
ÉTUDE

SUR LES

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

A UNE OU A PLUSIEURS VARIABLES,

PAR M. LÉOPOLD LEAU,

Ancien élève de l'École Normale supérieure,
Professeur agrégé au Lycée de Rennes.

INTRODUCTION.

Les équations fonctionnelles ordinaires sont des relations d'égalité entre les variables indépendantes, certaines fonctions inconnues et les valeurs qu'elles acquièrent lorsqu'on effectue, sur les variables qu'elles contiennent, des substitutions données. On sait que ces équations ont fait l'objet de travaux nombreux et extrêmement importants quand les fonctions de substitution sont d'une nature très simple. Elles ont été encore assez peu étudiées lorsqu'on laisse aux substitutions une forme plus générale.

Le problème le moins complexe qu'on peut se proposer, le problème d'Abel ⁽¹⁾, consiste dans la recherche d'une fonction $f(z)$ satisfaisant à l'équation

$$f[\varphi(z)] = f(z) + a,$$

la fonction $\varphi(z)$ et la constante a étant données.

Étudié sous des formes diverses par plusieurs géomètres ⁽²⁾, il a été ré-

⁽¹⁾ *Œuvres complètes*, t. II, p. 36.

⁽²⁾ SCHRÖDER, *Math. Annalen*, 2. Band; 1870, et 3. Band; 1871. — RAUSENBERGER, Suite de Mémoires, parus en 1881 et 1882 dans les *Math. Annalen*. — KORKINE, *Bulletin des Sciences mathématiques*; 1882. — FARKAS, *Journal de Mathématiques*; 1884.

solu, sous certaines conditions, dans le voisinage d'un point racine de $z = \varphi(z)$, par M. Kœnigs ⁽¹⁾, en même temps que d'autres problèmes qui se rattachent à celui-là.

M. Appell ⁽²⁾ a montré le lien étroit qui existe entre ces équations et les équations différentielles.

Dans sa thèse, M. Grévy a surtout exposé la résolution d'une équation fonctionnelle qui présente de curieuses analogies avec l'équation différentielle linéaire et homogène ⁽³⁾.

Il semble naturel, si l'on veut traiter d'une manière systématique ces équations fonctionnelles à substitutions générales, de chercher d'abord à établir l'existence de solutions dans des conditions aussi générales que possible, et de faire ensuite les applications les plus simples. C'est le double but du présent travail.

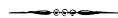
La première Partie est consacrée aux théorèmes généraux d'existence de solutions holomorphes pour un nombre quelconque de variables, question traitée, à deux reprises, par l'emploi des fonctions majorantes et par celui des approximations successives. Une étude plus particulière, relative à une substitution d'une seule variable dans un cas spécial, complète cette première Partie. Dans la seconde, qui a trait aux applications, on s'occupe surtout de l'équation d'Abel, d'abord pour une variable dans un cas non étudié, puis pour un nombre quelconque de variables ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ *Recherches sur les substitutions uniformes* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, première Partie; 1883). — *Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale*; 1884). — *Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale*; 1885).

⁽²⁾ *Acta mathematica*, t. XV.

⁽³⁾ Gauthier-Villars; 1894.

⁽⁴⁾ Les résultats de ce travail ont été en partie énoncés dans une Note parue aux *Comptes rendus* du 25 février 1895.



PREMIÈRE PARTIE.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

CHAPITRE I.

1. *Examen d'un cas préliminaire.* — La méthode employée pour ce Chapitre est celle des fonctions majorantes; aussi commencerons-nous par l'étude d'un cas particulier, dont nous étendrons ensuite les résultats au cas général.

Soit, d'une part, une fonction de z ,

$$z_1 = \varphi(z),$$

holomorphe au point x , pour lequel on a

$$x = \varphi(x),$$

et telle que $\left[\frac{d\varphi(z)}{dz} \right]_x = h$, soit inférieur à 1 en module.

Soient, d'autre part, m fonctions de z , inconnues, u_1, u_2, \dots, u_m .

Considérons le système

$$(1) \quad u_i = \sum_l A_l^i u_l^1 \quad \left(\begin{matrix} i \\ l \end{matrix} \right) = 1, 2, \dots, m,$$

où les A_l^i sont des fonctions données de z , holomorphes en x , et où u_l^1 désigne $u_l(z_1)$.

Nous nous proposons d'établir, sous des conditions déterminées, l'existence de solutions holomorphes pour ce système.

Remarquons, d'abord, que nous pouvons supposer $x = 0$; car cela revient à remplacer z par $z - x$ et $\varphi(z)$ par $\varphi(z) - x$.

Cherchons à calculer les valeurs des fonctions inconnues et de leurs dérivées à l'origine. Nous poserons $(A_l^i)_0 = \alpha_l^i$.

Si l'on veut que les $u(0)$ ne soient pas tous nuls, il faut, évidemment,

que l'on ait

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 - a_1^1 & -a_2^1 & \dots & -a_m^1 \\ -a_1^2 & 1 - a_2^2 & \dots & -a_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1^m & \dots & \dots & 1 - a_m^m \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons cette condition réalisée; il y a pour les $u(0)$ une ou plusieurs solutions, déterminées à un facteur constant près; faisons choix arbitrairement de l'une d'elles.

Dérivons j fois par rapport à z les équations (1). Si l'on observe que

$$\frac{d^s u_l^j}{dz^s} = \frac{d^s u_l^j}{dz_1^s} \left(\frac{dz_1}{dz} \right)^s + \mathbf{P},$$

\mathbf{P} ne contenant que des dérivées d'ordre inférieur à s de u_l^j , et les contenant linéairement, on voit que l'on obtient des relations linéaires et homogènes entre les fonctions u_l , u_l^j et leurs dérivées jusqu'à l'ordre j .

En remarquant que $\left(\frac{d^j u_l^j}{dz_1^j} \right)_0 = \left(\frac{d^j u_l^j}{dz^j} \right)_0$, on constate que les $\left(\frac{d^j u_l^j}{dz^j} \right)_0$ seront déterminés, et d'une manière unique, en supposant les dérivées d'ordre moindre calculées, si l'on a

$$\mathbf{D}_j = \begin{vmatrix} 1 - a_1^1 h_1^j & -a_2^1 h_1^j & \dots & -a_m^1 h_1^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1^m h_1^j & \dots & \dots & 1 - a_m^m h_1^j \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nous supposerons cette hypothèse réalisée pour toutes les valeurs entières et positives de j . S'il existe des solutions holomorphes du système (1), elles sont formées nécessairement de fonctions non toutes nulles à l'origine et admettant les développements dont le calcul vient d'être indiqué. Il reste à établir la convergence des séries obtenues et à montrer que les fonctions ainsi définies satisfont aux équations fonctionnelles.

2. *Premier emploi d'un système majorant.* — Nous comparerons, dans ce but, le système considéré au système auxiliaire suivant

$$(2) \quad v_i = \sum \mathbf{B}_l^i v_l^j,$$

où

$$\mathbf{B}_l^i = \frac{1}{m \left(1 - \frac{z}{r} \right)}, \quad \Phi(z) = \frac{hz}{1 - \frac{z}{r}} \quad \text{et} \quad v_l^j = v_l[\Phi(z)];$$

r et h sont des nombres positifs, ce dernier inférieur à 1 et supérieur à $|h_1|$.

Les v étant des fonctions inconnues de z , on satisfait à (2) en prenant

$$v_1 = v_2 = \dots = v_m = F(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{r(1-h)}}.$$

Les v sont développables en série dans un cercle de rayon $r(1-h)$. D'ailleurs, on peut calculer leurs coefficients par le procédé indiqué plus haut : nous allons comparer les développements relatifs aux systèmes (1) et (2).

Quelques calculs préliminaires sont indispensables :

Soit ζ le maximum de z_i dans un cercle de rayon R , on aura

$$\left(\frac{d^q \Phi}{dz^q} \right)_0 > \left| \frac{dz_1}{dz^q} \right|_0,$$

si $\zeta r^{q-1} < h R^{q-1}$.

On satisfera à cette inégalité en prenant r inférieur au plus petit des deux nombres $R, \frac{hR}{\zeta}$. Par exemple, si R est le rayon d'un cercle tel que $\frac{dz_1}{dz}$ reste à son intérieur inférieur à 1 en module, on aura $\zeta < R$, et il suffira de prendre r plus petit que R et que h .

Soit maintenant $(B_i^j)_0 = b_i^j$ et Δ_j le déterminant analogue à D_j . On a $\Delta_j = 1 - h^j$. Il résulte d'abord de là qu'on se trouve, avec le système (2), dans les conditions imposées au système (1).

Enfin, soit M le module maximum des A_i^j dans un cercle de rayon ρ . On aura

$$\left| \frac{d^q A_i^j}{dz^q} \right|_0 < M m \left(\frac{d^q B_i^j}{dz^q} \right)_0,$$

si $r \leq \rho$. Nous supposons donc r au plus égal au plus petit des trois nombres $R, \frac{hR}{\zeta}, \rho$.

Cela posé, désignons par C_i^j l'ensemble des termes de la $i^{\text{ème}}$ équation du système (1) dérivée j fois, qui ne contiennent pas de dérivée $j^{\text{ème}}$ des fonctions u_i et u_i^1 , par c_i^j le résultat dans C_i^j de la substitution de 0 à z .

L'expression de $\left(\frac{d^j u_1}{dz^j}\right)_0$, par exemple, sera

$$(3) \quad \frac{\begin{vmatrix} c_1^j & -a_2^1 h_1^j & \dots & -a_m^1 h_1^j \\ c_2^j & 1 - a_2^2 h_1^j & \dots & -a_m^2 h_1^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_m^j & \dots & \dots & 1 - a_m^m h_1^j \end{vmatrix}}{D_j}.$$

En employant une notation analogue pour le système auxiliaire, on a

$$(4) \quad \left(\frac{d^j v_1}{dz^j}\right)_0 = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1^j & -b_2^1 h^j & \dots & -b_m^1 h^j \\ \gamma_2^j & 1 - b_2^2 h^j & \dots & -b_m^2 h^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_m^j & \dots & \dots & 1 - b_m^m h^j \end{vmatrix}}{\Delta_j}.$$

Désignons par e_k^j et ε_k^j les coefficients respectifs de c_k^j et de γ_k^j aux numérateurs des expressions (3) et (4). On a

$$\varepsilon_1^j = 1 - \frac{m-1}{m} h^j, \quad \varepsilon_k^j = \frac{h^j}{m}.$$

Quand j croît indéfiniment, D_j tend vers 1. Ce déterminant a, pour les valeurs entières et positives de j , un minimum α en valeur absolue; et l'on a

$$|D_j| > \alpha > \alpha \Delta_j.$$

Dans les mêmes conditions, e_k^j et ε_k^j tendent vers 1, et le rapport $\frac{e_k^j}{\varepsilon_k^j}$ (pour $k > 1$) tend vers 0. Donc il existe un nombre β tel que l'on ait $\left|\frac{e_k^j}{\varepsilon_k^j}\right| < \beta$ quels que soient j et k . A chaque u correspond un pareil nombre β auquel on peut substituer le plus grand d'entre eux.

Observons enfin que les $\left(\frac{d^j v}{dz^j}\right)_0$ se présentent sous la forme d'une somme de produits de deux facteurs positifs, divisée par un nombre également positif.

Soit Q le plus grand des nombres β et Mm . Les valeurs de $\left(\frac{du_1}{dz}\right)_0$ et de $\left(\frac{dv_1}{dz}\right)_0$ sont de la forme $\frac{\mu_1}{\nu_1}, \frac{\mu_1'}{\nu_1'}$. On a, d'une part,

$$|\nu_1| > \alpha \nu_1',$$

et, d'autre part,

$$|\mu_1| < Q^2 \mu'_1,$$

puisque

$$|c| < Q|\gamma| \quad \text{et} \quad |e| < Q\varepsilon.$$

Donc

$$\left| \frac{\mu_1}{\nu_1} \right| < \frac{Q^2 \mu'_1}{\alpha \nu'_1}.$$

Si l'on passe aux dérivées secondes, il figurera dans les c des produits de dérivées des u par les A ou leurs dérivées; on aura, par suite,

$$\left| \frac{d^2 u_l}{dz^2} \right|_0 < \frac{Q^4}{\alpha^2} \left(\frac{d^2 \nu_l}{dz^2} \right)_0,$$

et généralement

$$\left| \frac{d^q u_l}{dz^q} \right|_0 < \left(\frac{Q^2}{\alpha} \right)^q \left(\frac{d^q \nu_l}{dz^q} \right)_0.$$

La série

$$u(o) + \frac{z}{1} \left(\frac{du}{dz} \right)_0 + \frac{z^2}{1.2} \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_0 + \dots$$

a ses termes respectivement plus petits en module que ceux de

$$\nu(o) + \frac{z}{1} \left(\frac{d\nu}{dz} \right)_0 \frac{Q^2}{\alpha} + \frac{z^2}{1.2} \left(\frac{d^2 \nu}{dz^2} \right)_0 \frac{Q^4}{\alpha^2} + \dots$$

Cette seconde série est convergente dans le cercle de rayon $\frac{r(1-h)\alpha}{Q^2}$; il en est donc de même des séries en u (1).

3. Comme dans toutes les questions semblables, on démontre que les fonctions u satisfont au système (1), en remarquant que les expressions obtenues en substituant ces fonctions aux fonctions inconnues, et en faisant passer tous les termes dans un même membre, sont nulles à l'origine, ainsi que leurs dérivées de tous les ordres.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si le système (1) est tel que $D_0 = 0$ et $D_j \neq 0$ pour toutes les valeurs positives et entières, il admet une solution holomorphe et non nulle en x . Elle est formée de fonctions dépendant, d'une ma-*

(1) Ce calcul est la généralisation d'un calcul effectué dans un but analogue par M. Grévy, dans son Mémoire déjà cité.

nière homogène, d'un nombre de paramètres arbitraires égal à l'ordre du premier mineur de D_0 qui est différent de 0.

4. *Étude d'une équation particulière.* — Avant d'aborder un type plus général d'équations, nous allons étudier une équation particulière qui nous servira ensuite d'équation de comparaison.

Soit

$$(5) \quad v(z) = \frac{\lambda \left(\frac{z}{r} + \frac{v_1}{r'} \right)}{1 - \frac{z}{r} - \frac{v_1}{r'}}$$

$v(z)$ désigne une fonction inconnue; on a posé

$$\Phi(z) = \frac{hz}{1 - \frac{z}{r}} \quad \text{et} \quad v_1(z) = v[\Phi(z)];$$

λ , r , r' et h sont des nombres positifs; ce dernier plus petit que 1. De plus, $\frac{\lambda}{r'} \neq 1$.

Nous allons voir qu'il existe une solution holomorphe s'annulant à l'origine. Il est, d'ailleurs, évident qu'il ne peut y en avoir qu'une.

Cherchons s'il existe une équation de la forme

$$(6) \quad f_0(z) v^2(z) + 2f_1(z) v(z) + f_2(z) = 0,$$

à coefficients holomorphes, définissant une solution de (5).

En remplaçant, dans (6), $v(z)$ par son expression en fonction de v , tirée de (5), on a

$$(5)' \quad [f_0(z)\lambda^2 - 2f_1(z)\lambda + f_2(z)] \frac{v^2(\Phi)}{r'^2} \\ + 2 \left\{ \frac{f_0(z)\lambda^2 z}{rr'} + f_1(z)\lambda \left(\frac{1}{r'} - \frac{2z}{rr'} \right) - f_2(z) \left(1 - \frac{z}{r} \right) \frac{1}{r'} \right\} v[\Phi] \\ + f_0(z) \frac{\lambda^2 z^2}{r^2} + 2f_1(z)\lambda \frac{z}{r} \left(1 - \frac{z}{r} \right) + f_2(z) \left(1 - \frac{z}{r} \right)^2 = 0.$$

Écrivons que cette équation est identique à la suivante

$$(5)'' \quad f_0(\Phi) v^2(\Phi) + 2f_1(\Phi) v(\Phi) + f_2(\Phi) = 0.$$

On en déduit le système

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{f_0 \lambda^2}{r'^2} - \frac{2f_1 \lambda}{r'^2} + \frac{f_2}{r'^2} & = g(z) f_0(\Phi), \\ \frac{f_0 \lambda^2 z}{r r'} + f_1 \lambda \left\{ \frac{1}{r'} - \frac{2z}{r r'} \right\} - f_2 \left(1 - \frac{z}{r} \right) \frac{1}{r'} & = g(z) f_1(\Phi), \\ \frac{f_0 \lambda^2 z^2}{r^2} + 2f_1 \frac{\lambda z}{r} \left(1 - \frac{z}{r} \right) + f_2 \left(1 - \frac{z}{r} \right)^2 & = g(z) f_2(\Phi), \end{cases}$$

$g(z)$ étant une fonction inconnue.

On peut résoudre ce système par rapport à f_0 , f_1 et f_2 . Soit δ la valeur du déterminant relatif à ces inconnues pour $z = 0$, et α_i^k le mineur correspondant au coefficient de f_i dans la $k^{\text{ième}}$ équation. On a

$$\delta = \frac{\lambda^3}{r'^3}, \quad \alpha_0^1 = \frac{\lambda}{r'}, \quad \alpha_1^2 = \frac{2\lambda}{r'^2}, \quad \alpha_0^3 = \frac{\lambda}{r'^3}, \quad \alpha_1^3 = \frac{\lambda^2}{r'^3}, \quad \alpha_2^3 = \frac{\lambda^3}{r'^3}.$$

Les autres α sont nuls.

D_j ayant la même signification que dans les cas précédents, on trouve

$$D_j = \left[1 - \frac{g(0)}{\delta} \frac{\lambda}{r'} h^j \right] \left[1 - \frac{g(0)}{\delta} \frac{\lambda^2}{r'^2} h^j \right] \left[1 - \frac{g(0)}{\delta} \frac{\lambda^3}{r'^3} h^j \right].$$

De là, si l'on veut pouvoir appliquer le théorème I, trois valeurs possibles pour $g(0)$: $\frac{\lambda^2}{r'^2}$, $\frac{\lambda}{r'}$ et 1. Avec la première, l'équation (6) correspondante fournit pour $v(0)$ deux racines nulles; avec la dernière, deux racines infinies. La seconde, au contraire, $\frac{\lambda}{r'}$, donne deux racines distinctes, 0 et $r' - \lambda$.

Prenons donc pour $g(z)$ une fonction holomorphe arbitraire se réduisant à $\frac{\lambda}{r'}$ pour $z = 0$. Le système (7) admettra une solution unique définie à un facteur constant près. L'équation (6) aura comme racines deux fonctions distinctes holomorphes à l'origine. La substitution (5), effectuée sur elles, les reproduit, et elle ne les transforme pas l'une dans l'autre, puisque l'une seule d'entre elles s'annule à l'origine. Par suite, chacune de ces deux fonctions vérifie l'équation (5). Donc :

THÉORÈME II. — Dans les conditions énoncées plus haut, l'équation

$$v(z) = \frac{\lambda \left\{ \frac{z}{r} + \frac{v\left(\frac{hz}{1-\frac{z}{r}}\right)}{r'} \right\}}{1 - \frac{z}{r} - \frac{v\left(\frac{hz}{1-\frac{z}{r}}\right)}{r'}}$$

admet une solution holomorphe et une seule s'annulant à l'origine.

Remarque. — L'indétermination trouvée pour $g(z)$ est naturelle, car les coefficients de l'équation (6) ne sont évidemment déterminés qu'à une fonction près.

5. *Cas général.* — Nous n'avons considéré jusqu'ici que quelques types préliminaires d'équations qui ne contenaient que des fonctions dépendant d'un seul argument. Nous allons maintenant utiliser les résultats acquis pour étudier des équations beaucoup plus générales où figurent des fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Soient les substitutions

$$x_1^{(j)} = \varphi_{1j}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \dots, \quad x_n^{(j)} = \varphi_{nj}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

où les fonctions φ_{sj} sont des fonctions données, holomorphes, des variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n au point a_1, a_2, \dots, a_n et qui se réduisent respectivement à a_1, a_2, \dots, a_n en ce point. Nous désignerons généralement par $z^{(j)}$ le résultat de la substitution de $x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}$ à x_1, \dots, x_n dans une fonction z quelconque de x_1, x_2, \dots, x_n .

Soit, d'autre part, le système de m équations

$$u_i = \mathcal{F}_i(x_1, \dots, x_n; u_1^{(1)}, \dots, u_m^{(1)}, \dots; u_1^{(p)}, \dots, u_m^{(p)}),$$

que nous écrivons symboliquement

$$(8) \quad u_i = \mathcal{F}_i(x_s, u_l^{(k)}) \quad \left(\begin{matrix} i \\ l \end{matrix} \right) = 1, 2, \dots, m),$$

où les u sont des fonctions inconnues de x_1, x_2, \dots, x_n ; les \mathcal{F}_i des fonctions données, holomorphes, des variables x_1, x_2, \dots, x_n , des quantités $u_l^{(k)}$ au voisinage du point

$$x_1 = a_1, \quad \dots, \quad x_n = a_n, \quad u_l^{(k)} = b_l,$$

pour lequel on a les égalités

$$b_i = \mathcal{F}_i(a_s, b_l).$$

On peut chercher à calculer par différentiation des équations (8) les dérivées des fonctions inconnues, au point α , c'est-à-dire pour les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des variables.

Soit D_α le déterminant, défini au signe près, des inconnues lorsqu'on veut déterminer de cette manière les dérivées d'ordre α , celles des ordres précédents étant supposées connues.

Nous établirons le **théorème fondamental** dont voici l'énoncé :

THÉORÈME III. — *Si l'on a pris pour les dérivées des u , jusqu'à l'ordre r inclusivement, un système de valeurs S vérifiant les équations dérivées, et si D_α est différent de 0 pour toutes les valeurs de α supérieures à r , il existe au point a une solution holomorphe et une seule des équations (8), formée de fonctions u_i qui se réduisent en ce point aux quantités b_i et dont les dérivées prennent en ce point les valeurs du système S , dès que l'une ou l'autre des conditions suivantes se trouve réalisée.*

Première condition. — On a

$$\left| \frac{\partial \varphi_{sj}}{\partial x_k} \right|_{x_1=a_1, \dots, x_n=a_n} < \frac{1}{n}$$

pour toutes les valeurs de s, j et k .

Deuxième condition. — On a

$$\left| \frac{\partial \varphi_{sj}}{\partial x_s} \right|_{x_1=a_1, \dots, x_n=a_n} < 1$$

et

$$\left(\frac{\partial \varphi_{sj}}{\partial x_k} \right)_{x_1=a_1, \dots, x_n=a_n} = 0$$

lorsque $k \neq s$.

6. Comme dans le cas d'une variable, on peut supposer, sans nuire à la généralité, que les a et les b sont nuls. C'est ce qu'on fera désormais.

Nous allons nous placer dans l'hypothèse où la première condition est réalisée.

Toutes les dérivées des u étant supposées connues à l'origine jusqu'à l'ordre $\alpha - 1$, prenons les dérivées des équations (8) jusqu'à l'ordre α . Posons

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial u_k} \right)_0 = a_{kli}, \quad \left(\frac{\partial x_{rk}}{\partial x_s} \right)_0 = h_{rsk}.$$

dans l'équation (9); on a

$$c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; k} = \frac{\alpha_1! \dots \alpha_n!}{\beta_1! \dots \beta_n!} b_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; k}.$$

Si l'on remarque que $\frac{\partial^\alpha u_{lk}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}$ est égal à $\frac{\partial^\alpha u_{lk}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}$ à l'origine, et si l'on désigne par $d_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; l; i}$ le coefficient de $\left(\frac{\partial^\alpha u_l}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}\right)_0$, dans l'équation (9), on voit que

$$d_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; l; i} = \sum^k a_{kli} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; k}.$$

Par suite, l'équation considérée devient

$$(10) \quad \left(\frac{\partial^\alpha u_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)_0 - \sum^l d_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; l; i} \left(\frac{\partial^\alpha u_l}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}\right)_0 = \mathfrak{C}_i.$$

Nous allons adopter un certain ordre dans la manière d'écrire les équations dérivées, et les dérivées dans chacune de ces équations. Nous mettrons d'abord les dérivées de u_1 , puis celles de u_2 , etc., jusqu'à u_m ; lorsqu'il s'agira de dérivées d'une même fonction, par exemple de

$$\frac{\partial^\alpha u_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \frac{\partial^\alpha u_i}{\partial x_1^{\alpha'_1} \partial x_2^{\alpha'_2} \partial x_3^{\alpha'_3} \dots \partial x_n^{\alpha'_n}},$$

la première sera celle où $\alpha_3 > \alpha'_3$.

Cela posé, j'appelle D_α le déterminant des inconnues dans les équations d'ordre α .

Il est indispensable d'étudier D_α et ses mineurs.

7. *Le déterminant D_α .* — Le degré μ_α de D_α est $\frac{m \cdot n \cdot (n+1) \dots (n+\alpha-1)}{1 \cdot 2 \dots \alpha}$.

Tous ses éléments peuvent être considérés comme formés d'une somme de deux termes dont le premier est, soit 1, s'il y figure explicitement, soit 0. Développons alors D_α en une somme de déterminants, en prenant dans chaque colonne, soit la première partie, soit la seconde. Si l'on choisit d'abord 1 dans toutes les colonnes, on a un déterminant égal à 1. Cherchons une limite supérieure de la somme des modules de tous les autres.

Soit h' un nombre positif au moins égal aux modules des h_{rsk} ; on a

$$|b_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; k}| \leq \frac{\alpha!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} h'^\alpha.$$

Soit aussi

$$\sum^k |a_{kli}| < M$$

pour toutes les valeurs de l et de i ; il vient

$$|d_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; l}| < \frac{M \alpha!}{\beta_1! \dots \beta_n!} h'^{\alpha}.$$

Si l'on suppose $nh' = h'' < 1$, il existera ⁽¹⁾ un nombre fixe positif M_1 , tel que l'expression précédente soit constamment inférieure à $M_1 h''^{\alpha}$; nous obtenons ainsi une limite supérieure du module des éléments des déterminants envisagés.

En prenant l'unité dans j colonnes, on a $C_{\mu_{\alpha}}^j$ déterminants (C_r^s désignant le nombre des combinaisons complètes de r objets s à s). Donc

$$|1 - D_{\alpha}| < \mu_{\alpha}! \sum_0^{\mu_{\alpha}-1} \frac{(M_1 h''^{\alpha})^{\mu_{\alpha}-j}}{j!}.$$

On peut supposer α supérieur au premier entier ω tel que

$$M_1 h''^{\omega} < 1.$$

Par suite, l'expression précédente est plus petite que

$$\mu_{\alpha}! \sum_0^{\mu_{\alpha}-1} \frac{h''^{(\alpha-\omega)(\mu_{\alpha}-j)}}{j!}.$$

Le terme de cette suite, relatif à j , est inférieur au suivant, si

$$j+1 \leq \frac{1}{h''^{(\alpha-\omega)}},$$

et cette hypothèse sera constamment vérifiée pour tous les termes, dès que l'on aura

$$\mu_{\alpha} < \frac{1}{h''^{(\alpha-\omega)}}.$$

Par suite, à partir d'une certaine valeur de α , on pourra écrire

$$\mu_{\alpha}! \sum_0^{\mu_{\alpha}-1} \frac{h''^{(\alpha-\omega)(\mu_{\alpha}-j)}}{j!} < \mu_{\alpha}^2 h''^{(\alpha-\omega)}.$$

⁽¹⁾ Car si l'on pose $\alpha = n\alpha' + \alpha''$, $0 < \alpha'' < n$, l'expression considérée est inférieure à $\frac{M \alpha!}{(\alpha'!)^n} h'^{\alpha}$.

Il en résulte que D_α tend vers 1 quand α croît indéfiniment; c'est là le point qu'on voulait mettre en évidence.

8. *Mineurs du premier ordre de D_α .* — Soit d'abord un mineur relatif à un élément de la diagonale principale. On peut le développer comme on a développé D_α . Toutes les fois que l'on prend 1 dans $j - 1$ colonnes de ce mineur, on obtient les mêmes résultats qu'en prenant 1 dans j colonnes de D_α . Par suite, si on laisse de côté le déterminant qui se réduit à 1, la somme des valeurs absolues des autres est inférieure à celle qu'on vient d'évaluer plus haut. On en déduit qu'il existe une valeur de α telle que, pour toute valeur supérieure, les mineurs du premier ordre de D_α , dont il s'agit, diffèrent de 1 d'une quantité inférieure en module à un nombre positif fixe arbitrairement choisi.

Le même raisonnement s'applique aux mineurs du deuxième ordre, relatifs à deux éléments de la diagonale principale.

Passons maintenant aux autres mineurs du premier ordre, et considérons celui qui est relatif à la ligne ξ et à la colonne η . Si on le développe par rapport à la colonne ξ de D_α , et si l'on désigne par $\mathfrak{a}_\eta^{q'}$ l'élément de D_α qui appartient à la ligne q et à la colonne q' , par $D_{r's}$ le mineur du second ordre de D_α obtenu en supprimant les lignes r et s et les colonnes r' et s' , le développement se présentera sous la forme

$$(-1)^{\xi+\eta-1} \mathfrak{a}_\eta^\xi D_{\eta\xi}^{\eta\xi} + \sum \mathfrak{a}_{\eta'}^\xi D_{\xi\eta'}^{\eta\xi} \varepsilon_{\eta\xi} \quad \left(\varepsilon = \pm 1; \eta' \neq \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right).$$

Son module est plus petit que

$$M_1 h'^{\alpha} \left\{ |D_{\eta\xi}^{\eta\xi}| + \sum |D_{\xi\eta'}^{\eta\xi}| \right\}.$$

Un terme quelconque de l'un des déterminants $D_{\xi\eta'}^{\eta\xi}$ se déduit d'un terme quelconque du déterminant positif où l'on prend \mathfrak{a}_ξ^η que l'on remplace par 1, et un terme de la colonne ξ , autre que \mathfrak{a}_η^ξ , que l'on remplace également par 1. Ces termes constituent une partie de ceux que l'on obtient en ne prenant pas 1 dans la colonne η , ni dans la colonne ξ , ni dans toutes les autres à la fois, et en substituant ensuite 1 aux termes appartenant aux colonnes η et ξ .

Le module d'un terme de cet ensemble obtenu en prenant 1 dans j colonnes de D_α est inférieur à

$$(M_1 h'^{\alpha})^{\mu_\alpha - j - 2}.$$

Donc

$$\sum |D_{\xi r'}^{\eta \xi}| < \sum_0^{\mu_\alpha - 3} C_{\mu_\alpha - 2}^j (\mu_\alpha - j - 1)! (M_1 h' \alpha)^{\mu_\alpha - j - 2}.$$

En raisonnant comme plus haut, on établit facilement que ces sommes et, par suite, les mineurs considérés tendent simultanément vers 0, quand α croît indéfiniment.

9. *Emploi d'un système majorant.* — Le système auxiliaire dont nous ferons usage est le suivant :

$$(11) \quad v_i = \frac{\lambda}{1 - \frac{z}{r} - \frac{p}{r'} \sum v_i \left(\frac{hz}{1 - \frac{z}{r}} \right)} - \lambda = \lambda \mathcal{G}(z, v_i'),$$

où z désigne $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ et où les fonctions de substitution sont toutes $\frac{hz}{1 - \frac{z}{r}}$; λ et h sont des nombres positifs, ce dernier plus petit que 1.

Il est naturel de chercher une solution formée de fonctions égales et ne dépendant que de z . La fonction unique inconnue vérifiera l'équation

$$v = \frac{\lambda}{1 - \frac{z}{r} - \frac{pm}{r'} v \left(\frac{nhz}{1 - \frac{z}{r}} \right)} - \lambda.$$

On sait, en vertu du théorème II, qu'il existe une solution holomorphe de cette équation, nulle à l'origine, dès que $r' \neq \lambda pm$.

10. Étudions les relations qui permettraient de calculer les dérivées successives des fonctions v .

Δ_α , $\delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; t; i}$ désignant des quantités analogues à

$$D_\alpha \quad \text{et} \quad d_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; t; i},$$

on a d'abord

$$\delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; t; i} = \frac{\alpha!}{\beta_1! \dots \beta_n!} \frac{p\lambda}{r'} h^\alpha.$$

Nous savons que Δ_α tend vers 1, quand α croît indéfiniment; je dis que Δ_α est $\neq 0$ dès que $\alpha > 1$. Envisageons, par exemple, le système

$$\mathcal{Y}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; i} - \sum_{\beta, t'} \delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; t; i} \mathcal{Y}_{\beta_1, \dots, \beta_n; t} = 0,$$

où les y sont les inconnues. Il est aisé de voir qu'il admet une solution unique. Les δ ne dépendant que des β , la comparaison de deux équations où les α restent les mêmes montre que

$$y_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; i} - y_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; i'} = 0.$$

Deux équations relatives à des permutations différentes des α donnent ensuite

$$y_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} - y_{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n} = 0.$$

Le système se réduit par suite à

$$y \left[1 - \frac{mp\lambda}{r'} (hn)^\alpha \right] = 0.$$

Si donc on suppose $mp\lambda < r'$ et $nh < 1$, Δ_α est différent de 0. D'ailleurs, il se réduit à 1, quand on fait tendre h vers 0 : donc il est positif.

En désignant par Θ_i le terme connu du deuxième membre de la $i^{\text{ème}}$ équation relative à l'ordre α , du système auxiliaire (11), le numérateur d'une inconnue, lorsqu'on calcule les dérivées des φ , se présente sous la forme d'un polynôme, dont les termes sont le produit d'un Θ_i pour un mineur du premier ordre de Δ_α , affecté du signe convenable. Je dis que ces mineurs, affectés de leur signe, sont tous positifs.

1° Mineur relatif à un élément de la diagonale principale. Nous savons que ces mineurs tendent vers 1, soit quand, h étant fixe, α croît indéfiniment, soit quand, α étant constant, h tend vers 0.

Considérons l'un d'eux, par exemple celui qui est relatif au premier élément. On prouve qu'il est positif en constatant que le système

$$y_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; i} - \sum^{\beta_1, \dots, \beta_n} \delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; i; i'} y_{\beta_1, \dots, \beta_n; i} = 0,$$

où ne figurent ni $y_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; i}$, ni $\delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; i; i'}$, ni les $\delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; i; i'}$, admet une solution unique.

2° Mineur relatif à un élément n'appartenant pas à la diagonale principale.

Un pareil mineur peut s'écrire

$$\alpha! \frac{p\lambda h^\alpha}{r'} \left\{ \frac{\Delta_{\eta\xi}^{\eta\xi}}{\beta_1! \dots! \beta_n!} + \sum \varepsilon_{\eta\xi} \frac{\Delta_{\xi\eta'}^{\eta\xi}}{\beta_1! \dots! \beta_n!} \right\} \quad (\varepsilon_{\eta\xi} = \pm 1),$$

les Δ étant les mineurs du second ordre de Δ_α .

Dans la somme, les $\Delta_{\xi\eta}^{\eta\xi}$ contiennent au moins h^α en facteur; donc, quand h tend vers 0, la quantité entre crochets tend vers $\frac{1}{\beta_1! \dots! \beta_n!}$. Je dis qu'elle ne s'annule pas. Ce point s'établit en considérant un système analogue aux précédents, où la ligne ξ est supprimée, ainsi que l'inconnue relative à la colonne η ; et il en résulte que le mineur est positif.

11. Nous allons maintenant comparer les développements relatifs aux systèmes (8) et (11).

Les expressions des dérivées correspondantes de fonctions de l'un et de l'autre système se présentent sous forme de fractions analogues. Comparons d'abord les déterminants qui y figurent.

Les dénominateurs D_α et Δ_α tendent vers 1, quand α croît indéfiniment, et Δ_α est positif. Il existe donc un nombre H , tel que l'on ait

$$\left| \frac{D_\alpha}{\Delta_\alpha} \right| > \frac{1}{H} \quad \text{pour } \alpha \geq 1.$$

Aux numérateurs figurent les mineurs du premier ordre de D_α et de Δ_α . Les rapports $\left| \frac{D_\eta^\eta}{\Delta_\eta^\eta} \right|$ tendent vers 1 et, n'étant jamais infinis, admettent un maximum. De même, on a

$$\left| \frac{D_\xi^\eta}{\Delta_\xi^\eta} \right| < \frac{M_1 r'}{p\lambda} \left(\frac{h'}{h} \right)^\alpha \frac{|D_{\eta\xi}^{\eta\xi}| + \Sigma |D_{\xi\eta'}^{\eta\xi}|}{\Delta_{\eta\xi}^{\eta\xi} + \Sigma \varepsilon_{\eta'\xi} \Delta_{\xi\eta'}^{\eta\xi}},$$

et si $h' \leq h$, les $\left| \frac{D_\xi^\eta}{\Delta_\xi^\eta} \right|$ ont un maximum. J'appelle H , une limite supérieure du module des rapports des mineurs du premier ordre de D aux mineurs correspondants des Δ .

Soit maintenant \varkappa le maximum des modules $\mathfrak{F}_i(x, u_i^k)$ dans des cercles de rayons $r_i, r_i^{(k)}$, à l'intérieur desquels elles sont supposées holomorphes. Si $r < r_i, r' < r_i^{(k)}$, le module du rapport, à l'origine, d'une dérivée quelconque de \mathfrak{F}_i à la dérivée correspondante de \mathcal{G} sera inférieur à $\frac{\varkappa}{\lambda}$. Je pose

$$\frac{\varkappa}{\lambda} = K.$$

Enfin, les fonctions de substitution du système (11), qui sont toutes

égales à

$$\Phi = \frac{hz}{1 - \frac{z}{r}},$$

peuvent être supposées majorantes pour les φ .

Il reste à examiner les coefficients des déterminants qui figurent aux numérateurs. Soit, par exemple, un coefficient quelconque relatif au premier système. Il est formé de facteurs de la nature suivante :

- 1° Dérivées des \tilde{x}_i par rapport aux x et aux u_{lk} ;
- 2° Dérivées des φ ;
- 3° Dérivées des u_{lk} par rapport aux x_{rk} .

Ce dernier produit est de la forme

$$\prod_{l,r,k} \left(\frac{\partial u_{lk}}{\partial x_{rk}} \right)_0^{e_{l,r,k;1}} \dots \left(\frac{\partial^q u_{lk}}{\partial x_{lk}^{t_1} \partial x_{2k}^{t_2} \dots \partial x_{nk}^{t_n}} \right)_0^{e_{l,r,k;t_1, \dots, t_n; q}}.$$

Appelons *ordre de ce produit* la somme des produits de chaque indice de dérivation par la somme des exposants des dérivées relatives à cet indice. Je dis que l'ordre est au plus égal à α dans le calcul des dérivées d'ordre α .

Il est, en effet, facile de constater qu'il en est ainsi au début et que cette règle, supposée exacte jusqu'à une certaine valeur de α , se vérifie encore pour la valeur suivante.

12. Ces calculs préliminaires effectués, supposons que les équations (9) permettent de calculer les dérivées jusqu'à l'ordre σ , puis que $D_{\sigma+1}$, $D_{\sigma+2}$, ..., soient tous différents de 0. Je considère les racines $2\alpha - 1$ du rapport des modules des dérivées ainsi calculées, d'ordre α , à celles du système auxiliaire, et j'appelle L le plus grand de ces nombres.

Supposons qu'il existe un nombre P tel que, jusqu'à un certain ordre, le module du rapport des dérivées des fonctions inconnues d'ordre j à celles des fonctions de comparaison soit inférieur à P^{2j-1} , nous allons constater que, moyennant une condition très simple, cette inégalité subsistera pour l'ordre suivant.

Soit \mathcal{Q} un coefficient quelconque d'un mineur de $D_{\alpha+1}$ à l'un des numérateurs, Π le produit correspondant dans le système auxiliaire. Soient e_q la somme des exposants des dérivées d'ordre q des fonctions u dans \mathcal{Q} , et ω

ce que nous avons appelé l'ordre de ce produit, c'est-à-dire

On a
$$e_1 + 2e_2 + \dots + qe_q + \dots$$

$$\left| \frac{\Phi}{\Pi} \right| < P^{e_1 + 3e_2 + \dots + (2q-1)e_q + \dots}$$

Or, on sait que $\omega \leq \alpha + 1$: donc

$$\left| \frac{\Phi}{\Pi} \right| < P^{2(\alpha+1)-2}.$$

Par suite, le module du rapport de deux dérivées correspondantes d'ordre $\alpha + 1$ est inférieur à $\frac{H}{K} P^{2(\alpha+1)-2}$.

Si donc on prend pour P le plus grand des deux nombres L , $\frac{H}{K}$, K , la propriété qu'il s'agissait d'établir existera.

Cela posé, si la solution du système auxiliaire est holomorphe dans un cercle de rayon R , les séries analogues relatives au système proposé le sont aussi dans un cercle de rayon $\frac{R}{P^2}$. Elles constituent alors évidemment une solution des équations données.

13. Il est bon d'observer que la démonstration précédente peut s'appliquer dans d'autres circonstances. Les dérivées des fonctions inconnues et des fonctions de comparaison se présentaient sous la forme

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial \dots} = \frac{A_1 X_1 + \dots + A_s X_s}{D_\alpha}, \quad \frac{\partial^\alpha v}{\partial \dots} = \frac{B_1 Y_1 + \dots + B_s Y_s}{\Delta_\alpha}.$$

Les hypothèses faites sur les dérivées des φ ont servi à démontrer que

$$\left| \frac{D_\alpha}{\Delta_\alpha} \right| > \frac{1}{H} \quad \text{et} \quad \left| \frac{A}{B} \right| < H_1.$$

Quand ces propriétés subsisteront et que les Φ seront encore des fonctions majorantes pour les φ , les raisonnements qui ont été faits continueront à être valables.

14. Il faut nous placer, à présent, dans la deuxième hypothèse prévue par le théorème III. Rappelons que l'on suppose

$$|h_{rrk}| < 1 \text{ quels que soient } r \text{ et } k,$$

et

$$h_{rsk} = 0 \quad \text{pour } s \neq r.$$

En reprenant les notations précédentes, on voit que, si l'on n'a pas

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_n = \beta_n,$$

$d_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; t; i}$ est nul; et que

$$d_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t; i} = \sum^k a_{k/i} h_{1/k}^{\alpha_1} \dots h_{n/k}^{\alpha_n}.$$

h' désignant un nombre positif, inférieur à 1, et au moins égal en module aux $h_{rr'h}$, et M étant une certaine constante, on aura

$$|d_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t; i}| < M h'^{\alpha}.$$

On constate facilement que

$$|1 - D_{\alpha}| < (1 + m M h'^{\alpha})^{\nu_{\alpha} - 1},$$

et que, par suite, D_{α} tend vers 1 quand α croît indéfiniment.

Les mineurs relatifs aux éléments de la diagonale principale tendent simultanément vers 1 dans les mêmes conditions. Quant aux autres, s'ils sont relatifs à un élément supposé nul, ils sont identiquement nuls; et, dans le cas contraire, ils sont inférieurs en module à $M h'^{\alpha} \zeta_{\alpha}$, ζ_{α} ayant 1 pour limite.

On prendra comme système de comparaison

$$v_i = \frac{\lambda}{1 - \frac{z}{r} - \frac{p}{r^i} \sum v_l [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]} - \lambda,$$

où l'on a

$$z = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$\Phi_s = h x_s + \frac{h z^2}{1 - \frac{z}{r}} \quad \text{avec} \quad h' \leq h < 1.$$

En opérant comme plus haut, on est conduit à considérer l'équation

$$v = \frac{\lambda}{1 - \frac{z}{r} - \frac{pm}{r^i} v [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]} - \lambda.$$

Elle admet une solution ne dépendant que de z , ainsi qu'il résulte du théorème II; et cela suffit à établir la proposition que nous avons en vue.



CHAPITRE II.

MÊME QUESTION TRAITÉE PAR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

1. Dans son Mémoire (1) *Sur une classe de transcendentes nouvelles*, M. Picard a employé les méthodes d'approximations successives, si fécondes dans les applications aux équations différentielles, pour étudier un système d'équations fonctionnelles, en faisant observer qu'on parviendrait certainement, par le même moyen, à établir l'existence d'autres classes de fonctions. Nous allons reprendre, à ce point de vue, les questions traitées dans le Chapitre précédent. Le procédé qui a été suivi alors présentait certaines analogies avec des démonstrations relatives aux équations aux dérivées partielles. Les raisonnements vont cependant se présenter d'une manière plus naturelle par l'emploi des approximations successives.

2. *Rappel d'un théorème général.* — Le théorème suivant, qui est classique (1), sert de base à la méthode :

Si les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_q, \dots$ des variables x_1, \dots, x_q sont holomorphes dans certaines aires (A) avec des rayons de convergence admettant un minimum différent de 0; et si, dans les aires (A) accrues d'anneaux dont l'épaisseur n'est nulle en aucun point, les maxima des modules de ces fonctions forment une série convergente, la série

$$f_1 + f_2 + \dots + f_q + \dots$$

est holomorphe dans les aires (A).

3. *Choix d'une loi d'approximation.* — Reprenons les notations du Chapitre I, n° 5, et le système

$$(1) \quad u_i = \mathfrak{F}_i(x_s, u_i^{(k)}),$$

(1) *Acta mathematica*; 1894.

(2) Consulter MÉRAY, *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques*; 1^{re} Partie, p. 231.

Il faut maintenant prouver : 1° que l'on peut résoudre les systèmes (4) ou (5); 2° que les suites des fonctions δ satisfont aux conditions du théorème rappelé plus haut; 3° que les séries

$$u_{i_1} + \delta_{i_2} + \delta_{i_3} + \dots$$

vérifient le système (1).

4. *Résolution des équations d'approximation.* — Posons, pour simplifier,

$$(6) \quad \delta_{it} = \sum_{k,t} a_{kit} \delta_{it}^{(k)} + G_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Les G_i étant supposés holomorphes et nuls à l'origine, et de plus connus, il est d'abord facile de voir qu'on peut résoudre les équations (6), où t a une valeur fixe. Le calcul des dérivées des δ_{it} à l'origine peut s'effectuer, puisque, par hypothèse, D_α est différent de 0. En outre, et c'est là le point important, *il existe une constante P, indépendante des fonctions G_i , telle que le module du rapport des coefficients des δ aux coefficients des termes de même degré des G soit inférieur à P.* En effet, les dérivées des δ d'ordre α se présentent à l'origine sous la forme de fractions dont le dénominateur est D_α et le numérateur une somme de produits de deux facteurs, l'un étant un mineur du premier ordre de D_α , l'autre une dérivée d'une fonction G de l'ordre considéré. Nous savons que D_α tend vers 1 pour α infini. Soit N le maximum des modules des coefficients des G des termes de degré α , et plaçons-nous dans le premier cas indiqué au théorème III du Chapitre I. Le coefficient de $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ d'un δ sera inférieur en valeur absolue à

$$\frac{\varepsilon_\alpha \alpha_1! \dots \alpha_n! N + \sum \frac{M \alpha! h^{\alpha} \varepsilon_\alpha}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_n!} \times \beta_1! \beta_2! \dots \beta_n! N}{\alpha_1! \dots \alpha_n! |D_\alpha|}$$

ou bien à

$$N \varepsilon_\alpha \frac{1 + M_1 \mu_\alpha h^{\alpha}}{|D_\alpha|},$$

ε_α étant une quantité positive qui a 1 pour limite, comme cela ressort des calculs faits sur D_α et ses mineurs. La proposition est donc établie, puisque $M_1 \mu_\alpha h^{\alpha}$ tend vers 0. Le même résultat est immédiat si l'on considère le second cas au lieu du premier. Observons enfin que ce qui précède s'applique aussi bien aux u_{i_1} qu'aux δ . Ainsi donc, on peut résoudre les équations (5).