SUR LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ.

PREMIER MÉMOIRE,

PAR

EUGÈNE COSSERAT,
Professeur à la Faculté des Sciences
de l'Université de Toulouse.

FRANÇOIS COSSERAT,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées,
attaché à la Cie des chemins de fer de l'Est.

INTRODUCTION.

On sait quel puissant instrument de découverte a été le *trièdre de référence mobile* dans la théorie des surfaces, entre les mains de Ribaucour (1) et de M. Darboux (2), et l'on peut voir par les *Leçons de Cinématique* de M. Kœnigs (3) que son introduction dans la *Mécanique des solides invariables* n'est pas moins heureuse. Nous nous sommes proposé d'étendre l'emploi de ce trièdre à l'étude des *corps déformables*, et nous avons été ainsi conduits, dans plusieurs questions importantes, à des résultats qui nous paraissent nouveaux.

Nous avons dû reprendre l'examen des équations ordinaires de la théorie de l'Élasticité, et nous avons été amenés à remonter aux équations plus générales qui sont dues principalement à Lord Kelvin (4). Nous avons pu

(1) Consulter en particulier : RIBAUCOUR, *Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle* (*Mémoires couronnés* et *Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale de Belgique*, t. XLIV; 1881). — *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. VII; 1891).

(2) G. DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. I, II, III, IV; 1887 à 1896.

(3) G. KŒNIGS, *Leçons de Cinématique professées à la Faculté des Sciences de Paris*, t. I, 1er fascicule; 1895.

(4) W. THOMSON, *General Theory of the Equilibrium of an Elastic Solid* (*Mathematical and Physical Papers*, vol. III, p. 386 et suiv.).

rattacher cette généralisation à la notion du ds^2 de l'espace, et l'on verra par là combien devient utile le trièdre de référence mobile.

On ne trouvera pas, dans ce premier Mémoire, les résultats nouveaux que nous annonçons plus haut, et l'on nous pardonnera d'avoir fait d'abord une exposition dont certaines parties sont bien connues; mais nous avons cru qu'il n'était pas sans intérêt de présenter, sous l'aspect que leur donne la notion précédente, les principes de la théorie de l'Élasticité.

Notre travail est divisé en quatre Chapitres.

Dans le premier, nous avons repris d'une façon assez complète, quoique concise peut-être, l'étude de la déformation d'un milieu continu. Nous partons de la définition actuellement adoptée pour les composantes de cette déformation; mais on remarquera tout ce qu'elle contient d'arbitraire, et combien la notion seule de l'élément linéaire de l'espace permettrait de développer cette théorie préliminaire d'une manière plus systématique; nous aurons l'occasion de revenir plus tard sur ce point.

La notion du ds^2 correspond au procédé qui, dans la Mécanique rationnelle, consiste à substituer à un corps naturel une distribution continue de matière. Un corps continu étant rapporté à un système de coordonnées rectangulaires x, y, z, et u, v, w désignant les projections du déplacement d'un point (x, y, z), le corps possède, après sa déformation par un système de forces extérieures, un élément linéaire dont le carré

$$(dx + d\mathrm{u})^2 + (dy + d\mathrm{v})^2 + (dz + d\mathrm{w})^2$$

est de la forme

$$(1 + 2\varepsilon_1)\,dx^2 + (1 + 2\varepsilon_2)\,dy^2 + (1 + 2\varepsilon_3)\,dz^2 + 2\gamma_1\,dy\,dz + 2\gamma_2\,dz\,dx + 2\gamma_3\,dx\,dy.$$

Les recherches de Lamé, de Bonnet, de M. Lipschitz et de M. Darboux, sur la théorie des coordonnées curvilignes et sur la théorie des surfaces, nous fournissent les renseignements les plus essentiels sur les six expressions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, qui ne sont autres que les six éléments par lesquels on a l'habitude de caractériser la déformation dans la théorie de l'Élasticité.

On observera que nous avons séparé dans ce Chapitre l'étude générale de la déformation de celle de la déformation infiniment petite, et que les propositions classiques relatives à cette dernière sont rattachées à leur véritable origine par la considération du *système auxiliaire de M. Darboux* (1).

Dans le Chapitre II, nous avons repris la théorie de l'effort à l'intérieur d'un milieu continu, en admettant les équations ordinaires, qui, on le remarquera, correspondent à la forme donnée par Euler aux équations de l'Hydrodynamique. Mais ces dernières ont reçu de Lagrange une autre forme dont l'analogue existe également dans la théorie de l'Élasticité; nous montrons comment cette seconde forme se retrouve dans les systèmes d'équations considérés par plusieurs géomètres, en particulier par Kirchhoff (2) et par M. Boussinesq (3); le lien entre ces systèmes s'établit très simplement au moyen de six nouvelles auxiliaires, que nous désignons par P_1, P_2, P_3, U_1, U_2, U_3, qui s'expriment aisément en fonction des N_i, T_i de Lamé, et inversement. Il nous a semblé intéressant d'identifier ainsi des recherches importantes qui jusqu'ici, croyons-nous, n'avaient pas été rapprochées.

On remarquera que, dans les Chapitres précédents, nous n'avons pas cherché à tirer parti des avantages qu'aurait pu procurer l'emploi systématique des formes quadratiques; nous avons pensé qu'il était préférable de laisser aux formules fondamentales leur aspect habituel.

Dans le Chapitre III, il nous a paru indispensable d'élargir la base sur laquelle on fait ordinairement reposer la théorie de l'Élasticité, et de développer les indications données par Lord Kelvin (4), qui a rattaché cette théorie aux principes de la Thermodynamique, et qui a introduit, à la suite

---

(1) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, Note XI, *Sur l'équation auxiliaire*, 1896.

(2) KIRCHHOFF, *Ueber die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastichen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile* (*Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*, Bd. 9, S. 762-773, Wien; 1852). Ce Mémoire n'a pas été réimprimé dans les *Gesammelte Abhandlungen* de Kirchhoff, ainsi que le remarque M. Pearson dans son *History of the Theory of the Elasticity*, vol. II, part II, p. 50.

(3) J. BOUSSINESQ, *Théorie des ondes liquides périodiques*, p. 516 (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XX).

(4) W. THOMSON, *On the Thermo-elastic and Thermo-magnetic Properties of Matter*, Part I (*Quarterly Journal of Mathematics*, t. I, p. 57-77). Ce Mémoire a été réimprimé, en 1878, dans le *Philosophical Magazine;* il est réimprimé également p. 291 et suivantes du vol. I des *Mathematical and Physical Papers* de Lord Kelvin.

de Green ([1]), la notion de l'*énergie de déformation*. Cette notion permet de ne pas se borner au cas de la déformation infiniment petite, qui est régi par la loi restreinte dite *loi de Hooke*, et dont la considération est loin d'être suffisante pour aborder tous les problèmes qui se posent dans les applications. Il est permis d'espérer qu'en adoptant une loi plus générale, comme nous l'avons fait dans ce Chapitre III, et tout en raisonnant sur le milieu abstrait que nous avons appelé *corps parfaitement élastique*, on pénétrera le sens de plusieurs des phénomènes complexes que l'on observe dans la déformation des corps naturels. On ne peut s'empêcher de croire à une étroite parenté entre les notions que nous n'avons fait qu'esquisser sur les *équilibres de bifurcation*, les *équilibres limites*, les *échanges de stabilité* de M. Poincaré ([2]), etc., et, par exemple, les faits singuliers que M. Considère a soumis à la Commission des méthodes d'essai des matériaux de construction ([3]), ou encore les résultats curieux que M. Hartmann a fait récemment connaître dans la *Revue d'Artillerie* ([4]).

Nous devons aussi appeler l'attention sur le raisonnement qui nous conduit aux équations de la déformation infiniment petite et qui nous a été inspiré par les recherches de M. Darboux ([5]) et de M. Poincaré ([6]); nous retrouvons entre autres les résultats donnés par M. Poincaré ([7]), dans ses *Leçons sur la théorie de l'Élasticité*, et qui dépendent du choix de l'état naturel.

Dans le Chapitre IV, nous considérons les coordonnées curvilignes, et c'est ici que commencent à apparaître l'importance de la considération du ds^2 de l'espace et tous les avantages que procure l'emploi du trièdre de référence mobile. Nous avons cru devoir résumer les principes qui se ratta-

---

([1]) G. Green, *On the Laws of the Reflexion and Refraction of Light at the common surface of two non-crystallized media* (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. VII; 1839).

([2]) H. Poincaré, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta mathematica*, t. VII, p. 259-380; 1885).

([3]) *Voir* les travaux de la *Commission des méthodes d'essai des matériaux de construction*, 1re session, t. II et III; 1895.

([4]) L. Hartmann, *Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts* (*Revue d'Artillerie*, t. XLV et XLVI; 1894-1895).

([5]) G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, p. 2 et suiv.

([6]) H. Poincaré, *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. VIII; 1894).

([7]) H. Poincaré, *Leçons sur la théorie de l'Élasticité*, p. 47, 53, 58.

chent à ce trièdre; il nous a suffi, en prenant une variable de plus, de transcrire les résultats que l'on trouve dans les Leçons magistrales de M. Darboux sur la théorie générale des surfaces (1), auxquelles le lecteur devra se reporter.

Nous avons donné un rôle plus large qu'on ne le fait d'habitude aux coordonnées curvilignes dans la théorie de l'Élasticité, en ne les employant pas seulement pour définir le corps avant sa déformation comme Lamé, mais aussi pour étudier *le système triple de surfaces qui peut servir à représenter la déformation du corps*.

En outre, nous avons envisagé, dans ce Chapitre, les coordonnées les plus générales. Nous aurions pu, en les particularisant ainsi que le trièdre mobile, montrer ce que deviennent nos résultats dans le cas des systèmes triples orthogonaux auxquels on se borne habituellement, et retrouver notamment les équations bien connues données par Lamé. Mais nous aurons bientôt, lorsque nous aborderons les applications, à faire une étude approfondie des principaux systèmes particuliers de coordonnées; on verra que, à côté des coordonnées orthogonales, on doit placer d'autres systèmes non moins utiles, et que la considération du cercle de l'infini est encore ici d'une importance capitale.

Cet exposé des principes de la théorie de l'Élasticité, quoique limité aux points essentiels, ne nous a pas laissé de place pour commencer à traiter les questions nouvelles qui en constitueront les applications. Nous donnerons néanmoins une idée générale de ces questions, qui feront l'objet de Mémoires que nous espérons publier prochainement.

Le problème de la déformation infiniment petite forme actuellement la partie la plus importante de la théorie de l'Élasticité; les équations aux dérivées partielles du second ordre qui le régissent sont linéaires; pourtant, s'il est pris dans toute sa généralité, on ne sait encore le résoudre que pour des surfaces limites particulièrement simples : la sphère, le plan indéfini, certaines surfaces de révolution. Les résultats obtenus par Lamé (2) et Lord

---

(1) G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, II, III, IV; 1887-1896.

(2) G. Lamé, *Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques* (*Journal de Mathématiques de Liouville*, vol. XIX; 1854).

Kelvin [1], MM. Boussinesq [2] et Cerruti [3], M. Wangerin [4], dans ces cas spéciaux, sont bien connus. Nous n'avons pas l'intention de chercher à les obtenir par une voie différente; mais, si, en suivant M. Poincaré [5], on reprend la question de l'existence de la solution des équations de la déformation infiniment petite, on est amené à retrouver la véritable origine des résultats dont nous venons de parler, et même à apercevoir une voie que l'on pourrait suivre pour les étendre à de nouvelles formes de corps.

A côté de cette méthode difficile, il en existe une autre indiquée par Barré de Saint-Venant, dans le problème célèbre qui porte son nom, et qu'il a appelée *méthode mixte ou semi-inverse*.

Barré de Saint-Venant considère comme imposée *une partie* seulement des conditions à la limite, et soumet à des restrictions la solution cherchée. Autrement dit, il adjoint, au système des équations aux dérivées partielles du problème général, un second système possédant des solutions communes avec le premier.

La solution du problème de Barré de Saint-Venant a fait l'objet de ses deux grands Mémoires, de 1853 et 1854, sur la torsion et la flexion des prismes [6]; mais la méthode qu'il a ainsi inaugurée n'a guère été suivie

---

(1) W. Thomson, *Dynamical Problems regarding Elastic Spheroïdal Shells and Spheroids of Incompressible Liquid* (*Philosophical Transactions*, vol. CLIII, p. 583-616; 1864). Ce Mémoire a été réimprimé dans les *Mathematical and Physical Papers* de Lord Kelvin, vol. III, p. 351-394.

(2) J. Boussinesq, *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans ces solides, des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur;* Mémoire suivi de notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'Analyse, 1885.

(3) Cerruti, *Ricerche intorno all' equilibrio de corpi elastici isotropi* (*Atti della Reale Accademia dei Lincei,* 3e série, Memorie, t. XIII, p. 81; 1882).

(4) Wangerin, *Ueber das Problem des Gleichgewichts elasticher Rotationskörper* (*Archiv der Mathematik und Physik,* t. LV; 1873).

(5) H. Poincaré, *Sur l'équilibre d'un corps élastique* (*Comptes rendus,* t. CXXII, p. 154-159; 1896).

(6) Barré de Saint-Venant, Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément (*Mémoires des Savants étrangers,* t. XIV, p. 233-560; 1855). — Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes (*Journal de Mathématiques de Liouville,* 2e série, t. I, p. 89-189; 1856).

depuis. L'opinion défavorable qu'en avait Lamé (1) a-t-elle nui à son développement? Quoi qu'il en soit, elle a été reprise avec succès, il y a quelques années, par M. Pearson, qui a traité le cas d'une pièce droite pesante soumise sur sa surface latérale à une distribution quelconque de charge (2). La solution de ce problème a permis à l'éminent professeur de l'*University College* de Londres, de faire une critique très instructive de la théorie des poutres droites de Bernoulli et d'Euler, encore adoptée aujourd'hui par les ingénieurs. Nous montrerons quel est le vrai point de départ de cette solution. Comme dans le problème de Barré de Saint-Venant, on est ramené finalement à résoudre une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes du type elliptique; en étudiant le problème plus général des pièces courbes, nous avons été conduits à une équation du type elliptique qui présente cette particularité de se ramener, par un changement de variables, à l'équation d'Euler et de Poisson.

Mais il y a plus. Dans le problème du disque mince, ou du cylindre circulaire de longueur indéfinie, animé d'un mouvement de rotation, étudié autrefois par Maxwell (3), et que M. Chree (4) a repris dans les importants Mémoires qu'il a consacrés récemment aux équations de la déformation infiniment petite en coordonnées polaires et semi-polaires, nous avons trouvé lement, au fond de la question, l'équation d'Euler et de Poisson.

Nous avons été, par là, conduits à étudier d'une manière approfondie, dans la solution des équations de la déformation infiniment petite d'après la méthode mixte de Barré de Saint-Venant, l'introduction systématique des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indé-

---

(1) G. Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, 19e Leçon, p. 358. Lamé s'exprime ainsi : « Une digression trop étendue, sur une question particulière de la théorie mathématique de l'élasticité, pourrait donner quelque apparence de raison à ceux qui ne veulent voir, dans la grande généralité de cette théorie, qu'une complication inextricable, et qui préfèrent et prônent des procédés hybrides, mi-analytiques et mi-empiriques, ne servant qu'à masquer les abords de la véritable science. »

(2) K. Pearson, *On the Flexure of Heavy Beams subjected to continuous Systems of Load* (*The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics*, t. XXIV, p. 63-110; 1890).

(3) J.-C. Maxwell, *On the Equilibrium of Elastic Solids* (*Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, vol. XX, p. 87-120; 1853).

(4) C. Chree, *The equations of an isotropic solid in polar an cylindrical coordinates* (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. XIV; 1889). — *On thin rotating isotropic disks* (*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1891).

pendantes non seulement du type elliptique, mais aussi du type hyperbolique. On peut ainsi suivre la voie ouverte par Riemann pour exprimer les conditions à la limite; mais, surtout, le lien intime qui existe entre les équations du second ordre du type hyperbolique et la théorie des surfaces permet d'introduire de nombreuses considérations géométriques qui facilitent singulièrement l'application de la méthode de Barré de Saint-Venant et qui font disparaître l'empirisme que Lamé avait cru pouvoir reprocher à cette dernière.

Les problèmes auxquels donnent lieu les corps minces se prêtent aussi à ces considérations. Nous nous proposons d'en reprendre l'étude avec certains développements. La méthode que nous avons suivie dans le présent Mémoire pour établir les équations de la déformation infiniment petite trouvera ici une application également utile et introduira une grande netteté dans les raisonnements par lesquels on forme actuellement les équations fondamentales de la question. En Angleterre, le trièdre de référence mobile a été déjà quelquefois adopté dans cette partie de la théorie de l'Élasticité; nous l'emploierons systématiquement et l'on verra combien il la rend attrayante et féconde en résultats intéressants.

CHAPITRE I.

DÉFORMATION D'UN MILIEU CONTINU.

I. — De la déformation en général.

1. *Définition d'une déformation; les six fonctions qui lui sont associées.*

Considérons un milieu continu quelconque occupant une portion de l'espace, et concevons que chaque point de ce milieu éprouve un déplacement variant d'une façon continue avec la position du point. Nous dirons que le milieu a reçu une *déformation,* lorsque ses points n'*auront pas subi un déplacement d'ensemble combiné ou non avec une transformation par symétrie;* pour comprendre tous les cas dans la même définition, nous pourrons dire que la déformation est *nulle,* lorsque les déplacements des différents points du milieu correspondront à un déplacement d'ensemble, combiné ou non avec une transformation par symétrie, imposé à ce milieu.

Rapportons les deux positions du milieu à un système d'axes de coordonnées rectangulaires. Soient x, y, z les coordonnées primitives d'un point et $x + \mathrm{u}$, $y + \mathrm{v}$, $z + \mathrm{w}$ ce qu'elles deviennent après le déplacement de ce point. Supposons que les fonctions u, v, w de x, y, z soient définies et admettent des dérivées premières continues pour toutes les valeurs des variables correspondant à des points du milieu. Un système quelconque de telles fonctions u, v, w détermine une *seule déformation;* mais, inversement, à une déformation ne correspond pas *un seul système de fonctions* u, v, w, si l'on a égard au déplacement d'ensemble, combiné ou non avec une transformation par symétrie, que l'on peut toujours imposer à un milieu sans le déformer.

Proposons-nous de définir l'état de déformation du milieu au moyen d'autres fonctions, qui seront déterminées d'une façon unique par la déformation et qui la définiront sans ambiguïté.

Les formules

$$x_1 = x + \mathrm{u}, \qquad y_1 = y + \mathrm{v}, \qquad z_1 = z + \mathrm{w} \tag{1}$$

peuvent être considérées, au point de vue où nous nous plaçons, comme définissant une correspondance entre deux espaces, l'un lieu du point (x,

y, z), l'autre lieu du point (x_1, y_1, z_1). Mais on peut aussi les envisager comme des formules rapportant l'espace, lieu du point (x_1, y_1, z_1), à un système de coordonnées curvilignes (x, y, z).

La question que nous posons revient alors à la détermination de fonctions de x, y, z, déterminant ce système de coordonnées curvilignes d'une façon unique, et qui soient déterminées de la même façon par lui; nous retombons sur une question de Géométrie qui est maintenant bien connue après les recherches de Lamé, de Bonnet, de M. Lipschitz et de M. Darboux. Nous avons des fonctions satisfaisant à la question, soit en prenant les six coefficients de la forme différentielle quadratique qui représente le carré de l'élément linéaire du second espace rapporté au système de coordonnées (x, y, z), soit en prenant des fonctions convenables de ces six coefficients. Or, si

$$(2) \qquad dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \mathrm{A}\,dx^2 + \mathrm{B}\,dy^2 + \mathrm{C}\,dz^2 + 2\mathrm{D}\,dy\,dz + 2\mathrm{E}\,dz\,dx + 2\mathrm{F}\,dx\,dy$$

est le carré de l'élément linéaire du second espace, cette expression devient identique au carré de l'élément linéaire du premier espace, lorsque les fonctions A, B, C se réduisent à l'unité et que les fonctions D, E, F s'annulent. Nous sommes donc amenés à adopter, pour définir la déformation, les six fonctions

$$\varepsilon_1 = \frac{\mathrm{A}-1}{2}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\mathrm{B}-1}{2}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{\mathrm{C}-1}{2}, \qquad \gamma_1 = \mathrm{D}, \qquad \gamma_2 = \mathrm{E}, \qquad \gamma_3 = \mathrm{F},$$

dont les expressions, au moyen de x, y, z, se calculent, lorsque u, v, w sont données, par les formules

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\right)^2\right],\\
\varepsilon_2 &= \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\right)^2\right],\\
\varepsilon_3 &= \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)^2\right],\\
\gamma_1 &= \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z},\\
\gamma_2 &= \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x},\\
\gamma_3 &= \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y},
\end{aligned}\right.$$

que l'on déduit immédiatement des suivantes :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} dx_1 &= \left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}dz,\\ dy_1 &= \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}dx + \left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}dz,\\ dz_1 &= \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}dy + \left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)dz,\end{aligned}\right.$$

qui résultent de la différentiation des relations (1).

2. *Propriétés des fonctions associées; conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une déformation soit nulle, c'est-à-dire corresponde à un déplacement d'ensemble combiné ou non avec une transformation par symétrie.*

Les six fonctions que nous venons d'associer à une déformation ne diffèrent en rien, ou ne diffèrent pas sensiblement, de celles qui ont été envisagées par les différents auteurs qui ont eu à s'occuper plus ou moins directement de la question, et, en particulier, par Green ([1]), Barré de Saint-Venant ([2]), Kirchhoff ([3]), Lord Kelvin ([4]) et M. Boussinesq ([5]).

La façon dont nous venons de rattacher ces six fonctions à la théorie des coordonnées curvilignes nous fournit immédiatement des renseignements précieux.

---

(1) GREEN, *On the propagation of light in crystallized media* (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1839; ou *Mathematical Papers*, p. 291-311).

(2) BARRÉ DE SAINT-VENANT, *Mémoire sur l'équilibre des corps solides dans les limites de leur élasticité, et sur les conditions de leur résistance, quand les déplacements éprouvés par leurs points ne sont pas très petits* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXIV, p. 260; 1847). On pourra lire aussi une Communication faite trois ans auparavant par Barré de Saint-Venant sur le même sujet (*Société Philomathique*, 26 mars 1844, ou *Journal l'Institut*, n° 537), ainsi que les Mémoires insérés en 1863 et 1871 au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

(3) KIRCHHOFF, *Ueber die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile* (*Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*, Bd. 9, S. 762-773, Wien, 1852). Ce Mémoire n'a pas été réimprimé dans les *Gesammelte Abhandlungen* de Kirchhoff.

(4) W. THOMSON et TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, vol. I, Part II, Appendice C au Chapitre VII, p. 461.

(5) J. BOUSSINESQ, *Théorie des ondes liquides périodiques*, Note 3, p. 593 (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, t. XX).

Tout d'abord, pour résumer ce que nous avons dit au numéro précédent, nous avons la proposition suivante :

A toute déformation correspondent six fonctions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 *définies par les formules* (3); *et inversement, au système de six fonctions ainsi construites correspond une déformation et une seule* (¹), *celle qui leur a donné naissance.*

Cette proposition peut être complétée et précisée :

Les six fonctions déterminées par les formules (3) *ne peuvent pas être prises arbitrairement; elles vérifient, comme on sait, un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre; à toute solution de ce système correspond une déformation et une seule.*

Il est un cas particulier qui a un grand intérêt : c'est celui où la déformation est nulle; nous avons, à son égard, la proposition suivante :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une déformation soit nulle, c'est-à-dire pour que la seconde position du milieu se déduise de la première au moyen d'un déplacement d'ensemble, combiné ou non avec une transformation par symétrie, s'obtiennent en annulant les six fonctions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3.

Cette proposition nous paraît importante; elle permet de préciser certaines indications de Barré de Saint-Venant, qui n'ont peut-être pas été suffisamment comprises par quelques auteurs, et sur lesquelles nous reviendrons à propos des tiges minces, des plaques et des enveloppes minces.

3. *Déformation homogène; ses six composantes.*

Une déformation quelconque étant définie par les six fonctions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, la déformation la plus simple est celle pour laquelle ces six fonctions sont des constantes non toutes nulles. Lord Kelvin a indiqué, le premier, l'intérêt que présente cette déformation; il l'a appelée une *déformation homogène* (²), et a nommé les valeurs constantes des six fonctions ε_1,

---

(¹) En considérant comme équivalentes deux déformations qui ne diffèrent que par un déplacement d'ensemble, combiné ou non avec une transformation par symétrie.

(²) W. Thomson, *Mathematical and Physical Papers*, Art. XCII, *Elasticity and Heat*, t. III, p. 85. — Consulter aussi le *Treatise on Natural Philosophy*, Vol. I, Part I, p. 116 et suivantes.

ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 *ses composantes*. Nous allons voir comment se justifient ces dénominations.

Les six fonctions A, B, C, D, E, F qui figurent dans la formule (2) étant des constantes, il en résulte que x_1, y_1, z_1 sont des fonctions entières et linéaires de x, y, z. La déformation homogène est donc définie par les formules (¹)

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1 = a_{10} + (1 + a_{11})x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y_1 = a_{20} + a_{21}x + (1 + a_{22})y + a_{23}z, \\ z_1 = a_{30} + a_{31}x + a_{32}y + (1 + a_{33})z, \end{cases}$$

où les coefficients a_{ij} désignent des constantes telles que les six valeurs constantes

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_{11} + \tfrac{1}{2}(a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2), & \gamma_1 &= a_{32} + a_{23} + a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}, \\ \varepsilon_2 &= a_{22} + \tfrac{1}{2}(a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2), & \gamma_2 &= a_{13} + a_{31} + a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31}, \\ \varepsilon_3 &= a_{33} + \tfrac{1}{2}(a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2), & \gamma_3 &= a_{21} + a_{12} + a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} \end{aligned}$$

des six fonctions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 ne soient pas toutes nulles.

Ces six dernières constantes s'expriment au moyen d'éléments géométriques simples.

Reprenons, en effet, la formule générale (2) qui détermine l'élément linéaire du second espace. Posons

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{A} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1}, \\ H_2 &= \sqrt{B} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_2}, \\ H_3 &= \sqrt{C} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_3}, \end{aligned}$$

et définissons trois angles α_1, α_2, α_3, compris entre o et π, par les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \dfrac{D}{\sqrt{B}\sqrt{C}} = \dfrac{\gamma_1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_2}\sqrt{1 + 2\varepsilon_3}}, \\ \cos\alpha_2 = \dfrac{E}{\sqrt{C}\sqrt{A}} = \dfrac{\gamma_2}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_3}\sqrt{1 + 2\varepsilon_1}}, \\ \cos\alpha_3 = \dfrac{F}{\sqrt{A}\sqrt{B}} = \dfrac{\gamma_3}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_1}\sqrt{1 + 2\varepsilon_2}}. \end{cases}$$

(¹) En supprimant une translation, on pourrait, comme on le fait d'habitude, supposer que les trois constantes a_{10}. a_{20}, a_{30} sont nulles; mais nous préférons les conserver en vue des applications ultérieures. Nous supposons les constantes a_{ij} quelconques, en sorte que les seconds membres des relations (5) soient des fonctions linéaires indépendantes.

Le carré de l'élément linéaire du second espace prend la forme

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \mathrm{H}_1^2\,dx^2 + \mathrm{H}_2^2\,dy^2 + \mathrm{H}_3^2\,dz^2 + 2\,\mathrm{H}_2\mathrm{H}_3\cos\alpha_1\,dy\,dz + 2\,\mathrm{H}_3\mathrm{H}_1\cos\alpha_2\,dz\,dx + 2\,\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2\cos\alpha_3\,dx\,dy.$$

Nous voyons alors que $\mathrm{H}_1\,dx = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1}\,dx$ est l'arc élémentaire de la courbe d'intersection des surfaces $y = \text{const.}$, $z = \text{const.}$; de même, $\mathrm{H}_2\,dy = \sqrt{1 + 2\varepsilon_2}\,dy$ est l'arc élémentaire de la courbe d'intersection des surfaces $z = \text{const.}$, $x = \text{const.}$; $\mathrm{H}_3\,dz = \sqrt{1 + 2\varepsilon_3}\,dz$ est l'arc élémentaire de la courbe d'intersection des surfaces $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ De plus, α_1 est l'angle sous lequel se coupent les arcs élémentaires $\mathrm{H}_2\,dy$ et $\mathrm{H}_3\,dz$; α_2 est l'angle des arcs élémentaires $\mathrm{H}_3\,dz$ et $\mathrm{H}_1\,dx$; α_3 est l'angle des arcs élémentaires $\mathrm{H}_1\,dx$ et $\mathrm{H}_2\,dy$.

Plaçons-nous dans le cas de la déformation homogène, où H_1, H_2, H_3, α_1, α_2, α_3 sont des constantes. L'arc élémentaire $\mathrm{H}_1\,dx$ du second espace correspond à l'arc élémentaire dx du premier; par conséquent, un segment de droite parallèle à $\mathrm{O}x$ subit un allongement qui ne dépend que de la longueur du segment considéré, et non de son origine. Nous pouvons donc parler, dans le cas actuel, H_1, H_2, H_3 étant des constantes, de l'accroissement de l'unité de longueur prise parallèlement à $\mathrm{O}x$, c'est-à-dire de la *dilatation linéaire suivant la direction* $\mathrm{O}x$: elle a pour valeur

$$\mathrm{H}_1 - 1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1} - 1.$$

Les *dilatations linéaires suivant les directions* $\mathrm{O}y$ *et* $\mathrm{O}z$ sont de même

$$\mathrm{H}_2 - 1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_2} - 1,$$
$$\mathrm{H}_3 - 1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_3} - 1.$$

Pareillement, un angle droit dont les côtés sont parallèles à $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$ devient α_1, et cela *quel que soit son sommet;* un angle droit dont les côtés sont parallèles à $\mathrm{O}z$, $\mathrm{O}x$ devient α_2, et un angle droit dont les côtés sont parallèles à $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$ devient α_3. Nous pouvons donc aussi introduire la notion des *dilatations angulaires* $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$, $\frac{\pi}{2} - \alpha_2$, $\frac{\pi}{2} - \alpha_3$ [1].

---

[1] Conformément à l'usage habituel, nous adoptons ces expressions et non leurs valeurs changées de signe.

On peut retrouver et compléter les derniers résultats que nous venons de rappeler, par le procédé suivant qui est classique ([1]).

Les équations (5) définissent une transformation homographique dont les propriétés bien connues résultent principalement de ce que les plans à l'infini se correspondent dans les deux figures ([2]). Des plans parallèles étant transformés en plans parallèles, il en résulte que deux lignes parallèles sont également dilatées, et que deux angles dont les côtés sont respectivement parallèles se transforment en deux angles jouissant de la même propriété.

Deux lignes parallèles étant également dilatées, à chaque direction est associée une dilatation linéaire *suivant cette direction*. Si l, m, n sont les cosinus directeurs d'une direction, et si r désigne la longueur d'un segment de droite issu de l'origine et parallèle à cette direction, la nouvelle longueur r_1 de ce segment sera donnée, d'après les équations (5), par la formule

$$r_1^2 = r^2[1 + 2(l^2\varepsilon_1 + m^2\varepsilon_2 + n^2\varepsilon_3 + mn\gamma_1 + nl\gamma_2 + lm\gamma_3)],$$

d'où l'on déduit, en particulier, les valeurs précédentes des dilatations linéaires suivant les axes.

Étant donnés de même les cosinus directeurs de deux directions, on obtient immédiatement le cosinus de l'angle entre leurs parties déformées, et, en particulier, si les deux directions sont deux des axes coordonnés, on retrouve les valeurs (6) précédemment écrites de $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$.

4. *Déformation en un point d'un milieu; ses six composantes.*

Envisageons une portion du milieu non déformé entourant un point $P(x, y, z)$. Si cette portion est suffisamment petite, les six fonctions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, qui sont des fonctions continues de x, y, z, conserveront, en ses différents points, sensiblement les mêmes valeurs, celles qu'elles ont au point $P(x, y, z)$. Nous sommes ainsi amenés à substituer à la déformation d'une portion du milieu entourant un point $P(x, y, z)$, lorsque cette portion est suffisamment petite, une déformation homogène dont les six composantes sont les valeurs que prennent au point (x, y, z) les six fonctions associées à la déformation du milieu considéré.

([1]) THOMSON et TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*. Vol. I, Part I, p. 116 et suiv.

([2]) CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie*, p. 811 et suiv.

C'est ce que nous pouvons encore exprimer de la façon suivante. Si nous considérons un point $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$ du milieu non déformé, il est clair que les nouvelles coordonnées de ce point ne différeront de

$$x_1+dx_1, \quad y_1+dy_1, \quad z_1+dz_1$$

que de quantités qui seront infiniment petites du second ordre, lorsque dx, dy, dz seront tous trois infiniment petits du premier ordre. Ceci revient à dire que, dans le voisinage de P, la déformation est sensiblement définie par les équations

$$(7) \qquad \begin{cases} X_1 = a_{10} + (1+a_{11})X + a_{12}Y + a_{13}Z, \\ Y_1 = a_{20} + a_{21}X + (1+a_{22})Y + a_{23}Z, \\ Z_1 = a_{30} + a_{31}X + a_{32}Y + (1+a_{33})Z, \end{cases}$$

où X, Y, Z désignent les coordonnées d'un point Q du milieu non déformé par rapport au point P, c'est-à-dire par rapport à trois axes ayant leur origine en P et parallèles aux axes coordonnés, où X_1, Y_1, Z_1 désignent les coordonnées de la nouvelle position de Q par rapport aux mêmes axes, et où enfin les coefficients a_{ij}, qui sont déterminés en même temps que x, y, z, sont donnés par les formules

$$(8) \qquad \begin{cases} a_{10} = \mathrm{u}, & a_{11} = \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}, & a_{12} = \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}, & a_{13} = \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}, \\ a_{20} = \mathrm{v}, & a_{21} = \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}, & a_{22} = \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}, & a_{23} = \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}, \\ a_{30} = \mathrm{w}, & a_{31} = \dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}, & a_{32} = \dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}, & a_{33} = \dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}. \end{cases}$$

Ainsi, *la déformation subie par la portion du milieu avoisinant un point* $P(x, y, z)$ *de ce milieu est sensiblement une déformation homogène définie par les formules* (7) *et* (8), *et ayant pour composantes les valeurs que prennent au point* P *les six fonctions* ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 *qui définissent la déformation du milieu considéré.*

Nous désignerons la déformation homogène définie par les formules (7), (8) sous le nom de *déformation au point* P. Considérée uniquement au point de vue de la déformation, elle ne varie pas avec le point P, si la déformation considérée est homogène, et elle lui est équivalente.

Les valeurs des fonctions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 au point P seront dites les *composantes* de la déformation au point P.

Une déformation homogène définie par les équations (5) ou (7) jouit de nombreuses propriétés. Nous allons rappeler les principales et introduire, en particulier, la définition de la *rotation en un point.*

Tout d'abord les résultats acquis au n° 3 nous montrent que nous aurons au point $P(x, y, z)$ trois dilatations linéaires *suivant* Ox, Oy, Oz, ayant pour valeurs

$$\sqrt{1+2\varepsilon_1}-1, \quad \sqrt{1+2\varepsilon_2}-1, \quad \sqrt{1+2\varepsilon_3}-1.$$

Un trièdre trirectangle de sommet P et d'arêtes parallèles aux axes deviendra un trièdre dont les angles α_1, α_2, α_3 seront définis par les formules (6).

5. *Les deux ellipsoïdes de déformation et la rotation en un point du milieu. Déformation pure.*

Il existera généralement un trièdre de sommet P, que la déformation au point P transformera dans un trièdre dont les arêtes seront respectivement parallèles à celles du premier; c'est ce que montrent immédiatement les formules (7).

Il existera en outre un trièdre trirectangle [1] de sommet P qui restera trirectangle lorsqu'on lui appliquera la déformation au point P; c'est ce qu'on établit par le raisonnement bien connu que nous allons rappeler.

A un ellipsoïde placé dans l'un des deux espaces, les formules (7) font correspondre un nouvel ellipsoïde, et à trois diamètres conjugués de l'un des ellipsoïdes correspondent trois diamètres conjugués de l'autre. En particulier, à la sphère du premier espace, qui est définie par l'équation

$$X^2+Y^2+Z^2=1;$$

les formules (7) font correspondre un ellipsoïde $\mathcal{E}_1$ que nous appellerons *le premier ellipsoïde de déformation relatif au point* P [2]. Cet ellipsoïde étant supposé à axes inégaux, il existe un système et un seul de trois diamètres rectangulaires de la sphère considérée qui se transforment par (7) en trois droites rectangulaires : ce sont les diamètres qui se trans-

---

(1) Et généralement un seul en ne considérant pas comme différents du premier ceux dont les arêtes sont situées sur les mêmes droites que celles sur lesquelles sont situées les arêtes du premier.

(2) CAUCHY, *Sur la condensation et la dilatation des corps solides. Exercices de Mathématiques.* Vol. II, p. 60-69; 1827.

forment dans les axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1$. De même, à la sphère du second espace, qui est définie par l'équation

$$(X_1 - a_{10})^2 + (Y_1 - a_{20})^2 + (Z_1 - a_{30})^2 = 1,$$

correspond l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ défini par l'équation

$$(1 + 2\varepsilon_1)X^2 + (1 + 2\varepsilon_2)Y^2 + (1 + 2\varepsilon_3)Z^2 + 2\gamma_1 YZ + 2\gamma_2 ZX + 2\gamma_3 XY = 1$$

et que nous appellerons le *second ellipsoïde de déformation relatif au point* P (¹). Ses axes correspondent à trois diamètres rectangulaires de la sphère correspondante.

Ainsi, en général, il existe un trièdre trirectangle et un seul, celui formé des axes du second ellipsoïde de déformation, qui se transforme en un nouveau trièdre trirectangle, savoir celui formé des axes du premier ellipsoïde de déformation.

On peut, de plusieurs façons, par une rotation, suivie de la translation de composantes a_{10}, a_{20}, a_{30}, appliquer les trois axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ sur les axes correspondants de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1$. Parmi ces rotations nous distinguerons celle pour laquelle les trois arêtes d'un trièdre formé avec les axes de $\mathcal{E}$ s'appliquent finalement sur les trois arêtes *qui leur correspondent par* (7) et qui appartiennent à un trièdre formé avec les axes de $\mathcal{E}_1$. Cette rotation sera ce que nous appellerons la *rotation au point* P *du milieu.*

Pour que cette dernière rotation soit nulle, il faut (mais cette condition n'est pas suffisante, d'après ce que nous venons de dire) que les directions des axes du second ellipsoïde de déformation soient aussi celles que (7) laisse invariables. Comme on le voit immédiatement, ceci revient à dire que l'on a

$$a_{23} = a_{32}, \qquad a_{31} = a_{13}, \qquad a_{12} = a_{21}.$$

Si ces conditions sont remplies, on peut affirmer simplement que les deux ellipsoïdes de déformation ont mêmes axes. La déformation homo-

---

(¹) W. Thomson et Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, Vol. I. Part I, p. 130.

gène correspondante est ce que Lord Kelvin et Tait ont appelé une *déformation pure* [1].

6. *Décomposition de la déformation en un point du milieu en une rotation suivie d'une déformation pure. Détermination de la rotation en un point du milieu.*

Étant donnée une déformation homogène définie par les formules (5) ou (7) où entrent douze constantes, nous pouvons nous proposer de la remplacer par une autre déformation homogène *équivalente*, définie par des équations où entrent des constantes en nombre moindre et, en particulier, en nombre égal à six.

Ce dernier problème a évidemment une infinité de solutions ; nous pouvons en distinguer de particulièrement intéressantes.

La déformation déterminée par les équations (7) peut être remplacée par une rotation définie par les formules

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} X' &= a\,X + b\,Y + c\,Z,\\ Y' &= a'\,X + b'\,Y + c'\,Z,\\ Z' &= a''X + b''Y + c''Z,\end{aligned}\right.$$

où a, b, c, ... désignent les coefficients d'une substitution orthogonale de déterminant $+1$, *suivie* de la déformation homogène déterminée par les équations

$$(9')\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= a_{10} + (1 + a'_{11})X' + a'_{12}Y' + a'_{13}Z',\\ Y_1 &= a_{20} + a'_{21}X' + (1 + a'_{22})Y' + a'_{23}Z',\\ Z_1 &= a_{30} + a'_{31}X' + a'_{32}Y' + (1 + a'_{33})Z',\end{aligned}\right.$$

où les coefficients a'_{ij} ont pour valeurs

---

[1] W. THOMSON et TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, Vol. I, Part I, p. 132. Nous conservons encore ici les constantes a_{10}, a_{20}, a_{30}, dont on peut faire abstraction, si l'on n'a égard qu'à la déformation et si l'on néglige une translation.

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
1 + a'_{11} &= a\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right) + b\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + c\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z},\\
a'_{21} &= a\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + b\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right) + c\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z},\\
a'_{31} &= a\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} + c\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right),\\
a'_{12} &= a'\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right) + b'\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + c'\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z},\\
1 + a'_{22} &= a'\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + b'\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right) + c'\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z},\\
a'_{32} &= a'\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + b'\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} + c'\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right),\\
a'_{13} &= a''\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right) + b''\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + c''\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z},\\
a'_{23} &= a''\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + b''\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right) + c''\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z},\\
1 + a'_{33} &= a''\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + b''\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} + c''\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

A la rotation (9) ne correspond aucune déformation, et à trois droites rectangulaires quelconques dans l'espace lieu de (X, Y, Z) correspondent trois droites rectangulaires dans l'espace lieu de (X′, Y′, Z′); par conséquent, si l'on veut que la déformation (9′) soit une déformation pure, il faut et il suffit que la rotation (9) soit précisément une des rotations dont il a été question au numéro précédent et qui amènent les axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ sur ceux de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1$.

On voit donc que *la déformation au point* P *revient, et de plusieurs façons, à une rotation suivie d'une déformation pure* [1]. Dans l'*une* de ces décompositions, la rotation n'est autre que la rotation au point P; cette dernière est donc définie par les formules (9), où les cosinus forment *une* solution du problème qui consiste à déterminer 9 cosinus a, b, c, ... vérifiant, outre les relations

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&a^2 + b^2 + c^2 = 1, && a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0\\
&a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, && a''a + b''b + c''c = 0\\
&a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, && aa' + bb' + cc' = 0
\end{aligned}
\right.
\qquad
\begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 1,
$$

[1] La décomposition en une déformation pure *suivie* d'une rotation ne conduirait évidemment pas à des résultats essentiellement différents de ceux du texte.

les suivantes :

$$a'_{23} = a'_{32}, \qquad a'_{31} = a'_{13}, \qquad a'_{12} = a'_{21},$$

qui s'écrivent :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} a''\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + b''\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right) + c''\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} &= a'\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + b'\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} + c'\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right),\\ a\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} + c\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right) &= a''\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right) + b''\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + c''\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z},\\ a'\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right) + b'\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + c'\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z} &= a\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + b\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right) + c\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z},\end{aligned}\right.$$

ou encore, si on les ajoute après avoir multiplié leurs deux membres par a, a', a'', puis par b, b', b'', et enfin par c, c', c'',

$$(12')\quad \left\{\begin{aligned} b\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z} + b'\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} + b''\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right) &= c\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + c'\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right) + c''\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y},\\ c\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right) + c'\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + c''\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} &= a\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z} + a'\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} + a''\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right),\\ a\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + a'\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right) + a''\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} &= b\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right) + b'\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + b''\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}.\end{aligned}\right.$$

On peut donner de ce problème la solution suivante, qui met en évidence des résultats intéressants.

Remarquons que les relations (10) entraînent les suivantes :

$$\begin{aligned} (1+a'_{11})^2 + a'^2_{12} + a'^2_{13} &= \left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}\right)^2,\\ a'^2_{21} + (1+a'_{22})^2 + a'^2_{23} &= \left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)^2 + \left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\right)^2,\\ a'^2_{31} + a'^2_{32} + (1+a'_{33})^2 &= \left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\right)^2 + \left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)^2,\\ a'_{21}a'_{31} + (1+a'_{22})a'_{32} + a'_{23}(1+a'_{33}) &= \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + \left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right),\\ a'_{31}(1+a'_{11}) + a'_{32}a'_{12} + (1+a'_{33})a'_{13} &= \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right) + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + \left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z},\\ (1+a'_{11})a'_{21} + a'_{12}(1+a'_{22}) + a'_{13}a'_{23} &= \left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right) + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}.\end{aligned}$$

dont nous désignerons respectivement les seconds membres par $1+2\varepsilon'_1$, $1+2\varepsilon'_2$, $1+2\varepsilon'_3$, γ'_1, γ'_2, γ'_3, et qui, jointes à

$$a'_{23} = a'_{32}, \qquad a'_{31} = a'_{13}, \qquad a'_{12} = a'_{21},$$

déterminent les inconnues a'_{ij}. On peut résoudre d'une manière élégante les neuf relations précédentes, en remarquant qu'elles expriment que la forme quadratique

$$(13)\quad (1+2\varepsilon'_1)X'^2+(1+2\varepsilon'_2)Y'^2+(1+2\varepsilon'_3)Z'^2+2\gamma'_1Y'Z'+2\gamma'_2Z'X'+2\gamma'_3X'Y',$$

qui, on le voit immédiatement, se transformerait, en vertu de (9), en

$$(1+2\varepsilon_1)X^2+(1+2\varepsilon_2)Y^2+(1+2\varepsilon_3)Z^2+2\gamma_1YZ+2\gamma_2ZX+2\gamma_3XY,$$

est identique à la suivante :

$$\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial f'}{\partial X'}\right)^2+\left(\frac{\partial f'}{\partial Y'}\right)^2+\left(\frac{\partial f'}{\partial Z'}\right)^2\right],$$

où f' désigne la forme quadratique

$$(1+a'_{11})X'^2+(1+a'_{22})Y'^2+(1+a'_{33})Z'^2+2a'_{23}Y'Z'+2a'_{31}Z'X'+2a'_{12}X'Y'.$$

Plaçons-nous dans le cas général. On peut, au moyen d'une substitution orthogonale, réduire la forme (13) à une somme de carrés ; cette substitution orthogonale revient géométriquement à rapporter le second ellipsoïde de déformation à ses axes principaux, et elle s'effectue au moyen de la résolution de l'équation du troisième degré en S,

$$(14)\quad \begin{vmatrix} 1+2\varepsilon_1-S & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1+2\varepsilon_2-S & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1+2\varepsilon_3-S \end{vmatrix}=0.$$

Soit

$$\begin{aligned} X' &= \alpha X''+\beta Y''+\gamma Z'', \\ Y' &= \alpha' X''+\beta' Y''+\gamma' Z'', \\ Z' &= \alpha'' X''+\beta'' Y''+\gamma'' Z'' \end{aligned}$$

cette substitution orthogonale ; la forme (13) devient

$$S_1X''^2+S_2Y''^2+S_3Z''^2,$$

en désignant par S_1, S_2, S_3 les racines de l'équation (14). Si f'' désigne ce que devient f' par l'effet de la substitution précédente, on doit avoir l'identité

$$S_1X''^2+S_2Y''^2+S_3Z''^2\equiv\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial f''}{\partial X''}\right)^2+\left(\frac{\partial f''}{\partial Y''}\right)^2+\left(\frac{\partial f''}{\partial Z''}\right)^2\right],$$

qui détermine f''. On doit prendre, pour y satisfaire,

$$f''=\pm\sqrt{S_1}X''^2\pm\sqrt{S_2}Y''^2\pm\sqrt{S_3}Z''^2$$

et adopter l'une quelconque des différentes combinaisons de signes placés devant les radicaux. Connaissant f'', on a immédiatement f'. Si l'on veut, en particulier, distinguer, parmi les solutions, celle qui correspond à la rotation au point P, on prendra

$$f'' = \sqrt{S_1}X''^2 + \sqrt{S_2}Y''^2 + \sqrt{S_3}Z''^2.$$

Connaissant les inconnues auxiliaires a'_{ij}, on déterminera les 9 cosinus $a, b, c, \ldots$ par les formules (10), dont la résolution donne les formules suivantes.

Posons

$$\Delta = \frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

On aura

$$a = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}(1 + a'_{11}) + \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} a'_{21} + \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}} a'_{31}\right],$$

$$b = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}(1 + a'_{11}) + \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} a'_{21} + \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}} a'_{31}\right],$$

$$c = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}(1 + a'_{11}) + \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} a'_{21} + \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}} a'_{31}\right],$$

et des formules analogues pour $a', b', c', a'', b'', c''$.

Remarquons en passant la signification de Δ; l'élément de volume $dx\,dy\,dz$, tracé autour de $P(x, y, z)$, devient après déformation

$$(|\Delta| + \eta)\, dx\, dy\, dz,$$

η tendant uniformément vers zéro avec les dimensions de l'élément, en sorte que [1]

$$\Theta = |\Delta| - 1$$

est la *dilatation cubique au point* P.

Δ s'exprime aisément au moyen des composantes de la déformation au

[1] Il en résulte également que, pour un milieu dont la densité est ρ avant déformation au point (x, y, z), et ρ_1 après déformation au point (x_1, y_1, z_1), on a la relation : $\rho = \rho_1 \times |\Delta|$ qui est une des deux formes de l'*équation de continuité* considérée en Hydrodynamique.

point P; si l'on forme, en effet, son carré par la règle de multiplication des déterminants, il vient [1]

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1+2\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1+2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1+2\varepsilon_3 \end{vmatrix},$$

valeur du premier membre de l'équation (14) pour $S = 0$.

Connaissant les 9 cosinus a, b, c, ..., on en déduira la rotation correspondante au moyen des formules bien connues. Soient l, m, n les cosinus directeurs de l'axe de la rotation au point P, et soit ω l'angle de rotation; les formules (9) donnent immédiatement les trois relations

$$(15) \qquad \begin{cases} (a-1)l + bm + cn = 0, \\ a'l + (b'-1)m + c'n = 0, \\ a''l + b''m + (c''-1)n = 0, \end{cases}$$

qui sont compatibles et déterminent l, m, n. On a ensuite

$$(16) \qquad \cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{1+a+b'+c''}{4}.$$

On peut encore remarquer que si l'on envisage le trièdre $Ox'y'z'$ représentant la position que prend le trièdre $Oxyz$, quand on lui applique une rotation équipollente à la rotation au point P, le tableau des cosinus relatif à ce trièdre est

	x'	y'	z'
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

Si l'on pose

$$\lambda = l\sin\frac{\omega}{2}, \qquad \mu = m\sin\frac{\omega}{2}, \qquad \nu = n\sin\frac{\omega}{2}, \qquad \rho = \cos\frac{\omega}{2},$$

---

[1] Comparer LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, t. I, p. 55.

on a les formules d'Euler et d'Olinde Rodrigues [1] :

$$a = \rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2, \qquad b = 2(\lambda\mu - \nu\rho), \qquad c = 2(\lambda\nu + \mu\rho),$$
$$a' = 2(\lambda\mu + \nu\rho), \qquad b' = \rho^2 + \mu^2 - \lambda^2 - \nu^2, \qquad c' = 2(\mu\nu - \lambda\rho),$$
$$a'' = 2(\lambda\nu - \mu\rho), \qquad b'' = 2(\mu\nu + \lambda\rho), \qquad c'' = \rho^2 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2.$$

7. *Transformation des composantes de la déformation en un point du milieu. Invariants de la déformation. Cas particuliers de déformation en un point : extension simple et glissement simple.*

La définition que nous avons donnée des composantes de la déformation en un point du milieu dépend des axes coordonnés. Si l'on considère de nouveaux axes, on aura six nouvelles composantes qui seront fonctions des anciennes et dont il est facile de trouver les expressions.

Soit

	x'	y'	z'
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

le tableau de transformation qui définit les cosinus directeurs des nouveaux axes. Soient x', y', z' et x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées, pour ces nouveaux axes, des points (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1). On a

$$dx'^2_1 + dy'^2_1 + dz'^2_1 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2$$
$$= (1 + 2\varepsilon_1)dx^2 + (1 + 2\varepsilon_2)dy^2 + (1 + 2\varepsilon_3)dz^2 + 2\gamma_1 dy\,dz + 2\gamma_2 dz\,dx + 2\gamma_3 dx\,dy$$

et

$$dx = a\,dx' + b\,dy' + c\,dz',$$
$$dy = a'\,dx' + b'\,dy' + c'\,dz',$$
$$dz = a''\,dx' + b''\,dy' + c''\,dz'.$$

(1) G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, p. 435. — Kœnigs, *Leçons de Cinématique*, p. 196.

On a donc

$$dx_1'^2 + dy_1'^2 + dz_1'^2 = (1 + 2\varepsilon_1')dx'^2 + (1 + 2\varepsilon_2')dy'^2 + (1 + 2\varepsilon_3')dz'^2 \\ + 2\gamma_1' dy'dz' + 2\gamma_2' dz'dx' + 2\gamma_3' dx'dy',$$

en posant

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1' &= \varepsilon_1 a^2 + \varepsilon_2 a'^2 + \varepsilon_3 a''^2 + \gamma_1 a'a'' + \gamma_2 a''a + \gamma_3 aa',\\
\varepsilon_2' &= \varepsilon_1 b^2 + \varepsilon_2 b'^2 + \varepsilon_3 b''^2 + \gamma_1 b'b'' + \gamma_2 b''b + \gamma_3 bb',\\
\varepsilon_3' &= \varepsilon_1 c^2 + \varepsilon_2 c'^2 + \varepsilon_3 c''^2 + \gamma_1 c'c'' + \gamma_2 c''c + \gamma_3 cc',\\
\gamma_1' &= 2\varepsilon_1 bc + 2\varepsilon_2 b'c' + 2\varepsilon_3 b''c'' + \gamma_1(b'c'' + b''c') + \gamma_2(b''c + bc'') + \gamma_3(bc' + b'c),\\
\gamma_2' &= 2\varepsilon_1 ca + 2\varepsilon_2 c'a' + 2\varepsilon_3 c''a'' + \gamma_1(c'a'' + c''a') + \gamma_2(c''a + ca'') + \gamma_3(ca' + c'a),\\
\gamma_3' &= 2\varepsilon_1 ab + 2\varepsilon_2 a'b' + 2\varepsilon_3 a''b'' + \gamma_1(a'b'' + a''b') + \gamma_2(a''b + ab'') + \gamma_3(ab' + a'b).
\end{aligned}$$

Telles sont les formules cherchées (1).

On peut remarquer que si l'on considère le second ellipsoïde de déformation

$$(1 + 2\varepsilon_1)X^2 + (1 + 2\varepsilon_2)Y^2 + (1 + 2\varepsilon_3)Z^2 + 2\gamma_1 YZ + 2\gamma_2 ZX + 2\gamma_3 XY = 1,$$

et si l'on remplace dans son équation X, Y, Z par

$$\begin{aligned}
X &= a\ X' + b\ Y' + cZ',\\
Y &= a' X' + b' Y' + c'Z',\\
Z &= a'' X' + b'' Y' + c'' Z',
\end{aligned}$$

la nouvelle équation est

$$(1 + 2\varepsilon_1')X'^2 + (1 + 2\varepsilon_2')Y'^2 + (1 + 2\varepsilon_3')Z'^2 + 2\gamma_1' Y'Z' + 2\gamma_2' Z'X' + 2\gamma_3' X'Y' = 1.$$

Il en résulte que les expressions

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,\\
\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2),\\
4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2
\end{gathered}$$

restent inaltérées par une transformation de coordonnées.

Parmi les déformations homogènes, deux sont particulièrement intéressantes.

---

(1) Comparer Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, t. I, p. 40, 41.

Dans la première, appelée *extension simple*, les lignes parallèles à une direction donnée sont dilatées et toutes les lignes perpendiculaires restent invariables en longueur. D'après ce qui précède, les conditions pour que la déformation en un point soit une extension simple sont (¹)

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2-4(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2)=0,$$
$$4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3+\gamma_1\gamma_2\gamma_3-\varepsilon_1\gamma_1^2-\varepsilon_2\gamma_2^2-\varepsilon_3\gamma_3^2=0$$

et la grandeur de cette extension simple est

$$e=\sqrt{1+2(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}-1.$$

La seconde déformation homogène, que nous devons aussi signaler et dont Vicat (²) et Barré de Saint-Venant (³) ont, les premiers, montré l'importance, est le *glissement simple*. Dans cette déformation, tous les points dans un certain plan restent dans ce plan après la déformation, avec leurs positions primitives, et tous les points dans un plan parallèle au premier restent dans leur plan, mais y sont déplacés, dans des directions parallèles à une ligne donnée dans le premier plan, proportionnellement à leurs distances à ce plan.

Les formules définissant un glissement simple des plans $y'=$ const. parallèlement à l'axe des x' du trièdre coordonné $O'x'y'z'$ sont

$$x'_1=x'+gy',\qquad y'_1=y',\qquad z'_1=z',$$

g étant la grandeur du glissement. Les composantes de la déformation sont

$$\varepsilon'_1=0,\qquad \varepsilon'_2=\frac{g^2}{2},\qquad \varepsilon'_3=0,\qquad \gamma'_1=0,\qquad \gamma'_2=0,\qquad \gamma'_3=g,$$

et les formules (6) du n° 3 donnent

$$\alpha'_1=\frac{\pi}{2},\qquad \alpha'_2=\frac{\pi}{2},\qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha'_3\right)=g.$$

La grandeur d'un glissement simple, pour des axes de coordonnées quel-

---

(¹) LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, t. I, p. 41.

(²) VICAT, *Recherches expérimentales sur les phénomènes physiques qui précèdent et accompagnent la rupture ou l'affaissement d'une certaine classe de solides* (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1833, 2ᵉ semestre, p. 201-268).

(³) BARRÉ DE SAINT-VENANT, *Leçons de Mécanique appliquée, faites en* 1837-1838, *à l'École des Ponts et Chaussées*.

conques, est donc

$$g = \pm\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)},$$

et les conditions pour que la déformation en un point soit un glissement simple sont (1)

$$4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2 = 0,$$
$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) = 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Considérons la déformation résultant de deux glissements simples successifs, l'un des plans $y' =$ const. parallèlement à l'axe des x', l'autre des plans $z' =$ const. parallèlement au même axe des x'. Les formules définissant la déformation résultante seront

$$x'_1 = x' + gy' + hz', \qquad y'_1 = y', \qquad z'_1 = z',$$

g et h étant les grandeurs des deux glissements. Les composantes de la déformation résultante seront

$$\varepsilon'_1 = 0, \qquad \varepsilon'_2 = \frac{g^2}{2}, \qquad \varepsilon'_3 = \frac{h^2}{2}, \qquad \gamma'_1 = gh, \qquad \gamma'_2 = h, \qquad \gamma'_3 = g.$$

On voit immédiatement que cette déformation résultante est elle-même un glissement simple, dont la grandeur est $\pm\sqrt{g^2 + h^2}$.

Il est également facile de voir que deux extensions simples, suivant des directions rectangulaires et dont les grandeurs e, f sont telles que

$$(1 + e)(1 + f) = 1,$$

produisent un glissement simple dont la grandeur est

$$g = \pm(e - f) \text{ (}^2\text{)}.$$

---

(1) LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, t. I, p. 42.

(2) BARRÉ DE SAINT-VENANT, *Leçons de Mécanique appliquée, faites en* 1837-1838, *à l'École des Ponts et Chaussées.*

Les deux extensions simples rectangulaires produiraient aussi un glissement simple, de grandeur $g = \pm ef$, si l'on avait

$$(1 + e)(1 + f) = -1;$$

on pourra rapprocher cette remarque de celle faite au Chap. II, sur le signe de Δ.

On consultera avec grand intérêt, sur ce sujet de la composition et de la décomposition des déformations, W. THOMSON, *Mathematical and Physical Papers*, art. XCII : *Elasticity and Heat*, vol. III, p. 84, et W. THOMSON et TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, vol. I, Part I, p. 125, 133.

II. — De la déformation infiniment petite.

8. *Définition de la déformation infiniment petite.*

Envisageons un milieu qui se déforme d'une façon continue, et supposons, pour fixer les idées, que les différentes positions du milieu soient définies de la manière suivante. Dans les formules

$$x_1 = x + \mathrm{u}, \qquad y_1 = y + \mathrm{v}, \qquad z_1 = z + \mathrm{w},$$

qui donnent les coordonnées x_1, y_1, z_1 de la nouvelle position du point (x, y, z), les quantités u, v, w sont fonctions de x, y, z et d'une nouvelle variable t; nous supposerons que le milieu proposé corresponde, par exemple, à la valeur zéro du paramètre.

Lorsque t sera infiniment petit, les quantités variables avec la déformation, telles, par exemple, que les six fonctions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, différeront de leurs valeurs primitives de quantités infiniment petites. L'étude de la partie principale de tels infiniment petits constituera *ce que nous entendrons* par l'étude de la déformation infiniment petite du milieu considéré.

Supposons que u, v, w, fonctions de la variable t en même temps que de x, y, z, puissent être développées suivant les puissances entières positives de t; comme u, v, w doivent se réduire respectivement à zéro pour $t = 0$, nous aurons

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{u} &= u + u_1 + u_2 + \ldots, \\ \mathrm{v} &= v + v_1 + v_2 + \ldots, \\ \mathrm{w} &= w + w_1 + w_2 + \ldots, \end{aligned} \right.$$

en désignant par u, v, w les termes de ces développements qui renferment t en facteur, et généralement par u_n, v_n, w_n ceux qui renferment t^{n+1} en facteur, en sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{u}_1 t, &\ldots,\quad u_n &= \mathrm{u}_{n+1} t^{n+1}, &\ldots, \\ v &= \mathrm{v}_1 t, &\ldots,\quad v_n &= \mathrm{v}_{n+1} t^{n+1}, &\ldots, \\ w &= \mathrm{w}_1 t, &\ldots,\quad w_n &= \mathrm{w}_{n+1} t^{n+1}, &\ldots, \end{aligned}$$

u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, ... étant des fonctions indépendantes de t, mais dépendant des variables x, y, z.

Pour simplifier l'exposition, nous supposerons que les séries (17) sont uniformément convergentes, ainsi que celles dont les termes s'en déduisent par différentiation par rapport à x, y, z.

9. *Dilatations linéaires et glissements relatifs à la déformation infiniment petite.*

Nous aurons, avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \ldots, & \gamma_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \ldots,\\
\varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \ldots, & \gamma_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \ldots,\\
\varepsilon_3 &= \frac{\partial w}{\partial z} + \ldots, & \gamma_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \ldots,
\end{aligned}$$

les termes non écrits renfermant en facteur une puissance de t supérieure à la première.

Les dilatations linéaires au point P suivant Ox, Oy, Oz seront

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \ldots, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} + \ldots, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} + \ldots,$$

et les formules (6) du n° 3 donnent pour les dilatations angulaires au point P

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} - \alpha_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \ldots,\\
\frac{\pi}{2} - \alpha_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \ldots,\\
\frac{\pi}{2} - \alpha_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \ldots.
\end{aligned}$$

On voit que lorsque t est suffisamment petit, les six composantes de la déformation en un point ont sensiblement pour valeurs les expressions

$$(18) \qquad \left\{\begin{aligned}
e_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_2 &= \frac{\partial v}{\partial y}, & e_3 &= \frac{\partial w}{\partial z},\\
g_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & g_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & g_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned}\right.$$

Les trois premières e_1, e_2, e_3 sont aussi sensiblement les valeurs des dilatations linéaires au point (x, y, z) suivant Ox, Oy, Oz; nous les appellerons les *dilatations linéaires relatives à la déformation infiniment petite* (¹). Les trois dernières g_1, g_2, g_3 sont de même sensiblement les valeurs des trois dilatations angulaires $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$, $\frac{\pi}{2} - \alpha_2$, $\frac{\pi}{2} - \alpha_3$; nous les

(¹) Nous les appellerons simplement *dilatations linéaires* lorsque, dans une même question, on n'envisagera que la déformation infiniment petite et qu'il n'y aura ainsi aucune ambiguïté possible. La même remarque s'applique aux définitions qui vont suivre.

appellerons les *dilatations angulaires relatives à la déformation infiniment petite;* d'après le n° 6, nous pourrons encore les nommer *glissements relatifs à la déformation infiniment petite.*

Pour t tendant vers zéro, l'expression Δ du n° 6 tend vers 1; pour t suffisamment petit, la dilatation cubique est

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \ldots.$$

Sa valeur approchée

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

que nous appellerons *dilatation cubique relative à la déformation infiniment petite,* est égale à la somme des valeurs approchées des dilatations linéaires suivant les trois axes.

10. *Dilatations principales* (1).

Parmi les directions issues de $P(x, y, z)$, il y en a trois particulièrement remarquables : ce sont les axes du second ellipsoïde de déformation. Les dilatations linéaires suivant ces axes sont dites *dilatations principales.* Si nous les désignons par Δ_1, Δ_2, Δ_3, les carrés des longueurs des axes du premier ellipsoïde de déformation seront

$$(1+\Delta_1)^2, \quad (1+\Delta_2)^2, \quad (1+\Delta_3)^2,$$

et les carrés des axes du second ellipsoïde de déformation seront

$$\frac{1}{(1+\Delta_1)^2}, \quad \frac{1}{(1+\Delta_2)^2}, \quad \frac{1}{(1+\Delta_3)^2}.$$

En désignant toujours par S_1, S_2, S_3 les racines de l'équation (14) du n° 5, on aura

$$S_1 = (1+\Delta_1)^2, \qquad S_2 = (1+\Delta_2)^2, \qquad S_3 = (1+\Delta_3)^2,$$

et si l'on forme l'équation en S relative au *premier* ellipsoïde de déformation, ses racines seront, à un facteur près, les inverses de S_1, S_2, S_3.

Cherchons les développements de Δ_1, Δ_2, Δ_3, S_1, S_2, S_3 suivant les puissances de t. Pour $t = 0$, les trois racines de l'équation (14) sont égales à 1;

(1) Comparer H. Poincaré, *Leçons sur la théorie de l'Élasticité*, p. 10 et suiv.

en posant

$$\Delta_1 = \delta_1 + \ldots, \qquad \Delta_2 = \delta_2 + \ldots, \qquad \Delta_3 = \delta_3 + \ldots,$$

δ_1, δ_2, δ_3 contiendront t en facteur, et l'on aura

$$S_1 = 1 + 2\delta_1 + \ldots, \qquad S_2 = 1 + 2\delta_2 + \ldots, \qquad S_3 = 1 + 2\delta_3 + \ldots.$$

Or, si, dans l'équation (14), on remplace S par un développement dont les deux premiers termes sont 1, 2δ, savoir

$$1 + 2\delta + \ldots,$$

on voit, après avoir divisé par t^3 et fait tendre t vers zéro, que δ_1, δ_2, δ_3 sont les racines de l'équation en δ suivante :

$$\begin{vmatrix} 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\delta & \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} & 2\dfrac{\partial v}{\partial y} - 2\delta & \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} & 2\dfrac{\partial w}{\partial z} - 2\delta \end{vmatrix} = 0.$$

Nous appellerons δ_1, δ_2, δ_3 les *dilatations principales relatives à la déformation infiniment petite*.

11. *Rotation relative à la déformation infiniment petite.*

Envisageons la rotation en un point du milieu; pour $t = 0$, elle se réduit évidemment à zéro, en sorte que des neuf cosinus, a, b, c, ... qui figurent dans les équations (9) du n° 6, trois, a, b', c'', se réduisent à 1 pour $t = 0$; les six autres se réduisent à zéro.

Développons ces neuf cosinus suivant les puissances de t; si l'on pose

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad \tau_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad \tau_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

on trouve immédiatement, au moyen des relations (11) et (12), auxquelles satisfont, en général, les neuf cosinus, les développements suivants :

$$\begin{array}{lll} a = 1 - \dfrac{\tau_2^2 + \tau_3^2}{2} + \ldots, & b = -\tau_3 + \ldots, & c = \tau_2 + \ldots, \\ a' = \tau_3 + \ldots, & b' = 1 - \dfrac{\tau_3^2 + \tau_1^2}{2} + \ldots, & c' = -\tau_1 + \ldots, \\ a'' = -\tau_2 + \ldots, & b'' = \tau_1 + \ldots, & c'' = 1 - \dfrac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{2} + \ldots \end{array}$$

avec

$$b'' + c' = \tau_2\tau_3 + \ldots, \qquad c + a'' = \tau_3\tau_1 + \ldots, \qquad a' + b = \tau_1\tau_2 + \ldots,$$

les termes non écrits renfermant en facteur une puissance de t supérieure à celle entrant dans les termes qui figurent.

La connaissance de τ_1, τ_2, τ_3 permet, on le voit, d'écrire les premiers termes des développements des neuf cosinus.

Les formules (9) du n° 6 mettent alors immédiatement en évidence que si l'on définit la rotation par un segment porté sur l'axe de rotation et égal à la grandeur ω de la rotation, les projections de ce segment seront

$$\tau_1 + \ldots, \quad \tau_2 + \ldots, \quad \tau_3 + \ldots.$$

C'est ce que montrent également les formules (15) et (16) du n° 6; les relations (15) nous font voir que, si l_0, m_0, n_0 désignent les valeurs de l, m, n pour $t = 0$, on a

$$\frac{l_0}{\tau_1} = \frac{m_0}{\tau_2} = \frac{n_0}{\tau_3}$$

et la formule (16) donne

$$\cos^2\frac{\omega}{2} = 1 - \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}{4} + \ldots,$$

d'où

$$\omega^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 + \ldots.$$

La rotation définie, de la manière qui vient d'être indiquée, par le segment dont les projections sont

$$\tau_1, \quad \tau_2, \quad \tau_3,$$

est la *rotation relative à la déformation infiniment petite* au point (x, y, z); lorsque t est suffisamment petit, elle ne diffère pas sensiblement de la rotation au même point (x, y, z).

12. *Proposition classique relative au cas où les dilatations linéaires et les glissements relatifs à la déformation infiniment petite sont nuls.*

Pour terminer ces brèves indications sur la déformation infiniment petite, il nous reste à chercher ce que deviennent ici les propositions énoncées au n° 2 dans le cas général.

La notion du *système auxiliaire* de M. Darboux et les propositions que l'éminent géomètre a énoncées à son égard ([1]) vont nous conduire bien facilement aux résultats classiques que nous avons en vue.

Nous avons vu au n° 2 que le système d'équations aux dérivées partielles

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}+\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\right)^2\right]=0,\\ \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}+\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\right)^2\right]=0,\\ \dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}+\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)^2\right]=0,\\ \dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}+\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}+\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}+\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}+\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}+\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}+\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}+\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}+\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}+\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}+\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}+\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}+\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}=0, \end{cases}$$

définissant trois fonctions inconnues u, v, w, admettait une solution, et que cette solution correspondait au déplacement d'ensemble le plus général des différents points d'un corps invariable, ce déplacement étant combiné ou non avec une transformation par symétrie ([2]).

Appliquons au système précédent la notion du système auxiliaire de M. Darboux, en partant de la solution de ce système qui est formée de fonctions toutes nulles.

Le système auxiliaire sera, d'après ce que nous avons dit au n° 9, formé des six équations

$$(20)\quad \frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

définissant trois fonctions inconnues u, v, w; sa solution générale correspond aux solutions infiniment petites du système (19), et elle sera, par conséquent, définie par les formules

$$u=u_0+bz-cy,\qquad v=v_0+cx-az,\qquad w=w_0+ay-bx,$$

où u_0, v_0, w_0, a, b, c sont des constantes, lesquelles formules déterminent

([1]) G. Darboux, *Sur l'équation auxiliaire* (*Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. IV, Note XI, p. 505 et suiv.).

([2]) On remarquera la particularité qui se présente ici si l'on veut écrire des formules déterminant toutes les intégrales du système (19).

la vitesse d'un point x, y, z d'un système invariable à un instant donné.

Pour parler autrement, la solution générale du système (20) correspond au déplacement infiniment petit d'un point (x, y, z) d'un système invariable, dans un mouvement infiniment petit de ce système.

Nous retrouvons, on le voit, la proposition classique bien connue (1), qui est ainsi rattachée à sa véritable origine.

13. *Équations de Barré de Saint-Venant.*

Six fonctions quelconques de x, y, z ne peuvent pas représenter la déformation d'un milieu continu; elles doivent, ainsi que nous l'avons déjà dit au n° 2, vérifier un système d'équations aux dérivées partielles qui représente la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (3) du n° 1, où l'on considère ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 comme des fonctions données, déterminent des inconnues u, v, w.

On peut dire encore que l'intégrale générale du système dont nous venons de parler est définie par les formules (3) du n° 1, où u, v, w désignent des fonctions arbitraires. Considérons alors, en particulier, la solution qui correspond aux valeurs u $=$ o, v $=$ o, w $=$ o de ces fonctions arbitraires, et qui est ainsi formée de fonctions toutes nulles, et formons, à l'égard de cette solution, le système auxiliaire de M. Darboux du système considéré. Ce système auxiliaire, considéré comme définissant six fonctions inconnues e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3, admettra une intégrale générale qui sera définie par les formules (18) du n° 9, où u, v, w désignent des fonctions arbitraires. Donc

Six fonctions quelconques de x, y, z ne peuvent pas être prises pour représenter les dilatations linéaires et les glissements relatifs à une déformation infiniment petite; elles doivent vérifier un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre qui représente la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (18) *du* n° 9, *où l'on considère e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 comme des fonctions données, déterminent des inconnues u, v, w; ce système n'est autre que le système auxiliaire,*

---

(1) Consulter, en particulier, sur ce sujet : W.-J. IBBETSON, *An elementary Treatise on the Mathematical Theory of perfectly elastic Solids,* p. 266; 1887. — H. POINCARÉ, *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité,* p. 13 et suiv.; 1892. — A.-E.-H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity,* p. 121; 1892. — E. CESÀRO, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità,* p. 15; 1894. — G. KOENIGS, *Leçons de Cinématique professées à la Faculté des Sciences de Paris,* § 35, p. 107 et suiv.; 1895.

formé à l'égard de la solution constituée de fonctions toutes nulles, du système auquel satisfont les six fonctions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 *associées à une déformation quelconque.*

Les équations auxquelles satisfont les six fonctions associées à une déformation infiniment petite ont été données pour la première fois par Barré de Saint-Venant (¹); lorsque nous introduirons les coordonnées curvilignes, nous verrons qu'on peut former facilement les équations auxquelles satisfont les six fonctions associées à une déformation quelconque, et le procédé, employé au Chapitre IV pour former les équations de Barré de Saint-Venant, reviendra au fond à former le système auxiliaire de M. Darboux. On peut, pour établir ces mêmes équations, étudier directement le système (18) du n° 9, ainsi que l'ont fait, par exemple, MM. Boussinesq (²) et Beltrami (³), et ainsi que le font les auteurs de différents *Traités d'Élasticité* (⁴). Nous allons reproduire ici l'une des démonstrations de M. Beltrami; elle est identique à celle à laquelle nous serons conduits au Chapitre IV par l'emploi du trièdre mobile.

Introduisons comme inconnues auxiliaires les composantes τ_1, τ_2, τ_3 de la rotation relative à la déformation infiniment petite; nous obtiendrons le système suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = e_1, &&\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g_3}{2} + \tau_3, &&\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{g_2}{2} - \tau_2,\\
&\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g_3}{2} - \tau_3, &&\frac{\partial v}{\partial y} = e_2, &&\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{g_1}{2} + \tau_1,\\
&\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g_2}{2} + \tau_2, &&\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g_1}{2} - \tau_1, &&\frac{\partial w}{\partial z} = e_3.
\end{aligned}$$

(¹) Navier, *Résumé des Leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la Mécanique à l'établissement des constructions et des machines.* 3ᵉ édition, avec des Notes et des Appendices, par M. Barré de Saint-Venant; 1864.

(²) J. Boussinesq, *Etude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 2ᵉ série, t. XVI; 1871).

(³) Beltrami, *Sull' interpretazione meccanica delle formole di Maxwell* (*Nota in fondo; Memorie di Bologna,* 1886). *Note fisico-matematiche* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* t. III, p. 67; 1889). *Sur la théorie de la déformation infiniment petite d'un milieu* (*Comptes rendus,* t. CVIII, p. 502; 1889).

(⁴) Consulter, en particulier : Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity,* p. 121 et suiv. — Cesàro, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità,* p. 18 et suiv.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des fonctions u, v, w, lorsque τ_1, τ_2, τ_3 sont supposées connues, s'obtiennent en écrivant

$$\frac{\partial e_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g_3}{2} - \tau_3\right), \qquad \frac{\partial e_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g_2}{2} + \tau_2\right), \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g_3}{2} - \tau_3\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g_2}{2} + \tau_2\right),$$

et six relations analogues.

Les neuf relations obtenues se résolvent immédiatement par rapport aux dérivées partielles de τ_1, τ_2, τ_3 et les conditions nécessaires et suffisantes de l'existence de u, v, w sont celles qui expriment que le système suivant

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \tau_1}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial z}, & \dfrac{\partial \tau_2}{\partial x} = \dfrac{\partial e_1}{\partial z} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial \tau_3}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial x} - \dfrac{\partial e_1}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \tau_1}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_1}{\partial y} - \dfrac{\partial e_2}{\partial z}, & \dfrac{\partial \tau_2}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial z} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_1}{\partial x}, & \dfrac{\partial \tau_3}{\partial y} = \dfrac{\partial e_2}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \tau_1}{\partial z} = \dfrac{\partial e_3}{\partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_1}{\partial z}, & \dfrac{\partial \tau_2}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial z} - \dfrac{\partial e_3}{\partial x}, & \dfrac{\partial \tau_3}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_1}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial y}, \end{cases}$$

déterminant les auxiliaires τ_1, τ_2, τ_3, est compatible ([1]). Nous obtenons ainsi les six équations de Barré de Saint-Venant,

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 e_2}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 e_3}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 g_1}{\partial y\, \partial z} = 0, & 2\dfrac{\partial^2 e_1}{\partial y\, \partial z} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x} - \dfrac{\partial g_2}{\partial y} - \dfrac{\partial g_3}{\partial z}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 e_3}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 e_1}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 g_2}{\partial z\, \partial x} = 0, & 2\dfrac{\partial^2 e_2}{\partial z\, \partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial g_2}{\partial y} - \dfrac{\partial g_3}{\partial z} - \dfrac{\partial g_1}{\partial x}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 e_1}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 g_3}{\partial x\, \partial y} = 0, & 2\dfrac{\partial^2 e_3}{\partial x\, \partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial g_3}{\partial z} - \dfrac{\partial g_1}{\partial x} - \dfrac{\partial g_2}{\partial y}\right) = 0. \end{cases}$$

([1]) Remarquons, en passant, que les considérations précédentes, appliquées au cas où les e_i et les g_i sont nuls, donnent la démonstration habituelle de la proposition qui fait l'objet du n° 12.

CHAPITRE II.

DE L'EFFORT A L'INTÉRIEUR D'UN MILIEU CONTINU.

---

14. *Définition de l'effort à l'intérieur d'un milieu continu. Équations ordinaires qui s'y rapportent.*

Envisageons un milieu continu dont tous les points sont à la même température et qui, en présence de corps extérieurs ayant tous la même température que lui, a pris une position déformée et est en équilibre sous l'action de deux sortes de forces extérieures : des forces agissant sur la masse intérieure du milieu et des forces appliquées à sa surface.

Les forces agissant sur la masse du milieu seront définies, dans ce qui va suivre, de la façon suivante. Le milieu, dans sa position après la déformation, étant décomposé en éléments de volume, et le passage à la limite devant être effectué ultérieurement, nous supposons appliquée à chaque élément dV_1, en un point (x_1, y_1, z_1) de cet élément, une force ayant pour composantes

$$\rho_1 X \, dV_1(1+\eta'), \qquad \rho_1 Y \, dV_1(1+\eta''), \qquad \rho_1 Z \, dV_1(1+\eta'''),$$

ρ_1 désignant la densité, au point (x_1, y_1, z_1), du milieu déformé et η', η'', η''' tendant uniformément vers zéro avec les dimensions de l'élément.

Nous dirons que X, Y, Z sont les projections sur les axes coordonnés de la *force appliquée au point* (x_1, y_1, z_1) et rapportée à l'unité de masse; pour fixer les idées, on pourra supposer, par exemple, comme nous le ferons plus loin, que X, Y, Z sont des fonctions données de x, y, z, x_1, y_1, z_1, définies et continues pour tous les points du milieu.

Nous définirons les forces à la surface S_1 du milieu déformé, en nous donnant de même les projections F_1, G_1, H_1 de la *force appliquée au point* (x_1, y_1, z_1) de cette surface et rapportée à l'unité d'aire, en sorte que, la surface S_1 étant décomposée en éléments, et le passage à la limite devant être effectué ultérieurement, nous supposons appliquée à chaque élément $d\sigma_1$, au point (x_1, y_1, z_1) de cet élément, une force ayant pour composantes

$$F_1 \, d\sigma_1(1+\zeta'), \qquad G_1 \, d\sigma_1(1+\zeta''), \qquad H_1 \, d\sigma_1(1+\zeta'''),$$

ζ', ζ'', ζ''' tendant uniformément vers zéro avec les dimensions de l'élément.

A l'intérieur du milieu déformé, limité par la surface S_1, traçons une surface Σ_1 circonscrivant, soit seule, soit avec une portion de la surface S_1, une partie A_1 du milieu; soit B_1 ce qui reste du milieu en dehors de la partie A_1.

Imaginons que nous enlevions la partie B_1 du milieu, et que nous laissions la partie A_1 soumise aux forces extérieures qui agissaient sur elle. L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire, et c'est celle que nous ferons dans la suite, consiste à supposer que l'on peut, d'une façon unique, et pour toute forme de Σ_1, maintenir la partie A_1 en équilibre au moyen d'une application auxiliaire et continue de forces à sa surface Σ_1; cette partie A_1 se trouvera ainsi en équilibre sous l'action de forces de même définition que celles qui sont supposées tenir en équilibre le corps entier. Soit $P_1 n_1$ la normale menée à Σ_1 en un point P_1 de cette surface, vers l'extérieur du domaine A_1; nous supposerons aussi (¹) que les projections

$$p_{n_1x_1},\quad p_{n_1y_1},\quad p_{n_1z_1},$$

sur les axes coordonnés, de la force auxiliaire appliquée au point (x_1, y_1, z_1) de Σ_1 et rapportée à l'unité d'aire restent les mêmes lorsqu'on considère, au lieu de Σ_1, une autre surface qui lui est tangente au point (x_1, y_1, z_1); nous dirons alors que ces trois projections sont les *composantes de l'effort* (²), *par unité d'aire, au point* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *sur l'élément plan dont la normale est* $P_1 n_1$: la signification précise de cette définition est donnée par les indications qui la précèdent.

Par des raisonnements classiques et qu'il est inutile que nous reprenions, on trouve, en adoptant, comme nous avons commencé à le faire plus haut, la notation de Coriolis, les relations suivantes. On a d'abord, en désignant par l_1, m_1, n_1 les cosinus directeurs de la direction $P_1 n_1$, les formules

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} p_{n_1x_1} &= l_1 p_{x_1x_1} + m_1 p_{y_1x_1} + n_1 p_{z_1x_1},\\ p_{n_1y_1} &= l_1 p_{x_1y_1} + m_1 p_{y_1y_1} + n_1 p_{z_1y_1},\\ p_{n_1z_1} &= l_1 p_{x_1z_1} + m_1 p_{y_1z_1} + n_1 p_{z_1z_1},\end{aligned}\right.$$

(¹) Consulter H. POINCARÉ, *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*, § 38, p. 71-72.

(²) Le mot *effort* répond à l'expression anglaise *stress*, introduite très heureusement par Rankine dans la théorie de l'élasticité, et il est substitué aujourd'hui d'une manière presque générale aux dénominations de pression, tension, traction, force élastique, ..., employées autrefois par les mathématiciens et les ingénieurs.

où les premiers membres doivent être remplacés par F_1, G_1, H_1 à la surface du corps.

On a ensuite

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p_{x_1x_1}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{y_1x_1}}{\partial y_1}+\frac{\partial p_{z_1x_1}}{\partial z_1}+\rho_1 X=0,\\ &\frac{\partial p_{x_1y_1}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{y_1y_1}}{\partial y_1}+\frac{\partial p_{z_1y_1}}{\partial z_1}+\rho_1 Y=0,\\ &\frac{\partial p_{x_1z_1}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{y_1z_1}}{\partial y_1}+\frac{\partial p_{z_1z_1}}{\partial z_1}+\rho_1 Z=0,\end{aligned}\right. \qquad (25)\quad \left\{\begin{aligned} &p_{y_1z_1}=p_{z_1y_1},\\ &p_{z_1x_1}=p_{x_1z_1},\\ &p_{x_1y_1}=p_{y_1x_1}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on emploie la notation de Lamé, on introduira les six auxiliaires N_i, T_i définies par les formules

$$\begin{gathered} N_1=p_{x_1x_1},\qquad N_2=p_{y_1y_1},\qquad N_3=p_{z_1z_1},\\ T_1=p_{y_1z_1}=p_{z_1y_1},\qquad T_2=p_{z_1x_1}=p_{x_1z_1},\qquad T_3=p_{x_1y_1}=p_{y_1x_1}.\end{gathered}$$

Rappelons aussi que M. Pearson a proposé récemment ([1]) une simplification commode de la notation de Coriolis; elle consiste à adopter la notation ombrale de M. Sylvester et à écrire

$$p_{x_1x_1}=\widehat{x_1x_1},\qquad p_{x_1y_1}=p_{y_1x_1}=\widehat{x_1y_1}=\widehat{y_1x_1},\qquad \ldots.$$

15. *Transformation des équations du numéro précédent.*

Les équations qui précèdent sont relatives au cas où les variables indépendantes adoptées sont x_1, y_1, z_1; mais il est essentiel, au point de vue des applications, d'écrire aussi ces équations en adoptant pour variables x, y, z, c'est-à-dire les coordonnées du point du corps non déformé qui est venu en (x_1, y_1, z_1).

Cette transformation, qui est entièrement analogue à celle par laquelle on passe, en Hydrodynamique, des *équations d'Euler* aux *équations de Lagrange,* a été commencée par Kirchhoff dans le Mémoire que nous avons déjà cité au n° 2, et d'après les indications données par Barré de Saint-Venant dans la Note également citée au n° 2.

([1]) I. Todhunter et K. Pearson, *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials,* vol. I, p. 322. On trouvera, à la page que nous venons de citer de cet Ouvrage, un Tableau comparatif des différentes notations employées par les principaux auteurs dans la théorie de l'Élasticité.

Les résultats de Kirchhoff demandent à être légèrement modifiés pour être adaptés au cas général; nous allons reprendre la question et parvenir à des équations qui ont été données par M. Brillouin (1), en 1891, sous la forme que l'on trouvera ci-après dans le texte, et dont nous déduirons celles données par M. Boussinesq (2) en 1869.

Il nous suffit évidemment de raisonner, par exemple, sur le corps entier et de supposer que les équations (23) se rapportent à la surface du corps et que leurs premiers membres sont égaux à F_1, G_1, H_1.

Les équations (23), (24), en adoptant la notation de Lamé, peuvent alors être remplacées par la suivante

$$\begin{aligned}
&\iiint\left(\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial T_3}{\partial y_1}+\frac{\partial T_2}{\partial z_1}+\rho_1 X\right)\delta u\,dx_1\,dy_1\,dz_1\\
&+\iiint\left(\frac{\partial T_3}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial y_1}+\frac{\partial T_1}{\partial z_1}+\rho_1 Y\right)\delta v\,dx_1\,dy_1\,dz_1\\
&+\iiint\left(\frac{\partial T_2}{\partial x_1}+\frac{\partial T_1}{\partial y_1}+\frac{\partial N_3}{\partial z_1}+\rho_1 Z\right)\delta w\,dx_1\,dy_1\,dz_1\\
&\qquad+\iint(F_1-l_1N_1-m_1T_3-n_1T_2)\,\delta u\,d\sigma_1\\
&\qquad+\iint(G_1-l_1T_3-m_1N_2-n_1T_1)\,\delta v\,d\sigma_1\\
&\qquad+\iint(H_1-l_1T_2-m_1T_1-n_1N_3)\,\delta w\,d\sigma_1=0,
\end{aligned}$$

où les variations δu, δv, δw sont supposées arbitraires.

Par des transformations faciles, la relation que nous venons d'écrire devient la suivante

$$\begin{aligned}
(26)\quad &\iiint\rho_1(X\delta u+Y\delta v+Z\delta w)\,dx_1\,dy_1\,dz_1+\iint(F_1\delta u+G_1\delta v+H_1\delta w)\,d\sigma_1\\
&-\iiint\left[N_1\frac{\partial\delta u}{\partial x_1}+N_2\frac{\partial\delta v}{\partial y_1}+N_3\frac{\partial\delta w}{\partial z_1}+T_1\left(\frac{\partial\delta w}{\partial y_1}+\frac{\partial\delta v}{\partial z_1}\right)\right.\\
&\qquad\left.+T_2\left(\frac{\partial\delta u}{\partial z_1}+\frac{\partial\delta w}{\partial x_1}\right)+T_3\left(\frac{\partial\delta v}{\partial x_1}+\frac{\partial\delta u}{\partial y_1}\right)\right]dx_1\,dy_1\,dz_1=0,
\end{aligned}$$

---

(1) M. Brillouin, *Déformations homogènes finies. Énergie d'un corps isotrope* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 1500-1502; 1891).

(2) J. Boussinesq, *Théorie des ondes liquides périodiques*, p. 516 (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XX).

dont les rapports avec le principe des vitesses virtuelles sont évidents; car, si nous imposons au corps des liaisons qui le solidifient d'une manière invariable, et si δu, δv, δw désignent les accroissements de u, v, w, et par conséquent de x_1, y_1, z_1, dans une modification virtuelle compatible avec de telles liaisons, nous devrons avoir l'identité

$$(27)\qquad dx_1\, d\delta u + dy_1\, d\delta v + dz_1\, d\delta w = 0,$$

ui exprime que la variation du carré de l'élément linéaire $dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2$ du milieu déformé est nulle; en annulant dans le premier membre de (27) les coefficients de dx_1^2, dy_1^2, …, il vient alors

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial \delta v}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} = 0,$$
$$\frac{\partial \delta w}{\partial y_1} + \frac{\partial \delta v}{\partial z_1} = 0, \qquad \frac{\partial \delta u}{\partial z_1} + \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial \delta v}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta u}{\partial y_1} = 0.$$

Cherchons la transformée de la relation (26), lorsqu'on prend x, y, z pour variables indépendantes.

La relation

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = (1+2\varepsilon_1)dx^2 + (1+2\varepsilon_2)dy^2 + (1+2\varepsilon_3)dz^2 + 2\gamma_1\, dy\, dz + 2\gamma_2\, dz\, dx + 2\gamma_3\, dx\, dy,$$

qui est identique en vertu des relations (4) ou des relations (1), donne par la différentiation avec le signe δ

$$dx_1\, d\delta u + dy_1\, d\delta v + dz_1\, d\delta w = \delta\varepsilon_1\, dx^2 + \delta\varepsilon_2\, dy^2 + \delta\varepsilon_3\, dz^2 + \delta\gamma_1\, dy\, dz + \delta\gamma_2\, dz\, dx + \delta\gamma_3\, dx\, dy,$$

c'est-à-dire

$$(28)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \delta u}{\partial x_1} dx_1^2 + \frac{\partial \delta v}{\partial y_1} dy_1^2 + \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} dz_1^2 + \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y_1} + \frac{\partial \delta v}{\partial z_1}\right) dy_1\, dz_1 \\ &\quad + \left(\frac{\partial \delta u}{\partial z_1} + \frac{\partial \delta w}{\partial x_1}\right) dz_1\, dx_1 + \left(\frac{\partial \delta v}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta u}{\partial y_1}\right) dx_1\, dy_1 \\ &= \delta\varepsilon_1\, dx^2 + \delta\varepsilon_2\, dy^2 + \delta\varepsilon_3\, dz^2 + \delta\gamma_1\, dy\, dz + \delta\gamma_2\, dz\, dx + \delta\gamma_3\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Remplaçons dans le premier membre de cette nouvelle identité dx_1, dy_1, dz_1 par leurs valeurs données par les formules (4) du n° 1, et égalons les coefficients de dx^2, dy^2, ...; il vient

$$
(29) \quad \left\{
\begin{aligned}
\delta\varepsilon_1 &= \frac{\partial\,\delta u}{\partial x_1}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\,\delta v}{\partial y_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\,\delta w}{\partial z_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\delta w}{\partial y_1}+\frac{\partial\,\delta v}{\partial z_1}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial x} \\
&\quad + \left(\frac{\partial\,\delta u}{\partial z_1}+\frac{\partial\,\delta w}{\partial x_1}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\,\delta v}{\partial x_1}+\frac{\partial\,\delta u}{\partial y_1}\right)\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}, \\
\delta\varepsilon_2 &= \frac{\partial\,\delta u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial\,\delta v}{\partial y_1}\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial\,\delta w}{\partial z_1}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\delta w}{\partial y_1}+\frac{\partial\,\delta v}{\partial z_1}\right)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial y} + \ldots, \\
\delta\varepsilon_3 &= \frac{\partial\,\delta u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial\,\delta v}{\partial y_1}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial\,\delta w}{\partial z_1}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\delta w}{\partial y_1}+\frac{\partial\,\delta v}{\partial z_1}\right)\frac{\partial v}{\partial z}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \ldots, \\
\delta\gamma_1 &= 2\,\frac{\partial\,\delta u}{\partial x_1}\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial z} + 2\,\frac{\partial\,\delta v}{\partial y_1}\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial z} + 2\,\frac{\partial\,\delta w}{\partial z_1}\,\frac{\partial w}{\partial y}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial\,\delta w}{\partial y_1}+\frac{\partial\,\delta v}{\partial z_1}\right)\left[\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial v}{\partial z}\,\frac{\partial w}{\partial y}\right] + \ldots, \\
\delta\gamma_2 &= 2\,\frac{\partial\,\delta u}{\partial x_1}\,\frac{\partial u}{\partial z}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2\,\frac{\partial\,\delta v}{\partial y_1}\,\frac{\partial v}{\partial z}\,\frac{\partial v}{\partial x} + 2\,\frac{\partial\,\delta w}{\partial z_1}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial x} \\
&\quad + \left(\frac{\partial\,\delta w}{\partial y_1}+\frac{\partial\,\delta v}{\partial z_1}\right)\left[\frac{\partial v}{\partial z}\,\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] + \ldots, \\
\delta\gamma_3 &= 2\,\frac{\partial\,\delta u}{\partial x_1}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + 2\,\frac{\partial\,\delta v}{\partial y_1}\,\frac{\partial v}{\partial x}\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\,\frac{\partial\,\delta w}{\partial z_1}\,\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y} \\
&\quad + \left(\frac{\partial\,\delta w}{\partial y_1}+\frac{\partial\,\delta v}{\partial z_1}\right)\left[\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \ldots.
\end{aligned}
\right.
$$

Δ désignant le déterminant considéré au n° 6, déterminons six nouvelles auxiliaires P_1, P_2, P_3, U_1, U_2, U_3 au moyen de la relation

$$
(30) \quad
\begin{aligned}
\Delta\Bigg[N_1\frac{\partial\,\delta u}{\partial x_1} + N_2\frac{\partial\,\delta v}{\partial y_1} + N_3\frac{\partial\,\delta w}{\partial z_1} &+ T_1\left(\frac{\partial\,\delta w}{\partial y_1}+\frac{\partial\,\delta v}{\partial z_1}\right) \\
+ T_2\left(\frac{\partial\,\delta u}{\partial z_1}+\frac{\partial\,\delta w}{\partial x_1}\right) &+ T_3\left(\frac{\partial\,\delta v}{\partial x_1}+\frac{\partial\,\delta u}{\partial y_1}\right)\Bigg] \\
= P_1\,\delta\varepsilon_1 + P_2\,\delta\varepsilon_2 + P_3\,\delta\varepsilon_3 &+ U_1\,\delta\gamma_1 + U_2\,\delta\gamma_2 + U_3\,\delta\gamma_3,
\end{aligned}
$$

supposée vérifiée identiquement en vertu de (28) ou des formules (29), c'est-à-dire en posant

$$
(31)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{N}_1 = \frac{1}{\Delta}\Bigg\{ & \mathrm{P}_1\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)^2 + \mathrm{P}_2\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\right)^2 + \mathrm{P}_3\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}\right)^2 \\
& + 2\,\mathrm{U}_1\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z} + 2\,\mathrm{U}_2\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right) + 2\,\mathrm{U}_3\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\Bigg\}, \\
\mathrm{N}_2 = \frac{1}{\Delta}\Bigg\{ & \mathrm{P}_1\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)^2 + \mathrm{P}_2\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)^2 + \mathrm{P}_3\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\right)^2 \\
& + 2\,\mathrm{U}_1\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} + 2\,\mathrm{U}_2\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + 2\,\mathrm{U}_3\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)\Bigg\}, \\
\mathrm{N}_3 = \frac{1}{\Delta}\Bigg\{ & \mathrm{P}_1\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\right)^2 + \mathrm{P}_2\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\right)^2 + \mathrm{P}_3\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)^2 \\
& + 2\,\mathrm{U}_1\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right) + 2\,\mathrm{U}_2\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + 2\,\mathrm{U}_3\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\Bigg\}, \\
\mathrm{T}_1 = \frac{1}{\Delta}\Bigg\{ & \mathrm{P}_1\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + \mathrm{P}_2\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} + \mathrm{P}_3\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right) \\
& + \mathrm{U}_1\left[\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right) + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\right] \\
& + \mathrm{U}_2\left[\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)\right] + \mathrm{U}_3\left[\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} + \left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\right]\Bigg\}, \\
\mathrm{T}_2 = \frac{1}{\Delta}\Bigg\{ & \mathrm{P}_1\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right) + \mathrm{P}_2\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + \mathrm{P}_3\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z} \\
& + \mathrm{U}_1\left[\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z} + \left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\right] \\
& + \mathrm{U}_2\left[\left(1+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right) + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}\right] + \mathrm{U}_3\left[\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)\right]\Bigg\}, \\
\mathrm{T}_3 = \frac{1}{\Delta}\Bigg\{ & \mathrm{P}_1\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + \mathrm{P}_2\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right) + \mathrm{P}_3\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} \\
& + \mathrm{U}_1\left[\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)\right] \\
& + \mathrm{U}_2\left[\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + \left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\right] + \mathrm{U}_3\left[\left(1+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)\left(1+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right) + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Désignons par ρ la densité du milieu *non déformé* au point (x, y, z); par $d\sigma$ l'élément de sa surface S correspondant à l'élément $d\sigma_1$ de S_1; par F, G, H les projections de la *force appliquée au point* (x_1, y_1, z_1) et rapportée à l'unité d'aire de S, en sorte que, eu égard aux explications données au n° 14, les projections de la force à la surface S_1, sur ce qu'est devenu l'élément $d\sigma$ de S, sont

$$F\,d\sigma(1+\xi'),\qquad G\,d\sigma(1+\xi''),\qquad H\,d\sigma(1+\xi'''),$$

ξ', ξ'', ξ''' tendant uniformément vers zéro avec les dimensions de $d\sigma$.

La relation (26) prend alors la forme suivante

$$\begin{aligned}(32)\qquad &\iiint \rho(X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w)\,dx\,dy\,dz + \iint (F\,\delta u + G\,\delta v + H\,\delta w)\,d\sigma \\ &- \iiint (P_1\,\delta\varepsilon_1 + P_2\,\delta\varepsilon_2 + P_3\,\delta\varepsilon_3 + U_1\,\delta\gamma_1 + U_2\,\delta\gamma_2 + U_3\,\delta\gamma_3)\,dx\,dy\,dz = 0,\end{aligned}$$

en supposant que Δ *est partout positif* [1] et les intégrations étant étendues au corps *non déformé*.

Remplaçons dans cette relation ε_1, ε_2, ... par leurs valeurs (3) du n° 1; par des transformations faciles, on trouve que, si l'on pose

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned}
A_x &= P_1\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + U_3\frac{\partial u}{\partial y} + U_2\frac{\partial u}{\partial z},\\
A_y &= P_1\frac{\partial v}{\partial x} + U_3\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + U_2\frac{\partial v}{\partial z},\\
A_z &= P_1\frac{\partial w}{\partial x} + U_3\frac{\partial w}{\partial y} + U_2\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\
B_x &= U_3\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + P_2\frac{\partial u}{\partial y} + U_1\frac{\partial u}{\partial z},\\
B_y &= U_3\frac{\partial v}{\partial x} + P_2\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + U_1\frac{\partial v}{\partial z},\\
B_z &= U_3\frac{\partial w}{\partial x} + P_2\frac{\partial w}{\partial y} + U_1\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\
C_x &= U_2\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + U_1\frac{\partial u}{\partial y} + P_3\frac{\partial u}{\partial z},\\
C_y &= U_2\frac{\partial v}{\partial x} + U_1\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + P_3\frac{\partial v}{\partial z},\\
C_z &= U_2\frac{\partial w}{\partial x} + U_1\frac{\partial w}{\partial y} + P_3\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right),
\end{aligned}\right.$$

---

[1] Nous nous bornons ici, comme on le fait d'habitude, au cas où Δ est partout positif; mais, s'il y avait intérêt à supposer le signe de Δ variable, suivant la région du corps, il n'y aurait que des changements faciles à apporter aux développements du texte. Nous n'insisterons pas actuellement sur ce point que l'on doit rapprocher des indications données plus loin au n° 27.

la relation (32) prend la forme suivante

$$
\begin{aligned}
&\iiint\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial B_x}{\partial y}+\frac{\partial C_x}{\partial z}+\rho X\right)\delta u\,dx\,dy\,dz\\
&+\iiint\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial C_y}{\partial z}+\rho Y\right)\delta v\,dx\,dy\,dz\\
&+\iiint\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}+\frac{\partial B_z}{\partial y}+\frac{\partial C_z}{\partial z}+\rho Z\right)\delta w\,dx\,dy\,dz\\
&\qquad+\iint(F-lA_x-mB_x-nC_x)\,\delta u\,d\sigma\\
&\qquad+\iint(G-lA_y-mB_y-nC_y)\,\delta v\,d\sigma\\
&\qquad+\iint(H-lA_z-mB_z-nC_z)\,\delta w\,d\sigma=0,
\end{aligned}
$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la normale au point x, y, z de la surface S du milieu *non déformé*, menée vers l'extérieur.

Comme cette relation doit avoir lieu quelles que soient les variations δu, δv, δw, on doit avoir pour toutes les valeurs de x, y, z qui se rapportent aux points de l'intérieur du corps *non déformé*

$$
(34)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial B_x}{\partial y}+\frac{\partial C_x}{\partial z}+\rho X=0,\\
&\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial C_y}{\partial z}+\rho Y=0,\\
&\frac{\partial A_z}{\partial x}+\frac{\partial B_z}{\partial y}+\frac{\partial C_z}{\partial z}+\rho Z=0,
\end{aligned}
\right.
$$

et pour toutes les valeurs de x, y, z qui se rapportent aux points de la surface du corps *non déformé*

$$
(35)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
F&=lA_x+mB_x+nC_x,\\
G&=lA_y+mB_y+nC_y,\\
H&=lA_z+mB_z+nC_z.
\end{aligned}
\right.
$$

Remarquons que les raisonnements précédents s'appliquent immédiatement à une portion quelconque du corps; on en déduit facilement la signification des nouvelles auxiliaires que l'on a introduites.

Si l'on considère, par exemple, A_x, A_y, A_z, il est clair que ce sont les composantes de l'effort qui s'exerce au point (x_1, y_1, z_1) sur une surface qui, avant déformation, avait pour normale au point (x, y, z) la parallèle à l'axe Ox des coordonnées; cet effort est rapporté à l'unité d'aire de la surface *non déformée*.

16. *Expressions des nouvelles auxiliaires* P_i, U_i, A_x, A_y, A_z, ..., *au moyen des* N_i, T_i.

Sans insister davantage sur ces interprétations, et sur celles qu'on pourrait donner des quantités P_i, U_i, remarquons que les formules (31) et (33) expriment les auxiliaires N_i, T_i, A_x, A_y, A_z, ... au moyen des six quantités P_i, U_i. Proposons-nous d'exprimer de même les auxiliaires P_i, U_i, A_x, A_y, A_z, ... au moyen des six quantités N_i, T_i.

Remarquons à cet effet que les formules (31), eu égard aux relations (33), entraînent les trois suivantes :

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) A_x + \frac{\partial u}{\partial y} B_x + \frac{\partial u}{\partial z} C_x &= \Delta N_1,\\
\frac{\partial v}{\partial x} A_x + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) B_x + \frac{\partial v}{\partial z} C_x &= \Delta T_3,\\
\frac{\partial w}{\partial x} A_x + \frac{\partial w}{\partial y} B_x + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) C_x &= \Delta T_2,
\end{aligned}$$

et six analogues que l'on obtient en remplaçant

$$A_x,\quad B_x,\quad C_x,\quad N_1,\quad T_3,\quad T_2,$$

respectivement par

$$A_y,\quad B_y,\quad C_y,\quad T_3,\quad N_2,\quad T_1,$$

puis par

$$A_z,\quad B_z,\quad C_z,\quad T_2,\quad T_1,\quad N_3.$$

On en déduit, en résolvant ces neuf relations par rapport à A_x, B_x, C_x, ...

$$
(36)\qquad \left\{
\begin{aligned}
A_x &= N_1 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}} + T_3 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}} + T_2 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}},\\
A_y &= T_3 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}} + N_2 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}} + T_1 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}},\\
A_z &= T_2 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}} + T_1 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}} + N_3 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}},\\
B_x &= N_1 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}} + T_3 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}} + T_2 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}},\\
B_y &= T_3 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}} + N_2 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}} + T_1 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}},\\
B_z &= T_2 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}} + T_1 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}} + N_3 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}},\\
C_x &= N_1 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}} + T_3 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}} + T_2 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}},\\
C_y &= T_3 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}} + N_2 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}} + T_1 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}},\\
C_z &= T_2 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}} + T_1 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}} + N_3 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}}.
\end{aligned}
\right.
$$

On a ensuite les quantités P_i, U_i par la résolution des équations (33).

Les formules (34) et (35) présentent évidemment la plus grande analogie avec les équations (23) et (24); *mais les équations* (25) *n'ont pas ici leurs analogues;* les relations qui leur correspondent sont les trois suivantes [1] :

---

[1] On pourra rapprocher ce résultat et ceux qui le précèdent des indications données par M. Poincaré, p. 77 et suiv. de ses *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*.

$$
(37)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial x}\,A_z+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)B_z+\frac{\partial v}{\partial z}\,C_z=\frac{\partial w}{\partial x}\,A_y+\frac{\partial w}{\partial y}\,B_y+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)C_y,\\
&\frac{\partial w}{\partial x}\,A_x+\frac{\partial w}{\partial y}\,B_x+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)C_x=\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)A_z+\frac{\partial u}{\partial y}\,B_z+\frac{\partial u}{\partial z}\,C_z,\\
&\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)A_y+\frac{\partial u}{\partial y}\,B_y+\frac{\partial u}{\partial z}\,C_y=\frac{\partial v}{\partial x}\,A_x+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)B_x+\frac{\partial v}{\partial z}\,C_x,
\end{aligned}
\right.
$$

auxquelles doivent satisfaire les neuf fonctions A_x, B_x, C_x, A_y, B_y, C_y, A_z, B_z, C_z et dont on pourra rapprocher la forme de celle des équations (12).

17. *Équations de M. Boussinesq.*

Remplaçons dans les équations (34) les fonctions A_x, B_x, C_x, ... par leurs valeurs (36) et remarquons que l'on a l'identité [1]

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}\right)=0,
$$

et les deux que l'on en déduit en remplaçant u par v, puis par w; il vient alors l'équation

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}+\frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}+\frac{\partial N_1}{\partial z}\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}\\
&+\frac{\partial T_3}{\partial x}\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}}+\frac{\partial T_3}{\partial y}\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}}+\frac{\partial T_3}{\partial z}\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}}\\
&+\frac{\partial T_2}{\partial x}\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}}+\frac{\partial T_2}{\partial y}\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}}+\frac{\partial T_2}{\partial z}\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}}+\rho X=0,
\end{aligned}
$$

et deux autres analogues qui s'en déduisent par une ou deux permutations circulaires effectuées sur x, y, z; u, v, w; X, Y, Z; N_1, N_2, N_3; T_1, T_2, T_3.

Les trois équations auxquelles nous venons de parvenir ne sont autres que celles qui ont été données par M. Boussinesq en 1869 [2]; on pourrait les obtenir d'une façon plus rapide en effectuant directement sur les équations (24) le changement de variables défini par les formules (1).

---

(1) Cette identité est déjà utilisée par C. Neumann dans le Mémoire cité plus loin, au n° 26.

(2) J. Boussinesq, *Théorie des ondes liquides périodiques*, p. 516 (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XX).

18. *Travail virtuel effectué par les forces extérieures appliquées au corps.*

En rapprochant ici les deux équations (26) et (32) qui résument soit les équations (23), (24), (25) du n° 14, soit les équations (34) et (35) du n° 15, nous voyons que les unes et les autres de ces dernières ne font qu'exprimer la condition suivante :

Quels que soient les déplacements virtuels donnés aux différents points du milieu déformé supposé en équilibre, le travail virtuel $\delta\mathfrak{T}_e$ *effectué par les forces extérieures appliquées au milieu est donné par la relation*

$$(38)\quad \delta\mathfrak{T}_e = \iiint\left[N_1\frac{\partial\,\delta u}{\partial x_1} + N_2\frac{\partial\,\delta v}{\partial y_1} + N_3\frac{\partial\,\delta w}{\partial z_1} + T_1\left(\frac{\partial\,\delta w}{\partial y_1} + \frac{\partial\,\delta v}{\partial z_1}\right) + T_2\left(\frac{\partial\,\delta u}{\partial z_1} + \frac{\partial\,\delta w}{\partial x_1}\right) + T_3\left(\frac{\partial\,\delta v}{\partial x_1} + \frac{\partial\,\delta u}{\partial y_1}\right)\right] dx_1\,dy_1\,dz_1,$$

qui peut aussi s'écrire

$$(39)\quad \delta\mathfrak{T}_e = \iiint (P_1\,\delta\varepsilon_1 + P_2\,\delta\varepsilon_2 + P_3\,\delta\varepsilon_3 + U_1\,\delta\gamma_1 + U_2\,\delta\gamma_2 + U_3\,\delta\gamma_3)\,dx\,dy\,dz,$$

ou encore

$$(40)\quad \delta\mathfrak{T}_e = \iiint\left(A_x\,\delta\frac{\partial u}{\partial x} + B_x\,\delta\frac{\partial u}{\partial y} + C_x\,\delta\frac{\partial u}{\partial z} + A_y\,\delta\frac{\partial v}{\partial x} + B_y\,\delta\frac{\partial v}{\partial y} + C_y\,\delta\frac{\partial v}{\partial z} + A_z\,\delta\frac{\partial w}{\partial x} + B_z\,\delta\frac{\partial w}{\partial y} + C_z\,\delta\frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Dans la formule (38), l'intégrale triple est étendue au milieu *déformé*, et dans les formules (39) et (40), au milieu *non déformé*.

19. *Surfaces isostatiques de Lamé. Remarque de M. Boussinesq. Recherches de M. Weingarten.*

Les équations (23) montrent qu'en chaque point (x_1, y_1, z_1) d'un milieu déformé, il existe trois éléments plans rectangulaires sur lesquels les efforts sont normaux, et qui, généralement, jouissent seuls de cette propriété. Si l'on considère en tous les points du milieu ces triples éléments, on peut se demander s'ils déterminent trois familles de surfaces orthogonales qui jouiraient ainsi de la propriété d'être normales aux efforts qui s'exercent sur elles. Lamé avait cru pouvoir affirmer, dans le cas général, l'existence de ces familles de surfaces qu'il avait appelées *surfaces isostatiques* ([1]); cette proposition, qui a conduit l'illustre géomètre à créer les coordonnées curvilignes ([2]), est manifestement erronée, ainsi que l'a fait remarquer pour la première fois M. Boussinesq ([3]).

Pour donner une application de la première forme des équations relatives à l'effort à l'intérieur d'un milieu déformé, laquelle nous sera d'ailleurs utile dans la suite, nous exposerons la méthode extrêmement élégante suivie par M. Weingarten pour établir les conditions d'existence des surfaces isostatiques ([4]).

Soient a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 les cosinus directeurs des efforts qui sont normaux respectivement à trois éléments plans rectangulaires en un point du milieu. Pour que ces cosinus déterminent en chaque point du milieu trois directions qui coïncident avec les tangentes aux lignes d'intersection d'un système triple orthogonal, il faut et il suffit que l'on ait

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1\,dx_1 + a_2\,dy_1 + a_3\,dz_1 &= \mathrm{H}_1\,d\rho_1,\\ b_1\,dx_1 + b_2\,dy_1 + b_3\,dz_1 &= \mathrm{H}_2\,d\rho_2,\\ c_1\,dx_1 + c_2\,dy_1 + c_3\,dz_1 &= \mathrm{H}_3\,d\rho_3,\end{aligned}\right.$$

H_1, H_2, H_3, ρ_1, ρ_2, ρ_3 étant des fonctions de x_1, y_1, z_1.

Les conditions d'existence d'un système isostatique s'obtiendront donc en exprimant que la substitution (41) entraîne les relations

$$(42)\qquad dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \mathrm{H}_1^2\,d\rho_1^2 + \mathrm{H}_2^2\,d\rho_2^2 + \mathrm{H}_3^2\,d\rho_3^2,$$

$$(43)\qquad \begin{aligned}\mathrm{N}_1\,dx_1^2 + \mathrm{N}_2\,dy_1^2 + \mathrm{N}_3\,dz_1^2 + 2\mathrm{T}_1\,dy_1\,dz_1 + 2\mathrm{T}_2\,dz_1\,dx_1 + 2\mathrm{T}_3\,dx_1\,dy_1\\ = \mathrm{M}_1\mathrm{H}_1^2\,d\rho_1^2 + \mathrm{M}_2\mathrm{H}_2^2\,d\rho_2^2 + \mathrm{M}_3\mathrm{H}_3^2\,d\rho_3^2,\end{aligned}$$

où M_1, M_2, M_3 désignent des fonctions de x_1, y_1, z_1.

M. Weingarten considère alors les six quantités n_1, n_2, n_3, t_1, t_2, t_3 défi-

---

([1]) G. Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, 15e Leçon, § 148, p. 272 et suiv.

([2]) Lire la dernière ligne de la p. 273 et les deux premières lignes de la p. 274 des *Leçons sur les coordonnées curvilignes*.

([3]) J. Boussinesq, *Lois géométriques de la distribution des pressions dans un solide homogène et ductile soumis à des déformations planes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXIV, p. 242; 1872).

([4]) J. Weingarten, *Zur Theorie der isostatischen Flächen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XC, p. 18-33; 1881).

nies par les formules (1)

$$n_1 = \frac{\partial T_3}{\partial z_1} - \frac{\partial T_2}{\partial y_1}, \qquad n_2 = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} - \frac{\partial T_3}{\partial z_1}, \qquad n_3 = \frac{\partial T_2}{\partial y_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_1},$$

$$2\,t_1 = \frac{\partial T_3}{\partial y_1} - \frac{\partial T_2}{\partial z_1} + \frac{\partial(N_3 - N_2)}{\partial x_1}, \qquad 2\,t_2 = \frac{\partial T_1}{\partial z_1} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1} + \frac{\partial(N_1 - N_3)}{\partial y_1},$$

$$2\,t_3 = \frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial y_1} + \frac{\partial(N_2 - N_1)}{\partial z_1},$$

et il s'appuie sur cette proposition que, m_1, m_2, m_3 désignant certaines fonctions de ρ_1, ρ_2, ρ_3, la substitution (41) doit donner aussi

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} & n_1\,dx_1^2 + n_2\,dy_1^2 + n_3\,dz_1^2 + 2\,t_1\,dy_1\,dz_1 + 2\,t_2\,dz_1\,dx_1 + 2\,t_3\,dx_1\,dy_1 \\ & \quad = m_1 H_2\,d\rho_2 H_3\,d\rho_3 + m_2 H_3\,d\rho_3 H_1\,d\rho_1 + m_3 H_1\,d\rho_1 H_2\,d\rho_2, \\ & N'_1\,dx_1^2 + N'_2\,dy_1^2 + N'_3\,dz_1^2 + 2\,T'_1\,dy_1\,dz_1 + 2\,T'_2\,dz_1\,dx_1 + 2\,T'_3\,dx_1\,dy_1 \\ & \quad = M_2 M_3 H_1^2\,d\rho_1^2 + M_3 M_1 H_2^2\,d\rho_2^2 + M_1 M_2 H_3^2\,d\rho_3^2, \\ & n'_1\,dx_1^2 + n'_2\,dy_1^2 + n'_3\,dz_1^2 + 2\,t'_1\,dy_1\,dz_1 + 2\,t'_2\,dz_1\,dx_1 + 2\,t'_3\,dx_1\,dy_1 \\ & \quad = m'_1 H_2\,d\rho_2 H_3\,d\rho_3 + m'_2 H_3\,d\rho_3 H_1\,d\rho_1 + m'_3 H_1\,d\rho_1 H_2\,d\rho_2, \end{aligned}\right.$$

où la forme $(N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3 \between dx_1, dy_1, dz_1)^2$ est la forme adjointe de $(N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 \between dx_1, dy_1, dz_1)^2$, et où l'on a

$$n'_1 = \frac{\partial T'_3}{\partial z_1} - \frac{\partial T'_2}{\partial y_1}, \qquad n'_2 = \frac{\partial T'_1}{\partial x_1} - \frac{\partial T'_3}{\partial z_1}, \qquad n'_3 = \frac{\partial T'_2}{\partial y_1} - \frac{\partial T'_1}{\partial x_1},$$

$$2\,t'_1 = \frac{\partial T'_3}{\partial y_1} - \frac{\partial T'_2}{\partial z_1} + \frac{\partial(N'_3 - N'_2)}{\partial x_1}, \qquad 2\,t'_2 = \frac{\partial T'_1}{\partial z_1} - \frac{\partial T'_3}{\partial x_1} + \frac{\partial(N'_1 - N'_3)}{\partial y_1},$$

$$2\,t'_3 = \frac{\partial T'_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T'_1}{\partial y_1} + \frac{\partial(N'_2 - N'_1)}{\partial z_1}.$$

Les équations (42), (43) sont, nous l'avons dit, nécessaires et suffisantes pour l'existence des surfaces isostatiques. Toutes les conséquences tirées de ces équations et des équations (44) représenteront par suite des conditions nécessaires pour l'existence de ces surfaces.

La considération simultanée des formes qui constituent les premiers membres de l'équation (43) et des équations (44) conduit immédiatement

(1) Remarquons en passant que les considérations du texte ont leurs analogues dans l'étude géométrique faite, au Chapitre I, de la déformation d'un milieu continu et que les formes quadratiques qui sont envisagées ici prennent alors une forme très élégante.

à annuler les trois quantités suivantes :

$$(45)\qquad \begin{cases} J_1 = N_1 n_1 + N_2 n_2 + N_3 n_3 + 2T_1 t_1 + 2T_2 t_2 + 2T_3 t_3, \\ J_2 = N_1 n'_1 + N_2 n'_2 + N_3 n'_3 + 2T_1 t'_1 + 2T_2 t'_2 + 2T_3 t'_3 \\ \quad = N'_1 n_1 + N'_2 n_2 + N'_3 n_3 + 2T'_1 t_1 + 2T'_2 t_2 + 2T'_3 t_3, \\ J_3 = N'_1 n'_1 + N'_2 n'_2 + N'_3 n'_3 + 2T'_1 t'_1 + 2T'_2 t'_2 + 2T'_3 t'_3. \end{cases}$$

Les trois équations

$$(46)\qquad J_1 = 0, \qquad J_2 = 0, \qquad J_3 = 0$$

sont, par suite, trois équations qui doivent être remplies pour que les surfaces isostatiques existent.

On obtient ainsi trois équations aux dérivées partielles du premier ordre, auxquelles sont assujetties les six quantités N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3.

Montrons que ces trois équations sont des conditions suffisantes pour l'existence des surfaces isostatiques.

Posons

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (N_2 - S)(N_3 - S) - T_1^2, & \Theta_1 &= T_2 T_3 - (N_1 - S)T_1, \\ \Delta_2 &= (N_3 - S)(N_1 - S) - T_2^2, & \Theta_2 &= T_3 T_1 - (N_2 - S)T_2, \\ \Delta_3 &= (N_1 - S)(N_2 - S) - T_3^2, & \Theta_3 &= T_1 T_2 - (N_3 - S)T_3, \end{aligned}$$

S étant une arbitraire. Soit Δ_h^i le résultat de la substitution de M_i à S dans Δ_h; attribuons la même signification à Θ_h^i. La théorie des axes des quadriques montre que chacun des trois groupes de cosinus (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) satisfait à un système correspondant de neuf relations

$$\begin{aligned} k_1\alpha_1 &= \Delta_1^i, & k_1\alpha_2 &= \Theta_3^i, & k_1\alpha_3 &= \Theta_2^i, \\ k_2\alpha_1 &= \Theta_3^i, & k_2\alpha_2 &= \Delta_2^i, & k_2\alpha_3 &= \Theta_1^i, \\ k_3\alpha_1 &= \Theta_2^i, & k_3\alpha_2 &= \Theta_1^i, & k_3\alpha_3 &= \Delta_3^i, \end{aligned}$$

dans lesquelles les k_i désignent des grandeurs qui ne sont pas nulles.

Si l'on forme la somme

$$\begin{aligned} K = {} & \Delta_1\left(\frac{\partial\Theta_3}{\partial z_1} - \frac{\partial\Theta_2}{\partial y_1}\right) + \Delta_2\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\Theta_3}{\partial z_1}\right) + \Delta_3\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial y_1} - \frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1}\right) \\ & + \Theta_1\left[\frac{\partial\Theta_3}{\partial y_1} - \frac{\partial\Theta_2}{\partial z_1} + \frac{\partial(\Delta_3 - \Delta_2)}{\partial x_1}\right] + \Theta_2\left[\frac{\partial\Theta_1}{\partial z_1} - \frac{\partial\Theta_3}{\partial x_1} + \frac{\partial(\Delta_1 - \Delta_3)}{\partial y_1}\right] \\ & + \Theta_3\left[\frac{\partial\Theta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Theta_1}{\partial y_1} + \frac{\partial(\Delta_2 - \Delta_1)}{\partial z_1}\right], \end{aligned}$$

on reconnaît qu'elle est une fonction entière du second degré de S, et un calcul facile donne

$$K = J_3 - 2J_2 S + J_1 S^2.$$

Soit K_i la valeur que prend K lorsqu'on donne à S la valeur M_i. Il résulte des neuf relations précédentes qui déterminent les cosinus (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) que l'on a [1]

$$K_i = \sum m_h \left[\alpha_1\left(\frac{\partial m_h \alpha_2}{\partial z_1} - \frac{\partial m_h \alpha_3}{\partial y_1}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial m_h \alpha_3}{\partial x_1} - \frac{\partial m_h \alpha_1}{\partial z_1}\right) + \alpha_3\left(\frac{\partial m_h \alpha_1}{\partial y_1} - \frac{\partial m_h \alpha_2}{\partial x_1}\right)\right]$$

$$(h = 1, 2, 3),$$

et ainsi pour chaque valeur de i

$$\left[\alpha_1\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial z_1} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial y_1}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1}\right) + \alpha_3\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}\right)\right]\sum m_h^2 = J_3 - 2J_2 M_i + J_1 M_i^2.$$

On déduit de là que, si les trois invariants J_1, J_2, J_3 s'annulent, on a les trois équations

$$(47) \quad \alpha_1\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial z_1} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial y_1}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1}\right) + \alpha_3\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}\right) = 0 \quad (\alpha_k = a_k, b_k, c_k),$$

qui donnent un autre moyen d'exprimer que les trois directions α_1, α_2, α_3 coïncident avec les tangentes aux lignes d'intersection des surfaces d'un système triple orthogonal. Réciproquement, les équations (47) entraînent les équations (46), toutes les fois que deux des M_i ne sont pas égaux.

M. Weingarten a donné deux représentations symboliques très simples des équations (46). La première est la suivante :

$$J_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & x_1 & N_1 x_1 + T_3 y_1 + T_2 z_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial y_1} & y_1 & T_3 x_1 + N_2 y_1 + T_1 z_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial z_1} & z_1 & T_2 x_1 + T_1 y_1 + N_3 z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & x_1 & N'_1 x_1 + T'_3 y_1 + T'_2 z_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial y_1} & y_1 & T'_3 x_1 + N'_2 y_1 + T'_1 z_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial z_1} & z_1 & T'_2 x_1 + T'_1 y_1 + N'_3 z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

[1] Les valeurs 1, 2, 3 de l'indice i correspondent respectivement aux lettres a, b, c.

$$J_3 = \begin{vmatrix} N_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + T_3 \dfrac{\partial}{\partial y_1} + T_2 \dfrac{\partial}{\partial z_1} & x_1 & N'_1 x_1 + T'_3 y_1 + T'_2 z_1 \\ T_3 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + N_2 \dfrac{\partial}{\partial y_1} + T_1 \dfrac{\partial}{\partial z_1} & y_1 & T'_3 x_1 + N'_2 y_1 + T'_1 z_1 \\ T_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + T_1 \dfrac{\partial}{\partial y_1} + N_3 \dfrac{\partial}{\partial z_1} & z_1 & T'_2 x_1 + T'_1 y_1 + N'_3 z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

en convenant que les produits $\dfrac{\partial}{\partial x_1} x_1 x_1$, ... seront remplacés par $\dfrac{\partial \widehat{x_1 x_1}}{\partial x_1}$, ..., c'est-à-dire (n° 14) par $\dfrac{\partial N_1}{\partial x_1}$, ...

La seconde représentation s'obtient en multipliant chacun des déterminants précédents par le déterminant, égal en valeur absolue à l'unité, formé avec les neuf cosinus α_1, α_2, α_3. On obtient ainsi les résultats suivants

$$\left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + c_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\right)(a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1)(a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1) = 0,$$

$$\left(a_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial}{\partial z_1}\right)(a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1)(a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1) = 0,$$

$$\left(a_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_3 \frac{\partial}{\partial y_1} + c_3 \frac{\partial}{\partial z_1}\right)(a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1)(a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1) = 0.$$

20. *Équations relatives à l'équilibre d'un corps ayant la forme d'un cylindre droit avant la déformation.*

Donnons maintenant une application de la seconde forme des équations relatives à l'effort à l'intérieur d'un milieu déformé, dont nous aurons aussi à employer les résultats plus tard.

Considérons un corps ayant la forme d'un cylindre droit avant la déformation, et prenons l'axe des z parallèle aux génératrices du cylindre.

Supposons qu'aucune force n'agisse sur la surface latérale du cylindre dans son état de déformation.

Multiplions par $dx\,dy$ les équations (34) et intégrons sur l'aire d'une section transversale quelconque du cylindre; nous aurons

$$\iint\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial C_x}{\partial z}\right) dx\,dy + \iint \rho X\,dx\,dy = 0,$$

$$\iint\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial C_y}{\partial z}\right) dx\,dy + \iint \rho Y\,dx\,dy = 0,$$

$$\iint\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}\right) dx\,dy + \iint \rho Z\,dx\,dy = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\int (l\mathrm{A}_x + m\mathrm{B}_x)\, ds + \iint \frac{\partial \mathrm{C}_x}{\partial z}\, dx\, dy + \iint \rho \mathrm{X}\, dx\, dy = 0,$$

$$\int (l\mathrm{A}_y + m\mathrm{B}_y)\, ds + \iint \frac{\partial \mathrm{C}_y}{\partial z}\, dx\, dy + \iint \rho \mathrm{Y}\, dx\, dy = 0,$$

$$\int (l\mathrm{A}_z + m\mathrm{B}_z)\, ds + \iint \frac{\partial \mathrm{C}_z}{\partial z}\, dx\, dy + \iint \rho \mathrm{Z}\, dx\, dy = 0,$$

les intégrales curvilignes étant prises le long du contour de la section transversale. Puisque aucune force n'agit sur la surface latérale du cylindre, où l'on a $n = 0$, ces équations se réduisent d'après (35) à

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}\iint \mathrm{C}_x\, dx\, dy + \iint \rho \mathrm{X}\, dx\, dy = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial z}\iint \mathrm{C}_y\, dx\, dy + \iint \rho \mathrm{Y}\, dx\, dy = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial z}\iint \mathrm{C}_z\, dx\, dy + \iint \rho \mathrm{Z}\, dx\, dy = 0,\end{aligned}\right.$$

C_x, C_y, C_z étant d'après les équations (35) les composantes de l'effort en un point de la section transversale sur cette section.

On peut donner à ces équations une autre forme très utile. Considérons un système de trois directions rectangulaires, variant d'une manière quelconque avec x, y, z, et définies par les cosinus (a, a', a''), (b, b', b''), (c, c', c''). Posons

$$\mathcal{X} = a\iint \rho \mathrm{X}\, dx\, dy + a'\iint \rho \mathrm{Y}\, dx\, dy + a''\iint \rho \mathrm{Z}\, dx\, dy,$$

$$\mathcal{Y} = b\iint \rho \mathrm{X}\, dx\, dy + b'\iint \rho \mathrm{Y}\, dx\, dy + b''\iint \rho \mathrm{Z}\, dx\, dy,$$

$$\mathcal{Z} = c\iint \rho \mathrm{X}\, dx\, dy + c'\iint \rho \mathrm{Y}\, dx\, dy + c''\iint \rho \mathrm{Z}\, dx\, dy,$$

et

$$\mathcal{N}_1 = a\iint \mathrm{C}_x\, dx\, dy + a'\iint \mathrm{C}_y\, dx\, dy + a''\iint \mathrm{C}_z\, dx\, dy,$$

$$\mathcal{N}_2 = b\iint \mathrm{C}_x\, dx\, dy + b'\iint \mathrm{C}_y\, dx\, dy + b''\iint \mathrm{C}_z\, dx\, dy,$$

$$\mathcal{T} = c\iint \mathrm{C}_x\, dx\, dy + c'\iint \mathrm{C}_y\, dx\, dy + c''\iint \mathrm{C}_z\, dx\, dy.$$

Introduisons les quantités p_3, q_3, r_3 définies par les formules bien connues de Poisson

$$p_3 = \sum c \frac{\partial b}{\partial z} = -\sum b \frac{\partial c}{\partial z},$$
$$q_3 = \sum a \frac{\partial c}{\partial z} = -\sum c \frac{\partial a}{\partial z},$$
$$r_3 = \sum b \frac{\partial a}{\partial z} = -\sum a \frac{\partial b}{\partial z},$$

et les équations (48) deviendront

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial z} + \mathfrak{T} q_3 - \mathfrak{N}_2 r_3 + \mathfrak{X} = 0,\\ &\frac{\partial \mathfrak{N}_2}{\partial z} + \mathfrak{N}_1 r_3 - \mathfrak{T} p_3 + \mathfrak{Y} = 0,\\ &\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} + \mathfrak{N}_2 p_3 - \mathfrak{N}_1 q_3 + \mathfrak{Z} = 0,\end{aligned}\right.$$

Des équations (34) nous déduisons de même les équations suivantes, où les intégrales s'étendent encore à l'aire d'une section transversale du cylindre,

$$\begin{aligned} &\int\!\!\int\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}\right)(y + v - v_0)\,dx\,dy\\ &-\int\!\!\int\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial C_y}{\partial z}\right)(w - w_0)\,dx\,dy\\ &\quad+\int\!\!\int \rho[(y + v - v_0)Z - (w - w_0)Y]\,dx\,dy = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int\!\!\int\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial C_x}{\partial z}\right)(w - w_0)\,dx\,dy\\ &-\int\!\!\int\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}\right)(x + u - u_0)\,dx\,dy\\ &\quad+\int\!\!\int \rho[(w - w_0)X - (x + u - u_0)Z]\,dx\,dy = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int\!\!\int\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial C_y}{\partial z}\right)(x + u - u_0)\,dx\,dy\\ &-\int\!\!\int\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial C_x}{\partial z}\right)(y + v - v_0)\,dx\,dy\\ &+\int\!\!\int \rho[(x + u - u_0)Y - (y + v - v_0)X]\,dx\,dy = 0,\end{aligned}$$

(u_0, v_0, w_0) étant le déplacement du point où l'axe des z perce la section transversale.

Il est facile de voir, comme précédemment, que ces équations, eu égard aux relations (37), peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(50)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial z} + \mathcal{S} q_3 - \mathcal{G}_2 r_3 + \mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{L} = 0, \\ &\frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial z} + \mathcal{G}_1 r_3 - \mathcal{S} p_3 + \mathfrak{N}'_2 + \mathfrak{M} = 0, \\ &\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z} + \mathcal{G}_2 p_3 - \mathcal{G}_1 q_3 + \mathfrak{T}' + \mathfrak{N} = 0, \end{aligned}\right.$$

en posant

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} = {} & a\int\!\!\int \rho[(y + \mathrm{v} - \mathrm{v}_0)\mathrm{Z} - (\mathrm{w} - \mathrm{w}_0)\mathrm{Y}]\,dx\,dy \\ & + a'\int\!\!\int \rho[(\mathrm{w} - \mathrm{w}_0)\mathrm{X} - (x + \mathrm{u} - \mathrm{u}_0)\mathrm{Z}]\,dx\,dy \\ & + a''\int\!\!\int \rho[(x + \mathrm{u} - \mathrm{u}_0)\mathrm{Y} - (y + \mathrm{v} - \mathrm{v}_0)\mathrm{X}]\,dx\,dy, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{G}_1 = {} & a\int\!\!\int [(y + \mathrm{v} - \mathrm{v}_0)\mathrm{C}_z - (\mathrm{w} - \mathrm{w}_0)\mathrm{C}_y]\,dx\,dy \\ & + a'\int\!\!\int [(\mathrm{w} - \mathrm{w}_0)\mathrm{C}_x - (x + \mathrm{u} - \mathrm{u}_0)\mathrm{C}_z]\,dx\,dy \\ & + a''\int\!\!\int [(x + \mathrm{u} - \mathrm{u}_0)\mathrm{C}_y - (y + \mathrm{v} - \mathrm{v}_0)\mathrm{C}_x]\,dx\,dy, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et en désignant par $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}'_2$, $\mathfrak{T}'$ les quantités obtenues en remplaçant dans $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{T}$ les cosinus a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' respectivement par

$$\begin{aligned} & a'\left(1 + \frac{d\mathrm{w}_0}{dz}\right) - a''\frac{d\mathrm{v}_0}{dz}, \quad a''\frac{d\mathrm{u}_0}{dz} - a\left(1 + \frac{d\mathrm{w}_0}{dz}\right), \quad a\frac{d\mathrm{v}_0}{dz} - a'\frac{d\mathrm{u}_0}{dz}; \\ & b'\left(1 + \frac{d\mathrm{w}_0}{dz}\right) - b''\frac{d\mathrm{v}_0}{dz}, \quad b''\frac{d\mathrm{u}_0}{dz} - b\left(1 + \frac{d\mathrm{w}_0}{dz}\right), \quad b\frac{d\mathrm{v}_0}{dz} - b'\frac{d\mathrm{u}_0}{dz}; \\ & c'\left(1 + \frac{d\mathrm{w}_0}{dz}\right) - c''\frac{d\mathrm{v}_0}{dz}, \quad c''\frac{d\mathrm{u}_0}{dz} - c\left(1 + \frac{d\mathrm{w}_0}{dz}\right), \quad c\frac{d\mathrm{v}_0}{dz} - c'\frac{d\mathrm{u}_0}{dz}. \end{aligned}$$

On reconnaît dans les équations (49) et (50) les équations d'équilibre des tiges minces données par Clebsch (1), étendues au cas général d'une tige droite de section quelconque déformée d'une manière quelconque.

On établirait de même les équations d'équilibre des plaques d'épaisseur quelconque qui sont sollicitées par des forces à la surface seulement sur leur bord (2); mais nous nous contenterons pour le moment des indications précédentes.

(1) CLEBSCH, *Théorie de l'élasticité des corps solides.* Édition de Barré de Saint-Venant, p. 424 et suiv.

(2) CLEBSCH, *Théorie de l'élasticité des corps solides.* Édition de Barré de Saint-Venant, p. 656 et suiv.

CHAPITRE III.

L'ÉNERGIE DE DÉFORMATION ET LES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE DES CORPS ÉLASTIQUES.

---

21. *Indication de la marche qui va être suivie, d'après deux Mémoires de Lord Kelvin.*

Dans le Chapitre précédent, nous avons appliqué les principes de la Mécanique des solides invariables à un milieu dont tous les points sont à la même température et qui, dans une position déformée, est en équilibre sous l'action de certaines forces et en présence de corps extérieurs ayant tous la même température que lui. Les hypothèses que nous avons faites sur le milieu et sur les forces laissent encore subsister un très grand degré de généralité.

Nous devons, actuellement, nous préoccuper d'introduire la notion de *corps parfaitement élastique*, et d'établir les équations que l'on emploie pour étudier l'équilibre d'un tel corps.

La voie que nous allons suivre a été indiquée, pour la première fois, par Lord Kelvin qui, après avoir rattaché, dans le Mémoire classique (1), paru en avril 1855, la théorie de la déformation infiniment petite des solides élastiques de Green aux principes de la Thermodynamique, est revenu en 1863 sur la même question (2), pour montrer de quelle façon les mêmes principes conduisent à poser en équation le problème de la recherche des déplacements, de grandeur quelconque, des points d'un corps élastique sollicité par des forces données.

22. *Introduction du corps homogène dont les déformations sont homogènes; les deux lois fondamentales de la Thermodynamique.*

---

(1) W. Thomson, *On the Thermo-elastic and Thermo-magnetic Properties of Matter*, Part I. (*Quarterly Journal of Mathematics*, t. I, p. 57-77.) Ce Mémoire a été réimprimé en 1878 dans le *Philosophical Magazine;* il est réimprimé également p. 291 et suivantes du vol. I des *Mathematical and Physical Papers* de Lord Kelvin.

(2) Dans le Mémoire intitulé : *General Theory of the Equilibrium of an Elastic Solid;* ce Mémoire forme un appendice à un Mémoire publié en 1863; il est reproduit dans le *Treatise on Natural Philosophy* et dans les *Mathematical and Physical Papers*, vol. III, p. 386 et suivantes.

Considérons d'abord, avec Lord Kelvin, un corps défini de la façon suivante : dans un état dit *état naturel*, nous le concevons sans déformation et homogène; toutes ses déformations, à partir de l'état naturel, sont homogènes et définies par des formules telles que (5); tous ses points ont la même température; la position du corps est ainsi définie par les paramètres a_{ik} qui figurent dans les formules (5); le corps reste homogène et son *état* est défini par les six composantes de déformation ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 rapportées à l'état naturel, et par la température absolue T, commune à tous ses points. Supposons de plus que, lorsque les sept paramètres ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, T restent compris entre des limites déterminées pour chacun d'eux, toute modification du corps qui est une suite continue d'états d'équilibre soit une modification réversible (1), et que, pour chacun des états que l'on considère, on puisse maintenir le corps dans cet état, au moyen d'un système unique de forces extérieures et en présence de corps extérieurs tous à la même température que lui; le système de forces est supposé défini, lorsqu'on connaît les valeurs des paramètres qui correspondent à l'état considéré.

Supposons qu'on applique à un pareil corps les deux principes de la Thermodynamique.

Le premier de ces principes est celui de l'*équivalence de la chaleur et du travail;* il s'énonce ainsi :

Soit δQ la quantité de chaleur reçue par le système durant une modification élémentaire quelconque; si les forces extérieures qui lui sont appliquées ont effectué un travail $\delta\mathfrak{T}_e$, en même temps que sa force vive $\sum \frac{mv^2}{2}$ a varié, on a la relation

$$E\,\delta Q + \delta\mathfrak{T}_e = \delta \sum \frac{mv^2}{2} + dU,$$

E étant une constante positive, l'équivalent mécanique de la chaleur, et dU

---

(1) Nous employons ici l'expression *modification réversible,* avec le sens que M. Duhem a si bien précisé. Consulter en particulier :

P. Duhem, *Étude sur les travaux thermodynamiques* de M. J. Willard Gibbs (*Bulletin des Sciences mathématiques,* t. XI, 1re Partie, p. 122, 159; 1887). — *Introduction à la Mécanique chimique*, Gand, 1893. — *Commentaire aux principes de la Thermodynamique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 4e série, t. VIII, p. 269; t. IX, p. 293; t. X, p. 203; 1895).

étant la différentielle exacte d'une fonction [1] U des paramètres, qui définissent l'*état* du corps; on appelle cette fonction l'*énergie interne* [2] du corps.

La seconde loi de la Thermodynamique, qu'on appelle le *principe de Carnot et de Clausius,* est ici la suivante :

Soit T la température absolue qui est commune à tous les points du corps, pendant que ce corps subit une modification élémentaire qui absorbe une quantité de chaleur δQ, et que sa force vive varie; on a l'inégalité

$$\mathrm{E}\,\delta\mathrm{Q} - \delta\sum\frac{mv^2}{2} - \mathrm{ET}\,d\mathrm{S} < 0, \tag{51}$$

dS désignant la différentielle exacte d'une fonction S des paramètres qui définissent l'*état* du système; cette fonction porte le nom d'*entropie*.

Si la modification, au lieu d'être une modification réalisable, est une modification réversible, on doit remplacer l'inégalité précédente par la relation

$$\delta\mathrm{Q} - \mathrm{T}\,d\mathrm{S} = 0. \tag{52}$$

Remarquons que, en tenant compte de la première loi de la Thermodynamique, nous pouvons éliminer δQ et, en introduisant la fonction

$$\mathcal{F} = \mathrm{U} - \mathrm{EST},$$

c'est-à-dire le potentiel thermodynamique de M. Duhem, nous pouvons remplacer l'inégalité (51) par l'une des suivantes :

$$\begin{aligned} &d\mathrm{U} - \mathrm{ET}\,d\mathrm{S} - \delta\mathfrak{T}_e < 0,\\ &d\mathcal{F} + \mathrm{ES}\,d\mathrm{T} - \delta\mathfrak{T}_e < 0, \end{aligned} \tag{53}$$

et la relation (52) par l'une des deux suivantes :

$$d\mathrm{U} - \mathrm{ET}\,d\mathrm{S} - \delta\mathfrak{T}_e = 0, \tag{54}$$

$$d\mathcal{F} + \mathrm{ES}\,d\mathrm{T} - \delta\mathfrak{T}_e = 0. \tag{55}$$

---

(1) Nous employons ici et dans la suite le mot *fonction* dans le sens qu'il a dans la Théorie des fonctions d'une variable réelle, en sorte que ce mot désigne une fonction uniforme dans tout le domaine que l'on considère.

(2) Cette définition diffère légèrement de celle de certains auteurs qui emploient le même nom pour désigner l'expression $\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{E}}$.

23. *Énergie de déformation du corps homogène considéré au numéro précédent.*

Il nous est maintenant facile d'établir la condition d'équilibre [1] du corps que nous envisageons actuellement.

Le corps étant supposé en équilibre dans un état particulier sous l'action de forces données, nous examinerons d'abord le cas où sa température peut être considérée comme connue.

Si nous considérons toutes les modifications réversibles du corps à partir de son état d'équilibre, il résulte des hypothèses faites que nous devons avoir, pour toutes les valeurs possibles des variations des paramètres qui fixent l'état du corps, la relation (55); inversement, cette condition est suffisante pour l'équilibre, car il résulte de l'inégalité (53) que, si pour toutes les modifications élémentaires du système, pris dans un certain état, on a

$$d\mathfrak{F} + \mathrm{ES}\,d\mathrm{T} - \delta\mathfrak{T}_e \geqq 0,$$

aucune de ces modifications n'est possible, et le système demeure en équilibre dans l'état considéré.

Les coefficients qui figurent dans les formules (5) d'une déformation homogène sont ce que M. Duhem appelle des *variables normales,* en sorte que, dans le travail élémentaire $\delta\mathfrak{T}_e$ des forces extérieures, le coefficient de dT est nul.

Les conditions d'équilibre s'obtiennent donc en adjoignant à

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathrm{T}} = -\,\mathrm{ES} \tag{56}$$

les relations obtenues en écrivant que l'on a, pour toutes les variations des paramètres,

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varepsilon_1}\delta\varepsilon_1 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varepsilon_2}\delta\varepsilon_2 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varepsilon_3}\delta\varepsilon_3 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\gamma_1}\delta\gamma_1 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\gamma_2}\delta\gamma_2 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\gamma_3}\delta\gamma_3 = \delta\mathfrak{T}_e.$$

Mais la relation (56) peut être considérée comme déterminant la valeur de S; si nous faisons abstraction de cette relation, nous pouvons dire que la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre s'obtient en écrivant que *la*

---

[1] Nous entendons ici le mot *équilibre* au sens employé par M. Duhem dans le *Commentaire aux principes de la Thermodynamique.*

température T *du corps étant égale à la température donnée* T_0, *on a pour toute transformation élémentaire à température constante*

$$d\mathcal{F}_0 - \delta\mathfrak{T}_e = 0,$$

$\mathcal{F}_0$ désignant la valeur de $\mathcal{F}$ pour $T = T_0$.

Passons maintenant au cas où l'entropie du corps peut être considérée comme ayant une valeur donnée S_0.

Effectuons un changement de variables dans lequel on conserve les paramètres autres que T, lequel est remplacé par S; U deviendra une nouvelle fonction que nous désignerons encore par U; en répétant le raisonnement précédent, mais en partant de la relation (54), au lieu de la relation (55), on trouve immédiatement que les conditions d'équilibre s'obtiennent en adjoignant aux relations

$$S = S_0, \tag{57}$$

$$\frac{\partial U}{\partial S} = ET \tag{58}$$

celles que l'on obtient en écrivant que l'on a

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1}\delta\varepsilon_1 + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2}\delta\varepsilon_2 + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_3}\delta\varepsilon_3 + \frac{\partial U}{\partial \gamma_1}\delta\gamma_1 + \frac{\partial U}{\partial \gamma_2}\delta\gamma_2 + \frac{\partial U}{\partial \gamma_3}\delta\gamma_3 = \delta\mathfrak{T}_e,$$

pour toute variation des paramètres.

Si nous faisons abstraction de (57) et (58), qui déterminent S et T, on voit que la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre s'obtient en écrivant que, pour toute transformation élémentaire à entropie constante, on a

$$dU_0 - \delta\mathfrak{T}_e = 0,$$

U_0 étant la valeur de U pour $S = S_0$.

On peut résumer ce qui précède de la façon suivante:

Au corps homogène considéré au numéro précédent, et dans chacun des deux cas qui viennent d'être considérés, on peut associer une fonction W des six composantes de déformation ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 telle que la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre dans un état déterminé et sous l'action de forces extérieures s'obtienne en écrivant que l'on a, pour toutes les variations des paramètres

$$\delta W - \delta\mathfrak{T}_e = 0.$$

Cette fonction W diffère suivant le cas que l'on considère; nous lui donnerons, dans tous les cas, le nom d'*énergie de déformation* du corps considéré.

24. *Énergie de déformation en un point d'un corps homogène déformé d'une manière quelconque. Équilibre en un point.*

Considérons un corps qui, dans l'*état naturel*, c'est-à-dire dans l'état d'équilibre à partir duquel nous évaluons la déformation, est homogène; supposons que, sous l'action de forces extérieures, il soit en équilibre dans une position déformée.

Les composantes de la déformation ne sont pas constantes dans toute l'étendue du corps; mais on peut regarder comme sensiblement homogène la déformation subie par une portion suffisamment petite du corps entourant un point P (x, y, z); à ce que nous avons appelé la *déformation au point* P, nous sommes ainsi conduits à adjoindre la notion d'*énergie de déformation au point* P, rapportée à l'unité de volume du corps non déformé. A l'égard de cette énergie de déformation au point P, l'hypothèse la plus simple consiste à admettre qu'elle ne dépend que de la déformation en ce point, et que, lorsque le corps est homogène dans son état naturel, elle définit, pour toutes les positions de P, et dans les deux cas considérés au numéro précédent, une fonction

$$W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

formée uniquement avec les six fonctions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 associées à la déformation subie par le corps.

Si nous admettons alors, de plus, l'existence de l'effort à l'intérieur du corps, nous sommes finalement conduits, sans qu'il soit besoin de nouvelles explications, à parler de l'*équilibre au point* P, et, en vertu de la formule (39) du n° 18, à adjoindre, aux équations obtenues au Chapitre précédent, les suivantes :

$$(59) \qquad \begin{cases} P_1 = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_1}, & P_2 = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_2}, & P_3 = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_3}, \\ U_1 = \dfrac{\partial W}{\partial \gamma_1}, & U_2 = \dfrac{\partial W}{\partial \gamma_2}, & U_3 = \dfrac{\partial W}{\partial \gamma_3}, \end{cases}$$

relatives à l'équilibre du corps.

Les formules (33) permettent de mettre les conditions (59) sous la forme suivante :

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned}
A_x &= \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x}}, & B_x &= \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial y}}, & C_x &= \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial z}},\\
A_y &= \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial x}}, & B_y &= \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial y}}, & C_y &= \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial z}},\\
A_z &= \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial x}}, & B_z &= \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial y}}, & C_z &= \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial z}}.
\end{aligned}\right.$$

Les formules (31) et la remarque du n° 16 donnent à leur tour les conditions sous l'une des formes suivantes, indiquées toutes deux par M. Boussinesq [1] :

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned}
N_1 = \frac{1}{\Delta}\Bigg[&\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_3} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial \gamma_1}\\
&+ 2\frac{\partial u}{\partial z}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial W}{\partial \gamma_2} + 2\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial \gamma_3}\Bigg],\\
T_1 = \frac{1}{\Delta}\Bigg\{&\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2} + \frac{\partial v}{\partial z}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_3}\\
&+\left[\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right]\frac{\partial W}{\partial \gamma_1}\\
&+\left[\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\frac{\partial W}{\partial \gamma_2}+\left[\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right]\frac{\partial W}{\partial \gamma_3}\Bigg\}
\end{aligned}\right.$$

et

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{\Delta}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial y}} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial z}}\right],\\
T_1 &= \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial x}} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial y}} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial z}}\right]\\
&= \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial x}} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial y}} + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial z}}\right],
\end{aligned}\right.$$

où nous n'avons écrit que les valeurs de N_1, T_1, celles de N_2, T_2, N_3, T_3 s'en déduisant par des changements faciles.

---

[1] J. Boussinesq, *Théorie des ondes liquides périodiques*, Note III, p. 591, 594 (Mémoire déjà cité aux n^{os} 2, 15 et 17).

25. *Équations relatives à l'équilibre d'un corps homogène déformé d'une manière quelconque. Énergie de déformation.*

Les équations (34) et (35) deviennent, en vertu des formules (60), les suivantes :

$$(63)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial y}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial z}}\right)+\rho X=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial x}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial y}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial z}}\right)+\rho Y=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial x}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial y}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial z}}\right)+\rho Z=0; \end{cases}$$

$$(64)\quad \begin{cases} F=l\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x}}+m\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial y}}+n\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial z}}, \\ G=l\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial x}}+m\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial y}}+n\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial z}}, \\ H=l\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial x}}+m\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial y}}+n\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial z}}. \end{cases}$$

Si l'on a égard aux formules (3) du n° 1 et si l'on suppose, pour fixer les idées, que X, Y, Z, F, G, H sont des fonctions données de x, y, z, x_1, y_1, z_1, c'est-à-dire de x, y, z, u, v, w, les équations (63) sont des équations aux dérivées partielles du second ordre, auxquelles doivent satisfaire les fonctions u, v, w de x, y, z, et les équations (64) sont des conditions à la limite pour ces mêmes fonctions.

Il résulte du n° 15 que les équations (63) et (64) reviennent à écrire que l'on a, pour tous les déplacements virtuels δu, δv, δw,

$$(65)\quad \iiint \delta W\,dx\,dy\,dz-\delta\mathfrak{T}_e=0,$$

$\delta\mathfrak{T}_e$ désignant la somme des travaux élémentaires virtuels des forces extérieures appliquées au corps, savoir

$$\delta\mathfrak{T}_e=\iiint \rho(X\,\delta u+Y\,\delta v+Z\,\delta w)\,dx\,dy\,dz+\iint (F\,\delta u+G\,\delta v+H\,\delta w)\,d\sigma.$$

Nous donnerons à l'expression

$$\iiint W\,dx\,dy\,dz,$$

le nom d'*énergie de déformation* du corps considéré.

C'est ici le lieu de faire remarquer les modifications que pourrait recevoir l'exposition précédente, si l'on reprenait dans le cas actuel les développements donnés par M. Duhem à l'égard du potentiel thermodynamique d'un corps continu, en observant que l'une des hypothèses faites revient à dire que l'état du corps ne dépend pas de la position mutuelle de ses parties. Mais nous nous contenterons actuellement des développements précédents, quelque incomplets qu'ils soient.

26. *Remarque relative à un paradoxe signalé par M. Poincaré, ainsi qu'à des Mémoires de Kirchhoff, de C. Neumann et de M. Gustave Cellérier.*

Considérons un milieu continu, déformé et en équilibre sous l'action de forces extérieures, telles que celles considérées au n° 14 et pour lesquelles nous conserverons les mêmes notations; supposons que, pour toute position d'équilibre de ce corps, on ait pour tous les déplacements virtuels δu, δv, δw,

$$\iiint \delta\Phi\,dx\,dy\,dz - \delta\varpi_e = 0, \tag{66}$$

Φ désignant une fonction donnée des neuf dérivées partielles de u, v, w par rapport à x, y, z et $\delta\varpi_e$ ayant la même signification que dans la relation (65).

Ainsi que l'ont remarqué Kirchhoff [1] et Neumann [2], qui ont considéré en passant cette question, ceci revient à dire que l'on doit avoir, pour une position d'équilibre, les relations (63) et (64), dans lesquelles on remplacera la lettre W par la lettre Φ.

Supposons, de plus, que l'on admette l'existence de l'effort à l'intérieur du milieu considéré, et que la relation (66) s'applique à une portion quelconque du milieu; dans ces conditions, on devra avoir les relations (60), où la lettre W doit être remplacée par la lettre Φ.

Mais, ainsi que nous l'avons dit au n° 16, les neuf expressions A_x, B_x,

---

[1] *Voir* le Mémoire déjà cité au n° 2.

[2] C. NEUMANN, *Zur Theorie der Elasticität* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LVII, p. 281; 1860).

$C_x, \ldots$ ne peuvent pas être prises arbitrairement et doivent vérifier les relations (37). Il en résulte que la fonction Φ doit vérifier un système de trois équations aux dérivées partielles qui s'obtient en remplaçant, dans (37), $A_x, B_x, C_x, \ldots$ par leurs expressions au moyen de Φ. L'intégrale générale de ce système d'équations aux dérivées partielles est, ainsi que l'a remarqué M. G. Cellérier [1], formée par une fonction arbitraire des six expressions $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ définies par les formules (3) du n° 1; c'est du reste un résultat qui est *évident a priori,* si l'on remarque l'identité des deux expressions qui figurent sous les signes d'intégration dans les formules (39) et (40) du n° 18.

Ainsi, *pour que l'équation* (66) *soit compatible avec l'existence de l'effort à l'intérieur du milieu considéré, il faut que* Φ *soit une fonction de* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, *et l'on retombe sur le cas envisagé au numéro précédent.*

Les indications précédentes doivent être jointes à celles que M. Poincaré donne à propos du paradoxe signalé à la page 77 de ses *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité;* elles en forment, il nous semble, un complément utile. Lorsque nous nous occuperons plus loin de la déformation infiniment petite, elles présenteront un certain intérêt.

27. *Retour au corps homogène considéré aux* n^os 22 *et* 23. *Cas où* $\delta\mathcal{T}_e$ *est différentielle exacte; stabilité de l'équilibre de ce corps. Équilibre de bifurcation et équilibre limite de M. Poincaré.*

En raison du lien qui existe entre l'*équilibre en un point* considéré au n° 24 et l'équilibre du corps homogène considéré aux n^os 22 et 23, nous allons revenir un instant sur ce dernier. Nous définirons sa position au moyen des trois paramètres a_{10}, a_{20}, a_{30} qui figurent dans les équations (5), au moyen des auxiliaires λ, μ, ν du n° 6, et au moyen des six composantes de la déformation $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Plaçons-nous dans le cas où $\delta\mathcal{T}_e$ est la différentielle exacte d'une fonction que nous désignerons par $\mathcal{T}_e$; l'équilibre aura lieu lorsque toutes les dérivées de la fonction

$$W - \mathcal{T}_e$$

seront nulles.

---

(1) G. Cellérier, *Sur les principes généraux de la Thermodynamique et leur application aux corps élastiques*, p. 37 (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXI, p. 26-43; 1893).

Si cette fonction renferme, d'une façon distincte, les différents paramètres dont dépend la position du corps, et si elle est minimum l'équilibre sera stable, ainsi que l'a remarqué M. Duhem [1].

Si les différents paramètres dont dépend la position du corps ne figurent pas tous dans $W - \mathfrak{G}_e$, on aura à répéter ici la remarque faite par M. Appell [2]; supposons, par exemple, que dans l'état naturel du corps considéré, c'est-à-dire dans l'état libre de toute déformation, les forces extérieures soient nulles; la fonction $W - \mathfrak{G}_e$ se réduit à W; si W est minimum pour l'état naturel, on ne peut pas affirmer que l'équilibre correspondant est stable; mais il est stable *si l'on n'a égard qu'à la déformation subie par le corps.*

Supposons maintenant que l'on fasse varier d'une façon continue les forces qui agissent sur le corps, et que ces forces dépendent, par exemple, d'un paramètre y; supposons que, pour toutes les valeurs de y, la fonction $\mathfrak{G}_e$ existe; nous nous trouverons dans des conditions identiques à celles envisagées par M. Poincaré, au début de son beau Mémoire *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta Mathematica,* t. VII, p. 259-380; 1885), et nous sommes conduits à introduire, dans le cas actuel, les notions d'*équilibre de bifurcation,* d'*équilibre limite* et de l'*échange des stabilités.*

A ces notions on doit, au point de vue de la question que nous envisageons, en adjoindre d'autres, parmi lesquelles la suivante : pour certaines valeurs réelles du paramètre y, les équations de l'équilibre pourront admettre un système de solutions infinies, et l'on conçoit qu'il puisse arriver que l'une de ces valeurs de y corresponde à la série linéaire de formes d'équilibre qui a pour point de départ l'état naturel donné. En d'autres termes, les valeurs remarquables de y, à l'égard de cette série linéaire de formes d'équilibre, doivent être choisies parmi *tous* les points critiques des fonctions de y définies par le système des équations d'équilibre.

Nous n'insisterons pas davantage sur les questions que nous venons de signaler et *qui ont leurs correspondantes bien évidentes dans l'étude des*

---

(1) DUHEM, *Commentaire aux principes de la Thermodynamique,* 3e Partie, p. 264 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 4e série, t. X; 1894). — *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants,* p. 103 et suiv. (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 5e série, t. I; 1895).

(2) P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle,* t. II, p. 353.

équations aux dérivées partielles (63) *et* (64); nous espérons y revenir dans un prochain travail et préciser les indications auxquelles nous nous bornons pour le moment.

28. *Du choix de l'état naturel.*

Étant donné un corps élastique, nous avons admis l'existence d'un *état naturel,* c'est-à-dire d'un état considéré comme libre de toute déformation, dans lequel le corps est homogène, et tel que, pour toute déformation, l'énergie de déformation relative à un point P du corps définit, lorsque P varie, une fonction formée uniquement avec les six expressions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3.

On remarquera que nous admettons, dans l'état naturel, une sorte d'homogénéité par rapport aux axes coordonnés, et que, après une déformation quelconque, cette sorte d'homogénéité n'existe plus par rapport aux mêmes axes, mais subsiste, en quelque sorte, par rapport aux trois familles de surfaces dans lesquelles se sont transformées les trois familles orthogonales de plans du système primitif de coordonnées.

Nous ne développerons pas actuellement cette indication qui nous conduirait à une extension évidente de notre façon de définir la déformation, et nous nous bornerons aux remarques suivantes.

L'état naturel le plus simple que l'on puisse concevoir est celui dans lequel les efforts et les forces extérieures seraient nuls; si nous admettons son existence, il résulte des relations (59) que les six dérivées partielles du premier ordre de W, par rapport à ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, doivent s'annuler pour des valeurs nulles de ces lettres. Si la fonction W est, comme nous le supposerons dans la suite, développable suivant les puissances entières positives de ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, on aura donc

$$W = W_2 + W_3 + \ldots, \tag{67}$$

W_2 désignant un polynome homogène du second degré, W_3 un polynome homogène du troisième degré, ..., et le terme constant étant supposé égal à zéro, comme cela est permis.

Si l'on veut que, pour l'état naturel, l'équilibre en un point soit stable, *au point de vue de la déformation* (n° 27), il suffit que W soit positif pour toutes les valeurs infiniment petites des six composantes de la déformation, et cette condition s'exprime immédiatement à la façon habituelle au moyen de la forme quadratique W_2.

On peut aussi, avec M. Poincaré, ne pas faire l'hypothèse précédente sur l'état naturel; si l'on suppose W développable suivant les puissances entières positives de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, on aura alors le développement suivant:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots \tag{68}$$

qui renferme, en plus que le développement (67), le terme W_1 linéaire par rapport à $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Les coefficients de W_1 et de W_2 sont les *coefficients d'élasticité;* ils sont généralement au nombre de vingt-sept; dans l'hypothèse de l'état naturel considéré en premier lieu, ils seront généralement au nombre de vingt et un.

29. *Isotropie. Hétérotropie.*

Un corps homogène est *isotrope* lorsqu'en un point quelconque il est impossible de distinguer par une propriété physique quelconque une direction d'une autre. Dans le cas contraire, on dit qu'il est *hétérotrope.*

Nous voyons donc que, dans un corps homogène isotrope, la fonction W doit être simplement une fonction des racines de l'équation (14) du n° 6, ou encore une fonction des trois invariants du n° 7, savoir :

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,\\
\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2),\\
4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2.
\end{gathered}$$

Les termes W_1 et W_2 contiennent donc respectivement une et deux constantes seulement, et l'on peut écrire

$$W_1 = -2\nu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \tag{69}$$

$$2W_2 = (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + \mu(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4\varepsilon_2\varepsilon_3 - 4\varepsilon_3\varepsilon_1 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2), \tag{70}$$

λ, μ, ν désignant trois constantes et la notation adoptée étant celle de Lamé et de M. H. Poincaré.

Si l'on se place dans le cas de l'équilibre naturel considéré au commencement du numéro précédent, on a $\nu = 0$ et, pour cet état naturel, on est assuré que l'équilibre en un point est stable lorsque les quantités μ et $3\lambda + 2\mu$ sont positives.

Nous n'examinerons pas ici les différentes réductions qui se produisent dans le nombre des coefficients d'élasticité suivant la nature de l'hétérotropie du corps.

30. *Équations relatives à la déformation infiniment petite.*

Supposons, pour fixer les idées, que dans les équations (63) et (64) du n° 25, X, Y, Z, F, G, H soient des fonctions données de x, y, z, x_1, y_1, z_1, c'est-à-dire de x, y, z, u, v, w, et désignons par $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ ce que deviennent ces fonctions, supposées continues, lorsqu'on y remplace x_1, y_1, z_1 par x, y, z, c'est-à-dire u, v, w tous trois par zéro.

Dans l'état naturel, les fonctions X, Y, Z sont nulles, d'après les équations (63), et les fonctions F, G, H se réduisent à des fonctions F_0, G_0, H_0 qui sont nulles, si l'on adopte la première définition de l'état naturel donnée au n° 28.

Écrivons alors les fonctions X, Y, Z, F, G, H sous la forme suivante :

$$
\begin{gathered}
X = tX', \qquad Y = tY', \qquad Z = tZ', \\
F = F_0 + tF', \qquad G = G_0 + tG', \qquad H = H_0 + tH',
\end{gathered}
$$

t désignant une constante et X', Y', Z', F', G', H' des fonctions de x, y, z, u, v, w.

Les fonctions u, v, w dont nous admettons l'existence et qui vérifient les équations (63), (64) seront des fonctions de x, y, z et de t ; ces fonctions devront s'annuler pour $t = 0$. Supposons qu'on se propose de les développer suivant les puissances entières positives de t (¹), en écrivant, avec la notation du n° 8,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{u} &= u + u_1 + u_2 + \ldots, \\
\mathrm{v} &= v + v_1 + v_2 + \ldots, \\
\mathrm{w} &= w + w_1 + w_2 + \ldots.
\end{aligned}
$$

En admettant que ces développements soient possibles, soient absolument et uniformément convergents par rapport à x, y, z, et que X, Y, Z, F, G, H puissent se développer suivant les puissances de u, v, w en séries absolument et uniformément convergentes, il est facile d'écrire la suite d'équations auxquelles on est conduit dans l'hypothèse où W est aussi développable suivant les puissances entières et positives de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

(¹) On remarquera l'analogie des indications actuelles et de celles que l'on trouve p. 2 et suiv. du t. IV des *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, de M. Darboux, ainsi que p. 65 et suiv. du Mémoire de M. Poincaré, *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. VIII ; 1894).

Le développement de W, suivant les puissances de t, est

$$W = W_1(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3) + \Bigg[W_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial v_1}{\partial y}, \frac{\partial w_1}{\partial z}, \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2} W_1(\Pi_{xx}, \Pi_{yy}, \Pi_{zz}, 2\Pi_{yz}, 2\Pi_{zx}, 2\Pi_{xy}) + W_2(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3) \Bigg] + \ldots,$$

en posant, avec M. Poincaré (¹),

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \beta},$$

et en désignant par e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 les dilatations linéaires et les glissements relatifs à la déformation infiniment petite définis par les formules (18) du n° 9.

Si nous avons égard uniquement au terme indépendant de t et à la première puissance de t, et si nous posons

$$W' = W_1(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3)$$
$$+ \tfrac{1}{2} W_1(\Pi_{xx}, \Pi_{yy}, \Pi_{zz}, 2\Pi_{yz}, 2\Pi_{zx}, 2\Pi_{xy}) + W_2(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3),$$

nous obtenons les équations (²)

$$(71) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}\right) + \rho \mathfrak{X} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}}\right) + \rho \mathfrak{Y} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}}\right) + \rho \mathfrak{Z} = 0. \end{cases}$$

$$(72) \qquad \begin{cases} \mathfrak{F} = l\,\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} + m\,\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} + n\,\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}, \\[2ex] \mathfrak{G} = l\,\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} + m\,\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} + n\,\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}}, \\[2ex] \mathfrak{H} = l\,\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}} + m\,\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}} + n\,\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}}, \end{cases}$$

(¹) H. POINCARÉ, *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*, p. 46.

(²) Comparer H. POINCARÉ, *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*, p. 47, 53, 58.

que l'on peut encore écrire

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}\right)+\rho\mathcal{X}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}}\right)+\rho\mathcal{Y}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}}\right)+\rho\mathcal{Z}=0,
\end{aligned}\right.$$

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathcal{F}-\mathrm{F}_0=l\,\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}+m\,\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}+n\,\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}},\\
&\mathcal{G}-\mathrm{G}_0=l\,\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}}+m\,\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}}+n\,\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}},\\
&\mathcal{H}-\mathrm{H}_0=l\,\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}}+m\,\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}}+n\,\frac{\partial \mathbf{W}''}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}},
\end{aligned}\right.$$

en posant

$$\mathbf{W}''=\tfrac{1}{2}\mathbf{W}_1(\Pi_{xx},\,\Pi_{yy},\,\Pi_{zz},\,2\Pi_{yz},\,2\Pi_{zx},\,2\Pi_{xy})+\mathbf{W}_2(e_1,\,e_2,\,e_3,\,g_1,\,g_2,\,g_3).$$

Nous retrouvons, on le voit, les équations données par M. Poincaré dans ses *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité,* et, d'après ce que nous avons dit au n° 26, nous pouvons résumer les équations (71) et (72) dans la suivante

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned}
&\iiint \delta\mathbf{W}'\,dx\,dy\,dz-\iiint\rho(\mathcal{X}\,\delta u+\mathcal{Y}\,\delta v+\mathcal{Z}\,\delta w)\,dx\,dy\,dz\\
&\qquad\qquad -\iint(\mathcal{F}\,\delta u+\mathcal{G}\,\delta v+\mathcal{H}\,\delta w)\,d\sigma=0,
\end{aligned}\right.$$

qui doit avoir lieu pour tous les déplacements virtuels δu, δv, δw.

31. *Cas où dans l'état naturel les efforts et les forces extérieures sont nuls. Théorème de Kirchhoff.*

Considérons, en particulier, le cas où l'état naturel est celui considéré en premier lieu au n° 28.

Les N_i, T_i, ainsi que les P_i, U_i s'annulent avec t; les termes $\mathcal{N}_i$, ϖ_i des développements de N_i, T_i qui renferment t en facteur à la première puissance sont égaux aux termes analogues $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{V}_i$ dans les fonctions correspondantes P_i, U_i, et l'on a

$$(76)\quad \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{P}_1 = \dfrac{\partial W_2(e_i, g_i)}{\partial e_1}, & \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{V}_1 = \dfrac{\partial W_2(e_i, g_i)}{\partial g_1}, \\ \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{P}_2 = \dfrac{\partial W_2(e_i, g_i)}{\partial e_2}, & \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{V}_2 = \dfrac{\partial W_2(e_i, g_i)}{\partial g_2}, \\ \mathfrak{N}_3 = \mathfrak{P}_3 = \dfrac{\partial W_2(e_i, g_i)}{\partial e_3}, & \mathfrak{T}_3 = \mathfrak{V}_3 = \dfrac{\partial W_2(e_i, g_i)}{\partial g_3}, \end{array}\right.$$

en désignant par $W_2(e_i, g_i)$ la forme quadratique $W_2(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3)$ obtenue en remplaçant dans la forme quadratique W_2, qui figure dans l'équation (67) du n° 28, les lettres ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 par les lettres e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3.

Les équations (71) deviennent

$$(77)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial z} + \rho \mathfrak{X} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{N}_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial z} + \rho \mathfrak{Y} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{N}_3}{\partial z} + \rho \mathfrak{Z} = 0, \end{array}\right.$$

et les équations à la limite (72),

$$(78)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{F} = l\mathfrak{N}_1 + m\mathfrak{T}_3 + n\mathfrak{T}_2, \\ \mathcal{G} = l\mathfrak{T}_3 + m\mathfrak{N}_2 + n\mathfrak{T}_1, \\ \mathcal{H} = l\mathfrak{T}_2 + m\mathfrak{T}_1 + n\mathfrak{N}_3. \end{array}\right.$$

Ces équations peuvent se résumer dans la suivante

$$\iiint \delta W_2(e_i, g_i)\, dx\, dy\, dz - \iiint \rho(\mathfrak{X}\,\delta u + \mathfrak{Y}\,\delta v + \mathfrak{Z}\,\delta w)\, dx\, dy\, dz$$
$$- \iint (\mathcal{F}\,\delta u + \mathcal{G}\,\delta v + \mathcal{H}\,\delta w)\, d\sigma = 0,$$

qui doit avoir lieu pour tous les déplacements virtuels δu, δv, δw.

Lorsque l'équilibre en un point est stable et que la forme quadratique $W_2(e_i, g_i)$ est définie positive, on peut démontrer avec Kirchhoff que, si les équations (77) et (78) admettent deux solutions différentes, les dilatations linéaires et les glissements sont les mêmes dans ces deux solutions. Ceci revient à dire en effet que, si dans les équations (77), (78) les fonctions $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ sont nulles, les dilatations linéaires et les glissements seront nuls pour toute solution. Or, si $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sont nulles, les équations (77) entraînent la relation suivante

$$\iiint\left[u\left(\frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{N}_2}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left.+w\left(\frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{N}_3}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz=0,$$

qui, en vertu des relations (78), où les premiers membres sont supposés nuls, donne

$$\iiint(e_1\mathfrak{N}_1+e_2\mathfrak{N}_2+e_3\mathfrak{N}_3+g_1\mathfrak{T}_1+g_2\mathfrak{T}_2+g_3\mathfrak{T}_3)\,dx\,dy\,dz=0,$$

c'est-à-dire

$$\iiint W_2(e_i, g_i)\,dx\,dy\,dz=0.$$

La forme W_2 étant définie positive, les six expressions e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 doivent donc être nulles.

32. *Équations relatives à la déformation infiniment petite, lorsque le corps est isotrope.*

Si le corps est isotrope, il suffit d'adopter pour W_1 et W_2 les expressions données par les formules (69) et (70); il vient alors

$$2W'=-4\nu(e_1+e_2+e_3)-2\nu(\Pi_{xx}+\Pi_{yy}+\Pi_{zz})+(\lambda+2\mu)(e_1+e_2+e_3)^2$$
$$+\mu(g_1^2+g_2^2+g_3^2-4e_2e_3-4e_3e_1-4e_1e_2),$$

résultat identique à celui de M. Poincaré (¹), savoir

$$W'=-2\nu(e_1+e_2+e_3)+\lambda\frac{\theta^2}{2}+\mu H'-\nu(\Pi_{xx}+\Pi_{yy}+\Pi_{zz}),$$

où l'on pose

$$H'=e_1^2+e_2^2+e_3^2+\frac{g_1^2+g_2^2+g_3^2}{2},$$

(¹) H. Poincaré, *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*, p. 50 et suiv.

et où l'on désigne par θ la dilatation cubique

$$\theta = e_1 + e_2 + e_3. \tag{79}$$

Si les efforts et les forces extérieures sont nuls dans l'état d'équilibre naturel, on a

$$W_2(e_i, g_i) = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right)(e_1 + e_2 + e_3)^2 + \frac{\mu}{2}(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 - 4e_2e_3 - 4e_3e_1 - 4e_1e_2),$$

$$\mathcal{N}_i = \lambda\theta + 2\mu e_i, \qquad \mathcal{T}_i = \mu g_i,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{N}_1 = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \mathcal{T}_1 = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$\mathcal{N}_2 = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \mathcal{T}_2 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$\mathcal{N}_3 = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \mathcal{T}_3 = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Les équations relatives à l'équilibre intérieur sont, par suite,

$$\left\{\begin{aligned}
&(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u + \rho\mathcal{X} = 0,\\
&(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta v + \rho\mathcal{Y} = 0,\\
&(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\Delta w + \rho\mathcal{Z} = 0,
\end{aligned}\right. \tag{80}$$

et les équations à la surface

$$\left\{\begin{aligned}
\mathcal{F} &= l\left(\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + n\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
\mathcal{G} &= l\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + m\left(\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + n\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),\\
\mathcal{H} &= l\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + m\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + n\left(\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right. \tag{81}$$

CHAPITRE IV.

LES ÉQUATIONS DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ EN COORDONNÉES CURVILIGNES.

I. — Notions sur les coordonnées curvilignes.

33. *Déplacements à trois variables indépendantes ; étude des rotations.*

M. Darboux, dans ses *Leçons sur la Théorie générale des surfaces,* a fait une étude complète des systèmes mobiles dont les différentes positions dépendent de deux paramètres distincts, et a indiqué [1] que les résultats de cette étude pouvaient s'étendre sans difficulté au cas où les déplacements des systèmes considérés dépendent de trois paramètres. Nous allons donner sommairement les résultats que l'on obtient par cette extension, dans l'exposition suivante, qui est *calquée* sur celle que M. Darboux a consacrée aux déplacements à deux paramètres.

Pour étudier d'abord les propriétés des rotations, nous commencerons par supposer que le système mobile a un point fixe qui sera l'origine à la fois des axes fixes et des axes mobiles. Alors les neuf cosinus qui déterminent la position des axes mobiles sont des fonctions de trois variables indépendantes ρ_1, ρ_2, ρ_3. A partir de chacune de ses positions, le système mobile peut prendre une infinité de mouvements qui correspondent aux différents systèmes de deux relations que l'on peut établir entre ρ_1, ρ_2, ρ_3. Nous introduirons trois systèmes différents de rotations. Les unes, que nous désignerons par p_1, q_1, r_1, se rapportent au déplacement dans lequel ρ_1 varie seule. Elles donnent naissance au système

$$(82) \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\rho_1} = \beta r_1 - \gamma q_1, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial\rho_1} = \gamma p_1 - \alpha r_1, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial\rho_1} = \alpha q_1 - \beta p_1,$$

qui devra admettre, comme solutions particulières, les trois cosinus de chaque groupe. Les secondes, que nous désignerons par p_2, q_2, r_2, sont relatives au cas où ρ_2 varie seule. Elles donnent également naissance au

[1] G. Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces,* t. I, p. 67.

système

$$(83) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial \rho_2} = \beta r_2 - \gamma q_2, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial \rho_2} = \gamma p_2 - \alpha r_2, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial \rho_2} = \alpha q_2 - \beta p_2,$$

tout semblable au premier. Enfin, les dernières p_3, q_3, r_3 sont relatives au cas où ρ_3 varie seule, et donnent naissance au système

$$(84) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial \rho_3} = \beta r_3 - \gamma q_3, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial \rho_3} = \gamma p_3 - \alpha r_3, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial \rho_3} = \alpha q_3 - \beta p_3.$$

Il résulte immédiatement de là que si l'on considère un déplacement du système dans lequel ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont des fonctions données de t, on aura

$$\frac{d\alpha}{dt} = \beta R - \gamma Q, \qquad \frac{d\beta}{dt} = \gamma P - \alpha R, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \alpha Q - \beta P,$$

P, Q, R ayant les valeurs

$$P = p_1 \frac{d\rho_1}{dt} + p_2 \frac{d\rho_2}{dt} + p_3 \frac{d\rho_3}{dt}, \qquad Q = q_1 \frac{d\rho_1}{dt} + q_2 \frac{d\rho_2}{dt} + q_3 \frac{d\rho_3}{dt}, \qquad R = r_1 \frac{d\rho_1}{dt} + r_2 \frac{d\rho_2}{dt} + r_3 \frac{d\rho_3}{dt},$$

et, par conséquent, ces trois quantités P, Q, R seront les rotations relatives au mouvement considéré. Les projections sur les axes mobiles du chemin ou de l'arc infiniment petit décrit, dans ce mouvement, par un point dont les coordonnées relatives à ces axes seraient x, y, z, auront pour valeurs

$$\begin{aligned}
&dx + (q_1\, d\rho_1 + q_2\, d\rho_2 + q_3\, d\rho_3)z - (r_1\, d\rho_1 + r_2\, d\rho_2 + r_3\, d\rho_3)y,\\
&dy + (r_1\, d\rho_1 + r_2\, d\rho_2 + r_3\, d\rho_3)x - (p_1\, d\rho_1 + p_2\, d\rho_2 + p_3\, d\rho_3)z,\\
&dz + (p_1\, d\rho_1 + p_2\, d\rho_2 + p_3\, d\rho_3)y - (q_1\, d\rho_1 + q_2\, d\rho_2 + q_3\, d\rho_3)x.
\end{aligned}$$

Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \rho_1\, \partial \rho_2}$ que l'on peut obtenir en différentiant les deux premières équations des systèmes (82) et (83). Nous aurons, après avoir remplacé les dérivées de β, γ par leurs valeurs tirées de ces deux systèmes,

$$\beta\left(\frac{\partial r_1}{\partial \rho_2} - \frac{\partial r_2}{\partial \rho_1} - p_1 q_2 + q_1 p_2\right) = \gamma\left(\frac{\partial q_1}{\partial \rho_2} - \frac{\partial q_2}{\partial \rho_1} - r_1 p_2 + p_1 r_2\right).$$

Comme cette relation doit avoir lieu quand on remplace β, γ soit par b, c, soit par b', c', soit par b'', c'', en désignant par a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''

les cosinus directeurs des axes mobiles par rapport aux axes fixes, il faudra que les coefficients de β et de γ soient nuls séparément. Nous avons ainsi deux équations. En égalant de même les deux valeurs de $\frac{\partial^2\beta}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2}$, $\frac{\partial^2\gamma}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2}$, déduites des systèmes (82) et (83), on obtiendra une seule équation nouvelle, et l'on sera conduit au système

$$(85)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial\rho_2}-\dfrac{\partial p_2}{\partial\rho_1}=q_1 r_2-r_1 q_2,\\[2mm] \dfrac{\partial q_1}{\partial\rho_2}-\dfrac{\partial q_2}{\partial\rho_1}=r_1 p_2-p_1 r_2,\\[2mm] \dfrac{\partial r_1}{\partial\rho_2}-\dfrac{\partial r_2}{\partial\rho_1}=p_1 q_2-q_1 p_2,\end{cases}$$

auquel s'ajoutent évidemment les deux autres systèmes

$$(86)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_2}{\partial\rho_3}-\dfrac{\partial p_3}{\partial\rho_2}=q_2 r_3-r_2 q_3,\\[2mm] \dfrac{\partial q_2}{\partial\rho_3}-\dfrac{\partial q_3}{\partial\rho_2}=r_2 p_3-p_2 r_3,\\[2mm] \dfrac{\partial r_2}{\partial\rho_3}-\dfrac{\partial r_3}{\partial\rho_2}=p_2 q_3-q_2 p_3,\end{cases}$$

$$(87)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_3}{\partial\rho_1}-\dfrac{\partial p_1}{\partial\rho_3}=q_3 r_1-r_3 q_1,\\[2mm] \dfrac{\partial q_3}{\partial\rho_1}-\dfrac{\partial q_1}{\partial\rho_3}=r_3 p_1-p_3 r_1,\\[2mm] \dfrac{\partial r_3}{\partial\rho_1}-\dfrac{\partial r_1}{\partial\rho_3}=p_3 q_1-q_3 p_1.\end{cases}$$

Les théorèmes généraux relatifs aux équations aux dérivées partielles montrent que, réciproquement, toutes les fois que l'on connaîtra neuf quantités p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, p_3, q_3, r_3 satisfaisant aux équations (85), (86), (87), il existera un mouvement dans lequel ces neuf quantités seront les rotations. On voit d'ailleurs, comme dans le cas d'une seule variable ou de deux variables ([1]), que toutes les solutions des équations (82), (83), (84) que l'on peut obtenir se déduisent de l'une d'elles par un simple changement de coordonnées. On a toujours le même déplacement, mais il est rapporté à des axes différents.

([1]) G. Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. I, p. 7, 52.

Pour intégrer les systèmes (82), (83), (84), comme on ne doit considérer, dans la question qui nous occupe, que les solutions pour lesquelles on a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

on pourra exprimer α, β, γ en fonction des variables λ_1, λ_2 par les formules

$$(88) \qquad \alpha = \frac{1 - \lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad \beta = i\frac{1 + \lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad \gamma = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Si l'on substitue les valeurs (88) de α, β, γ dans les équations (82), (83) et (84), on trouve que λ_1 et λ_2 doivent, l'une et l'autre, satisfaire aux trois équations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma}{\partial\rho_1} &= -ir_1\sigma + \frac{q_1 - ip_1}{2} + \frac{q_1 + ip_1}{2}\sigma^2,\\
\frac{\partial\sigma}{\partial\rho_2} &= -ir_2\sigma + \frac{q_2 - ip_2}{2} + \frac{q_2 + ip_2}{2}\sigma^2,\\
\frac{\partial\sigma}{\partial\rho_3} &= -ir_3\sigma + \frac{q_3 - ip_3}{2} + \frac{q_3 + ip_3}{2}\sigma^2.
\end{aligned}$$

On pourrait faire, sur l'intégration simultanée de ces trois équations, une étude entièrement analogue à celle que M. Darboux a donnée pour un système de deux équations de cette forme. Nous n'insisterons pas sur ce point.

34. *Déplacements à trois variables, dans le cas où le système mobile n'a pas de point fixe.*

Après avoir considéré le cas où le système mobile a un point fixe, nous devons examiner l'hypothèse où le trièdre formé par les axes rectangulaires mobiles se meut d'une manière quelconque dans l'espace ; alors, il faudra joindre, aux neuf rotations, neuf quantités nouvelles. Nous désignerons par ξ_1, η_1, ζ_1 les composantes de la vitesse de l'origine des axes mobiles relativement à ces axes, quand ρ_1 varie seule et joue le rôle du temps, par ξ_2, η_2, ζ_2 les mêmes composantes quand ρ_2 varie seule, et par ξ_3, η_3, ζ_3 les mêmes composantes quand ρ_3 varie seule.

Si l'on désigne par X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées de l'origine des axes mobiles par rapport aux axes fixes, on aura

$$(89) \qquad \frac{\partial X_0}{\partial\rho_1} = a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1, \qquad \frac{\partial X_0}{\partial\rho_2} = a\xi_2 + b\eta_2 + c\zeta_2, \qquad \frac{\partial X_0}{\partial\rho_3} = a\xi_3 + b\eta_3 + c\zeta_3,$$

et les équations analogues en Y_0, Z_0. Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2 X_0}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2}$ que l'on peut déduire de ces formules. Après avoir remplacé les dérivées des cosinus par leurs valeurs, nous obtiendrons une équation qui, devant avoir lieu quand on remplacera a, b, c par les autres systèmes a', b', c'; a'', b'', c'', entraînera les trois suivantes :

$$(90)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\xi_1}{\partial\rho_2}-\frac{\partial\xi_2}{\partial\rho_1}&=q_1\zeta_2-q_2\zeta_1-r_1\eta_2+r_2\eta_1,\\ \frac{\partial\eta_1}{\partial\rho_2}-\frac{\partial\eta_2}{\partial\rho_1}&=r_1\xi_2-r_2\xi_1-p_1\zeta_2+p_2\zeta_1,\\ \frac{\partial\zeta_1}{\partial\rho_2}-\frac{\partial\zeta_2}{\partial\rho_1}&=p_1\eta_2-p_2\eta_1-q_1\xi_2+q_2\xi_1.\end{aligned}\right.$$

Si l'on égale de même les valeurs de $\frac{\partial^2 X_0}{\partial\rho_2\,\partial\rho_3}$, et celles de $\frac{\partial^2 X_0}{\partial\rho_3\,\partial\rho_1}$, on obtient

$$(91)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\xi_2}{\partial\rho_3}-\frac{\partial\xi_3}{\partial\rho_2}&=q_2\zeta_3-q_3\zeta_2-r_2\eta_3+r_3\eta_2,\\ \frac{\partial\eta_2}{\partial\rho_3}-\frac{\partial\eta_3}{\partial\rho_2}&=r_2\xi_3-r_3\xi_2-p_2\zeta_3+p_3\zeta_2,\\ \frac{\partial\zeta_2}{\partial\rho_3}-\frac{\partial\zeta_3}{\partial\rho_2}&=p_2\eta_3-p_3\eta_2-q_2\xi_3+q_3\xi_2,\end{aligned}\right.$$

$$(92)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\xi_3}{\partial\rho_1}-\frac{\partial\xi_1}{\partial\rho_3}&=q_3\zeta_1-q_1\zeta_3-r_3\eta_1+r_1\eta_3,\\ \frac{\partial\eta_3}{\partial\rho_1}-\frac{\partial\eta_1}{\partial\rho_3}&=r_3\xi_1-r_1\xi_3-p_3\zeta_1+p_1\zeta_3,\\ \frac{\partial\zeta_3}{\partial\rho_1}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial\rho_3}&=p_3\eta_1-p_1\eta_3-q_3\xi_1+q_1\xi_3.\end{aligned}\right.$$

Réciproquement, lorsque les dix-huit quantités ξ_1, η_1, ζ_1, p_1, q_1, r_1, ... satisferont aux équations (90), (91), (92), en même temps qu'aux équations (85), (86), (87), il existera un déplacement dans lequel elles seront les rotations et les translations; car nous savons déjà qu'on pourra déterminer les neuf cosinus; et, de plus, les équations telles que (89), qui seront compatibles en vertu des équations (90), (91), (92), nous fourniront par des quadratures les coordonnées de l'origine des axes mobiles. Il est inutile de répéter ici que tous les mouvements obtenus se réduisent au fond à un seul, observé par rapport à des axes différents.

Il est évident que, si, au lieu de considérer toutes les positions du système mobile qui correspondent aux différentes valeurs de ρ_1, de ρ_2 et de ρ_3, on suppose que ρ_1, ρ_2 et ρ_3 soient des fonctions d'un seul paramètre t, les rotations et translations relatives à ce mouvement seront respectivement

$$p_1 \frac{d\rho_1}{dt} + p_2 \frac{d\rho_2}{dt} + p_3 \frac{d\rho_3}{dt}, \qquad q_1 \frac{d\rho_1}{dt} + q_2 \frac{d\rho_2}{dt} + q_3 \frac{d\rho_3}{dt}, \qquad r_1 \frac{d\rho_1}{dt} + r_2 \frac{d\rho_2}{dt} + r_3 \frac{d\rho_3}{dt},$$

$$\xi_1 \frac{d\rho_1}{dt} + \xi_2 \frac{d\rho_2}{dt} + \xi_3 \frac{d\rho_3}{dt}, \qquad \eta_1 \frac{d\rho_1}{dt} + \eta_2 \frac{d\rho_2}{dt} + \eta_3 \frac{d\rho_3}{dt}, \qquad \zeta_1 \frac{d\rho_1}{dt} + \zeta_2 \frac{d\rho_2}{dt} + \zeta_3 \frac{d\rho_3}{dt},$$

et les projections sur les axes mobiles de l'élément de courbe décrit par un point quelconque, dont les coordonnées sont x, y, z par rapport aux axes mobiles, seront

$$(93) \quad \begin{cases} dx + \xi_1\, d\rho_1 + \xi_2\, d\rho_2 + \xi_3\, d\rho_3 + (q_1\, d\rho_1 + q_2\, d\rho_2 + q_3\, d\rho_3)\, z - (r_1\, d\rho_1 + r_2\, d\rho_2 + r_3\, d\rho_3)\, y, \\ dy + \eta_1\, d\rho_1 + \eta_2\, d\rho_2 + \eta_3\, d\rho_3 + (r_1\, d\rho_1 + r_2\, d\rho_2 + r_3\, d\rho_3)\, x - (p_1\, d\rho_1 + p_2\, d\rho_2 + p_3\, d\rho_3)\, z, \\ dz + \zeta_1\, d\rho_1 + \zeta_2\, d\rho_2 + \zeta_3\, d\rho_3 + (p_1\, d\rho_1 + p_2\, d\rho_2 + p_3\, d\rho_3)\, y - (q_1\, d\rho_1 + q_2\, d\rho_2 + q_3\, d\rho_3)\, x. \end{cases}$$

En d'autres termes, si t est le temps, on aura les composantes de la vitesse par rapport aux axes mobiles, en divisant les trois expressions précédentes par dt. Cette remarque, qui dispense de beaucoup de calculs, permet de laisser de côté tout ce qui concerne les axes fixes.

35. *Coordonnées curvilignes de Lamé.*

Les coordonnées curvilignes que Gauss a employées d'une manière systématique dans l'étude des surfaces ont été étendues par Lamé à l'espace à trois dimensions.

Un point de l'espace est habituellement défini par ses trois coordonnées; mais on peut supposer que celles-ci aient été exprimées au moyen de trois variables indépendantes que nous appellerons ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Un système de coordonnées curvilignes peut être représenté géométriquement. Il suffit de considérer les trois familles de surfaces, lieux des points pour lesquels l'une ou l'autre des variables ρ_1, ρ_2, ρ_3 demeure constante. Mais il importe de remarquer que le système de coordonnées n'est pas complètement défini si l'on donne seulement les trois familles de surfaces coordonnées. On pourra évidemment, sans changer ces surfaces, remplacer ρ_1, ρ_2, ρ_3 par d'autres variables qui seront respectivement des fonctions quelconques des premières. C'est une remarque dont on fait souvent usage et qui permet quelquefois de grandes simplifications.

Proposons-nous de trouver l'expression de l'arc d'une courbe quelconque tracée dans l'espace. Si les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de l'espace sont exprimées en fonction des trois variables ρ_1, ρ_2, ρ_3, cet arc se déterminera au moyen de la formule

$$(94) \qquad ds^2 = \mathrm{A}\,d\rho_1^2 + \mathrm{B}\,d\rho_2^2 + \mathrm{C}\,d\rho_3^2 + 2\mathrm{D}\,d\rho_2\,d\rho_3 + 2\mathrm{E}\,d\rho_3\,d\rho_1 + 2\mathrm{F}\,d\rho_1\,d\rho_2,$$

où l'on a

$$(95) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\right)^2, & \mathrm{D} &= \frac{\partial x}{\partial \rho_2}\frac{\partial x}{\partial \rho_3} + \frac{\partial y}{\partial \rho_2}\frac{\partial y}{\partial \rho_3} + \frac{\partial z}{\partial \rho_2}\frac{\partial z}{\partial \rho_3}, \\ \mathrm{B} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_2}\right)^2, & \mathrm{E} &= \frac{\partial x}{\partial \rho_3}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial y}{\partial \rho_3}\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \frac{\partial z}{\partial \rho_3}\frac{\partial z}{\partial \rho_1}, \\ \mathrm{C} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_3}\right)^2, & \mathrm{F} &= \frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \frac{\partial y}{\partial \rho_1}\frac{\partial y}{\partial \rho_2} + \frac{\partial z}{\partial \rho_1}\frac{\partial z}{\partial \rho_2}. \end{aligned} \right.$$

Nous appellerons, pour abréger, ds l'élément linéaire. Nous mettrons aussi son carré sous la forme

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \mathrm{H}_1^2\,d\rho_1^2 + \mathrm{H}_2^2\,d\rho_2^2 + \mathrm{H}_3^2\,d\rho_3^2 \\ & + 2\mathrm{H}_2\mathrm{H}_3\cos\alpha_1\,d\rho_2\,d\rho_3 + 2\mathrm{H}_3\mathrm{H}_1\cos\alpha_2\,d\rho_3\,d\rho_1 + 2\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2\cos\alpha_3\,d\rho_1\,d\rho_2, \end{aligned}$$

en posant

$$\mathrm{H}_1 = \sqrt{\mathrm{A}}, \quad \mathrm{H}_2 = \sqrt{\mathrm{B}}, \quad \mathrm{H}_3 = \sqrt{\mathrm{C}}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{B}}\sqrt{\mathrm{C}}}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{\mathrm{C}}\sqrt{\mathrm{A}}}, \quad \cos\alpha_3 = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{A}}\sqrt{\mathrm{B}}}.$$

Les formules (95) montrent que $\mathrm{H}_1\,d\rho_1$ est l'arc élémentaire de la courbe d'intersection des surfaces $\rho_2 = \text{const.}$, $\rho_3 = \text{const.}$; $\mathrm{H}_2\,d\rho_2$ l'arc élémentaire de la courbe d'intersection de $\rho_3 = \text{const.}$, $\rho_1 = \text{const.}$; $\mathrm{H}_3\,d\rho_3$ l'arc élémentaire de la courbe d'intersection de $\rho_1 = \text{const.}$, $\rho_2 = \text{const.}$; enfin α_1 est l'angle sous lequel se coupent les deux dernières courbes au point considéré, α_2 l'angle sous lequel se coupent la première et la troisième courbes, α_3 l'angle sous lequel se coupent la première et la deuxième courbe. On aura donc

$$\mathrm{D} = 0, \qquad \mathrm{E} = 0, \qquad \mathrm{F} = 0$$

toutes les fois que l'on emploiera des coordonnées curvilignes rectangulaires.

Il résulte également des formules (95) que l'élément superficiel de la surface $\rho_3 = \text{const.}$ aura pour expression

$$\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2\sin\alpha_3\,d\rho_1\,d\rho_2 = \sqrt{\mathrm{AB} - \mathrm{F}^2}\,d\rho_1\,d\rho_2,$$

et que ceux des surfaces $\rho_1 =$ const., $\rho_2 =$ const. seront

$$H_2 H_3 \sin\alpha_1\, d\rho_2\, d\rho_3 = \sqrt{BC - D^2}\, d\rho_2\, d\rho_3,$$
$$H_3 H_1 \sin\alpha_2\, d\rho_3\, d\rho_1 = \sqrt{CA - E^2}\, d\rho_3\, d\rho_1.$$

On verrait de même que le volume du parallélépipède infiniment petit ayant l'un de ses sommets en (ρ_1, ρ_2, ρ_3), dont les arêtes ont pour longueurs $H_1\, d\rho_1$, $H_2\, d\rho_2$, $H_3\, d\rho_3$, et dont les angles compris entre les arêtes sont α_1, α_2, α_3, est donné par l'expression

$$\begin{aligned}&H_1 H_2 H_3 \sqrt{1 - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 + 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3}\, d\rho_1\, d\rho_2\, d\rho_3\\ &= \sqrt{ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF}\, d\rho_1\, d\rho_2\, d\rho_3.\end{aligned}$$

Le développement de ces premières notions a permis à Lamé d'établir sa théorie des coordonnées curvilignes dans l'espace. Mais on peut aussi, comme nous allons le voir, faire l'étude du système triple de surfaces (ρ_1, ρ_2, ρ_3), en la rattachant directement aux notions données dans les nos 33 et 34.

36. *Le trièdre mobile de référence.*

Considérons un système triple quelconque; on peut lier l'étude de ce système à celle du mouvement d'un trièdre mobile, en opérant de la manière suivante.

M désignant un point de l'espace, construisons un trièdre trirectangle (T) dont le sommet soit en M et dont les axes soient définis dès qu'on connaît la position de M. Sans indiquer, pour le moment, rien de plus précis relativement à la position de ces axes, nous allons montrer comment les propriétés du système triple, celles des surfaces et des courbes tracées dans l'espace qu'il définit, se déduisent de l'étude du mouvement du trièdre (T).

Si l'on conserve toutes les notations des nos 33 et 34, à ce mouvement sont associées les équations

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial p_1}{\partial \rho_2}-\dfrac{\partial p_2}{\partial \rho_1}=q_1 r_2-r_1 q_2, & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \rho_2}-\dfrac{\partial \xi_2}{\partial \rho_1}=q_1 \zeta_2-q_2 \zeta_1-r_1 \eta_2+r_2 \eta_1, \\
\dfrac{\partial q_1}{\partial \rho_2}-\dfrac{\partial q_2}{\partial \rho_1}=r_1 p_2-p_1 r_2, & \dfrac{\partial \eta_1}{\partial \rho_2}-\dfrac{\partial \eta_2}{\partial \rho_1}=r_1 \xi_2-r_2 \xi_1-p_1 \zeta_2+p_2 \zeta_1, \\
\dfrac{\partial r_1}{\partial \rho_2}-\dfrac{\partial r_2}{\partial \rho_1}=p_1 q_2-q_1 p_2, & \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial \rho_2}-\dfrac{\partial \zeta_2}{\partial \rho_1}=p_1 \eta_2-p_2 \eta_1-q_1 \xi_2+q_2 \xi_1, \\
\dfrac{\partial p_2}{\partial \rho_3}-\dfrac{\partial p_3}{\partial \rho_2}=q_2 r_3-r_2 q_3, & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial \rho_3}-\dfrac{\partial \xi_3}{\partial \rho_2}=q_2 \zeta_3-q_3 \zeta_2-r_2 \eta_3+r_3 \eta_2, \\
\dfrac{\partial q_2}{\partial \rho_3}-\dfrac{\partial q_3}{\partial \rho_2}=r_2 p_3-p_2 r_3, & \dfrac{\partial \eta_2}{\partial \rho_3}-\dfrac{\partial \eta_3}{\partial \rho_2}=r_2 \xi_3-r_3 \xi_2-p_2 \zeta_3+p_3 \zeta_2, \\
\dfrac{\partial r_2}{\partial \rho_3}-\dfrac{\partial r_3}{\partial \rho_2}=p_2 q_3-q_2 p_3, & \dfrac{\partial \zeta_2}{\partial \rho_3}-\dfrac{\partial \zeta_3}{\partial \rho_2}=p_2 \eta_3-p_3 \eta_2-q_2 \xi_3+q_3 \xi_2, \\
\dfrac{\partial p_3}{\partial \rho_1}-\dfrac{\partial p_1}{\partial \rho_3}=q_3 r_1-r_3 q_1, & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial \rho_1}-\dfrac{\partial \xi_1}{\partial \rho_3}=q_3 \zeta_1-q_1 \zeta_3-r_3 \eta_1+r_1 \eta_3, \\
\dfrac{\partial q_3}{\partial \rho_1}-\dfrac{\partial q_1}{\partial \rho_3}=r_3 p_1-p_3 r_1, & \dfrac{\partial \eta_3}{\partial \rho_1}-\dfrac{\partial \eta_1}{\partial \rho_3}=r_3 \xi_1-r_1 \xi_3-p_3 \zeta_1+p_1 \zeta_3, \\
\dfrac{\partial r_3}{\partial \rho_1}-\dfrac{\partial r_1}{\partial \rho_3}=p_3 q_1-q_3 p_1, & \dfrac{\partial \zeta_3}{\partial \rho_1}-\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial \rho_3}=p_3 \eta_1-p_1 \eta_3-q_3 \xi_1+q_1 \xi_3,
\end{array}\right.$$

et il résulte évidemment des propositions données dans les n^{os} 33 et 34 qu'*à tout système de valeurs des quantités $p_1, \ldots, \xi_1, \ldots,$ satisfaisant à ces équations, correspondra un mouvement parfaitement déterminé, et, par conséquent, un seul système triple.*

Si un point rapporté au trièdre (T) a pour coordonnées x, y, z, on aura, en appliquant les formules (93) du n^o 34 :

$$(\mathrm{B})\quad\left\{\begin{array}{l}
dx+\xi_1 d\rho_1+\xi_2 d\rho_2+\xi_3 d\rho_3+(q_1 d\rho_1+q_2 d\rho_2+q_3 d\rho_3)z-(r_1 d\rho_1+r_2 d\rho_2+r_3 d\rho_3)y, \\
dy+\eta_1 d\rho_1+\eta_2 d\rho_2+\eta_3 d\rho_3+(r_1 d\rho_1+r_2 d\rho_2+r_3 d\rho_3)x-(p_1 d\rho_1+p_2 d\rho_2+p_3 d\rho_3)z, \\
dz+\zeta_1 d\rho_1+\zeta_2 d\rho_2+\zeta_3 d\rho_3+(p_1 d\rho_1+p_2 d\rho_2+p_3 d\rho_3)y-(q_1 d\rho_1+q_2 d\rho_2+q_3 d\rho_3)x,
\end{array}\right.$$

pour les projections de son déplacement sur les axes du trièdre mobile, quand ρ_1, ρ_2, ρ_3 prendront les accroissements $d\rho_1, d\rho_2, d\rho_3$.

Considérons en particulier le système triple proposé qui est parcouru par l'origine du trièdre mobile ; ds désignant la différentielle de l'arc de courbe décrit par cette origine, et l, m, n les cosinus des angles que fait la tangente à cette courbe avec les trois axes rectangulaires du trièdre mobile, on aura

$$l\, ds=\xi_1 d\rho_1+\xi_2 d\rho_2+\xi_3 d\rho_3, \qquad m\, ds=\eta_1 d\rho_1+\eta_2 d\rho_2+\eta_3 d\rho_3,$$
$$n\, ds=\zeta_1 d\rho_1+\zeta_2 d\rho_2+\zeta_3 d\rho_3,$$

Ces formules feront connaître l'élément linéaire de l'espace, dont le carré aura pour expression

$$\begin{aligned} ds^2 = & (\xi_1\, d\rho_1 + \xi_2\, d\rho_2 + \xi_3\, d\rho_3)^2 \\ & + (\eta_1\, d\rho_1 + \eta_2\, d\rho_2 + \eta_3\, d\rho_3)^2 + (\zeta_1\, d\rho_1 + \zeta_2\, d\rho_2 + \zeta_3\, d\rho_3)^2. \end{aligned}$$

En comparant cette expression à l'expression (94), on voit que

$$(96)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} &= \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, & \mathrm{D} &= \xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \zeta_2\zeta_3, \\ \mathrm{B} &= \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2, & \mathrm{E} &= \xi_3\xi_1 + \eta_3\eta_1 + \zeta_3\zeta_1, \\ \mathrm{C} &= \xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2, & \mathrm{F} &= \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2. \end{aligned} \right.$$

Proposons-nous comme autre application d'établir la relation qui doit exister entre deux tangentes conjuguées, sur l'une des surfaces du système triple, la surface $\rho_3 = \text{const.}$ par exemple. Si le point M de la surface décrit une courbe, le plan tangent en M à cette surface enveloppe une surface développable qu'il touche suivant la conjuguée de la tangente à la courbe décrite par le point M.

L'équation du plan tangent au point M rapporté au trièdre mobile est

$$\begin{vmatrix} x & \xi_1 & \xi_2 \\ y & \eta_1 & \eta_2 \\ z & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons par la lettre δ les différentielles relatives à un déplacement suivant la direction conjuguée; écrivons que les trois expressions

$$\xi_1\, \delta\rho_1 + \xi_2\, \delta\rho_2, \quad \eta_1\, \delta\rho_1 + \eta_2\, \delta\rho_2, \quad \zeta_1\, \delta\rho_1 + \zeta_2\, \delta\rho_2$$

sont les coordonnées d'un point dont le déplacement, déterminé par les formules (B), est dirigé dans le plan tangent; il vient

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\rho_1} + q_1\zeta_1 - r_1\eta_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ \dfrac{\partial\eta_1}{\partial\rho_1} + r_1\xi_1 - p_1\zeta_1 & \eta_1 & \eta_2 \\ \dfrac{\partial\zeta_1}{\partial\rho_1} + p_1\eta_1 - q_1\xi_1 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} d\rho_1\, \delta\rho_1 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi_2}{\partial\rho_2} + q_2\zeta_2 - r_2\eta_2 & \xi_1 & \xi_2 \\ \dfrac{\partial\eta_2}{\partial\rho_2} + r_2\xi_2 - p_2\zeta_2 & \eta_1 & \eta_2 \\ \dfrac{\partial\zeta_2}{\partial\rho_2} + p_2\eta_2 - q_2\xi_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} d\rho_2\, \delta\rho_2 \\ + & \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi_2}{\partial\rho_1} + q_1\zeta_2 - r_1\eta_2 & \xi_1 & \xi_2 \\ \dfrac{\partial\eta_2}{\partial\rho_1} + r_1\xi_2 - p_1\zeta_2 & \eta_1 & \eta_2 \\ \dfrac{\partial\zeta_2}{\partial\rho_1} + p_1\eta_2 - q_1\xi_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} d\rho_1\, \delta\rho_2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\rho_2} + q_2\zeta_1 - r_2\eta_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ \dfrac{\partial\eta_1}{\partial\rho_2} + r_2\xi_1 - p_2\zeta_1 & \eta_1 & \eta_2 \\ \dfrac{\partial\zeta_1}{\partial\rho_2} + p_2\eta_1 - q_2\xi_1 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} d\rho_2\, \delta\rho_1 = 0. \end{aligned}$$

Cette relation est, comme il fallait s'y attendre, parfaitement symétrique par rapport aux différentielles d, δ, car les coefficients de $d\rho_1\,\delta\rho_2$ et de $d\rho_2\,\delta\rho_1$ sont égaux en vertu des formules (A).

Si l'on suppose que les deux directions conjuguées coïncident, il faudra remplacer partout δ par d, et l'on aura l'équation différentielle des lignes asymptotiques sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial \rho_1} + q_1\zeta_1 - r_1\eta_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial \rho_1} + r_1\xi_1 - p_1\zeta_1 & \eta_1 & \eta_2 \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial \rho_1} + p_1\eta_1 - q_1\xi_1 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} d\rho_1^2$$
$$+ \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial \rho_2} + q_2\zeta_1 - r_2\eta_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial \rho_1} + q_1\zeta_2 - r_1\eta_2 & \xi_1 & \xi_2 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial \rho_2} + r_2\xi_1 - p_2\zeta_1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial \rho_1} + r_1\xi_2 - p_1\zeta_2 & \eta_1 & \eta_2 \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial \rho_2} + p_2\eta_1 - q_2\xi_1 + \frac{\partial \zeta_2}{\partial \rho_1} + p_1\eta_2 - q_1\xi_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} d\rho_1\,d\rho_2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_2}{\partial \rho_2} + q_2\zeta_2 - r_2\eta_2 & \xi_1 & \xi_2 \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial \rho_2} + r_2\xi_2 - p_2\zeta_2 & \eta_1 & \eta_2 \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial \rho_2} + p_2\eta_2 - q_2\xi_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} d\rho_2^2 = 0.$$

Cherchons maintenant l'équation différentielle des lignes de courbure. Pour cela déterminons les déplacements du trièdre mobile pour lesquels la normale à la surface $\rho_3 =$ const. engendre une surface développable.

Pour qu'il en soit ainsi, il faudra qu'il existe sur cette normale un point variable dont les coordonnées par rapport aux axes mobiles soient

$$\frac{R(\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1)}{N}, \quad \frac{R(\zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1)}{N}, \quad \frac{R(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)}{N}$$

avec

$$N = \sqrt{(\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1)^2 + (\zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1)^2 + (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2}$$

et décrivant, dans le mouvement considéré, une courbe constamment tangente à cette normale. Or, les projections du déplacement de ce point, quand ρ_1 et ρ_2 prennent les accroissements $d\rho_1$, $d\rho_2$, sont, d'après les formules (B),

$$d\frac{R(\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1)}{N} + \xi_1\,d\rho_1 + \xi_2\,d\rho_2 + (q_1\,d\rho_1 + q_2\,d\rho_2)\frac{R(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)}{N}$$
$$- (r_1\,d\rho_1 + r_2\,d\rho_2)\frac{R(\zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1)}{N},$$

. . . .

Pour que la courbe décrite soit tangente à la normale, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\rho_1}(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)\,d\rho_1+\frac{\partial}{\partial\rho_2}(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)\,d\rho_2\\&\quad+\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{R}}(\xi_1 d\rho_1+\xi_2 d\rho_2)+(q_1 d\rho_1+q_2 d\rho_2)(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)-(r_1 d\rho_1+r_2 d\rho_2)(\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1)\end{aligned}\right\}}{\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1}$$

$$=\frac{\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\rho_1}(\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1)\,d\rho_1+\frac{\partial}{\partial\rho_2}(\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1)\,d\rho_2\\&\quad+\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{R}}(\eta_1 d\rho_1+\eta_2 d\rho_2)+(r_1 d\rho_1+r_2 d\rho_2)(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)-(p_1 d\rho_1+p_2 d\rho_2)(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)\end{aligned}\right\}}{\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1}$$

$$=\frac{\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\rho_1}(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)\,d\rho_1+\frac{\partial}{\partial\rho_2}(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)\,d\rho_2\\&\quad+\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{R}}(\zeta_1 d\rho_1+\zeta_2 d\rho_2)+(p_1 d\rho_1+p_2 d\rho_2)(\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1)-(q_1 d\rho_1+q_2 d\rho_2)(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)\end{aligned}\right\}}{\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2}.$$

Ces deux équations font connaître à la fois $\frac{d\rho_2}{d\rho_1}$ et R; cette dernière quantité est le rayon de courbure principal correspondant à la ligne de courbure considérée.

Si l'on élimine R et si l'on pose

$$a_3=\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1,\qquad b_3=\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1,\qquad c_3=\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1,$$

on obtient l'équation différentielle suivante

$$\begin{vmatrix} a_3 & \xi_1 d\rho_1+\xi_2 d\rho_2 & \frac{\partial a_3}{\partial\rho_1}d\rho_1+\frac{\partial a_3}{\partial\rho_2}d\rho_2+(q_1 d\rho_1+q_2 d\rho_2)\,c_3-(r_1 d\rho_1+r_2 d\rho_2)\,b_3\\ b_3 & \eta_1 d\rho_1+\eta_2 d\rho_2 & \frac{\partial b_3}{\partial\rho_1}d\rho_1+\frac{\partial b_3}{\partial\rho_2}d\rho_2+(r_1 d\rho_1+r_2 d\rho_2)\,a_3-(p_1 d\rho_1+p_2 d\rho_2)\,c_3\\ c_3 & \zeta_1 d\rho_1+\zeta_2 d\rho_2 & \frac{\partial c_3}{\partial\rho_1}d\rho_1+\frac{\partial c_3}{\partial\rho_2}d\rho_2+(p_1 d\rho_1+p_2 d\rho_2)\,b_3-(q_1 d\rho_1+q_2 d\rho_2)\,a_3\end{vmatrix}=0$$

qui caractérise les lignes de courbure.

Si l'on élimine au contraire $\frac{d\rho_2}{d\rho_1}$, on obtiendra l'équation aux rayons de courbure principaux :

$$\begin{vmatrix} a_3 & \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{R}}\xi_1+\frac{\partial a_3}{\partial\rho_1}+q_1 c_3-r_1 b_3 & \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{R}}\xi_2+\frac{\partial a_3}{\partial\rho_2}+q_2 c_3-r_2 b_3\\ b_3 & \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{R}}\eta_1+\frac{\partial b_3}{\partial\rho_1}+r_1 a_3-p_1 c_3 & \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{R}}\eta_2+\frac{\partial b_3}{\partial\rho_2}+r_2 a_3-p_2 c_3\\ c_3 & \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{R}}\zeta_1+\frac{\partial c_3}{\partial\rho_1}+p_1 b_3-q_1 a_3 & \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{R}}\zeta_2+\frac{\partial c_3}{\partial\rho_2}+p_2 b_3-q_2 a_3\end{vmatrix}=0.$$

Les équations analogues pour les surfaces $\rho_1 = \text{const.}$, $\rho_2 = \text{const.}$, s'obtiendront par permutation circulaire des indices.

II. — Corps rapporté avant déformation a des coordonnées rectangulaires.

37. *Formules cinématiques.*

On peut d'abord se proposer d'introduire les notions précédentes dans l'étude du système triple de surfaces qui, dans un corps déformé, correspond au système orthogonal de plans coordonnés auquel le corps est rapporté avant la déformation.

Conservons les notations du Chapitre I; dans le système triple du corps déformé, les variables désignées précédemment par ρ_1, ρ_2, ρ_3 seront x, y, z. L'origine du trièdre mobile adjoint à ce système triple sera au point P_1, dont les coordonnées par rapport aux axes fixes sont

$$x_1 = x + \mathrm{u}, \qquad y_1 = y + \mathrm{v}, \qquad z_1 = z + \mathrm{w};$$

les axes rectangulaires des x', y', z' formés par le trièdre mobile seront définis par rapport aux axes rectangulaires des x, y, z par le tableau des cosinus :

	x'	y'	z'
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

Les formules (89) du n° 34 deviennent ici

$$(97)\quad \left\{\begin{aligned}
1 + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} &= a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1, & \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} &= a'\xi_1 + b'\eta_1 + c'\zeta_1, & \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} &= a''\xi_1 + b''\eta_1 + c''\zeta_1,\\
\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} &= a\xi_2 + b\eta_2 + c\zeta_2, & 1 + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} &= a'\xi_2 + b'\eta_2 + c'\zeta_2, & \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} &= a''\xi_2 + b''\eta_2 + c''\zeta_2,\\
\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z} &= a\xi_3 + b\eta_3 + c\zeta_3, & \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} &= a'\xi_3 + b'\eta_3 + c'\zeta_3, & 1 + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} &= a''\xi_3 + b''\eta_3 + c''\zeta_3.
\end{aligned}\right.$$

Rapportons le déplacement (u, v, w) au trièdre mobile; nous aurons

$$\begin{aligned}
\mathrm{u} &= a\mathrm{u}' + b\mathrm{v}' + c\mathrm{w}',\\
\mathrm{v} &= a'\mathrm{u}' + b'\mathrm{v}' + c'\mathrm{w}',\\
\mathrm{w} &= a''\mathrm{u}' + b''\mathrm{v}' + c''\mathrm{w}',
\end{aligned}$$

u′, v′, w′ étant les projections de ce déplacement sur les axes mobiles.

Le point dont les coordonnées sont x, y, z par rapport aux axes fixes a ainsi pour coordonnées par rapport aux axes mobiles correspondants $-\mathrm{u}'$, $-\mathrm{v}'$, $-\mathrm{w}'$; nous devons donc identifier les trois expressions

$$a\,dx + a'\,dy + a''\,dz, \qquad b\,dx + b'\,dy + b''\,dz, \qquad c\,dx + c'\,dy + c''\,dz,$$

avec celles qu'on déduit des formules (B) où l'on remplace $\rho_1, \rho_2, \rho_3, x, y, z$ respectivement par $x, y, z, -\mathrm{u}', -\mathrm{v}', -\mathrm{w}'$. Il vient ainsi les relations

$$(98)\quad \left\{\begin{aligned}
\xi_1 &= a + \frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial x} + q_1\mathrm{w}' - r_1\mathrm{v}', & \xi_2 &= a' + \frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial y} + q_2\mathrm{w}' - r_2\mathrm{v}', & \xi_3 &= a'' + \frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial z} + q_3\mathrm{w}' - r_3\mathrm{v}',\\
\eta_1 &= b + \frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial x} + r_1\mathrm{u}' - p_1\mathrm{w}', & \eta_2 &= b' + \frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial y} + r_2\mathrm{u}' - p_2\mathrm{w}', & \eta_3 &= b'' + \frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial z} + r_3\mathrm{u}' - p_3\mathrm{w}',\\
\zeta_1 &= c + \frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial x} + p_1\mathrm{v}' - q_1\mathrm{u}', & \zeta_2 &= c' + \frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial y} + p_2\mathrm{v}' - q_2\mathrm{u}', & \zeta_3 &= c'' + \frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial z} + p_3\mathrm{v}' - q_3\mathrm{u}',
\end{aligned}\right.$$

que l'on pourrait aussi établir par un calcul direct.

Indiquons différentes particularisations du trièdre mobile qui se présentent dans les applications.

Comme première particularisation, prenons pour trièdre mobile le trièdre qui s'obtient en donnant au trièdre de sommet P_1 et dont les axes sont parallèles aux axes des x, y, z la *rotation au point* $\mathrm{P}(x, y, z)$ définie au nº 5. Les relations (12′) prennent ici, en vertu des formules (97), la forme simple suivante :

$$(99)\qquad \eta_3 = \zeta_2, \qquad \zeta_1 = \xi_3, \qquad \xi_2 = \eta_1.$$

Remarquons que ce choix particulier du trièdre mobile nous conduit à un calcul facile des équations aux dérivées partielles dont nous avons parlé aux nºs 2 et 13; il suffit, en effet, d'adjoindre les relations (99) aux relations (96) et aux équations (A) pour former, par l'élimination des translations et des rotations, les équations cherchées.

Nous indiquerons deux autres particularisations importantes, utiles dans l'étude des tiges droites minces et des plaques minces.

Dans le premier cas, nous pouvons supposer que l'axe des z' du trièdre mobile est tangent à l'une des courbes coordonnées du système triple dans le corps déformé, ce qui donne, par exemple,

$$\xi_3 = 0, \qquad \eta_3 = 0.$$

Nous pouvons, pour l'autre cas, supposer que le plan des x', y' du trièdre mobile est tangent à l'une des surfaces du système triple dans le corps déformé, par exemple à la surface $z = \text{const.}$ On a alors

$$\zeta_1 = 0, \qquad \zeta_2 = 0.$$

38. *Équations relatives à l'équilibre du corps déformé.*

Conservons aux six fonctions P_1, P_2, P_3, U_1, U_2, U_3 la signification que nous leur avons donnée aux n^{os} 15, 16 et 24, mais rapportons les forces extérieures aux axes mobiles et désignons par X', Y', Z', F', G', H' les quantités qui correspondent ainsi à X, Y, Z, F, G, H. En tenant compte des formules (97) du n° 37, (82), (83) et (84) du n° 33, et en posant

$$\begin{aligned}
A_{x'} &= P_1\xi_1 + U_3\xi_2 + U_2\xi_3, & B_{x'} &= U_3\xi_1 + P_2\xi_2 + U_1\xi_3, & C_{x'} &= U_2\xi_1 + U_1\xi_2 + P_3\xi_3,\\
A_{y'} &= P_1\eta_1 + U_3\eta_2 + U_2\eta_3, & B_{y'} &= U_3\eta_1 + P_2\eta_2 + U_1\eta_3, & C_{y'} &= U_2\eta_1 + U_1\eta_2 + P_3\eta_3,\\
A_{z'} &= P_1\zeta_1 + U_3\zeta_2 + U_2\zeta_3, & B_{z'} &= U_3\zeta_1 + P_2\zeta_2 + U_1\zeta_3, & C_{z'} &= U_2\zeta_1 + U_1\zeta_2 + P_3\zeta_3,
\end{aligned}$$

nous trouvons que les équations (34) et (35) du n° 15 prennent la forme suivante :

$$(100)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial A_{x'}}{\partial x} + q_1 A_{z'} - r_1 A_{y'} + \frac{\partial B_{x'}}{\partial y} + q_2 B_{z'} - r_2 B_{y'} + \frac{\partial C_{x'}}{\partial z} + q_3 C_{z'} - r_3 C_{y'} + \rho X' = 0,\\
&\frac{\partial A_{y'}}{\partial x} + r_1 A_{x'} - p_1 A_{z'} + \frac{\partial B_{y'}}{\partial y} + r_2 B_{x'} - p_2 B_{z'} + \frac{\partial C_{y'}}{\partial z} + r_3 C_{x'} - p_3 C_{z'} + \rho Y' = 0,\\
&\frac{\partial A_{z'}}{\partial x} + p_1 A_{y'} - q_1 A_{x'} + \frac{\partial B_{z'}}{\partial y} + p_2 B_{y'} - q_2 B_{x'} + \frac{\partial C_{z'}}{\partial z} + p_3 C_{y'} - q_3 C_{x'} + \rho Z' = 0,
\end{aligned}\right.$$

$$(101)\quad \left\{\begin{aligned}
F' &= l A_{x'} + m B_{x'} + n C_{x'},\\
G' &= l A_{y'} + m B_{y'} + n C_{y'},\\
H' &= l A_{z'} + m B_{z'} + n C_{z'},
\end{aligned}\right.$$

l, m, n sont les cosinus directeurs par rapport aux axes fixes de la normale extérieure à l'élément de surface $d\sigma$ du corps non déformé et $\rho X'$, $\rho Y'$, $\rho Z'$;

F′, G′, H′ sont les composantes sur les axes mobiles de la force appliquée, par unité de volume du corps non déformé, en un point intérieur du corps déformé, et de la force appliquée, par unité d'aire de la surface du corps non déformé, en un point de la surface du corps déformé. On remarquera que $A_{x'}$, $A_{y'}$, $A_{z'}$, par exemple, sont les projections sur les axes du trièdre mobile du segment dont les projections sur les axes fixes sont A_x, A_y, A_z.

Maintenant si ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 sont les composantes de la déformation au point (x, y, z) du corps non déformé, nous avons, en rapprochant les formules du n° 1 des formules (96) du n° 36

$$(102) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2-1}{2}, & \gamma_1 &= \xi_2\xi_3+\eta_2\eta_3+\zeta_2\zeta_3, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2-1}{2}, & \gamma_2 &= \xi_3\xi_1+\eta_3\eta_1+\zeta_3\zeta_1, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\xi_3^2+\eta_3^2+\zeta_3^2-1}{2}, & \gamma_3 &= \xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2. \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons donc exprimer l'énergie de déformation par unité de volume W en fonction des translations ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, ..., et, par suite P_1, P_2, P_3, U_1, U_2, U_3 en fonctions des mêmes translations, au moyen des équations (59) du n° 24, savoir

$$(59) \quad P_1 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1}, \quad P_2 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2}, \quad P_3 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_3}, \quad U_1 = \frac{\partial W}{\partial \gamma_1}, \quad U_2 = \frac{\partial W}{\partial \gamma_2}, \quad U_3 = \frac{\partial W}{\partial \gamma_3}.$$

Les équations (100), (101), (102) et (59), jointes aux équations fondamentales (A) du n° 36, nous fournissent un système d'équations auxquelles satisfont les translations ξ_1, ξ_2, ... et les rotations p_1, p_2, ... dont la connaissance est, comme on l'a vu, liée intimement à celle du système triple de surfaces suivant lesquelles les plans coordonnés rectangulaires primitifs se sont transformés.

Les formules du n° 37 conduiront, si on le désire, à des équations vérifiées par les déplacements u′, v′, w′ rapportés au trièdre mobile.

39. *Équations relatives à la déformation infiniment petite lorsqu'on particularise le trièdre mobile.*

Cherchons ce que donnent ici les considérations développées aux n^os 30 et suivants à l'égard de la déformation infiniment petite lorsqu'on particularise le trièdre mobile comme il a été indiqué au n° 37, de telle sorte que l'on ait les relations (99). Les relations (98), jointes aux résultats obtenus au n° 11, et aux formules de Poisson déjà utilisées au n° 20, donnent alors immédiatement les développements suivants :

$$\begin{array}{lll} \xi_1 = 1 + e_1 + \ldots, & \xi_2 = \frac{1}{2} g_3 + \ldots, & \xi_3 = \frac{1}{2} g_2 + \ldots, \\ \eta_1 = \frac{1}{2} g_3 + \ldots, & \eta_2 = 1 + e_2 + \ldots, & \eta_3 = \frac{1}{2} g_1 + \ldots, \\ \zeta_1 = \frac{1}{2} g_2 + \ldots, & \zeta_2 = \frac{1}{2} g_1 + \ldots, & \zeta_3 = 1 + e_3 + \ldots, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} p_1 = \dfrac{\partial \tau_1}{\partial x} + \ldots, & p_2 = \dfrac{\partial \tau_1}{\partial y} + \ldots, & p_3 = \dfrac{\partial \tau_1}{\partial z} + \ldots, \\ q_1 = \dfrac{\partial \tau_2}{\partial x} + \ldots, & q_2 = \dfrac{\partial \tau_2}{\partial y} + \ldots, & q_3 = \dfrac{\partial \tau_2}{\partial z} + \ldots, \\ r_1 = \dfrac{\partial \tau_3}{\partial x} + \ldots, & r_2 = \dfrac{\partial \tau_3}{\partial y} + \ldots, & r_3 = \dfrac{\partial \tau_3}{\partial z} + \ldots, \end{array}$$

où e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 sont définis par les formules (18) du n° 9 et τ_1, τ_2, τ_3 par les formules du n° 11.

Si nous portons ces développements dans les équations (A) et si nous n'avons égard qu'à la première puissance de t, il vient, en outre des relations identiques telles que

$$\frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial y \partial x},$$

les relations déjà obtenues au n° 13 et qui se mettent sous la forme (21).

Nous sommes donc ramenés au système rencontré dans l'une des démonstrations que M. Beltrami a données (n° 13) des équations (22) de Barré de Saint-Venant.

Les considérations précédentes, eu égard à la remarque du n° 37, confirment ce que nous avons dit au n° 13 à propos de l'application de la notion du système auxiliaire de M. Darboux.

En répétant pour le système des équations (100) et (101) ce que nous avons dit au n° 30 et en faisant pour l'état naturel l'hypothèse la plus simple, on trouve, dans le cas du corps isotrope, les équations suivantes :

$$(103) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial e_1}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial e_2}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial e_3}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial g_2}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial g_3}{\partial y} + \rho \mathfrak{X} = 0, \\ \lambda \dfrac{\partial e_1}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial e_2}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial e_3}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial g_3}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial g_1}{\partial z} + \rho \mathfrak{Y} = 0, \\ \lambda \dfrac{\partial e_1}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial e_2}{\partial z} + (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial e_3}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial g_1}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial g_2}{\partial x} + \rho \mathfrak{Z} = 0. \end{array} \right.$$

$$(104)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{F} &= l[(\lambda+2\mu)e_1+\lambda e_2+\lambda e_3]+\mu(mg_3+ng_2),\\ \mathcal{G} &= m[\lambda e_1+(\lambda+2\mu)e_2+\lambda e_3]+\mu(ng_1+lg_3),\\ \mathcal{H} &= n[\lambda e_1+\lambda e_2+(\lambda+2\mu)e_3]+\mu(lg_2+mg_1),\end{aligned}\right.$$

qui résultent d'ailleurs aussi immédiatement du n° 32.

Quand les forces sont données à la surface, le problème de la déformation infiniment petite se trouve donc ramené à la recherche des solutions des systèmes (103) et (22) qui satisfont à la condition à la limite (104). Quand on aura trouvé ces solutions, le système des équations (18) déterminera les déplacements.

Nous retrouvons le procédé d'intégration utilisé par différents géomètres à l'exemple de M. Beltrami.

40. *Tiges droites minces; plaques minces.*

Ce serait peut-être le lieu ici, au moyen des particularisations dont nous avons parlé au n° 37, de considérer les résultats analogues aux précédents que l'on obtiendrait à l'égard des tiges droites minces et des plaques minces; mais nous préférons réserver la question pour un travail spécial.

III. — Corps rapporté avant déformation a un système triple quelconque de surfaces.

41. *Formules cinématiques.*

Plaçons-nous maintenant dans le cas plus général où le corps est rapporté avant déformation à un système triple quelconque de surfaces dont les paramètres sont ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Pour ne pas multiplier les notations, nous attribuerons à ce système triple les notations ($\xi_1, \ldots, p_1, \ldots$) précédemment adoptées pour le système triple du corps déformé, et pour ce dernier nous prendrons de nouvelles notations qui seront indiquées plus loin.

Nous considérerons donc un trièdre mobile dont le sommet est au point P, qui a pour coordonnées x, y, z par rapport aux axes fixes des x, y, z, et dont les axes ont, par rapport aux mêmes axes fixes, des cosinus directeurs définis par le Tableau

	x'	y'	
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

ξ_1, η_1, ζ_1 seront les composantes de la vitesse de l'origine des axes mobiles relativement à ces axes, quand ρ_1 varie seule et joue le rôle du temps, ξ_2, η_2, ζ_2 les mêmes composantes quand ρ_2 varie seule, et ξ_3, η_3, ζ_3 les mêmes composantes quand ρ_3 varie seule. Nous aurons de même trois systèmes différents de rotations p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2; p_3, q_3, r_3 autour des axes mobiles des x', y', z'.

Les coordonnées x, y, z par rapport aux axes fixes de l'origine P du trièdre mobile sont des fonctions de ses coordonnées curvilignes ρ_1, ρ_2, ρ_3 qui vérifient d'après les formules (89) du n° 34, les relations

$$(105)\quad \begin{cases} dx = (a\,\xi_1 + b\,\eta_1 + c\,\zeta_1)\,d\rho_1 + (a\,\xi_2 + b\,\eta_2 + c\,\zeta_2)\,d\rho_2 + (a\,\xi_3 + b\,\eta_3 + c\,\zeta_3)\,d\rho_3, \\ dy = (a'\xi_1 + b'\eta_1 + c'\zeta_1)\,d\rho_1 + (a'\xi_2 + b'\eta_2 + c'\zeta_2)\,d\rho_2 + (a'\xi_3 + b'\eta_3 + c'\zeta_3)\,d\rho_3, \\ dz = (a''\xi_1 + b''\eta_1 + c''\zeta_1)\,d\rho_1 + (a''\xi_2 + b''\eta_2 + c''\zeta_2)\,d\rho_2 + (a''\xi_3 + b''\eta_3 + c''\zeta_3)\,d\rho_3, \end{cases}$$

que l'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \xi_1\,d\rho_1 + \xi_2\,d\rho_2 + \xi_3\,d\rho_3 &= a\,dx + a'\,dy + a''\,dz, \\ \eta_1\,d\rho_1 + \eta_2\,d\rho_2 + \eta_3\,d\rho_3 &= b\,dx + b'\,dy + b''\,dz, \\ \zeta_1\,d\rho_1 + \zeta_2\,d\rho_2 + \zeta_3\,d\rho_3 &= c\,dx + c'\,dy + c''\,dz. \end{aligned}$$

Soient u, v, w les projections sur les axes fixes du déplacement PP_1 du point P, et u′, v′, w′ les projections du même déplacement sur les axes mobiles, en sorte que l'on ait

$$(106)\quad \begin{cases} \mathrm{u} = a\,\mathrm{u}' + b\,\mathrm{v}' + c\,\mathrm{w}', \\ \mathrm{v} = a'\mathrm{u}' + b'\mathrm{v}' + c'\mathrm{w}', \\ \mathrm{w} = a''\mathrm{u}' + b''\mathrm{v}' + c''\mathrm{w}'. \end{cases}$$

Considérons le carré de l'arc élémentaire décrit par le point P_1, savoir

$$(dx + d\mathrm{u})^2 + (dy + d\mathrm{v})^2 + (dz + d\mathrm{w})^2,$$

ou encore, avec les notations du n° 1,

$$(107)\quad (1+2\varepsilon_1)\,dx^2 + (1+2\varepsilon_2)\,dy^2 + (1+2\varepsilon_2)\,dz^2 + 2\gamma_1\,dy\,dz + 2\gamma_2\,dz\,dx + 2\gamma_3\,dx\,dy.$$

Nous pouvons le calculer au moyen des formules (B) du n° 36; il nous suffit de remplacer, dans les trois expressions (B), les lettres x, y, z par les lettres $\mathrm{u}', \mathrm{v}', \mathrm{w}'$, et de faire la somme des carrés, ce qui nous donne

$$(108)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left[\left(\xi_1 + \frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \rho_1} + q_1\mathrm{w}' - r_1\mathrm{v}'\right)d\rho_1 + \left(\xi_2 + \frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \rho_2} + q_2\mathrm{w}' - r_2\mathrm{v}'\right)d\rho_2 + \left(\xi_3 + \frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \rho_3} + q_3\mathrm{w}' - r_3\mathrm{v}'\right)d\rho_3\right]^2\\
+&\left[\left(\eta_1 + \frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial \rho_1} + r_1\mathrm{u}' - p_1\mathrm{w}'\right)d\rho_1 + \left(\eta_2 + \frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial \rho_2} + r_2\mathrm{u}' - p_2\mathrm{w}'\right)d\rho_2 + \left(\eta_3 + \frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial \rho_3} + r_3\mathrm{u}' - p_3\mathrm{w}'\right)d\rho_3\right]^2\\
+&\left[\left(\zeta_1 + \frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \rho_1} + p_1\mathrm{v}' - q_1\mathrm{u}'\right)d\rho_1 + \left(\zeta_2 + \frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \rho_2} + p_2\mathrm{v}' - q_2\mathrm{u}'\right)d\rho_2 + \left(\zeta_3 + \frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \rho_3} + p_3\mathrm{v}' - q_3\mathrm{u}'\right)d\rho_3\right]^2.
\end{aligned}\right.$$

Nous tirons de là la conclusion suivante :

Pour calculer les six composantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *de la déformation au point* P, *on effectuera dans la forme quadratique* (108) *en* $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$, *la substitution définie par la résolution des formules* (105); *on identifiera la nouvelle forme quadratique en* dx, dy, dz *ainsi obtenue avec la forme quadratique* (107).

On peut présenter la règle précédente sous une autre forme.

Prenons comme inconnues auxiliaires les composantes $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$ de la déformation au point P par rapport aux axes des x', y', z' issus de ce point. D'après ce que nous avons dit au n° 7, dès que les six quantités $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$ seront connues, nous aurons $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ par les formules

$$(109)\quad \left\{\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon'_1 a^2 + \varepsilon'_2 b^2 + \varepsilon'_3 c^2 + \gamma'_1\, b c + \gamma'_2\, c a + \gamma'_3\, a b,\\
\varepsilon_2 &= \varepsilon'_1 a'^2 + \varepsilon'_2 b'^2 + \varepsilon'_3 c'^2 + \gamma'_1\, b' c' + \gamma'_2\, c' a' + \gamma'_3\, a' b',\\
\varepsilon_3 &= \varepsilon'_1 a''^2 + \varepsilon'_2 b''^2 + \varepsilon'_3 c''^2 + \gamma'_1\, b'' c'' + \gamma'_2\, c'' a'' + \gamma'_3\, a'' b'';\\
\gamma_1 &= 2\varepsilon'_1 a' a'' + 2\varepsilon'_2 b' b'' + 2\varepsilon'_3 c' c'' + \gamma'_1 (b' c'' + b'' c') + \gamma'_2 (c' a'' + c'' a') + \gamma'_3 (a' b'' + a'' b'),\\
\gamma_2 &= 2\varepsilon'_1 a'' a + 2\varepsilon'_2 b'' b + 2\varepsilon'_3 c'' c + \gamma'_1 (b'' c + b c'') + \gamma'_2 (c'' a + c a'') + \gamma'_3 (a'' b + a b''),\\
\gamma_3 &= 2\varepsilon'_1 a a' + 2\varepsilon'_2 b b' + 2\varepsilon'_3 c c' + \gamma'_1 (b c' + b' c) + \gamma'_2 (c a' + c' a) + \gamma'_3 (a b' + a' b).
\end{aligned}\right.$$

D'autre part, d'après le même numéro, si l'on effectue sur la forme quadratique (107) la substitution définie par les formules

$$(110)\qquad \begin{cases} dx = a\,dx' + b\,dy' + c\,dz', \\ dy = a'\,dx' + b'\,dy' + c'\,dz', \\ dz = a''dx' + b''dy' + c''dz', \end{cases}$$

on trouve la forme quadratique

$$(111)\qquad \begin{cases} (1+2\varepsilon'_1)\,dx'^2 + (1+2\varepsilon'_2)\,dy'^2 + (1+2\varepsilon'_3)\,dz'^2 \\ \quad + 2\gamma'_1\,dy'\,dz' + 2\gamma'_2\,dz'\,dx' + 2\gamma'_3\,dx'\,dy'. \end{cases}$$

On a donc la règle suivante :

Pour calculer les six composantes ε'_1, ε'_2, ε'_3, γ'_1, γ'_2, γ'_3 *de la déformation au point* P *par rapport aux axes* Px', Py', Pz', *on effectuera, dans la forme quadratique* (108) *en* $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$, *la substitution définie par la résolution des formules*

$$(112)\qquad \begin{cases} dx' = \xi_1\,d\rho_1 + \xi_2\,d\rho_2 + \xi_3\,d\rho_3, \\ dy' = \eta_1\,d\rho_1 + \eta_2\,d\rho_2 + \eta_3\,d\rho_3, \\ dz' = \zeta_1\,d\rho_1 + \zeta_2\,d\rho_2 + \zeta_3\,d\rho_3, \end{cases}$$

et l'on identifiera la nouvelle forme quadratique en dx', dy', dz' *ainsi obtenue avec la forme quadratique* (111).

42. *Déformation infiniment petite.*

Supposons, comme au n° 8, que u, v, w soient fonctions d'une variable t en même temps que de ρ_1, ρ_2, ρ_3, et puissent être développées suivant les puissances entières positives de t, par des séries absolument et uniformément convergentes dont les premiers termes soient u, v, w; les neuf cosinus a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' étant indépendants de t, u', v', w' seront aussi développables par des séries dont les premiers termes u', v', w' seront liés à u, v, w par les relations

$$\begin{aligned} u &= a\,u' + b\,v' + c\,w', \\ v &= a'\,u' + b'\,v' + c'\,w', \\ w &= a''\,u' + b''\,v' + c''\,w'. \end{aligned}$$

Si nous cherchons les premiers termes e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 des développements de ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, il suffira d'utiliser une des deux règles du numéro précédent; prenons la seconde; en désignant par e'_1, e'_2, e'_3, g'_1, g'_2, g'_3 les premiers termes des développements de ε'_1, ε'_2, ε'_3, γ'_1, γ'_2, γ'_3, pour en déduire e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3, il suffira de remplacer, dans les formules (109),

$$\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2,\quad \varepsilon_3,\quad \gamma_1,\quad \gamma_2,\quad \gamma_3,\qquad \varepsilon'_1,\quad \varepsilon'_2,\quad \varepsilon'_3,\quad \gamma'_1,\quad \gamma'_2,\quad \gamma'_3,$$

respectivement par

$$e_1,\quad e_2,\quad e_3,\quad g_1,\quad g_2,\quad g_3,\qquad e'_1,\quad e'_2,\quad e'_3,\quad g'_1,\quad g'_2,\quad g'_3.$$

D'autre part, on aura la règle suivante :

Pour calculer les six quantités e'_1, e'_2, e'_3, g'_1, g'_2, g'_3, on effectuera, dans la forme quadratique en $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$ suivante

$$\begin{aligned}
&(\xi_1\,d\rho_1+\xi_2\,d\rho_2+\xi_3\,d\rho_3)\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial\rho_1}+q_1w'-r_1v'\right)d\rho_1+\left(\frac{\partial u'}{\partial\rho_2}+q_2w'-r_2v'\right)d\rho_2+\left(\frac{\partial u'}{\partial\rho_3}+q_3w'-r_3v'\right)d\rho_3\right]\\
&+(\eta_1\,d\rho_1+\eta_2\,d\rho_2+\eta_3\,d\rho_3)\left[\left(\frac{\partial v'}{\partial\rho_1}+r_1u'-p_1w'\right)d\rho_1+\left(\frac{\partial v'}{\partial\rho_2}+r_2u'-p_2w'\right)d\rho_2+\left(\frac{\partial v'}{\partial\rho_3}+r_3u'-p_3w'\right)d\rho_3\right]\\
&+(\zeta_1\,d\rho_1+\zeta_2\,d\rho_2+\zeta_3\,d\rho_3)\left[\left(\frac{\partial w'}{\partial\rho_1}+p_1v'-q_1u'\right)d\rho_1+\left(\frac{\partial w'}{\partial\rho_2}+p_2v'-q_2u'\right)d\rho_2+\left(\frac{\partial w'}{\partial\rho_3}+p_3v'-q_3u'\right)d\rho_3\right]
\end{aligned}$$

la substitution définie par la résolution des formules (112), *et l'on identifiera la nouvelle forme quadratique en dx', dy', dz' ainsi obtenue avec la forme quadratique*

$$e'_1\,dx'^2+e'_2\,dy'^2+e'_3\,dz'^2+g'_1\,dy'\,dz'+g'_2\,dz'\,dx'+g'_3\,dx'\,dy'.$$

Désignant par J le déterminant

$$\mathrm{J}=\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3\end{vmatrix},$$

dont le carré figure déjà au n° 35 dans l'expression de l'élément de volume, on obtient ainsi

$$
(113)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{J}e'_1 &= \begin{vmatrix}
\frac{\partial u'}{\partial \rho_1} + q_1 w' - r_1 v' & \eta_1 & \zeta_1 \\
\frac{\partial u'}{\partial \rho_2} + q_2 w' - r_2 v' & \eta_2 & \zeta_2 \\
\frac{\partial u'}{\partial \rho_3} + q_3 w' - r_3 v' & \eta_3 & \zeta_3
\end{vmatrix}, \\
\mathrm{J}e'_2 &= \begin{vmatrix}
\xi_1 & \frac{\partial v'}{\partial \rho_1} + r_1 u' - p_1 w' & \zeta_1 \\
\xi_2 & \frac{\partial v'}{\partial \rho_2} + r_2 u' - p_2 w' & \zeta_2 \\
\xi_3 & \frac{\partial v'}{\partial \rho_3} + r_3 u' - p_3 w' & \zeta_3
\end{vmatrix}, \\
\mathrm{J}e'_3 &= \begin{vmatrix}
\xi_1 & \eta_1 & \frac{\partial w'}{\partial \rho_1} + p_1 v' - q_1 u' \\
\xi_2 & \eta_2 & \frac{\partial w'}{\partial \rho_2} + p_2 v' - q_2 u' \\
\xi_3 & \eta_3 & \frac{\partial w'}{\partial \rho_3} + p_3 v' - q_3 u'
\end{vmatrix}, \\
\mathrm{J}g'_1 &= \begin{vmatrix}
\xi_1 & \eta_1 & \frac{\partial v'}{\partial \rho_1} + r_1 u' - p_1 w' \\
\xi_2 & \eta_2 & \frac{\partial v'}{\partial \rho_2} + r_2 u' - p_2 w' \\
\xi_3 & \eta_3 & \frac{\partial v'}{\partial \rho_3} + r_3 u' - p_3 w'
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
\xi_1 & \frac{\partial w'}{\partial \rho_1} + p_1 v' - q_1 u' & \zeta_1 \\
\xi_2 & \frac{\partial w'}{\partial \rho_2} + p_2 v' - q_2 u' & \zeta_2 \\
\xi_3 & \frac{\partial w'}{\partial \rho_3} + p_3 v' - q_3 u' & \zeta_3
\end{vmatrix}, \\
\mathrm{J}g'_2 &= \begin{vmatrix}
\frac{\partial w'}{\partial \rho_1} + p_1 v' - q_1 u' & \eta_1 & \zeta_1 \\
\frac{\partial w'}{\partial \rho_2} + p_2 v' - q_2 u' & \eta_2 & \zeta_2 \\
\frac{\partial w'}{\partial \rho_3} + p_3 v' - q_3 u' & \eta_3 & \zeta_3
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
\xi_1 & \eta_1 & \frac{\partial u'}{\partial \rho_1} + q_1 w' - r_1 v' \\
\xi_2 & \eta_2 & \frac{\partial u'}{\partial \rho_2} + q_2 w' - r_2 v' \\
\xi_3 & \eta_3 & \frac{\partial u'}{\partial \rho_3} + q_3 w' - r_3 v'
\end{vmatrix}, \\
\mathrm{J}g'_3 &= \begin{vmatrix}
\xi_1 & \frac{\partial u'}{\partial \rho_1} + q_1 w' - r_1 v' & \zeta_1 \\
\xi_2 & \frac{\partial u'}{\partial \rho_2} + q_2 w' - r_2 v' & \zeta_2 \\
\xi_3 & \frac{\partial u'}{\partial \rho_3} + q_3 w' - r_3 v' & \zeta_3
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
\frac{\partial v'}{\partial \rho_1} + r_1 u' - p_1 w' & \eta_1 & \zeta_1 \\
\frac{\partial v'}{\partial \rho_2} + r_2 u' - p_2 w' & \eta_2 & \zeta_2 \\
\frac{\partial v'}{\partial \rho_3} + r_3 u' - p_3 w' & \eta_3 & \zeta_3
\end{vmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

La dilatation cubique

$$\theta = e_1 + e_2 + e_3 = e'_1 + e \;\; + e'_3$$

sera donnée par la formule

$$\mathrm{J}\,\theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u'}{\partial\rho_1} + q_1 w' - r_1 v' & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial u'}{\partial\rho_2} + q_2 w' - r_2 v' & \eta_2 & \zeta_2 \\ \frac{\partial u'}{\partial\rho_3} + q_3 w' - r_3 v' & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \xi_1 & \frac{\partial v'}{\partial\rho_1} + r_1 u' - p_1 w' & \zeta_1 \\ \xi_2 & \frac{\partial v'}{\partial\rho_2} + r_2 u' - p_2 w' & \zeta_2 \\ \xi_3 & \frac{\partial v'}{\partial\rho_3} + r_3 u' - p_3 w' & \zeta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \frac{\partial w'}{\partial\rho_1} + p_1 v' - q_1 u' \\ \xi_2 & \eta_2 & \frac{\partial w'}{\partial\rho_2} + p_2 v' - q_2 u' \\ \xi_3 & \eta_3 & \frac{\partial w'}{\partial\rho_3} + p_3 v' - q_3 u' \end{vmatrix},$$

que l'on peut encore écrire, en vertu des équations (A) du n° 36,

$$\mathrm{J}\,\theta = \frac{\partial}{\partial\rho_1}\begin{vmatrix} u' & \xi_2 & \xi_3 \\ v' & \eta_2 & \eta_3 \\ w' & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\begin{vmatrix} \xi_1 & u' & \xi_3 \\ \eta_1 & v' & \eta_3 \\ \zeta_1 & w' & \zeta_3 \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial\rho_3}\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & u' \\ \eta_1 & \eta_2 & v' \\ \zeta_1 & \zeta_2 & w' \end{vmatrix}.$$

43. *Équations relatives à l'équilibre du corps déformé.*

Revenons au cas de la déformation en général, et proposons-nous d'établir les équations relatives à l'équilibre du corps déformé par rapport au trièdre mobile du n° 41.

Prenons les équations (34) et (35) du n° 15; elles se résument dans l'équation

$$(32)\qquad \iiint \rho(\mathrm{X}\,\delta\mathrm{u} + \mathrm{Y}\,\delta\mathrm{v} + \mathrm{Z}\,\delta\mathrm{w})\,dx\,dy\,dz + \iint (\mathrm{F}\,\delta\mathrm{u} + \mathrm{G}\,\delta\mathrm{v} + \mathrm{H}\,\delta\mathrm{w})\,d\sigma$$
$$-\iiint (\mathrm{P}_1\,\delta\varepsilon_1 + \mathrm{P}_2\,\delta\varepsilon_2 + \mathrm{P}_3\,\delta\varepsilon_3 + \mathrm{U}_1\,\delta\gamma_1 + \mathrm{U}_2\,\delta\gamma_2 + \mathrm{U}_3\,\delta\gamma_3)\,dx\,dy\,dz = 0,$$

qui doit avoir lieu pour tous les déplacements virtuels $\delta\mathrm{u}$, $\delta\mathrm{v}$, $\delta\mathrm{w}$.

Il est facile de transformer cette équation (32); introduisons à la place des P_i, U_i six nouvelles auxiliaires P'_i, U'_i qui soient liées aux premières par la substitution inverse de la substitution (109), en sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
P'_1 &= P_1 a^2 + P_2 a'^2 + P_3 a''^2 + 2U_1 a' a'' + 2U_2 a'' a + 2U_3 aa',\\
P'_2 &= P_1 b^2 + P_2 b'^2 + P_3 b''^2 + 2U_1 b' b'' + 2U_2 b'' b + 2U_3 bb',\\
P'_3 &= P_1 c^2 + P_2 c'^2 + P_3 c''^2 + 2U_1 c' c'' + 2U_2 c'' c + 2U_3 cc',\\
U'_1 &= P_1 bc + P_2 b' c' + P_3 b'' c'' + U_1 (b' c'' + b'' c') + U_2 (b'' c + bc'') + U_3 (bc' + b' c),\\
U'_2 &= P_1 ca + P_2 c' a' + P_3 c'' a'' + U_1 (c' a'' + c'' a') + U_2 (c'' a + ca'') + U_3 (ca' + c' a),\\
U'_3 &= P_1 ab + P_2 a' b' + P_3 a'' b'' + U_1 (a' b'' + a'' b') + U_2 (a'' b + ab'') + U_3 (ab' + a' b),
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
P_1 &= P'_1 a^2 + P'_2 b^2 + P'_3 c^2 + 2U'_1 bc + 2U'_2 ca + 2U'_3 ab,\\
P_2 &= P'_1 a'^2 + P'_2 b'^2 + P'_3 c'^2 + 2U'_1 b' c' + 2U'_2 c' a' + 2U'_3 a' b',\\
P_3 &= P'_1 a''^2 + P'_2 b''^2 + P'_3 c''^2 + 2U'_1 b'' c'' + 2U'_2 c'' a'' + 2U'_3 a'' b'',\\
U_1 &= P'_1 a' a'' + P'_2 b' b'' + P'_3 c' c'' + U'_1 (b' c'' + b'' c') + U'_2 (c' a'' + c'' a') + U'_3 (a' b'' + a'' b'),\\
U_2 &= P'_1 a'' a + P'_2 b'' b + P'_3 c'' c + U'_1 (b'' c + bc'') + U'_2 (c'' a + ca'') + U'_3 (a'' b + ab''),\\
U_3 &= P'_1 aa' + P'_2 bb' + P'_3 cc' + U'_1 (bc' + b' c) + U'_2 (ca' + c' a) + U'_3 (ab' + a' b).
\end{aligned}$$

On peut dire encore que les nouvelles auxiliaires sont liées aux premières de façon que la substitution (110) transforme la forme quadratique en dx, dy, dz,

$$P_1\, dx^2 + P_2\, dy^2 + P_3\, dz^2 + 2U_1\, dy\, dz + 2U_2\, dz\, dx + 2U_3\, dx\, dy,$$

dans la suivante en dx', dy', dz'

$$P'_1\, dx'^2 + P'_2\, dy'^2 + P'_3\, dz'^2 + 2U'_1\, dy'\, dz' + 2U'_2\, dz'\, dx' + 2U'_3\, dx'\, dy'.$$

Définissons les forces extérieures en les rapportant aux axes mobiles, et désignons par X', Y', Z', F', G', H' les quantités qui correspondent à X, Y, Z, F, G, H, en sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
X &= aX' + bY' + cZ', & F &= aF' + bG' + cH',\\
Y &= a'X' + b'Y' + c'Y', & G &= a'F' + b'G' + c'H',\\
Z &= a''X' + b''Y' + c''Z', & H &= a''F' + b''G' + c''H'.
\end{aligned}$$

En vertu des formules (106) et (109), l'équation (32) prend alors la forme suivante

$$(115)\qquad \begin{aligned}
&\iiint \rho (X' \delta u' + Y' \delta v' + Z' \delta w')\, dx\, dy\, dz\\
&+ \iint (F' \delta u' + G' \delta v' + H' \delta w')\, d\sigma\\
&- \iiint (P'_1 \delta\varepsilon'_1 + P'_2 \delta\varepsilon'_2 + P'_3 \delta\varepsilon'_3 + U'_1 \delta\gamma'_1 + U'_2 \delta\gamma'_2 + U'_3 \delta\gamma'_3)\, dx\, dy\, dz = 0,
\end{aligned}$$

que nous pouvons transformer en nous servant de la règle établie au n° 41 pour calculer ε'_1, ε'_2, ε'_3, γ'_1, γ'_2, γ'_3.

Par un calcul facile, analogue à celui qui a été fait au n° 15 [1], et en posant

$$
(116)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{x'} = \mathrm{P}'_1 &\left\{ 1 + \frac{1}{\mathrm{J}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \rho_1} + q_1 \mathrm{w}' - r_1 \mathrm{v}' & \eta_1 & \zeta_1 \\ \dfrac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \rho_2} + q_2 \mathrm{w}' - r_2 \mathrm{v}' & \eta_2 & \zeta_2 \\ \dfrac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \rho_3} + q_3 \mathrm{w}' - r_3 \mathrm{v}' & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} \right\} + \frac{\mathrm{U}'_3}{\mathrm{J}} \begin{vmatrix} \xi_1 & \dfrac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \rho_1} + q_1 \mathrm{w}' - r_1 \mathrm{v}' & \zeta_1 \\ \xi_2 & \dfrac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \rho_2} + q_2 \mathrm{w}' - r_2 \mathrm{v}' & \zeta_3 \\ \xi_3 & \dfrac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \rho_3} + q_3 \mathrm{w}' - r_3 \mathrm{v}' & \zeta_3 \end{vmatrix} \\
&+ \frac{\mathrm{U}'_2}{\mathrm{J}} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \dfrac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \rho_1} + q_1 \mathrm{w}' - r_1 \mathrm{v}' \\ \xi_2 & \eta_2 & \dfrac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \rho_2} + q_2 \mathrm{w}' - r_2 \mathrm{v}' \\ \xi_3 & \eta_3 & \dfrac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \rho_3} + q_3 \mathrm{w}' - r_3 \mathrm{v}' \end{vmatrix}, \\
\mathrm{A}'_{y'} = \frac{\mathrm{P}'_1}{\mathrm{J}} &\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{v}'}{\partial \rho_1} + r_1 \mathrm{u}' - p_1 \mathrm{w}' & \eta_1 & \zeta_1 \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}'}{\partial \rho_2} + r_2 \mathrm{u}' - p_2 \mathrm{w}' & \eta_2 & \zeta_2 \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}'}{\partial \rho_3} + r_3 \mathrm{u}' - p_3 \mathrm{w}' & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + \mathrm{U}'_3 \left\{ 1 + \frac{1}{\mathrm{J}} \begin{vmatrix} \xi_1 & \dfrac{\partial \mathrm{v}'}{\partial \rho_1} + r_1 \mathrm{u}' - p_1 \mathrm{w}' & \zeta_1 \\ \xi_2 & \dfrac{\partial \mathrm{v}'}{\partial \rho_2} + r_2 \mathrm{u}' - p_2 \mathrm{w}' & \zeta_2 \\ \xi_3 & \dfrac{\partial \mathrm{v}'}{\partial \rho_3} + r_3 \mathrm{u}' - p_3 \mathrm{w}' & \zeta_3 \end{vmatrix} \right\} \\
&+ \frac{\mathrm{U}'_2}{\mathrm{J}} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \dfrac{\partial \mathrm{v}'}{\partial \rho_1} + r_1 \mathrm{u}' - p_1 \mathrm{w}' \\ \xi_2 & \eta_2 & \dfrac{\partial \mathrm{v}'}{\partial \rho_2} + r_2 \mathrm{u}' - p_2 \mathrm{w}' \\ \xi_3 & \eta_3 & \dfrac{\partial \mathrm{v}'}{\partial \rho_3} + r_3 \mathrm{u}' - p_3 \mathrm{w}' \end{vmatrix}, \\
\mathrm{A}'_{z'} = \frac{\mathrm{P}'_1}{\mathrm{J}} &\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \rho_1} + p_1 \mathrm{v}' - q_1 \mathrm{u}' & \eta_1 & \zeta_1 \\ \dfrac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \rho_2} + p_2 \mathrm{v}' - q_2 \mathrm{u}' & \eta_2 & \zeta_2 \\ \dfrac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \rho_3} + p_3 \mathrm{v}' - q_3 \mathrm{u}' & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + \frac{\mathrm{U}'_3}{\mathrm{J}} \begin{vmatrix} \xi_1 & \dfrac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \rho_1} + p_1 \mathrm{v}' - q_1 \mathrm{u}' & \zeta_1 \\ \xi_2 & \dfrac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \rho_2} + p_2 \mathrm{v}' - q_2 \mathrm{u}' & \zeta_2 \\ \xi_3 & \dfrac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \rho_3} + p_3 \mathrm{v}' - q_3 \mathrm{u}' & \zeta_3 \end{vmatrix} \\
&+ \mathrm{U}'_2 \left\{ 1 + \frac{1}{\mathrm{J}} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \dfrac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \rho_1} + p_1 \mathrm{v}' - q_1 \mathrm{u}' \\ \xi_2 & \eta_2 & \dfrac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \rho_2} + p_2 \mathrm{v}' - q_2 \mathrm{u}' \\ \xi_3 & \eta_3 & \dfrac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \rho_3} + p_3 \mathrm{v}' - q_3 \mathrm{u}' \end{vmatrix} \right\},
\end{aligned}
\right.
$$

---

[1] Dans les transformations d'intégrales de volume en intégrales de surface que comporte ce calcul, on n'aura qu'à appliquer la formule suivante :

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial \rho_i}\, d\rho_1\, d\rho_2\, d\rho_3 = \iint \frac{l'\xi_i + m'\eta_i + n'\zeta_i}{|\mathrm{J}|} f\, d\sigma$$

où f est une fonction quelconque de ρ_1, ρ_2, ρ_3, et où les autres notations sont celles adoptées dans le texte. Cette formule, qu'on peut prévoir géométriquement, s'établit analytiquement en répétant le raisonnement employé par C. Neumann, dans le Mémoire cité au n° 26.

puis en formant six autres expressions analogues $B'_{x'}$, $B'_{y'}$, $B'_{z'}$, $C'_{x'}$, $C'_{y'}$, $C'_{z'}$, obtenues en remplaçant respectivement, dans les précédentes, P'_1, U'_3, U'_2 par U'_3, P'_2, U'_1 et par U'_2, U'_1, P'_3, on est conduit aux équations suivantes à l'intérieur du corps :

$$
(117)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\rho_1}\begin{vmatrix} A'_{x'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{x'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{x'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} + q_1 \begin{vmatrix} A'_{z'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{z'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{z'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} - r_1 \begin{vmatrix} A'_{y'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{y'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{y'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} \\
&+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{x'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{x'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{x'} & \zeta_3 \end{vmatrix} + q_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{z'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{z'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{z'} & \zeta_3 \end{vmatrix} - r_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{y'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{y'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{y'} & \zeta_3 \end{vmatrix} \\
&+\frac{\partial}{\partial\rho_3}\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{x'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{x'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{x'} \end{vmatrix} + q_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{z'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{z'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C_{z'} \end{vmatrix} - r_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{y'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{y'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{y'} \end{vmatrix} + \rho J X' = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial\rho_1}\begin{vmatrix} A'_{y'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{y'} & \eta_2 & \xi_3 \\ C'_{y'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} + r_1 \begin{vmatrix} A'_{x'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{x'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{x'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} A'_{z'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{z'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{z'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} \\
&+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{y'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{y'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{y'} & \zeta_3 \end{vmatrix} + r_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{x'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{x'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{x'} & \zeta_3 \end{vmatrix} - p_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{z'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{z'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{z'} & \zeta_3 \end{vmatrix} \\
&+\frac{\partial}{\partial\rho_3}\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{y'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{y'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{y'} \end{vmatrix} + r_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{x'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{x'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{x'} \end{vmatrix} - p_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{z'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{z'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{z'} \end{vmatrix} + \rho J Y' = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial\rho_1}\begin{vmatrix} A'_{z'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{z'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{z'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} + p_1 \begin{vmatrix} A'_{y'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{y'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{y'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} - q_1 \begin{vmatrix} A'_{x'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{x'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{x'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} \\
&+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{z'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{z'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{z'} & \zeta_3 \end{vmatrix} + p_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{y'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{y'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{y'} & \zeta_3 \end{vmatrix} - q_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{x'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{x'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{x'} & \zeta_3 \end{vmatrix} \\
&+\frac{\partial}{\partial\rho_3}\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{z'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{z'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{z'} \end{vmatrix} + p_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{y'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{y'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{y'} \end{vmatrix} - q_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{x'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{x'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{x'} \end{vmatrix} + \rho J Z' = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

et aux équations suivantes à la surface du corps :

$$(118)\qquad \begin{cases} F' = l'A'_{x'} + m'B'_{x'} + n'C'_{x'}, \\ G' = l'A'_{y'} + m'B'_{y'} + n'C'_{y'}, \\ H' = l'A'_{z'} + m'B'_{z'} + n'C'_{z'}, \end{cases}$$

qui mettent en évidence la signification des auxiliaires $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$, ..., si l'on ajoute que l', m', n' sont les cosinus directeurs par rapport aux axes du trièdre mobile de la normale extérieure à l'élément $d\sigma$ du corps *non déformé*.

Désignons encore par la lettre W la fonction de ρ_1, ρ_2, ρ_3, ε'_1, ..., obtenue en remplaçant, dans $W(\varepsilon_i, \gamma_i)$, les lettres ε_i, γ_i par leurs valeurs (109); on a, d'après la définition des P'_i, U'_i,

$$(119)\quad P'_1 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon'_1},\quad P'_2 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon'_2},\quad P'_3 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon'_3},\quad U'_1 = \frac{\partial W}{\partial \gamma'_1},\quad U'_2 = \frac{\partial W}{\partial \gamma'_2},\quad U'_3 = \frac{\partial W}{\partial \gamma'_3}.$$

44. *Équations relatives à la déformation infiniment petite.*

Si nous appliquons les résultats du numéro précédent au cas de la déformation infiniment petite, et si, pour fixer les idées, nous supposons que l'état naturel est celui considéré au n° 31, nous trouvons, en adoptant une notation analogue à celle de ce dernier numéro, que les équations (117) et (118) doivent être remplacées par des équations obtenues en substituant, dans les précédentes, $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{U}'_3$, $\mathfrak{U}'_2$, $\mathfrak{U}'_3$, $\mathfrak{P}'_2$, $\mathfrak{U}'_1$, $\mathfrak{U}'_2$, $\mathfrak{U}'_1$, $\mathfrak{P}'_3$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ respectivement à $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$, $B'_{x'}$, $B'_{y'}$, $B'_{z'}$, $C'_{x'}$, $C'_{y'}$, $C'_{z'}$, X', Y', Z', F', G', H'; quant aux équations (119), elles doivent être remplacées par les suivantes :

$$\mathfrak{P}'_1 = \frac{\partial W_2}{\partial e'_1},\quad \mathfrak{P}'_2 = \frac{\partial W_2}{\partial e'_2},\quad \mathfrak{P}'_3 = \frac{\partial W_2}{\partial e'_3},\quad \mathfrak{U}'_1 = \frac{\partial W_2}{\partial g'_1},\quad \mathfrak{U}'_2 = \frac{\partial W_2}{\partial g'_2},\quad \mathfrak{U}'_3 = \frac{\partial W_2}{\partial g'_3},$$

où nous conservons la lettre W_2 pour désigner ce que devient $W_2(e_i, g_i)$ lorsqu'on y remplace les e_i, g_i par leurs valeurs indiquées au n° 42 en fonction des e'_i, g'_i.

En particulier, si le corps est isotrope, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}'_1 &= \lambda\theta + 2\mu e'_1, & \mathfrak{U}'_1 &= \mu g'_1, \\ \mathfrak{P}'_2 &= \lambda\theta + 2\mu e'_2, & \mathfrak{U}'_2 &= \mu g'_2, \\ \mathfrak{P}'_3 &= \lambda\theta + 2\mu e'_3, & \mathfrak{U}'_3 &= \mu g'_3, \end{aligned}$$

IV. — Corps rapporté avant et après déformation à un système triple de surfaces.

45. *Formules cinématiques.*

On peut se proposer, comme dans le § II du présent Chapitre, d'introduire la considération du système triple de surfaces qui, dans le corps déformé, correspond au système triple de surfaces (ρ_1, ρ_2, ρ_3) auquel le corps est rapporté avant la déformation.

Désignons par (ξ'_1, ξ'_2, ..., p'_1, p'_2, ...) les translations et les rotations d'un trièdre mobile (T'') que nous adjoindrons à ce système triple du corps déformé, et dont les axes des x'', y'', z'' ont des directions définies, *par rapport aux axes des* x', y', z' *du trièdre mobile* (T') *du système triple du corps avant déformation,* par le Tableau des cosinus

	x''	y''	z''
x'	a_1	b_1	c_1
y'	a'_1	b'_1	c'_1
z'	a''_1	b''_1	c''_1

L'origine du second trièdre mobile est placée au point dont les coordonnées par rapport au premier trièdre mobile sont u', v', w', en sorte que les formules (B) du n° 36 nous donnent

$$
(120)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\xi_1 + \frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \rho_1} + q_1 \mathrm{w}' - r_1 \mathrm{v}' = a_1 \xi'_1 + b_1 \eta'_1 + c_1 \zeta'_1,\\
&\xi_2 + \frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \rho_2} + q_2 \mathrm{w}' - r_2 \mathrm{v}' = a_1 \xi'_2 + b_1 \eta'_2 + c_1 \zeta'_2,\\
&\xi_3 + \frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \rho_3} + q_3 \mathrm{w}' - r_3 \mathrm{v}' = a_1 \xi'_3 + b_1 \eta'_3 + c_1 \zeta'_3,\\
&\eta_1 + \frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial \rho_1} + r_1 \mathrm{u}' - p_1 \mathrm{w}' = a'_1 \xi'_1 + b'_1 \eta'_1 + c'_1 \zeta'_1,\\
&\eta_2 + \frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial \rho_2} + r_2 \mathrm{u}' - p_2 \mathrm{w}' = a'_1 \xi'_2 + b'_1 \eta'_2 + c'_1 \zeta'_2,\\
&\eta_3 + \frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial \rho_3} + r_3 \mathrm{u}' - p_3 \mathrm{w}' = a'_1 \xi'_3 + b'_1 \eta'_3 + c'_1 \zeta'_3,\\
&\zeta_1 + \frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \rho_1} + p_1 \mathrm{v}' - q_1 \mathrm{u}' = a''_1 \xi'_1 + b''_1 \eta'_1 + c''_1 \zeta'_1,\\
&\zeta_2 + \frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \rho_2} + p_2 \mathrm{v}' - q_2 \mathrm{u}' = a''_1 \xi'_2 + b''_1 \eta'_2 + c''_1 \zeta'_2,\\
&\zeta_3 + \frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \rho_3} + p_3 \mathrm{v}' - q_3 \mathrm{u}' = a''_1 \xi'_3 + b''_1 \eta'_3 + c''_1 \zeta'_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Rapportons le déplacement $(\mathrm{u}', \mathrm{v}', \mathrm{w}')$ au second trièdre mobile; nous aurons

$$
\begin{aligned}
\mathrm{u}' &= a_1 \mathrm{u}'' + b_1 \mathrm{v}'' + c_1 \mathrm{w}'',\\
\mathrm{v}' &= a'_1 \mathrm{u}'' + b'_1 \mathrm{v}'' + c'_1 \mathrm{w}'',\\
\mathrm{w}' &= a''_1 \mathrm{u}'' + b''_1 \mathrm{v}'' + c''_1 \mathrm{w}'',
\end{aligned}
$$

u'', v'', w'' étant les projections de ce déplacement sur les axes du second trièdre mobile.

L'origine du premier trièdre mobile a ainsi pour coordonnées, par rapport au second trièdre mobile, $-\mathrm{u}''$, $-\mathrm{v}''$, $-\mathrm{w}''$; nous devons donc identifier les trois expressions

$$
\begin{aligned}
&a_1(\xi_1\,d\rho_1 + \xi_2\,d\rho_2 + \xi_3\,d\rho_3) + a'_1(\eta_1\,d\rho_1 + \eta_2\,d\rho_2 + \eta_3\,d\rho_3) + a''_1(\zeta_1\,d\rho_1 + \zeta_2\,d\rho_2 + \zeta_3\,d\rho_3),\\
&b_1(\xi_1\,d\rho_1 + \xi_2\,d\rho_2 + \xi_3\,d\rho_3) + b'_1(\eta_1\,d\rho_1 + \eta_2\,d\rho_2 + \eta_3\,d\rho_3) + b''_1(\zeta_1\,d\rho_1 + \zeta_2\,d\rho_2 + \zeta_3\,d\rho_3),\\
&c_1(\xi_1\,d\rho_1 + \xi_2\,d\rho_2 + \xi_3\,d\rho_3) + c'_1(\eta_1\,d\rho_1 + \eta_2\,d\rho_2 + \eta_3\,d\rho_3) + c''_1(\zeta_1\,d\rho_1 + \zeta_2\,d\rho_2 + \zeta_3\,d\rho_3),
\end{aligned}
$$

avec celles qu'on déduit des formules (B) où l'on remplace $(\xi_1, \xi_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots)$, (x, y, z) respectivement par $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, p'_1, p'_2, \ldots)$,

$(-\mathrm{u}'', -\mathrm{v}'', -\mathrm{w}'')$. Il vient ainsi les relations

$$(121)\quad \left\{\begin{aligned}
\xi'_1 &= a_1\xi_1 + a'_1\eta_1 + a''_1\zeta_1 + \frac{\partial \mathrm{u}''}{\partial \rho_1} + q'_1\mathrm{w}'' - r'_1\mathrm{v}'',\\
\eta'_1 &= b_1\xi_1 + b'_1\eta_1 + b''_1\zeta_1 + \frac{\partial \mathrm{v}''}{\partial \rho_1} + r'_1\mathrm{u}'' - p'_1\mathrm{w}'',\\
\zeta'_1 &= c_1\xi_1 + c'_1\eta_1 + c''_1\zeta_1 + \frac{\partial \mathrm{w}''}{\partial \rho_1} + p'_1\mathrm{v}'' - q'_1\mathrm{u}'',\\
\xi'_2 &= a_1\xi_2 + a'_1\eta_2 + a''_1\zeta_2 + \frac{\partial \mathrm{u}''}{\partial \rho_2} + q'_2\mathrm{w}'' - r'_2\mathrm{v}'',\\
\eta'_2 &= b_1\xi_2 + b'_1\eta_2 + b''_1\zeta_2 + \frac{\partial \mathrm{v}''}{\partial \rho_2} + r'_2\mathrm{u}'' - p'_2\mathrm{w}'',\\
\zeta'_2 &= c_1\xi_2 + c'_1\eta_2 + c''_1\zeta_2 + \frac{\partial \mathrm{w}''}{\partial \rho_2} + p'_2\mathrm{v}'' - q'_2\mathrm{u}'',\\
\xi'_3 &= a_1\xi_3 + a'_1\eta_3 + a''_1\zeta_3 + \frac{\partial \mathrm{u}''}{\partial \rho_3} + q'_3\mathrm{w}'' - r'_3\mathrm{v}'',\\
\eta'_3 &= b_1\xi_3 + b'_1\eta_3 + b''_1\zeta_3 + \frac{\partial \mathrm{v}''}{\partial \rho_3} + r'_3\mathrm{u}'' - p'_3\mathrm{w}'',\\
\zeta'_3 &= c_1\xi_3 + c'_1\eta_3 + c''_1\zeta_3 + \frac{\partial \mathrm{w}''}{\partial \rho_3} + p'_3\mathrm{v}'' - q'_3\mathrm{u}'',
\end{aligned}\right.$$

que l'on pourrait aussi établir par un calcul direct et auxquelles on peut adjoindre les suivantes

$$(122)\quad \left\{\begin{aligned}
p'_1 &= a_1p_1 + a'_1q_1 + a''_1r_1 + \sum c_1\frac{\partial b_1}{\partial \rho_1} = a_1p_1 + a'_1q_1 + a''_1r_1 - \sum b_1\frac{\partial c_1}{\partial \rho_1},\\
q'_1 &= b_1p_1 + b'_1q_1 + b''_1r_1 + \sum a_1\frac{\partial c_1}{\partial \rho_1} = b_1p_1 + b'_1q_1 + b''_1r_1 - \sum c_1\frac{\partial a_1}{\partial \rho_1},\\
r'_1 &= c_1p_1 + c'_1q_1 + c''_1r_1 + \sum b_1\frac{\partial a_1}{\partial \rho_1} = c_1p_1 + c'_1q_1 + c''_1r_1 - \sum a_1\frac{\partial b_1}{\partial \rho_1},
\end{aligned}\right.$$

et les six analogues, *si l'on suppose que le second trièdre mobile a même disposition que le premier.*

On peut particulariser le second trièdre mobile.

Si, par exemple, on suppose qu'il s'obtienne en faisant subir à un trièdre de même sommet, dont les axes sont parallèles aux axes des x', y', z', *la rotation au point* (ρ_1, ρ_2, ρ_3), les relations correspondant aux relations $(12')$ et aux relations (99) sont les suivantes

$$(123)\quad \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta'_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \eta'_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \eta'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \zeta'_1 & \zeta_1\\ \xi_2 & \zeta'_2 & \zeta_2\\ \xi_3 & \zeta'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \zeta'_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \zeta'_2 & \eta_2 & \zeta_2\\ \zeta'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \xi'_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \xi'_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \xi'_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi'_1 & \zeta_1\\ \xi_2 & \xi'_2 & \zeta_2\\ \xi_3 & \xi'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta'_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \eta'_2 & \eta_2 & \zeta_2\\ \eta'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}.$$

On peut aussi, comme dans le n° 37, adopter les particularisations suivantes qui sont utiles dans l'étude des tiges courbes minces et des enveloppes minces.

Dans le premier cas, il est commode de prendre dans le corps non déformé

$$\xi_3 = 0, \qquad \eta_3 = 0,$$

et alors, on peut prendre aussi dans le corps déformé

$$\xi'_3 = 0, \qquad \eta'_3 = 0.$$

Dans le second cas, si l'on a pris dans le corps non déformé

$$\zeta_1 = 0, \qquad \zeta_2 = 0,$$

il est commode de prendre dans l'enveloppe déformée

$$\zeta'_1 = 0, \qquad \zeta'_2 = 0.$$

46. *Équations relatives à l'équilibre du corps déformé.*

Conservons aux six fonctions P'_1, P'_2, P'_3, U'_1, U'_2, U'_3 la signification que nous leur avons donnée au n° 43, mais rapportons les forces extérieures aux axes du second trièdre mobile, et désignons par X'', Y'', Z'', F'', G'', H'' les quantités qui correspondent ainsi à X', Y', Z', F', G', H'.

En tenant compte des formules du numéro précédent, nous trouvons qu'en posant

$$JA'_{x''} = P'_1 \begin{vmatrix} \xi'_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi'_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + U'_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi'_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \xi'_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \xi'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + U'_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \xi'_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \xi'_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \xi'_3 \end{vmatrix},$$

$$JA'_{y''} = P'_1 \begin{vmatrix} \eta'_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta'_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + U'_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta'_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta'_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + U'_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta'_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta'_2 \\ \xi_3 & \eta_2 & \eta'_3 \end{vmatrix},$$

$$JA'_{z''} = P'_1 \begin{vmatrix} \zeta'_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \zeta'_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \zeta'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + U'_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \zeta'_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \zeta'_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \zeta'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + U'_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta'_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta'_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta'_3 \end{vmatrix},$$

et en formant six autres expressions analogues $B'_{x''}$, $B'_{y''}$, $B'_{z''}$, $C'_{x''}$, $C'_{y''}$, $C'_{z''}$, obtenues en remplaçant respectivement P'_1, U'_3, U'_2 par U'_3, P'_2, U'_1 et par

U'_2, U'_1, P'_3 on est conduit à des équations que l'on peut former en substituant $A'_{x''}$, $A'_{y''}$, $A'_{z''}$, $B'_{x''}$, ..., p'_1, q'_1, r'_1, p'_2, ..., X'', Y'', Z'', F'', G'', H'' respectivement à $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$, $B'_{x'}$, ..., p_1, q_1, r_1, p_2, ..., X', Y', Z', F', G', H' dans les équations (117) et (118) du n° 43. On remarquera que $A'_{x''}$, $A'_{y''}$, $A'_{z''}$, par exemple, sont les projections sur les axes du second trièdre mobile du segment dont les projections sur les axes du premier trièdre mobile sont $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$.

Maintenant, si ε'_1, ε'_2, ε'_3, γ'_1, γ'_2, γ'_3 sont les composantes de la déformation au point (ρ_1, ρ_2, ρ_3) du corps, par rapport aux axes du premier trièdre mobile, le mode de raisonnement employé au n° 41, rapproché des formules (96), conduit à la règle suivante :

Pour calculer les six composantes ε'_1, ε'_2, ε'_3, γ'_1, γ'_2, γ'_3 *de la déformation au point* P *par rapport aux axes* Px', Py', Pz' *du premier trièdre mobile, on effectuera dans la forme quadratique*

$$(\xi'_1\, d\rho_1 + \xi'_2\, d\rho_2 + \xi'_3\, d\rho_3)^2 + (\eta'_1\, d\rho_1 + \eta'_2\, d\rho_2 + \eta'_3\, d\rho_3)^2 + (\zeta'_1\, d\rho_1 + \zeta'_2\, d\rho_2 + \zeta'_3\, d\rho_3)^2,$$

en $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$, *la substitution définie par la résolution des formules* (112) *et l'on identifiera la nouvelle forme quadratique en* dx', dy', dz' *ainsi obtenue avec la forme quadratique* (111).

Pour parler autrement, on a les formules suivantes :

$$(124)\quad \left\{\begin{array}{l} (1 + 2\varepsilon'_1)\xi_1^2 + (1 + 2\varepsilon'_2)\eta_1^2 + (1 + 2\varepsilon'_3)\zeta_1^2 \\ \qquad\qquad + 2\gamma'_1\eta_1\zeta_1 + 2\gamma'_2\zeta_1\xi_1 + 2\gamma'_3\xi_1\eta_1 = \xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (1 + 2\varepsilon'_1)\xi_1\xi_2 + (1 + 2\varepsilon'_2)\eta_1\eta_2 + (1 + 2\varepsilon'_3)\zeta_1\zeta_2 \\ \quad + \gamma'_1(\eta_1\zeta_2 + \eta_2\zeta_1) + \gamma'_2(\zeta_1\xi_2 + \zeta_2\xi_1) + \gamma'_3(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) = \xi'_1\xi'_2 + \eta'_1\eta'_2 + \zeta'_1\zeta'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Nous pouvons donc exprimer l'énergie de déformation W par unité de volume en fonction des translations ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, ..., ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, η'_1, ..., et par suite P'_1, P'_2, P'_3, U'_1, U'_2, U'_3 en fonction des mêmes translations, au moyen des équations (119) du n° 43, savoir :

$$(119)\quad P'_1 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon'_1},\quad P'_2 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon'_2},\quad P'_3 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon'_3},\quad U'_1 = \frac{\partial W}{\partial \gamma'_1},\quad U'_2 = \frac{\partial W}{\partial \gamma'_2},\quad U'_3 = \frac{\partial W}{\partial \gamma'_3}.$$

Les équations obtenues comme il a été dit plus haut au moyen des équations (117) et (118) du n° 43, et les équations (119) et (124), jointes aux équations fondamentales (A) du n° 36 écrites pour les deux trièdres mobiles, nous fournissent un système d'équations auxquelles satisfont les translations ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ... et les rotations p'_1, p'_2, p'_3, ..., dont la connaissance est, comme on l'a vu, liée intimement à celle du système triple des surfaces suivant lesquelles les surfaces coordonnées primitives se sont transformées.

Les formules du n° 45 conduiront, si on le désire, à des équations vérifiées par les déplacements u'', v'', w'' rapportés au second trièdre mobile.

47. *Équations relatives à la déformation infiniment petite lorsqu'on particularise le second trièdre mobile.*

Cherchons ce que donnent ici les considérations développées aux n^{os} 30 et suivants à l'égard de la déformation infiniment petite lorsqu'on particularise le second trièdre mobile, comme il a été indiqué au n° 45, de telle sorte que l'on ait les relations (123).

Les relations (121) et (122), jointes aux résultats obtenus au n° 11, donnent alors immédiatement les développements suivants :

$$(125)\qquad \left\{\begin{aligned}
\xi'_1 &= \xi_1 + \eta_1\tau'_3 - \zeta_1\tau'_2 + \frac{\partial u'}{\partial\rho_1} + q_1 w' - r_1 v' + \ldots,\\
\eta'_1 &= \eta_1 + \zeta_1\tau'_1 - \xi_1\tau'_3 + \frac{\partial v'}{\partial\rho_1} + r_1 u' - p_1 w' + \ldots,\\
\zeta'_1 &= \zeta_1 + \xi_1\tau'_2 - \eta_1\tau'_1 + \frac{\partial w'}{\partial\rho_1} + p_1 v' - q_1 u' + \ldots,\\
\xi'_2 &= \xi_2 + \eta_2\tau'_3 - \zeta_2\tau'_2 + \frac{\partial u'}{\partial\rho_2} + q_2 w' - r_2 v' + \ldots,\\
\eta'_2 &= \eta_2 + \zeta_2\tau'_1 - \xi_2\tau'_3 + \frac{\partial v'}{\partial\rho_2} + r_2 u' - p_2 w' + \ldots,\\
\zeta'_2 &= \zeta_2 + \xi_2\tau'_2 - \eta_2\tau'_1 + \frac{\partial w'}{\partial\rho_2} + p_2 v' - q_2 u' + \ldots,\\
\xi'_3 &= \xi_3 + \eta_3\tau'_3 - \zeta_3\tau'_2 + \frac{\partial u'}{\partial\rho_3} + q_3 w' - r_3 v' + \ldots,\\
\eta'_3 &= \eta_3 + \zeta_3\tau'_1 - \xi_3\tau'_3 + \frac{\partial v'}{\partial\rho_3} + r_3 u' - p_3 w' + \ldots,\\
\zeta'_3 &= \zeta_3 + \xi_3\tau'_2 - \eta_3\tau'_1 + \frac{\partial w'}{\partial\rho_3} + p_3 v' - q_3 u' + \ldots,
\end{aligned}\right.$$

$$
(126)\quad\left\{
\begin{aligned}
p'_1 &= p_1 + q_1\tau'_3 - r_1\tau'_2 + \frac{\partial\tau'_1}{\partial\rho_1} + \ldots,\\
q'_1 &= q_1 + r_1\tau'_1 - p_1\tau'_3 + \frac{\partial\tau'_2}{\partial\rho_1} + \ldots,\\
r'_1 &= r_1 + p_1\tau'_2 - q_1\tau'_1 + \frac{\partial\tau'_3}{\partial\rho_1} + \ldots,\\
p'_2 &= p_2 + q_2\tau'_3 - r_2\tau'_2 + \frac{\partial\tau'_1}{\partial\rho_2} + \ldots,\\
q'_2 &= q_2 + r_2\tau'_1 - p_2\tau'_3 + \frac{\partial\tau'_2}{\partial\rho_2} + \ldots,\\
r'_2 &= r_2 + p_2\tau'_2 - q_2\tau'_1 + \frac{\partial\tau'_3}{\partial\rho_2} + \ldots,\\
p'_3 &= p_3 + q_3\tau'_3 - r_3\tau'_2 + \frac{\partial\tau'_1}{\partial\rho_3} + \ldots,\\
q'_3 &= q_3 + r_3\tau'_1 - p_3\tau'_3 + \frac{\partial\tau'_2}{\partial\rho_3} + \ldots,\\
r'_3 &= r_3 + p_3\tau'_2 - q_3\tau'_1 + \frac{\partial\tau'_3}{\partial\rho_3} + \ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

où τ'_1, τ'_2, τ'_3 désignent les projections sur les axes du premier trièdre mobile du segment qui aurait pour projections, sur les axes fixes, les quantités τ_1, τ_2, τ_3 du n° 11.

En portant les développements (125) dans les relations (123) et en n'ayant égard qu'à la première puissance de t, on obtient immédiatement les formules suivantes qui déterminent les valeurs des auxiliaires τ'_1, τ'_2, τ'_3:

$$(127)\quad \left\{\begin{aligned}
2J\tau'_1 &= \begin{vmatrix} \xi_1 & \dfrac{\partial w'}{\partial \rho_1} + p_1 v' - q_1 u' & \zeta_1 \\ \xi_2 & \dfrac{\partial w'}{\partial \rho_2} + p_2 v' - q_2 u' & \zeta_2 \\ \xi_3 & \dfrac{\partial w'}{\partial \rho_3} + p_3 v' - q_3 u' & \zeta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \dfrac{\partial v'}{\partial \rho_1} + r_1 u' - p_1 w' \\ \xi_2 & \eta_2 & \dfrac{\partial v'}{\partial \rho_2} + r_2 u' - p_2 w' \\ \xi_3 & \eta_3 & \dfrac{\partial v'}{\partial \rho_3} + r_3 u' - p_3 w' \end{vmatrix}, \\
2J\tau'_2 &= \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \dfrac{\partial u'}{\partial \rho_1} + q_1 w' - r_1 v' \\ \xi_2 & \eta_2 & \dfrac{\partial u'}{\partial \rho_2} + q_2 w' - r_2 v' \\ \xi_3 & \eta_3 & \dfrac{\partial u'}{\partial \rho_3} + q_3 w' - r_3 v' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial w'}{\partial \rho_1} + p_1 v' - q_1 u' & \eta_1 & \zeta_1 \\ \dfrac{\partial w'}{\partial \rho_2} + p_2 v' - q_2 u' & \eta_2 & \zeta_2 \\ \dfrac{\partial w'}{\partial \rho_3} + p_3 v' - q_3 u' & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}, \\
2J\tau'_3 &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v'}{\partial \rho_1} + r_1 u' - p_1 w' & \eta_1 & \zeta_1 \\ \dfrac{\partial v'}{\partial \rho_2} + r_2 u' - p_2 w' & \eta_2 & \zeta_2 \\ \dfrac{\partial v'}{\partial \rho_3} + r_3 u' - p_3 w' & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi_1 & \dfrac{\partial u'}{\partial \rho_1} + q_1 w' - r_1 v' & \zeta_1 \\ \xi_2 & \dfrac{\partial u'}{\partial \rho_2} + q_2 w' - r_2 v' & \zeta_2 \\ \xi_3 & \dfrac{\partial u'}{\partial \rho_3} + q_3 w' - r_3 v' & \zeta_3 \end{vmatrix},
\end{aligned}\right.$$

et que l'on peut adjoindre aux formules (113) du n° 42.

En tenant compte des formules que nous venons d'écrire, on a les développements suivants :

$$\frac{1}{J}\begin{vmatrix} \xi'_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi'_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = 1 + e'_1 + \ldots, \qquad \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi'_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \xi'_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \xi'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}g'_3 + \ldots, \qquad \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \xi'_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \xi'_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \xi'_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}g'_2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{J}\begin{vmatrix} \eta'_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta'_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}g'_3 + \ldots, \qquad \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta'_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta'_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = 1 + e'_2 + \ldots, \qquad \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta'_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta'_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \eta'_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}g'_1 + \ldots,$$

$$\frac{1}{J}\begin{vmatrix} \zeta'_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \zeta'_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \zeta'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}g'_2 + \ldots, \qquad \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \xi_1 & \zeta'_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \zeta'_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \zeta'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}g'_1 + \ldots, \qquad \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta'_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta'_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta'_3 \end{vmatrix} = 1 + e'_3 + \ldots,$$

d'où résulte que les développements (125) prennent la forme remarquable suivante :

$$(128)\quad \left\{ \begin{aligned}
\xi'_1 &= (1 + e'_1)\xi_1 + \tfrac{1}{2}g'_3\eta_1 + \tfrac{1}{2}g'_2\zeta_1 + \ldots,\\
\xi'_2 &= (1 + e'_1)\xi_2 + \tfrac{1}{2}g'_3\eta_2 + \tfrac{1}{2}g'_2\zeta_2 + \ldots,\\
\xi'_3 &= (1 + e'_1)\xi_3 + \tfrac{1}{2}g'_3\eta_3 + \tfrac{1}{2}g'_2\zeta_3 + \ldots,\\
\eta'_1 &= \tfrac{1}{2}g'_3\xi_1 + (1 + e'_2)\eta_1 + \tfrac{1}{2}g'_1\zeta_1 + \ldots,\\
\eta'_2 &= \tfrac{1}{2}g'_3\xi_2 + (1 + e'_2)\eta_2 + \tfrac{1}{2}g'_1\zeta_2 + \ldots,\\
\eta'_3 &= \tfrac{1}{2}g'_3\xi_3 + (1 + e'_2)\eta_3 + \tfrac{1}{2}g'_1\zeta_3 + \ldots,\\
\zeta'_1 &= \tfrac{1}{2}g'_2\xi_1 + \tfrac{1}{2}g'_1\eta_1 + (1 + e'_3)\zeta_1 + \ldots,\\
\zeta'_2 &= \tfrac{1}{2}g'_2\xi_2 + \tfrac{1}{2}g'_1\eta_2 + (1 + e'_3)\zeta_2 + \ldots,\\
\zeta'_3 &= \tfrac{1}{2}g'_2\xi_3 + \tfrac{1}{2}g'_1\eta_3 + (1 + e'_3)\zeta_3 + \ldots.
\end{aligned} \right.$$

Posons

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= e'_1\xi_1 + \tfrac{1}{2}g'_3\eta_1 + \tfrac{1}{2}g'_2\zeta_1,\\
\varphi_2 &= e'_1\xi_2 + \tfrac{1}{2}g'_3\eta_2 + \tfrac{1}{2}g'_2\zeta_2,\\
\varphi_3 &= e'_1\xi_3 + \tfrac{1}{2}g'_3\eta_3 + \tfrac{1}{2}g'_2\zeta_3,\\
\psi_1 &= \tfrac{1}{2}g'_3\xi_1 + e'_2\eta_1 + \tfrac{1}{2}g'_1\zeta_1,\\
\psi_2 &= \tfrac{1}{2}g'_3\xi_2 + e'_2\eta_2 + \tfrac{1}{2}g'_1\zeta_2,\\
\psi_3 &= \tfrac{1}{2}g'_3\xi_3 + e'_2\eta_3 + \tfrac{1}{2}g'_1\zeta_3,\\
\chi_1 &= \tfrac{1}{2}g'_2\xi_1 + \tfrac{1}{2}g'_1\eta_1 + e'_3\zeta_1,\\
\chi_2 &= \tfrac{1}{2}g'_2\xi_2 + \tfrac{1}{2}g'_1\eta_2 + e'_3\zeta_2,\\
\chi_3 &= \tfrac{1}{2}g'_2\xi_3 + \tfrac{1}{2}g'_1\eta_3 + e'_3\zeta_3,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\varphi'_1 &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho_3} + q_3\chi_2 - r_3\psi_2 - \frac{\partial\varphi_3}{\partial\rho_2} - q_2\chi_3 + r_2\psi_3,\\
\varphi'_2 &= \frac{\partial\varphi_3}{\partial\rho_1} + q_1\chi_3 - r_1\psi_3 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_3} - q_3\chi_1 + r_3\psi_1,\\
\varphi'_3 &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_2} + q_2\chi_1 - r_2\psi_1 - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho_1} - q_1\chi_2 + r_1\psi_2,\\
\psi'_1 &= \frac{\partial\psi_2}{\partial\rho_3} + r_3\varphi_2 - p_3\chi_2 - \frac{\partial\psi_3}{\partial\rho_2} - r_2\varphi_3 + p_2\chi_3,\\
\psi'_2 &= \frac{\partial\psi_3}{\partial\rho_1} + r_1\varphi_3 - p_1\chi_3 - \frac{\partial\psi_1}{\partial\rho_3} - r_3\varphi_1 + p_3\chi_1,\\
\psi'_3 &= \frac{\partial\psi_1}{\partial\rho_2} + r_2\varphi_1 - p_2\chi_1 - \frac{\partial\psi_2}{\partial\rho_1} - r_1\varphi_2 + p_1\chi_2,\\
\chi'_1 &= \frac{\partial\chi_2}{\partial\rho_3} + p_3\psi_2 - q_3\varphi_2 - \frac{\partial\chi_3}{\partial\rho_2} - p_2\psi_3 + q_2\varphi_3,\\
\chi'_2 &= \frac{\partial\chi_3}{\partial\rho_1} + p_1\psi_3 - q_1\varphi_3 - \frac{\partial\chi_1}{\partial\rho_3} - p_3\psi_1 + q_3\varphi_1,\\
\chi'_3 &= \frac{\partial\chi_1}{\partial\rho_2} + p_2\psi_1 - q_2\varphi_1 - \frac{\partial\chi_2}{\partial\rho_1} - p_1\psi_2 + q_1\varphi_2,
\end{aligned}$$

puis encore

$$
\begin{aligned}
2J\varphi''_1 &= \varphi'_2\xi_2 + \psi'_2\eta_2 + \chi'_2\zeta_2 + \varphi'_3\xi_3 + \psi'_3\eta_3 + \chi'_3\zeta_3 - \varphi'_1\xi_1 - \psi'_1\eta_1 - \chi'_1\zeta_1,\\
J\varphi''_2 &= \varphi'_2\xi_1 + \psi'_2\eta_1 + \chi'_2\zeta_1,\\
J\varphi''_3 &= \varphi'_3\xi_1 + \psi'_3\eta_1 + \chi'_3\zeta_1,\\
J\psi''_1 &= \varphi'_1\xi_2 + \psi'_1\eta_2 + \chi'_1\zeta_2,\\
2J\psi''_2 &= \varphi'_3\xi_3 + \psi'_3\eta_3 + \chi'_3\zeta_3 + \varphi'_1\xi_1 + \psi'_1\eta_1 + \chi'_1\zeta_1 - \varphi'_2\xi_2 - \psi'_2\eta_2 - \chi'_2\eta_2,\\
J\psi''_3 &= \varphi'_3\xi_2 + \psi'_3\eta_2 + \chi'_3\zeta_2,\\
J\chi''_1 &= \varphi'_1\xi_3 + \psi'_1\eta_3 + \chi'_1\zeta_3,\\
J\chi''_2 &= \varphi'_2\xi_3 + \psi'_2\eta_3 + \chi'_2\zeta_3,\\
2J\chi''_3 &= \varphi'_1\xi_1 + \psi'_1\eta_1 + \chi'_1\zeta_1 + \varphi'_2\xi_2 + \psi'_2\eta_2 + \chi'_2\zeta_2 - \varphi'_3\xi_3 - \psi'_3\eta_3 - \chi'_3\zeta_3,
\end{aligned}
$$

et enfin

$$
\begin{aligned}
\xi''_1 &= \xi_2\varphi''_2 + \xi_3\varphi''_3 - \xi_1\varphi''_1, & \xi''_2 &= \xi_3\psi''_3 + \xi_1\psi''_1 - \xi_2\psi''_2, & \xi''_3 &= \xi_1\chi''_1 + \xi_2\chi''_2 - \xi_3\chi''_3,\\
\eta''_1 &= \eta_2\varphi''_2 + \eta_3\varphi''_3 - \eta_1\varphi''_1, & \eta''_2 &= \eta_3\psi''_3 + \eta_1\psi''_1 - \eta_2\psi''_2, & \eta''_3 &= \eta_1\chi''_1 + \eta_2\chi''_2 - \eta_3\chi''_3,\\
\zeta''_1 &= \zeta_2\varphi''_2 + \zeta_3\varphi''_3 - \zeta_1\varphi''_1, & \zeta''_2 &= \zeta_3\psi''_3 + \zeta_1\psi''_1 - \zeta_2\psi''_2, & \zeta''_3 &= \zeta_1\chi''_1 + \zeta_2\chi''_2 - \zeta_3\chi''_3.
\end{aligned}
$$

Si nous portons les développements (126) et (128) dans les équations (A) écrites pour les translations ξ'_1, ... et les rotations p'_1, ..., et si nous n'avons égard qu'à la première puissance de t, il vient, en outre des relations identiques telles que

$$\frac{\partial^2\tau'_1}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} = \frac{\partial^2\tau'_1}{\partial\rho_2\,\partial\rho_1},$$

neuf relations qui sont linéaires par rapport aux neuf quantités telles que

$$\frac{\partial\tau'_1}{\partial\rho_1} + q_1\tau'_3 - r_1\tau'_2$$

et qui, résolues par rapport à ces quantités, prennent la forme suivante

$$
\begin{aligned}
\xi''_1 + \frac{\partial\tau'_1}{\partial\rho_1} + q_1\tau'_3 - r_1\tau'_2 &= 0,\\
\eta''_1 + \frac{\partial\tau'_2}{\partial\rho_1} + r_1\tau'_1 - p_1\tau'_3 &= 0,\\
\zeta''_1 + \frac{\partial\tau'_3}{\partial\rho_1} + p_1\tau'_2 - q_1\tau'_1 &= 0,
\end{aligned}
$$

$$\xi''_2 + \frac{\partial \tau'_1}{\partial \rho_2} + q_2\tau'_3 - r_2\tau'_2 = 0,$$

$$\eta''_2 + \frac{\partial \tau'_2}{\partial \rho_2} + r_2\tau'_1 - p_2\tau'_3 = 0,$$

$$\zeta''_2 + \frac{\partial \tau'_3}{\partial \rho_2} + p_2\tau'_2 - q_2\tau'_1 = 0,$$

$$\xi''_3 + \frac{\partial \tau'_1}{\partial \rho_3} + q_3\tau'_3 - r_3\tau'_2 = 0,$$

$$\eta''_3 + \frac{\partial \tau'_2}{\partial \rho_3} + r_3\tau'_1 - p_3\tau'_3 = 0,$$

$$\zeta''_3 + \frac{\partial \tau'_3}{\partial \rho_3} + p_3\tau'_2 - q_3\tau'_1 = 0,$$

qui met en évidence un nouveau trièdre mobile dont les axes sont constamment parallèles à ceux du premier trièdre mobile, dont les translations sont ξ''_1, η''_1, ζ''_1, ξ''_2, ... et tel que le point dont les coordonnées sont τ'_1, τ'_2, τ'_3 est un point fixe de l'espace.

Nous avons donc neuf équations aux dérivées partielles entre e'_1, e'_2, e'_3, g'_1, g'_2, g'_3 que l'on obtient en remplaçant dans les équations de droite de (A), ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, ... par ξ''_1, η''_1, ζ''_1, ξ''_2, ... Ces neuf équations se réduisent à six relations qui sont entièrement analogues aux équations de Barré de Saint-Venant données au n° 13.

On pourrait répéter ici ce que nous avons dit à la fin du n° 39 en ce qui concerne l'intégration des équations relatives à la déformation infiniment petite.

48. *Tiges courbes minces; enveloppes minces.*

Nous pourrions, au moyen des particularisations dont nous avons parlé au n° 45, considérer les résultats analogues aux précédents que l'on obtiendrait à l'égard des tiges courbes minces et des enveloppes minces; mais, comme nous l'avons déjà dit au n° 40, nous réserverons cette question pour un Mémoire spécial.