de contact, et l'enveloppe des droites qui coupent sous un angle constant une droite fixe, la corde qui joint les points de contact. Voici une autre remarque. On désignera sous le nom de *parallèles* les lignes qui se coupent à distance infinie, c'est-à-dire sur la conique fondamentale. L'angle de deux lignes parallèles est égal à zéro. Mais rien ne s'oppose à ce que, pour un faisceau de lignes parallèles, en attribuant à  $c$  une valeur infiniment grande, nous n'introduisions une détermination métrique *spéciale*. Quand nous parlons de la distance (1) entre deux parallèles dans la Géométrie habituelle, parabolique, cela revient à l'introduction d'une pareille détermination métrique spéciale.

## IX.

### SUR LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DU PLAN QUI JOUENT LE RÔLE DES DÉPLACEMENTS.

Une section conique jouit de la propriété de se transformer en elle-même par une triple infinité de transformations linéaires du plan. En effet, il existe  $\infty^8$  transformations linéaires dans le plan, et il y a seulement  $\infty^5$  sections coniques, en sorte que chaque conique peut être transformée en

---

(1) C'est une particularité de la Géométrie parabolique que la distance entre deux parallèles est égale à la distance minima entre deux points mobiles sur chacune d'elles.

chaque autre, et, par conséquent, aussi en elle-même par  $\infty^3$  transformations linéaires.

Pour une telle transformation linéaire du plan, les points de la conique s'échangent entre eux, exactement comme, dans une transformation linéaire d'une figure élémentaire à une dimension, les éléments de cette figure s'échangent entre eux. Il en résulte que, pour chaque transformation linéaire de ce genre, deux points de la conique restent invariables. En effet, considérons les deux faisceaux de rayons  $o(p_1, p_2, p_3, \dots)$  et  $o(p'_1, p'_2, p'_3, \dots)$ , issus d'un point fixe  $o$  de la conique et passant par les points  $p_1, p_2, p_3, \dots$ , pris à volonté sur cette conique et par les points  $p'_1, p'_2, p'_3, \dots$ , provenant des premiers par l'effet d'une transformation linéaire du plan laissant la conique invariable. Les deux faisceaux sont projectifs, car  $o(p_1, p_2, p_3, \dots)$  est projectif avec  $o'(p'_1, p'_2, p'_3, \dots)$ ,  $o'$  désignant le transformé de  $o$ . Mais ce point  $o'$  est, de même que  $o$ , un point de la conique donnée; par conséquent  $o'(p'_1, p'_2, p'_3, \dots)$  est projectif avec  $o(p'_1, p'_2, p'_3, \dots)$ , et, par suite, ce dernier l'est aussi avec  $o(p_1, p_2, p_3, \dots)$ , ce qu'il fallait démontrer. Mais si les deux faisceaux  $o(p_1, p_2, p_3, \dots)$  et  $o(p'_1, p'_2, p'_3, \dots)$  sont projectifs, ils doivent alors avoir en commun deux rayons  $o\pi_1, o\pi_2$ , et, par conséquent, il existe deux points  $\pi_1$  et  $\pi_2$  de la conique qui restent invariables dans la transformation.

Mais, si deux points de la conique fondamentale restent invariables, il en est de même de la ligne qui les joint, des tangentes en ces points et de leur intersection, et, par suite, de tout le triangle formé par la ligne de jonction de ces points et les tangentes en ces points. En prenant ce triangle comme triangle de référence, l'équation de la conique est de la forme

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0.$$

La transformation linéaire par laquelle la conique se transforme en elle-même doit, puisqu'elle laisse le triangle invariable, être de la forme

$$x_1 = \alpha_1 y_1, \quad x_2 = \alpha_2 y_2, \quad x_3 = \alpha_3 y_3.$$

Comme condition pour que la conique reste invariable dans cette transformation, il vient

$$\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 = 0,$$

et, comme cela ne fait qu'une condition entre les trois variables homogènes  $\alpha$ ,

il existe donc une infinité simple de transformations linéaires qui laissent invariables le triangle et la conique.

Pour ces transformations, le quotient  $\frac{x_1 x_2}{x_3^2}$  reste invariable, quelle que soit sa valeur. Par conséquent, toutes les coniques de la forme

$$x_1 x_2 - k x_3^2 = 0,$$

sont transformées en elles-mêmes par ces mêmes transformations <sup>(1)</sup>.

Maintenant, les transformations linéaires du plan ainsi définies, qui transforment en elle-même la conique, se partagent, en tant qu'elles sont réelles, en deux groupes. *Les transformations du premier groupe peuvent être engendrées par la répétition d'une transformation réelle infinitésimale de la même espèce, celles du second groupe ne le peuvent pas.*

Ainsi, par exemple, si la conique fondamentale est réelle, et s'il en est de même des deux points fixes  $\pi_1, \pi_2$ , situés sur cette conique, on a alors une transformation du premier ou bien du second groupe, selon que  $\alpha_3 = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$  ou bien  $\alpha_3 = -\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ . Dans le dernier cas, le segment  $\pi_1 \pi_2$  empiète sur chaque couple de points correspondants de la conique; dans le premier cas, c'est le contraire.

Ce sont les transformations du premier groupe, pour lesquelles la section conique reste inaltérée, que nous désignerons sous le nom de *déplacements* du plan. En effet, ces transformations deviennent le cycle des déplacements réels du plan lorsque nous particularisons d'une manière convenable la conique fondamentale de telle sorte que la détermination métrique se rapportant à cette conique se transforme en la détermination métrique habituelle <sup>(2)</sup>.

D'après cette définition, nous pouvons énoncer de la manière suivante le théorème déjà démontré que, pour la transformation linéaire qui transforme en elle-même la conique donnée, une infinité de coniques restent invariables :

*Dans un déplacement du plan, non seulement la conique fondamentale est transformée en elle-même, mais il en est encore de même pour*

<sup>(1)</sup> Il en résulte, en passant, que les transformations linéaires ne transforment pas toutes une conique en elle-même; mais, si une transformation a cette propriété pour *une* conique, elle l'a aussi pour une infinité de coniques. F. K.

<sup>(2)</sup> L'autre classe de transformations de la conique en elle-même fournit, lors de ce passage, les transformations du plan qui changent les figures du plan en figures inversement congruentes à celles-là et situées n'importe où. F. K.

*chaque conique (chaque cercle) qui lui est tangente aux deux points qui restent fixes.*

Parmi ces coniques se trouve notamment le point  $x_1 = 0, x_2 = 0$ , le centre commun des cercles. Nous dirons que le déplacement est une *rotation du plan autour de ce centre*.

D'où ce théorème :

*Chaque déplacement du plan consiste en une rotation autour d'un point. Tous les autres points décrivent des cercles concentriques autour de ce point comme centre.*

Il est à peine besoin d'insister sur ce fait que, dans le déplacement, la polaire du centre de rotation joue le même rôle, au point de vue dualistique, que le centre, et que, par conséquent, relativement à notre détermination métrique, le déplacement est une conception dualistique par rapport à elle-même. Cette dualité disparaît seulement lorsque, pour obtenir la Géométrie parabolique, nous particularisons d'une manière non dualistique la conique fondamentale.

Parmi les déplacements du plan, il y a encore un cas à distinguer : c'est celui qui se présente lorsque le centre de rotation s'éloigne à l'infini, c'est-à-dire sur la conique fondamentale.

Les cercles qui sont alors décrits par les différents points du plan sont des coniques qui ont au centre, avec la conique fondamentale, un contact quadripunctuel. Le genre de déplacement qui correspond à cette hypothèse pour la détermination métrique habituelle est désigné sous le nom de *translation* <sup>(1)</sup>. On voit maintenant que, si l'on définit les déplacements du plan comme on vient de le faire, on a le théorème suivant :

*Dans les déplacements du plan, les rapports métriques restent inaltérés.*

En effet, puisque lors d'un déplacement la conique fondamentale est transformée en elle-même, il en sera alors de même du rapport anharmonique de deux points et des deux points d'intersection de la ligne qui les joint avec la conique fondamentale. Par conséquent, il en est encore de

---

<sup>(1)</sup> C'est une particularité introduite par le choix particulier de la conique fondamentale que, dans le cas de la Géométrie parabolique, les translations forment un groupe fermé et que deux translations quelconques sont échangeables.

même du produit d'une constante par le logarithme du rapport anharmonique, c'est-à-dire de la distance des deux points. On a un résultat analogue pour l'angle de deux droites.

Cela a lieu, non seulement pour les déplacements du plan, mais encore, et pour les mêmes raisons, pour les transformations de seconde espèce qui transforment en elle-même la conique fondamentale.

Enfin, il existe quelque chose d'analogue pour les transformations réciproques (dualistiques), qui transforment en elle-même la conique fondamentale, et notamment pour la transformation par polaires réciproques, en prenant cette conique pour directrice. En effet, à deux points et aux points d'intersection de la ligne qui les joint avec la conique fondamentale, qui sont entre eux dans un certain rapport anharmonique, correspondent, en vertu de ces transformations, deux droites et les deux tangentes menées de leur point d'intersection à la conique fondamentale, qui forment entre elles le même rapport anharmonique.

Par conséquent, si nous prenons les deux constantes  $c$  et  $c'$  (§ VIII) des deux déterminations métriques égales entre elles, nous aurons le théorème suivant :

*La distance de deux points est égale à l'angle des droites correspondantes, et réciproquement;*

et, en particulier :

*La distance de deux points est égale à l'angle de leurs polaires.*

Nous ne ferons pas davantage usage ici de ces théorèmes, et nous reviendrons seulement encore une fois sur le dernier dans le paragraphe suivant.

En effet, ce dernier théorème comprend le suivant, qui appartient à la Géométrie de la sphère : Les côtés et les angles d'un triangle sphérique s'échangent entre eux quand on passe au triangle polaire (<sup>1</sup>).

## X.

### LA DÉTERMINATION MÉTRIQUE PROJECTIVE GÉNÉRALE RELATIVE AUX FAISCEAUX DE RAYONS ET DE PLANS.

En procédant comme nous avons fait dans les deux paragraphes précédents pour établir la détermination métrique générale projective pour le plan, on pourra établir la métrique pour l'autre figure élémentaire à deux

(<sup>1</sup>) Comparer CAYLEY (*loc. cit.*).

dimensions, le point (considéré comme faisceau de plans et de rayons). Dans cette détermination, au lieu de la conique fondamentale, on emploiera *un cône fondamental du second degré*. Comme angle de deux droites qui se coupent au sommet du cône, on devra prendre le logarithme, multiplié par une constante  $c$ , du rapport anharmonique formé par les deux droites et par les deux génératrices du cône situées dans le même plan que ces droites; comme angle de deux plans passant par le sommet, on devra prendre le logarithme, multiplié par une (autre) constante  $c'$ , du rapport anharmonique formé par les deux plans et les deux plans tangents au cône fondamental qui passent par l'intersection des deux premiers plans.

L'expression analytique de cette détermination métrique est exactement la même que celle qui a été précédemment établie pour le plan. Il suffit d'attribuer aux coordonnées respectives  $(x)$ ,  $(y)$  ou  $(u)$ ,  $(v)$  relatives au plan la signification de coordonnées de rayons et de plans relatives au point. De même, sans entrer en plus de détails, tous les développements exposés pour le plan peuvent être appliqués au point; nous n'en dirons pas davantage.

Il est maintenant aisé de voir que la détermination métrique habituelle relative au point <sup>(1)</sup>, c'est-à-dire le procédé que l'on emploie d'ordinaire pour mesurer l'angle de droites ou de plans qui passent par un point, est compris comme cas particulier dans cette détermination métrique générale.

*Cette détermination habituelle emploie comme cône fondamental du second degré le cône qui, ayant le point en question comme sommet, passe par le cercle imaginaire à l'infini <sup>(2)</sup>. De plus, on y suppose que les deux constantes  $c$  et  $c'$  sont égales à  $\frac{\sqrt{-1}}{2}$  <sup>(3)</sup>.*

<sup>(1)</sup> D'habitude on ne parle pas de la détermination métrique relative au point, mais plutôt de la détermination métrique relative à une sphère (de rayon 1) décrite autour de ce point comme centre. La première manière de s'exprimer a paru préférable dans le texte, parce que le point est la figure élémentaire avec laquelle opère la Géométrie projective. Il ne faut pas ici négliger de faire une distinction, qui se présente déjà lorsqu'au lieu de la détermination métrique relative au faisceau de rayons on parle de la détermination métrique relative au cercle. A chaque droite passant par le point (à chaque rayon du faisceau) correspondent *deux* points de la sphère (du cercle). Ainsi, pour la détermination métrique relative à la sphère (au cercle), il s'introduit une distinction qui produirait des complications inutiles.

F. K.

<sup>(2)</sup> S'il s'agissait de Géométries elliptique et hyperbolique, on remplacerait ce membre de phrase par : ... le cône tangentiel qui, ayant ce point pour sommet, touche la surface du second degré située à l'infini.

F. K.

<sup>(3)</sup> C'est là la valeur que Cayley attribue toujours aux constantes qu'il emploie.

F. K.

En effet, relativement à un système de coordonnées rectangulaires, le cône ayant ce point pour sommet et passant par le cercle imaginaire à l'infini est représenté par

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

ou, en coordonnées plans par

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Pour les angles respectifs formés par deux droites de coordonnées  $(x, y, z)$ ,  $(x', y', z')$  et deux plans  $(u, v, w)$ ,  $(u', v', w')$  nous obtenons donc, d'après les formules du paragraphe VIII, en y posant  $c = c' = \frac{\sqrt{-1}}{2}$ ,

$$\text{arc cos} \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

et

$$\text{arc cos} \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}};$$

ce qui est bien la détermination angulaire habituelle. La polaire d'un plan passant par le point, relativement au cône fondamental, est la droite perpendiculaire au plan en ce point. Le dernier théorème du paragraphe précédent devient donc le suivant : L'angle de deux plans est égal à l'angle de leurs normales. C'est sur ce théorème que repose le principe, appliqué en Géométrie sphérique, suivant lequel, dans un triangle sphérique et son triangle polaire, les rapports métriques sont dualistiquement les mêmes, c'est-à-dire sont les mêmes lorsqu'on remplace les côtés par les angles, et *vice versa*.

## XI.

### LA DÉTERMINATION MÉTRIQUE DANS LE PLAN RELATIVE A UNE CONIQUE FONDAMENTALE IMAGINAIRE. LA GÉOMÉTRIE ELLIPTIQUE.

La détermination métrique habituelle relative au point est une image de la manière dont se présente, en définitive, la détermination projective relative au point et au plan lorsque le cône fondamental ou la conique fondamentale sont imaginaires. L'unique particularisation qui a lieu dans la détermination métrique projective habituelle relative au point, c'est que les deux constantes  $c$  et  $c'$  sont prises égales à  $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ . Si nous les prenions d'une

manière plus générale, égales à  $c_1\sqrt{-1}$  et  $c'_1\sqrt{-1}$ , les différences de mesure seraient simplement affectées des facteurs  $2c_1$  et  $2c'_1$ ,

$$2c_1 \operatorname{arc} \cos \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

$$2c_1 \operatorname{arc} \cos \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}},$$

expressions sur lesquelles on peut, sans insister davantage, faire reposer les mêmes développements que sur les expressions primitives.

Par conséquent, si l'on donne dans le plan une conique fondamentale imaginaire, la longueur de chaque ligne réelle est finie, et il en est de même de la somme des angles dans le faisceau de rayons. Si nous conservons les notations  $c_1$  et  $c'_1$  pour les constantes  $c$  et  $c'$  divisées par  $i$  <sup>(1)</sup>, la longueur de la droite est égale à  $2c_1\pi$ , et la somme des angles du faisceau est égale à  $2c'_1\pi$ .

Il n'existe ici ni points réels à l'infini, ni lignes réelles formant avec d'autres un angle infiniment grand. Par suite, toutes les relations entre angles formés par des lignes et par des plans qui passent par un point s'appliquent, dans le plan, aux distances de points et aux angles formés par des droites, pourvu seulement qu'on divise préalablement les distances par  $2c_1$ , les angles par  $2c'_1$ . *La trigonométrie plane fondée sur cette détermination métrique sera analogue à la trigonométrie sphérique*, avec cette seule différence qu'au lieu des côtés et angles du triangle on devra introduire dans les formules les côtés divisés par  $2c_1$  et les angles divisés par  $2c'_1$ .

La détermination métrique relative au plan que l'on vient de décrire est maintenant précisément celle que doit admettre la Géométrie *elliptique*. En particulier, afin que la somme des angles du faisceau soit égale à  $\pi$ , on égalera encore à  $\frac{1}{2}$  la constante  $c'_1$ , comme dans la détermination métrique habituelle relative au point. La somme des angles du triangle plan est alors, comme dans le triangle sphérique, supérieure à  $2\pi$ , et sera seulement égale à  $2\pi$  pour un triangle infiniment petit, et ainsi de suite....

D'après cela, nous aurons une image de la partie planimétrique de la

---

(1)  $c$  et  $c'$ , en effet, doivent être pris imaginaires pures, pour la même raison que dans le paragraphe V, la constante  $c$  a été prise imaginaire pure pour les éléments fondamentaux imaginaires.

Géométrie elliptique, en concevant que l'on nous donne dans le plan une conique imaginaire arbitraire et que cette conique soit prise comme fondement d'une détermination métrique projective. Par exemple, prenons la conique suivant laquelle le plan est coupé par le cône dont le sommet est pris en un point déterminé de l'espace, et qui passe par le cercle imaginaire à l'infini; puis faisons  $c$  et  $c'$  égaux à  $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ . Alors, la distance entre deux points ou l'angle de deux droites du plan sont respectivement égaux à l'angle sous lequel on voit du point que l'on a choisi les deux points ou les deux droites. D'autre part, si la Géométrie qui nous est donnée par la réalité est la Géométrie elliptique, les points du plan situés à l'infini forment une conique imaginaire, et la Géométrie elliptique coïncide avec la détermination métrique projective basée sur cette conique.

## XII.

LA DÉTERMINATION MÉTRIQUE DANS LE PLAN RELATIVE A UNE CONIQUE  
FONDAMENTALE RÉELLE. LA GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE.

Maintenant, nous allons supposer qu'une conique fondamentale réelle nous soit donnée dans le plan. Cela nous conduira à une détermination métrique qui, pour les points situés à l'intérieur de la conique fondamentale, s'accorde avec les notions de la Géométrie hyperbolique.

Si la conique fondamentale est réelle, les points réels et les droites du plan se partagent respectivement en deux classes. Il y a des points d'où l'on peut mener deux tangentes réelles à la conique et d'autres d'où l'on ne peut lui mener aucune tangente réelle. On convient de dire que les premiers sont *intérieurs*, les seconds *extérieurs* à la conique. D'une manière analogue, les droites se partagent en deux groupes: celles de l'un coupent la conique en deux points réels, celles de l'autre en deux points imaginaires.

Par analogie avec la Géométrie hyperbolique, nous nous en tiendrons à la considération des points intérieurs à la conique et des droites passant par ces points.

Aucun des faisceaux de rayons dont les centres sont situés dans l'espace que nous considérons n'a d'éléments réels situés à l'infini. Pour cette raison, la constante  $c'$  sera prise imaginaire pure,  $= c' i$ . La somme des

angles, dans un faisceau dont le centre est situé à l'intérieur de la conique fondamentale, est alors  $2c', \pi$ .

Au contraire, chaque droite qui traverse le domaine que nous considérons possède deux points réels situés à distance (logarithmiquement) infinie, et qui sont les points d'intersection de la droite en question avec la conique fondamentale. C'est pourquoi nous attribuerons à la constante  $c$  une valeur réelle.

Grâce à cette fixation des constantes  $c$  et  $c'$ , tous les points qui sont situés à l'intérieur de la section conique ont entre eux une distance réelle ; de même, toutes les droites qui se coupent à l'intérieur de la conique forment entre elles des angles réels. Mais la distance de deux points séparés par la conique fondamentale est imaginaire. La conique fondamentale est le lieu des points situés à l'infini. Deux droites qui passent à l'intérieur de la conique, mais qui se coupent à l'extérieur de celle-ci, forment entre elles un angle imaginaire. Entre ces droites et celles qui se coupent intérieurement à la conique, il y a un cas de transition ; c'est celui des droites dont l'intersection se trouve sur la conique fondamentale et, par conséquent, à une distance infinie, c'est-à-dire que ces droites sont celles que nous avons appelées *parallèles* (paragraphe VIII). Leur angle est égal à zéro.

Maintenant, concevons que nous nous trouvions n'importe où à l'intérieur de la conique, et que nous ne puissions éprouver de déplacement sur le plan qu'en vertu des transformations linéaires qui laissent invariable la conique fondamentale (*comparez* paragraphes V, IX). Alors nous pourrions, de même que dans notre détermination métrique habituelle, tourner autour de nous-même, et, après une rotation finie, revenir à notre position initiale ; nous pourrions également, de même que dans notre détermination métrique habituelle, parcourir une droite sans interruption dans l'un ou l'autre sens. *Mais jamais nous n'atteindrons la conique fondamentale et nous la dépasserons encore bien moins.* Nous sommes ainsi relégués à l'intérieur de la conique fondamentale ; la conique limite pour nous le plan ; si au delà de cette conique il existe encore ou non une portion du plan, c'est ce que nous ne pouvons aucunement décider. Un observateur, employant la détermination métrique habituelle, qui nous verrait marcher dans la direction de la conique fondamentale, le déplacement étant effectué par nous conformément à la nouvelle détermination métrique, avec une vitesse constante, remarquerait que nous avançons visiblement (à partir d'un certain point) de plus en plus lentement et que

nous n'atteignons jamais la limite qui nous est assignée, la conique fondamentale.

La Géométrie métrique ainsi décrite *correspondra complètement aux notions de la Géométrie hyperbolique*, si nous égalons à  $\frac{1}{2}$  la constante  $c'$ , jusqu'ici restée indéterminée, afin que la somme des angles, dans le faisceau de rayons, soit égale à  $\pi$ . Pour nous en assurer, considérons quelques-unes des propositions de la Géométrie hyperbolique d'un peu plus près. (Ces propositions seront écrites entre guillemets.)

« Par un point du plan on peut mener deux parallèles à une droite donnée, c'est-à-dire deux lignes qui rencontrent la droite donnée en des points à l'infini ». Ce sont les deux lignes qui joignent le point aux deux points d'intersection de la droite donnée avec la conique fondamentale.

« L'inclinaison mutuelle des deux parallèles qui, par un point, peuvent être menées à une droite donnée, augmente avec la distance du point à la droite. Si le point s'éloigne indéfiniment, cette inclinaison deviendra égale à  $\pi$ , c'est-à-dire, en comptant dans l'autre sens, que les deux parallèles forment entre elles un angle égal à zéro. » En effet, lorsque le point s'éloigne jusqu'à la conique fondamentale, les deux parallèles, comme en général deux droites quelconques qui se coupent sur la conique fondamentale, comprennent entre elles un angle égal à zéro. D'où cet autre théorème : « L'angle d'une droite avec chacune des droites qui lui sont parallèles est égal à zéro ». — Que pour les points situés à distance finie, *l'angle du parallélisme*, tel que le présente la Géométrie hyperbolique, se retrouve aussi dans notre détermination métrique projective, c'est ce qui résulte, comme nous le ferons voir dans un instant, de ce que toutes les formules trigonométriques coïncident dans les deux cas.

« La somme des angles d'un triangle est inférieure à  $2\pi$ ; pour un triangle dont les sommets sont infiniment éloignés, cette somme est nulle. » Ce dernier point résulte de ce que les sommets de ce triangle sont nécessairement situés sur la conique fondamentale et de ce que deux droites quelconques qui se coupent en un point de la conique fondamentale comprennent entre elles un angle égal à zéro. Le premier théorème, qui est rendu probable par le fait que pour les triangles infiniment grands cette somme est égale à zéro, et, pour les triangles infiniment petits, à  $2\pi$ , est une conséquence des formules trigonométriques que nous indiquerons en détail.

« Deux perpendiculaires élevées sur une droite ne se coupent pas ». Pour nous, d'ailleurs, elles se coupent, à savoir au pôle de la droite. Mais

ce pôle est situé dans l'espace extérieur à la conique, espace dont nos déplacements ne peuvent nous faire connaître l'existence. Mais cet espace nous pouvons, et c'est ce qui a lieu aussi en Géométrie hyperbolique, nous l'adjoindre comme un espace *idéal* <sup>(1)</sup>, exactement dans le même sens qu'en Géométrie parabolique aux éléments du plan qui se présentent effectivement l'on adjoint une droite (impropre) située à l'infini. Par là, nous n'affirmons absolument rien quant à l'existence de cette portion d'espace idéal, nous employons seulement ce terme comme une expression commode qui n'a en soi rien de contradictoire.

« Une circonférence de rayon infiniment grand n'est pas une droite. » Une circonférence de rayon infiniment grand signifie pour nous une conique qui a, avec la conique fondamentale, un contact quadripunctuel. La droite, au contraire, c'est-à-dire une droite traversant l'intérieur de la conique que nous considérons, serait une circonférence dont le centre (le pôle de la droite) serait situé dans le domaine idéal du plan, et dont le rayon aurait une valeur imaginaire. — Cherchons encore à nous faire une idée de la façon dont le plan se transforme en lui-même lorsqu'il éprouve une rotation autour d'un centre de rotation infiniment éloigné ou situé dans le domaine idéal (paragraphe IX). Dans le premier cas, tous les points décrivent des coniques qui ont entre elles, à distance infinie, un contact quadripunctuel. Dans le second cas, ils décrivent des coniques qui touchent la conique fondamentale en deux points réels. Parmi ces coniques se trouve une droite à distance finie, la polaire du centre idéal de rotation. Cette droite se transforme en elle-même, mais les autres points ne décrivent pas des droites parallèles, comme en Géométrie parabolique, mais des coniques (aplaties dans le voisinage de la droite) qui touchent la conique fondamentale aux deux points d'intersection avec la droite particulière dont il s'agit.

Enfin, en ce qui concerne les *formules trigonométriques* qui se présentent dans notre détermination métrique actuelle, on les obtient directement au moyen des considérations suivantes. Nous avons vu au paragraphe XI, qu'en prenant comme base une conique imaginaire dans le plan, et en choisissant les constantes  $c = c_1 i$ ,  $c' = c'_1 i = \frac{\sqrt{-1}}{2}$ , l'on obtient une

---

(1) Comparer ici notamment les considérations de M. BATTAGLINI, *Sulla Geometria imaginaria di Lobatschewsky* (*Giornale di Matematiche*, t. V; 1867). F. K.

trigonométrie plane dont les formules se déduisent de celles de la trigonométrie sphérique lorsqu'on remplace les côtés par les côtés divisés par  $2c_1$ . Il en sera de même lorsque l'on prend comme base une conique réelle. En effet, la légitimité des formules de la trigonométrie sphérique repose sur des identités analytiques qui sont indépendantes de la nature du choix fait pour la conique fondamentale. L'unique distinction qu'il y ait à faire entre le premier cas et celui-ci, c'est que maintenant  $c_1 = \frac{c}{i}$  est devenu imaginaire.

*Les formules trigonométriques applicables à notre détermination métrique actuelle se déduisent des formules de la trigonométrie sphérique en y remplaçant les côtés par les côtés divisés par  $\frac{c}{i}$ .*

Mais c'est là exactement la même règle que celle d'après laquelle on établit les formules trigonométriques en Géométrie hyperbolique. La constante  $c$  est la constante caractéristique qui se présente dans la Géométrie hyperbolique. On peut dire que, dans l'hypothèse de la Géométrie hyperbolique, la planimétrie a pour image la Géométrie sur une sphère de rayon imaginaire  $\frac{c}{i}$ .

D'après ce qui précède, nous aurons immédiatement une image des notions de la Géométrie hyperbolique en construisant une conique quelconque que nous prendrons pour base d'une détermination métrique projective. Réciproquement, si la détermination métrique qui nous est donnée par l'expérience est de la nature de la Géométrie hyperbolique, les points du plan situés à l'infini forment une conique réelle qui nous entoure, et la Géométrie hyperbolique n'est pas autre chose que la détermination métrique projective basée sur cette conique.

### XIII.

#### LA DÉTERMINATION MÉTRIQUE SPÉCIALE DANS LE PLAN.

##### LA GÉOMÉTRIE PARABOLIQUE.

La détermination métrique relative à la Géométrie parabolique n'est pas comprise parmi celles que nous avons traitées jusqu'ici, car elle n'emploie aucune conique proprement dite comme figure fondamentale, mais elle est

un cas limite de la détermination métrique générale considérée jusqu'ici, lorsque la conique fondamentale dégénère en un couple de points. Ce couple fondamental de points est, dans la Géométrie parabolique, imaginaire. *Ce sont les deux points circulaires imaginaires à l'infini.*

Un couple de points imaginaires peut, soit dit en passant, être regardé comme une transition entre une conique réelle et une conique imaginaire, et, pour cette raison, la Géométrie parabolique se présente aussi comme cas de transition entre la Géométrie hyperbolique et la Géométrie elliptique. Soit donnée, par exemple, une hyperbole dont l'axe non transverse a une valeur fixe (imaginaire), tandis que l'axe transverse, partant d'une valeur donnée, diminue constamment en tendant vers zéro et devient ensuite imaginaire. A la limite zéro, les deux branches de l'hyperbole se transforment en une droite double, l'axe non transverse. Cette ligne remplace la section conique, en tant que celle-ci est engendrée par des points. Mais en tant qu'elle est enveloppée par des droites, elle dégénère en deux points imaginaires conjugués, situés sur la droite double et dont la distance est égale à la longueur de l'axe non transverse resté constant. Toutes les tangentes à la conique sont, à la limite, devenues imaginaires, sauf la droite qui, maintenant, représente la conique tout entière et qui doit en être regardée comme une tangente double. Si ensuite l'axe transverse devient imaginaire, la conique ne renferme plus aucun élément réel.

Quoi qu'il en soit, nous nous proposons d'abord de considérer d'une manière générale une détermination métrique dans le plan, qui, au lieu d'une conique fondamentale, emploie un couple de points. Une telle détermination métrique recevra le nom de détermination métrique *spéciale*, par opposition à la détermination métrique *générale* que nous avons traitée jusqu'ici. Il va de soi que, au lieu de la dégénérescence de la conique en un couple de points, l'on pourrait aussi traiter la dégénérescence de la conique en un couple de droites; si nous nous en tenons ici à la première, en lui donnant un nom particulier, c'est parce que cette dégénérescence est celle qui définit la Géométrie parabolique.

Lorsque la conique fondamentale dégénère en un couple de points, la métrique de l'angle reste analogue à celle qui a lieu dans le cas général. Chaque faisceau de rayons dont le centre n'est pas situé sur la ligne qui joint les deux points fondamentaux, c'est-à-dire sur la conique fondamentale, possède deux rayons fondamentaux distincts, les deux rayons qui passent par les points fondamentaux. Au contraire, la détermination de la

distance entre deux points est ici essentiellement autre que dans le cas général. Comme la conique fondamentale consiste ici en une droite double, elle est coupée par toutes les lignes droites en un couple de points coïncidents. La distance à mesurer, tant que la constante  $c$  n'a pas une valeur infinie, est, par conséquent, nulle. Pour que la distance devienne finie, il faut attribuer à  $c$  une valeur infiniment grande. Alors, la distance deviendra en même temps une fonction algébrique des coordonnées. Mais la possibilité de comparer entre eux les segments et les angles, qui avait lieu jusqu'ici, disparaît maintenant, ou, plus exactement, les segments ne sont plus comparables qu'aux angles infiniment petits. Même en attribuant à  $c$  une valeur infiniment grande, la distance entre des points tels que la droite qui les joint passe par un point fondamental, reste égale à zéro. En effet, ces lignes correspondent aux tangentes à la conique primitive. Un angle égal à zéro est formé par des droites qui se coupent en un point de la droite qui joint les deux points fondamentaux.

Sous le nom de *circonférences*, l'on désignera les coniques qui passent par les points fondamentaux. Les circonférences concentriques sont celles qui se touchent aux deux points fondamentaux. Dans chaque système de circonférences concentriques, il s'en trouve une dont le rayon est infini. Elle dégénère en la ligne double qui joint les deux points fondamentaux. *Les points situés à l'infini forment donc ici une droite double.* Les cercles ne sont plus, comme précédemment, corrélatifs à eux-mêmes au point de vue dualistique. Les lignes qui coupent une droite donnée sous un angle constant n'enveloppent plus un cercle proprement dit, mais un point situé à distance infinie. Les cercles dont le centre est infiniment éloigné, qui touchaient la conique fondamentale en quatre points confondus avec le centre, se décomposent ici en la droite de l'infini et une autre droite, et ainsi de suite. Tout cela résulte, sans qu'il soit besoin d'y insister, de ce qui a été précédemment établi, en passant à la limite.

De même qu'en prenant pour base une conique nous avons pu désigner un réseau triplement infini de transformations linéaires du plan sous le nom de *déplacements*, de même nous pouvons en faire autant ici. Seulement, maintenant il ne suffit plus de définir les déplacements comme les transformations linéaires (ou mieux comme l'une des deux classes formées par ces transformations) qui laissent invariable la figure fondamentale. En effet, un couple de points est transformé en lui-même, non seulement par une infinité triple, mais encore par une infinité quadruple de trans-

formations linéaires du plan. Parmi ces dernières, une triple infinité se distingue par ce fait que chacune d'entre elles laisse inaltérés les cercles d'un faisceau concentrique. Ceux-ci se partagent de nouveau en deux groupes triplement infinis. L'un des groupes comprend les déplacements, l'autre les transformations du plan qui transforment les figures planes en figures inversement congruentes à ces dernières. Les deux groupes sont caractérisés d'une manière simple par ce fait que les déplacements laissent inaltéré chacun des deux points fondamentaux, tandis que les autres transformations échangent entre eux les deux points fondamentaux. Chaque déplacement du plan consiste en une rotation autour d'un point. Si le déplacement est une translation, c'est-à-dire si le centre de rotation est rejeté à l'infini, alors tous les points du plan décrivent des droites parallèles, c'est-à-dire des droites qui se coupent en un même point infiniment éloigné. Ici se présente la notion de *direction*: *des droites parallèles ont même direction*. Le déplacement a perdu ce caractère de dualité relativement à lui-même qu'il possédait dans le cas général. A côté du rapport de *congruence* qui tirait son origine de chacun des déplacements en nombre triplement infini, et celui de *congruence inverse* qui tirait son origine des transformations en nombre triplement infini du second groupe, se place ici l'affinité de *similitude directe* et de *similitude inverse* qui correspond au cycle quadruplement infini de transformations linéaires, qui laisse inaltérée la figure fondamentale. La similitude est directe lorsque les deux points fondamentaux restent invariables, inverse lorsque les deux points s'échangent entre eux. Dans la similitude, tous les angles restent inaltérés, tandis que les distances sont altérées dans la même proportion. Observons encore que, par des déplacements, nous pouvons atteindre tous les points du plan, sauf ceux de la droite de l'infini. Il n'y a plus ici de domaine idéal comme dans le cas d'une conique fondamentale réelle ou, si l'on veut, il se confond avec sa frontière qui, pour cette raison, doit être comptée deux fois.

La formule analytique qui représente ici la distance de deux points, formule à laquelle nous nous en tiendrons ici, prend la forme suivante. Soit  $p_x = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$  l'équation de la droite de l'infini; soit enfin  $P_{xy} = 0$ , la condition pour que la ligne qui joint les points  $(x)$ ,  $(y)$  passe par l'un des deux points fondamentaux. Alors la distance des deux points sera égale à

$$\frac{C\sqrt{P_{xy}}}{p_x p_y}.$$

*La distance de deux points est, par conséquent, une fonction algébrique de leurs coordonnées.*

En effet, l'on tire cette formule de l'expression générale de la distance en passant à la limite. L'expression générale peut s'écrire comme il suit

$$2ic \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

Or, si  $\Omega = 0$  dégénère en un couple de points,  $\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}$  est identiquement nul et cela de telle sorte qu'il possède un facteur constant évanouissant (le discriminant). Si l'on met ce dernier en évidence dans  $\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}$ , il reste précisément l'expression  $P_{xy}$ , c'est-à-dire l'expression qui, égale à zéro, exprime la condition pour que la ligne qui joint  $(x)$  et  $(y)$  soit une tangente à la conique dégénérée actuelle. Mais, à cause du facteur qui s'évanouit, nous pouvons égaler l'arc sinus au sinus lui-même, et si nous remplaçons par une nouvelle constante  $C$  le produit du facteur évanouissant par  $2ic$ , et, ensuite, si nous écrivons respectivement  $p_x^2$  et  $p_y^2$  (puisque  $p^2 = 0$  est l'équation de la conique dégénérée en coordonnées ponctuelles) au lieu de  $\Omega_{xx}$  et  $\Omega_{yy}$ , nous obtenons l'expression précédemment indiquée.

L'expression habituelle en géométrie parabolique de la distance de deux points s'en déduit immédiatement en désignant les deux points fondamentaux de la même manière que l'on représente habituellement les deux points circulaires à l'infini. Dans la notation habituelle, la droite à l'infini a pour équation : constante = 0; par conséquent  $p_x = p_y$  sont égales à une constante  $k$ . Sur cette droite, les points circulaires sont représentés en coordonnées rectangulaires comme étant les intersections de cette droite avec le couple de droites

$$x^2 + y^2 = 0.$$

La condition pour que deux points  $(x, y)$  et  $(x', y')$  soient tels que la droite qui les joint passe par un point circulaire à l'infini est alors

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = 0.$$

Par suite, la distance entre les deux points sera égale à

$$\frac{C}{k^2} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Enfin, si au lieu de  $x$  et  $y$  on prend des multiples de ces nombres, tels

que la distance de deux points situés sur l'axe des  $x$  ou sur l'axe des  $y$  soit représentée précisément par la différence des coordonnées respectives, il vient

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2};$$

c'est l'expression habituelle de la distance en coordonnées rectangulaires.

Nous n'entrerons pas ici dans plus de détails pour expliquer comment les notions de la géométrie parabolique avec ses points fondamentaux imaginaires rentrent dans les considérations générales précédentes <sup>(1)</sup>. Nous ferons seulement ressortir ce fait que, pour des points fondamentaux imaginaires, les formules trigonométriques se transforment en les formules relatives à la géométrie parabolique et que, par conséquent, la somme des angles d'un triangle est exactement égale à  $2\pi$ , tandis que pour une conique fondamentale réelle elle était plus petite, pour une conique fondamentale imaginaire plus grande que  $2\pi$ .

#### XIV.

##### DÉTERMINATION MÉTRIQUE SPÉCIALE DANS LE PLAN ET AYANT UN CONTACT EN UN POINT AVEC UNE DÉTERMINATION MÉTRIQUE GÉNÉRALE. COURBURE DE CETTE DERNIÈRE.

De même que dans le paragraphe VII, nous avons pu assigner sur la droite une détermination métrique spéciale qui, en un point et dans le voisinage de ce point, coïncidait avec une détermination métrique générale donnée, et qui avait, comme nous disions, un contact en ce point avec la détermination métrique donnée, de même nous pouvons aussi parler d'une détermination métrique spéciale dans le plan, tangente en un point à une détermination générale donnée. Cette détermination spéciale emploiera comme droite de l'infini la polaire du point donné par rapport à la conique fondamentale de la détermination métrique générale et, comme points fondamentaux, les deux points de contact des tangentes à la conique fondamentale. Alors, pour les deux déterminations métriques, avec un choix convenable des constantes, les déterminations angulaires coïncident complètement au point donné, et il en est de même aux grandeurs près d'ordre supérieur, pour la détermination des distances mutuelles de tous les différents points infiniment voisins du point donné. Les circonférences décrites

<sup>(1)</sup> Comparez CAYLEY, *loc. cit.*

dans la détermination métrique générale autour du point de contact donné comme centre, autrement dit, par conséquent, les coniques qui ont un contact avec la conique fondamentale aux deux points fondamentaux de la détermination métrique spéciale, sont aussi des circonférences relativement à cette dernière.

En particulier, la conique fondamentale elle-même qui, pour la détermination métrique générale, est le cercle de rayon infiniment grand, sera encore un cercle pour la détermination métrique spéciale tangente, mais un cercle de rayon fini. Pour la valeur de ce rayon, l'on trouve la constante  $2c$ .

En effet, sur chacune des droites passant par le point de contact donné, la détermination métrique générale donnée et la détermination métrique spéciale qui lui est tangente déterminent deux déterminations métriques jouissant de la même propriété, c'est-à-dire ayant entre elles une relation de contact. Mais les points fondamentaux de la détermination métrique générale qui se trouvent sur la droite sont les points d'intersection de la droite avec la conique fondamentale. Leur distance, mesurée d'après la détermination métrique spéciale tangente, est (paragraphe VII) égale à  $4c$ ; par conséquent, le rayon cherché est égal à  $2c$ .

Considérons maintenant les deux cas de la détermination métrique générale qui ont été traités dans les paragraphes XI et XII, et qui donnent des images des géométries elliptique et hyperbolique, c'est-à-dire les cas où la conique fondamentale est imaginaire, ou bien est réelle et nous entoure.

La détermination métrique spéciale, tangente en un point à la détermination générale, a, dans les deux cas, des points fondamentaux imaginaires puisque la polaire du point de contact ne coupe pas la conique fondamentale en des points réels. Mais ici, entre les deux modes de détermination métrique générale, il y a une différence analogue à celle qui s'est présentée au paragraphe VII pour les déterminations métriques en question, relatives à la ligne droite. Si la conique fondamentale est imaginaire, la détermination métrique spéciale devance la détermination métrique générale, c'est-à-dire que la distance d'un point au point de contact, mesurée d'après la détermination métrique spéciale, est toujours plus grande que la même distance mesurée d'après la détermination métrique générale donnée. Le contraire a lieu lorsque la conique fondamentale est réelle (<sup>1</sup>). La détermi-

---

(<sup>1</sup>) Ceci n'a lieu que pour les points à l'intérieur de la conique fondamentale; pour les points à l'extérieur, il peut y avoir aussi bien une avance qu'un retard, selon la direction dans laquelle on se déplace.

nation métrique spéciale est en retard sur la détermination métrique générale. Cette avance et ce retard respectifs de la détermination métrique spéciale sur la générale seront désignés sous le nom de *courbure* de la détermination métrique générale et l'on dira, dans le premier cas, que cette courbure est *positive*, dans le second, qu'elle est *négative*. On devra prendre comme *mesure de la courbure* l'expression qui, d'après le paragraphe VII, fournit la courbure de la détermination métrique générale relativement à une droite passant par le point de contact donné, c'est-à-dire  $-\frac{1}{4c^2}$ . Cette expression est indépendante du point de contact que l'on a choisi primitivement et de la droite que l'on a menée par ce point; d'où ce théorème :

*La mesure de la courbure de la détermination métrique générale est en tous les points la même, c'est-à-dire égale à  $-\frac{1}{4c^2}$ .*

*Elle est positive pour une conique fondamentale imaginaire (par conséquent, dans le cas de la géométrie elliptique), elle est négative pour une conique fondamentale réelle (par conséquent, dans le cas de la géométrie hyperbolique).*

*Pour le cas limite, lorsque la conique fondamentale dégénère en un couple de points imaginaires (cas particulier de la géométrie parabolique), la mesure de la courbure est égale à zéro.*

Il s'agit maintenant de démontrer que la définition que nous donnons ici de la mesure de la courbure d'une détermination métrique plane coïncide avec celle qu'a donnée Gauss pour la mesure de la courbure de variétés à deux dimensions. Il n'y a qu'une différence entre les notions de mesure de la courbure, telle qu'elle est exposée ici et dans Gauss; c'est que pour Gauss la mesure de la courbure est une propriété permanente de la figure géométrique en question, tandis qu'ici c'est seulement une propriété de la détermination métrique choisie accidentellement pour la figure donnée, le plan.

On sait que la mesure de la courbure de Gauss se calcule au moyen de l'expression du carré de l'élément d'arc

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Il s'agit ici d'abord d'établir l'expression en question. Soit, comme toujours,  $\Omega = 0$  la conique fondamentale; conservons à  $\Omega_{xx}$  sa signification primitive.  $\Omega_{x,dx}$ ,  $\Omega_{dx,dx}$  désigneront les expressions que l'on tire de  $\Omega_{xy}$ ,

$\Omega_{yy}$  en introduisant les différentielles  $dx$  à la place de  $y$ . Or, la distance de deux points  $(x)$  et  $(y)$  était égale à

$$2ic \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

Si l'on pose  $y_a = x_a + dx_a$  au lieu de l'expression ci-dessus, on aura, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$2ic \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{dx,dx} - \Omega_{x,dx}^2}}{\Omega_{xx}^2}.$$

Le carré de l'élément d'arc sera par conséquent

$$ds^2 = 4c^2 \frac{\Omega_{x,dx}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{dx,dx}}{\Omega_{xx}^2}.$$

Nous nous proposons maintenant, à l'aide d'un choix particulier de coordonnées, de ramener cette expression à une forme plus simple. Puisque la conique fondamentale relative à la détermination métrique spéciale tangente est un cercle et puisque ensuite, dans les cas en question, les points fondamentaux de cette dernière sont, comme dans la détermination métrique parabolique habituelle, des points imaginaires, nous écrirons l'équation de la conique fondamentale sous la forme habituelle de l'équation du cercle

$$x^2 + y^2 = 4c^2.$$

Cette équation se rapporte aux coordonnées  $x, y$ , qui seront mesurées d'après la détermination métrique spéciale tangente; en effet, le rayon du cercle fondamental, mesuré d'après la détermination métrique spéciale tangente est, comme le suppose la précédente équation, égal à  $2c$ .

On aura de plus

$$\begin{aligned} \Omega_{xx} &= x^2 + y^2 - 4c^2, & \Omega_{dx,dx} &= dx^2 + dy^2, \\ \Omega_{x,dx} &= x dx + y dy. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'expression pour le carré de l'élément d'arc sera

$$\begin{aligned} ds^2 &= 4c^2 \frac{(x dx + y dy)^2 - (x^2 + y^2 - c^2)(dx^2 + dy^2)}{(x^2 + y^2 - 4c^2)^2} \\ &= 4c^2 \frac{(y dx - x dy)^2 + 4c^2(dx^2 + dy^2)}{(x^2 + y^2 - 4c^2)^2}. \end{aligned}$$

Si l'on introduit ici de nouvelles variables (coordonnées polaires relatives à la détermination métrique spéciale) en posant

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

il vient

$$ds^2 = \frac{16c^4 dr^2}{(r^2 - 4c^2)^2} - \frac{4c^2 r^2 d\varphi^2}{r^2 - 4c^2},$$

qui se transforme en l'expression habituelle, en coordonnées polaires, de l'élément d'arc lorsqu'on prend la constante  $c$  infiniment grande <sup>(1)</sup>. Si l'on compare cette expression avec la formule fondamentale de Gauss,

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

alors  $F$  s'évanouit, et  $E$  et  $G$  dépendent seulement d'une variable, par exemple,  $u$ . Mais, dans cette hypothèse, on a, pour l'expression de la mesure de la courbure  $K$ , de Gauss,

$$4E^2 G^2 \cdot K = E \left( \frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 + G \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} - 2EG \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

(1) Si l'on fait  $r$  constant, il vient

$$ds = \frac{2cr}{\sqrt{4c^2 - r^2}} d\varphi.$$

Par conséquent, la circonférence d'un cercle de rayon  $r$  est égale à  $\frac{4cr\pi}{\sqrt{4c^2 - r^2}}$ .

Mais, cet  $r$  ne désigne pas autre chose que le rayon du cercle mesuré d'après la détermination métrique spéciale tangente au centre. On obtient le rayon  $\rho$ , mesuré d'après la détermination métrique générale, au moyen de la formule du texte en remplaçant  $ds$  par  $d\rho$  et en faisant  $d\varphi$  égal à zéro, d'où

$$d\rho = \frac{-4c^2 dr}{r^2 - 4c^2},$$

ou

$$r = 2c \frac{\frac{\rho}{e^c - 1}}{\frac{\rho}{e^c + 1}}.$$

Si l'on introduit cette valeur à la place de  $r$ , on obtient, pour la circonférence du cercle de rayon  $\rho$ ,

$$2c\pi \left( \frac{\rho}{e^{2c}} - c - \frac{\rho}{2c} \right),$$

formule donnée par Gauss dans sa lettre à Schumacher. La constante  $k$  employée par Gauss correspond exactement à la constante  $c$  employée ici.

En remplaçant E, G par leurs valeurs,

$$E = \frac{16c^4}{(u^2 - 4c^2)^2}, \quad G = -\frac{4c^2u^2}{u^2 - 4c^2},$$

il vient

$$K = -\frac{1}{4c^2},$$

*c'est-à-dire la même valeur que nous avons établie précédemment.*

Par conséquent, la mesure de la courbure étant entendue au sens de Gauss, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

*Suivant que nous adoptons l'hypothèse d'une Géométrie elliptique, hyperbolique ou parabolique, le plan est une surface à courbure constante, positive, négative ou nulle.*

Pour cette raison (comme il avait été indiqué au paragraphe I), en prenant comme base la détermination métrique parabolique, la Géométrie elliptique trouve son interprétation sur la sphère ou sur les surfaces qui en dérivent par déformation et la Géométrie hyperbolique trouve la sienne sur les surfaces à courbure constante négative.

## XV.

### LES RAPPORTS MUTUELS DES GÉOMÉTRIES ELLIPTIQUE, HYPERBOLIQUE ET PARABOLIQUE DANS LE PLAN.

Dans ce qui précède, nous avons vu que la métrique que suppose la Géométrie parabolique ainsi que celles que supposent les Géométries elliptique ou hyperbolique dans le plan sont comprises comme cas particuliers dans la détermination métrique projective générale. La Géométrie parabolique emploie, comme conique fondamentale, un couple de points imaginaires qu'on appelle les *points circulaires imaginaires à l'infini* (1). Le lieu des points infiniment éloignés est une droite double. La Géométrie elliptique se rapporte à une conique fondamentale proprement dite, mais qui est imaginaire. Enfin la Géométrie hyperbolique est relative

---

(1) Nommer ces points *points à l'infini* est une manière de parler qui n'est pas très exacte, car leur distance à un point quelconque situé à distance finie n'est pas infinie, mais indéterminée, puisque tous les cercles décrits d'un tel point comme centre renferment ces points.

à une conique fondamentale proprement dite, mais qui est réelle (et qui nous entoure).

Dans le voisinage du point que nous considérons, que la détermination métrique réelle soit parabolique ou hyperbolique ou elliptique, les trois Géométries coïncident. Elles ont, par conséquent, un contact en ce point; la Géométrie parabolique fournit la détermination métrique spéciale tangente pour la Géométrie elliptique comme pour la Géométrie parabolique.

Par conséquent, si l'on nous donne de fait la Géométrie parabolique, nous pouvons alors immédiatement construire une Géométrie, qui sera pour nous une image des notions de la Géométrie hyperbolique, en construisant avec une conique fondamentale réelle une détermination métrique générale qui ait au point que nous envisageons un contact avec la détermination spéciale donnée. Nous y arrivons en décrivant autour du point que nous considérons une circonférence de rayon  $2c$  et en basant sur cette circonférence une détermination métrique projective, avec la constante  $c$  pour la détermination de la distance de deux points, et la constante  $c' = \frac{\sqrt{-1}}{2}$  pour la détermination de l'angle de deux droites. Cette détermination métrique générale se rapproche d'autant plus de la détermination métrique parabolique que  $c$  est plus grand; elle coïncide avec elle lorsque  $c$  devient infini.

D'une manière tout analogue, nous construirons une Géométrie qui nous permettra de concevoir clairement comment se comporte la Géométrie elliptique. A cet effet, il suffit d'attribuer à la constante  $c$ , employée ci-dessus, une valeur imaginaire pure égale à  $c, i$ . Cela revient à placer un point, au-dessus du point de contact, à la distance  $2c, i$ , et à regarder comme distance de deux points dans le plan, l'angle, multiplié par  $c, i$ , sous lequel on verrait les deux points en les regardant du point fixe. On devra prendre pour angle de deux droites du plan l'angle sous lequel on les verrait du point fixe. La détermination métrique ainsi établie se rapproche d'autant plus exactement de la Géométrie parabolique donnée que  $c, i$  est plus grand, et elle coïncide exactement avec elle lorsque  $c, i$  devient infini.

De même, si c'étaient la Géométrie elliptique ou la Géométrie hyperbolique qui nous fussent données en réalité, on pourrait, de cette manière, se faire une image des notions respectives qu'entraîneraient avec elles les Géométries parabolique et hyperbolique ou bien parabolique et elliptique.

Maintenant, il ne nous reste plus qu'à transporter à l'espace les vérités que nous avons analysées jusqu'ici seulement pour les figures élémentaires à une et deux dimensions; c'est ce que nous ferons le plus brièvement possible.

## XVI.

## LA DÉTERMINATION MÉTRIQUE PROJECTIVE DANS L'ESPACE.

On prendra comme base de la détermination métrique générale projective dans l'espace une *surface fondamentale du second degré* arbitrairement choisie.

Alors, pour déterminer la distance de deux points, on les joindra par une ligne droite qui rencontrera la surface fondamentale en deux nouveaux points qui forment, avec les deux points donnés, un certain rapport anharmonique. *Le produit par une constante arbitraire  $c$  du logarithme de ce rapport anharmonique est ce que l'on appellera la distance des deux points donnés.*

On détermine, d'une manière analogue, l'angle de deux plans donnés. On mènera, par leur intersection, les deux plans tangents à la surface fondamentale. Ceux-ci déterminent, avec les deux plans donnés, un certain rapport anharmonique. *L'angle des deux plans est égal au produit d'une constante  $c'$ , choisie arbitrairement, par le logarithme de ce rapport anharmonique.*

Par *déplacements de l'espace* on entendra un cycle de transformations linéaires qui laissent invariable la surface fondamentale. Une surface du second degré reste invariable pour  $\infty^6$  transformations linéaires. Mais celles-ci se partagent en deux classes dont l'une comprend un *système fermé* <sup>(1)</sup> tandis que l'autre n'en comprend pas. Les deux classes peuvent être caractérisées au moyen de la manière dont se comportent les génératrices des surfaces relativement aux transformations qui les composent. Pour les transformations de la première classe, — ce sont elles que

---

(1) L'expression *un système fermé* [geschlossenes] *de transformations* correspond exactement à ce que l'on nomme, suivant l'usage, dans la théorie des substitutions, *un groupe de substitutions*. Comparez le Mémoire de MM. KLEIN et SOPHUS LIE, *Sur les transformations linéaires échangeables* (*Math. Annalen*, t. IV, p. 50, en particulier p. 55-56).

nous désignerons sous le nom de *déplacements* <sup>(1)</sup> de l'espace, — les deux systèmes de génératrices rectilignes restent comme tels invariables; dans les transformations de la deuxième classe, ces systèmes s'échangent entre eux. Il y a  $\infty^6$  déplacements, et ceux-ci laissent inaltérés les rapports métriques.

Par *sphères*, on entendra les courbes du second degré qui touchent la surface fondamentale suivant une courbe plane. Le centre de la sphère est le pôle du plan qui contient la courbe de contact. La surface fondamentale elle-même doit être regardée comme une sphère décrite autour d'un centre quelconque avec un rayon infini, etc., etc.

Si l'on considère en particulier les éléments réels de l'espace, on aura à distinguer si la surface fondamentale est imaginaire ou réelle et, dans ce dernier cas, si elle est réglée ou non.

Si la surface fondamentale est *imaginaire*, toutes les lignes droites ont une longueur finie, tous les faisceaux de plans ont une somme d'angles finie. C'est dans ce cas qu'est comprise la détermination métrique de la Géométrie *elliptique* lorsque la constante  $c'$  de la détermination angulaire est prise égale à  $\frac{\sqrt{-1}}{2}$  afin que la somme des angles du faisceau soit égale à  $\pi$ .

Quant au cas où la surface fondamentale est *réelle* et *régulée* et où elle est, par conséquent, un hyperboloïde à une nappe, nous ne nous y arrêtons pas davantage ici, car ce cas n'a aucun rapport avec les trois espèces de Géométries que nous considérons, les Géométries elliptique, hyperbolique et parabolique.

Enfin, si la surface est *réelle* et *non réglée*, nous obtiendrons alors, pour les points intérieurs à cette surface, une détermination métrique qui comprend la détermination métrique de la Géométrie *hyperbolique* lorsque nous prenons encore la constante  $c'$  égale à  $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ .

La Géométrie *parabolique* est comprise dans le cas particulier de la détermination métrique générale, qui se présente lorsque la surface fondamentale prend la forme spéciale d'une conique et, en particulier, d'une conique imaginaire. La conique fondamentale de la Géométrie parabolique

---

(1) J'ai déjà précédemment analysé ces rapports dans un Travail *Sur la mécanique des corps rigides* (*Math. Annalen*, t. IV, 3, p. 403). Je dois ajouter que M. Schering, dans son Mémoire *La gravité dans les espaces gaussiens* (*Gött. Nachrichten*, n° 15; 1870), a déjà aussi traité les déplacements de l'espace dans le sens de la Géométrie hyperbolique.

est ce que l'on nomme le *cercle imaginaire à l'infini*. C'est dans le caractère non dualistique de cette particularisation qu'éprouve la conique fondamentale qu'il faut chercher la cause des propriétés non dualistiques de la Géométrie parabolique.

On peut encore parler de la *courbure* d'une détermination métrique générale et ainsi de suite, mais ce sont là des sujets que nous ne traiterons pas, faute de place.

## XVII.

### INDÉPENDANCE ENTRE LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE ET LA THÉORIE DES PARALLÈLES.

On pourrait contre tout ce qui précède élever une objection qui, relativement au mode d'exposition employé jusqu'ici, n'est pas sans fondement, mais que l'on peut lever de suite.

En établissant la détermination métrique projective générale, nous avons d'abord procédé géométriquement en définissant la distance entre deux points, etc., comme le logarithme d'un certain rapport anharmonique, et ensuite analytiquement, en introduisant l'emploi de coordonnées homogènes. Ces deux choses, rapport anharmonique et coordonnées homogènes, tels qu'on les expose d'ordinaire, présupposent la détermination métrique parabolique, où le rapport anharmonique, de même que les coordonnées homogènes, sont définis comme étant certains rapports entre segments de droites. Par conséquent, si la détermination métrique donnée en réalité n'était pas la parabolique, on n'aurait pas le droit de parler d'abord de ces choses, et toutes les considérations précédentes n'auraient plus aucune valeur.

Mais, au contraire, on peut se convaincre que la Géométrie projective est valable, indépendamment de la question de la nature de la détermination métrique.

On pourrait arriver à le démontrer en construisant la Géométrie projective d'abord en prenant pour base la Géométrie elliptique, ensuite en prenant pour base la Géométrie hyperbolique.

On y parviendrait sans peine, comme l'on peut s'en rendre compte, en remarquant que, pour le point considéré comme faisceau de rayons et de plans dans l'espace, lorsque l'on emploie en Géométrie parabolique une détermination métrique elliptique, la Géométrie projective subsiste sans altération aucune.

Mais il est bien plus essentiel de remarquer que *la Géométrie projective peut être développée complètement en s'affranchissant absolument de la question de la détermination métrique* <sup>(1)</sup>.

[En effet, pour développer la Géométrie projective et démontrer son application dans un espace limité quelconque donné, il suffit de faire dans cet espace des constructions qui ne conduisent pas hors de cet espace et qui ne concernent que ce que l'on appelle les *relations de situation*. Les rapports anharmoniques naturellement ne doivent pas alors être définis comme des rapports de segments, puisque cela supposerait la connaissance d'une détermination métrique. Dans les *Beiträge zur Geometrie der Lage* <sup>(2)</sup>, von Staudt a donné les matériaux nécessaires pour définir un rapport anharmonique comme un pur nombre. Des rapports anharmoniques, nous pouvons ensuite nous élever aux coordonnées homogènes ponctuelles et planaires, qui ne sont pas autre chose que les valeurs relatives de certains rapports anharmoniques, comme von Staudt l'a également démontré <sup>(3)</sup>, et comme Fiedler <sup>(4)</sup> l'a récemment prouvé de nouveau. La question de savoir si, pour toutes les valeurs réelles des coordonnées, on peut aussi trouver des éléments d'espace correspondants, reste indécise. Si cela n'a pas lieu, rien n'empêche, pour répondre à ces valeurs des coordonnées, d'adjoindre aux éléments effectifs de l'espace des éléments impropres. C'est ce qui se fait en Géométrie parabolique lorsque l'on parle du plan à l'infini. Si l'on prenait pour base la Géométrie hyperbolique, c'est toute une portion d'espace que l'on aurait à adjoindre. Au contraire, dans la Géométrie elliptique, il n'y aurait lieu à aucune adjonction d'éléments impropres.]

## XVIII.

COMMENT DE LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE ON DÉDUIT LES TROIS ESPÈCES DE GÉOMÉTRIES :  
ELLIPTIQUE, HYPERBOLIQUE ET PARABOLIQUE.

[La Géométrie projective étant ainsi développée, on pourra établir la détermination métrique générale de Cayley. Celle-ci reste sans altération,

<sup>(1)</sup> A partir d'ici, nous reproduisons de nouveau entre crochets la traduction de Houël déjà citée. L. L.

<sup>(2)</sup> Paragraphe XXVII, n° 393 F. K.

<sup>(3)</sup> *Loc. cit.*, paragraphe XXIX, n° 411. F. K.

<sup>(4)</sup> *Vierteljahreschrift der naturforschenden Gesellschaft de Zurich*, t. XV, p. 2; 1871. — *Géométrie descriptive de Fiedler*, 1<sup>re</sup> édit., Teubner, Leipzig: 1871. F. K.

comme nous l'avons indiqué plus haut, lorsqu'on opère des transformations linéaires en nombre sextuplement infini, et que nous avons appelées *les déplacements de l'espace*], et cette détermination métrique peut être précisément regardée comme tirant son origine du cycle de ces transformations linéaires (paragraphe II et III).

[Passons maintenant à la considération des déplacements effectifs dans l'espace et de la détermination métrique fondée sur ces déplacements. On voit que les déplacements en nombre sextuplement infini sont autant de transformations linéaires. Ces déplacements laissent, en outre, invariable une surface, la surface des points à l'infini]. Mais, comme l'on peut le démontrer facilement, il n'y a pas de surfaces qui soient transformées en elles-mêmes par une infinité sextuple de transformations linéaires autres que les surfaces du second degré et leurs variétés. Les points à l'infini forment, par conséquent, une surface du second degré et les déplacements de l'espace sont compris dans le cycle précité de transformations linéaires en nombre sextuplement infini qui laissent invariable une surface du second degré. Pour cette raison, la détermination métrique donnée (en réalité) par les déplacements est comprise dans la détermination métrique générale projective. [Tandis que cette dernière se rapporte à une surface du second degré que l'on peut choisir à volonté, cette surface, pour la première détermination, est donnée une fois pour toutes.

L'espèce de cette surface du second degré, qui doit servir de base à la détermination métrique effective, peut être maintenant définie avec plus de précision. Remarquons qu'un plan tournant constamment autour d'un axe de rotation situé dans ce plan, à distance finie, reviendra à sa position initiale. Cela veut dire que les deux plans tangents que l'on peut mener à la surface fondamentale par une droite située à distance finie sont imaginaires; car, s'ils étaient réels, il se trouverait dans le faisceau de plans correspondant deux plans réels à l'infini (c'est-à-dire des plans formant avec tous les autres un angle infiniment grand), et alors aucune rotation continuée dans un même sens ne pourrait ramener un plan du faisceau à sa position initiale.]

Maintenant, pour que ces plans soient imaginaires ou, ce qui est la même chose, pour que le cône tangent à la surface fondamentale, ayant son sommet en un point de l'espace (qui nous soit accessible par des déplacements), soit imaginaire, on peut imaginer trois cas et rien que trois :

[1° *La surface fondamentale est imaginaire*, ce qui donne la Géométrie elliptique ;

2° *La surface fondamentale est réelle, non réglée et nous environne*. C'est l'hypothèse de la Géométrie hyperbolique ;

3° (CAS LIMITE.) — *La surface fondamentale dégénère en une courbe imaginaire*. C'est l'hypothèse de la Géométrie parabolique ordinaire.]

Nous sommes ainsi conduits précisément aux trois sortes de Géométries que l'on a établies, comme nous l'avions dit au Paragraphe I, en partant de considérations toutes différentes.

