NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

THOMAS-JEAN STIELTJES,

PAR M. E. COSSERAT,

Chargé d'un Cours de Calcul différentiel et intégral à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Stieltjes, dont la Science déplore la mort prématurée, est né en Hollande, à Zwolle, le 29 décembre 1856. Fils d'un Ingénieur distingué, dont le nom reste attaché à un grand nombre de travaux remarquables, tels que le desséchement du lac de Harlem, la construction du port actuel de Rotterdam, pour ne citer, peut-être, que les moins importants, il suivit les cours de l'École Polytechnique de Delft; mais, entraîné par son goût pour les Sciences exactes, il entra, le 1er décembre 1877, à l'observatoire de Leyde, où il se consacra, pendant six ans, à une étude approfondie de l'Astronomie. La publication prochaine des observations faites dans cette période, à Leyde, montrera la part active que Stieltjes prit aux travaux de l'observatoire. Il se livrait, en même temps, à des recherches théoriques, dont les résultats sont devenus classiques [1]. Le 1er décembre 1883, il quitta l'observatoire en vue d'obtenir une chaire de Mathématiques, à l'Université de Groningue ; la haute estime, dans laquelle ses travaux étaient tenus en Hollande, lui fit conférer, en 1884, par l'Université de

---

(1) Nous devons le renseignement suivant à l'extrême obligeance de M. F. van de Sande Bakhuysen, astronome à l'observatoire de Leyde. En 1882, Stieltjes communiqua à M. Tisserand son élégante démonstration du théorème de l'éminent astronome sur le développement de la fonction perturbatrice lorsque l'inclinaison mutuelle des orbites est considérable; M. Tisserand était alors en mission à la Martinique pour l'observation du passage de Vénus; la Communication de Stieltjes fut transmise à M. Hermite et c'est à partir de ce moment que s'établirent les liens d'amitié qui l'ont uni jusqu'à sa mort à l'illustre géomètre.

Leyde, le grade de Docteur *honoris causa,* et le fit élire, en 1885, Membre de l'Académie royale des Sciences d'Amsterdam; la chaire qu'il désirait ne lui fut cependant pas accordée et il vint habiter Paris, où il obtint, en juin 1886, le grade de Docteur ès Sciences mathématiques. La même année, il était appelé à la Faculté des Sciences de Toulouse, et la période la plus féconde de sa vie scientifique commença.

Pour faire connaître, de la façon la plus complète, la valeur de cet homme éminent, nous avons rassemblé ici tous ses travaux (1); nous nous sommes efforcé de rendre ainsi à Stieltjes tout l'hommage qui lui est dû et de lui témoigner la profonde reconnaissance que nous avons pour la constante amitié dont il nous a honoré.

L'ordre chronologique suivi dans cette Notice pourrait se justifier de bien des manières; mais nous l'avons adopté surtout afin de mieux mettre en évidence les progrès que Stieltjes a fait faire successivement aux sujets qu'il a traités; il se plaisait lui-même à faire remarquer que le Mémoire : *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques,* publié en 1884, peut être considéré (2) comme l'origine de son travail : *Recherches sur les fractions continues,* qui a donné lieu à un rapport de M. Poincaré (3), dont nous extrayons le passage suivant :

Le travail de M. Stieltjes est donc un des plus remarquables Mémoires d'Analyse qui aient été écrits dans ces dernières années; il s'ajoute à beaucoup d'autres qui ont placé leur auteur à un rang éminent dans la Science de notre époque. La plus grande clarté et l'élégance de la forme analytique, qu'on remarque dans le Mémoire dont nous venons de rendre compte, se joignent au talent de l'invention dans toutes les recherches qui ont pour objet d'importantes et difficiles questions, comme la variation de la densité à l'intérieur de la Terre, les séries

---

(1) Le Mémoire de M. Poincaré *Sur les résidus des intégrales doubles* (*Acta mathematica,* t. IX, p. 329; 1887) renferme des indications sur un travail inédit de Stieltjes; consulter la page 323 de ce Mémoire et le § 5 intitulé : *Méthode de M. Stieltjes.*

(2) Comme confirmation de ce point, on pourra lire, plus loin, les analyses des deux Notes portant le titre commun *Sur un développement en fraction continue* (nos 32 et 67).

(3) On trouvera le rapport de M. Poincaré au tome CXIX des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* p. 630. Déjà, en 1892, la Section de Géométrie avait porté Stieltjes sur la liste des candidats présentés pour remplacer Ossian Bonnet à l'Académie des Sciences, et, en 1893, il avait obtenu le prix Petit d'Ormoy. Tout récemment il venait d'être nommé Membre correspondant de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg.

semi-convergentes, la théorie des polynomes de Legendre, de la fonction Γ, *etc. La Commission a l'honneur de proposer à l'Académie d'accorder à M. Stieltjes le plus haut témoignage de son approbation en ordonnant l'insertion de son Mémoire :* Sur les fractions continues, *dans le* Recueil des Savants étrangers, *et elle émet le vœu qu'un prix puisse lui être accordé sur la fondation Lecomte.*

1. *Iets over de benaderde voorstelling van eene functie door eene andere* (¹) (Delft, 1876).

Soient $f(x)$ et $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ deux fonctions de x continues dans l'intervalle (a, b); déterminons les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de façon que, pour

$$x = x_1, x_2, \ldots, x_n \quad (a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b)$$

la fonction $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ prenne les mêmes valeurs que $f(x)$; on voit que si, pour une valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b), on adopte, pour valeur de $f(x)$, la valeur correspondante de $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, on commet une erreur

$$f(x) - \varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

déterminant, lorsque x varie, une fonction continue $R(x)$ qui s'annule pour $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Supposant que la fonction $R(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b) pour d'autres valeurs que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et qu'elle change, en général, de signe, lorsque x franchit l'une de ces valeurs, Stieltjes introduit ce qu'il appelle l'*écart* des deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dans le même intervalle, à savoir la somme de toutes les aires comprises entre l'axe des x, la courbe $y = R(x)$ et les deux ordonnées extrêmes $x = a$, $x = b$, toutes ces aires devant être prises en valeur absolue. Cette définition posée, il se propose de déterminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de façon que cet écart soit minimum.

Le cas où la fonction $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est de la forme

$$\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x),$$

linéaire par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_n$, est particulièrement intéressant; les

---

(¹) M. F. van de Sande Bakhuysen nous a signalé que ce Mémoire, dont les résultats avaient été obtenus dès 1875, fut publié en 1876, par le père de Stieltjes et à l'insu de ce dernier.

nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont alors déterminés par les n équations

$$(1)\quad \int_0^{x_1} \varphi_p(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} \varphi_p(x)\,dx + \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{b} \varphi_p(x)\,dx = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

et sont, par suite, *indépendants de* $f(x)$.

Stieltjes examine, en particulier, le cas où l'on a

$$a = -1, \qquad b = +1,$$
$$\varphi_1(x) = 1, \qquad \varphi_2(x) = x, \qquad \varphi_3(x) = x^2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(x) = x^{n-1},$$

c'est-à-dire le cas où il s'agit de représenter approximativement, dans l'intervalle $(-1, +1)$, et, avec l'écart minimum, la fonction $f(x)$ par un polynome entier du degré $n-1$; les équations (1) sont alors vérifiées par les valeurs

$$x_1 = \cos\frac{n\pi}{n+1}, \quad x_2 = \cos\frac{(n-1)\pi}{n+1}, \quad \ldots, \quad x_p = \cos\frac{(n-p+1)\pi}{n+1}, \quad \ldots, \quad x_n = \cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Le cas où l'on veut, pour $0 < x < \pi$, représenter approximativement $f(x)$ par

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx,$$

est ensuite considéré et se rattache à des recherches de Lagrange.

2. *Een en ander over de integraal* $\int_0^1 l\Gamma(x+u)\,du$ (Nieuw Archief voor Wiskunde, t. IV, p. 100-104; 1878).

La définition habituelle de l'intégrale définie permet, lorsqu'on se donne la fonction à intégrer et les limites de l'intégrale, d'obtenir des valeurs approchées de l'intégrale définie, mais ce n'est que dans des cas très particuliers qu'elle fournit la valeur exacte de cette intégrale. Des exemples [1] de pareils cas sont ici mis en évidence par Stieltjes, qui établit ainsi les

(1) Pour un autre exemple, on peut consulter TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. 285. Dans son cours à la Faculté des Sciences de Toulouse, Stieltjes traitait l'exemple simple, consistant à déterminer $\int_a^b x^m\,dx$, en intercalant entre a et b des moyens formant constamment une progression géométrique.

formules de Raabe :

$$\int_0^1 \log\Gamma(u)\,du = \tfrac{1}{2}\log 2\pi, \tag{1}$$

$$\int_0^1 \log\Gamma(x+u)\,du = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + x\log x - x. \tag{2}$$

Remarquant ensuite que la formule (2) entraîne la suivante

$$\int_0^1 \Psi(x+u)\,du = \log x, \tag{3}$$

où l'on a posé

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx}\log\Gamma(x),$$

il est ainsi amené à la considération d'une fonction $\Psi(x, p)$ définie, pour $p > 0$, $x > 0$, en posant

$$\Psi(x, p) = \lim_{n=\infty}\left[\frac{n^{1-p}-1}{1-p} - \frac{1}{x^p} - \frac{1}{(x+1)^p} - \ldots - \frac{1}{(x+n-1)^p}\right],$$

et qui, pour $p = 1$, se réduit à la fonction désignée précédemment par $\Psi(x)$.

Stieltjes montre que la définition de l'intégrale définie conduit encore directement à la formule

$$\int_0^1 \Psi(x+u, p)\,du = \frac{x^{1-p}-1}{1-p} \qquad (x>0,\ 0<p<1)$$

qui, pour $p = 1$, doit être remplacée par la formule (3).

3. *Notiz über einen elementaren Algorithmus* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXXXIX, p. 343-344; 1880).

Les propositions indiquées dans cette Note sont développées et complétées dans le Mémoire : *Over een algorithmus voor het meetkunding midden,* que l'on trouvera plus loin (n° 8).

4. *Over Lagrange's interpolatie-formule* (Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 2e série, t. XVII, p. 239-254; 1882).

La formule de Lagrange fait connaître, comme on sait, le polynome entier F(x), dont le degré est au plus $n-1$ et qui, pour les n valeurs particulières $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, coïncide avec une fonction donnée $f(x)$, sous la forme suivante

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\Psi(x)}{(x-x_p)\Psi'(x_p)} f(x_p), \tag{1}$$

où

$$\Psi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

M. Hermite a donné l'expression analytique de la différence $f(x) - \mathrm{F}(x)$ sous forme d'intégrale définie; l'éminent géomètre, se plaçant dans un cas plus général, envisage ([1]) un polynome entier $\mathrm{H}(x)$, de degré

$$k - 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - 1,$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\tag{2} \left\{ \begin{array}{llll} \mathrm{H}(x_1) = f(x_1), & \mathrm{H}'(x_1) = f'(x_1), & \ldots, & \mathrm{H}^{\alpha_1-1}(x_1) = f^{\alpha_1-1}(x_1), \\ \mathrm{H}(x_2) = f(x_2), & \mathrm{H}'(x_2) = f'(x_2), & \ldots, & \mathrm{H}^{\alpha_2-1}(x_2) = f^{\alpha_2-1}(x_2), \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{H}(x_n) = f(x_n), & \mathrm{H}'(x_n) = f'(x_n), & \ldots, & \mathrm{H}^{\alpha_n-1}(x_n) = f^{\alpha_n-1}(x_n), \end{array} \right.$$

où $f(x)$ désigne toujours la fonction donnée, et parvient à deux représentations distinctes de la différence $f(x) - \mathrm{H}(x)$, l'une sous forme d'intégrale curviligne, l'autre sous forme d'intégrale multiple; la série de Taylor et la formule d'interpolation de Lagrange sont ainsi rattachées à un même point de vue.

Stieltjes remarque que, de même qu'on peut déduire de l'intégrale définie qui représente le reste de la série de Taylor la forme du reste de Lagrange, on peut de même déduire, de l'intégrale multiple introduite, comme il vient d'être dit, par M. Hermite, une forme de reste correspondante. Cette remarque faite, il se propose de parvenir à l'expression du reste en question sans avoir recours au Calcul intégral.

Se plaçant d'abord dans le cas de la formule même d'interpolation de Lagrange, Stieltjes établit que l'on a

$$f(x) = \mathrm{F}(x) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{1.2.3\ldots n} f^n(\xi), \tag{3}$$

([1]) Ch. Hermite, *Sur la formule d'interpolation de Lagrange* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXXXIV, p. 70; 1878).

c'est-à-dire

$$\frac{f(x)}{\varphi'(x)}+\frac{f(x_1)}{\varphi'(x_1)}+\frac{f(x_2)}{\varphi'(x_2)}+\ldots+\frac{f(x_n)}{\varphi'(x_n)}=\frac{1}{1.2\ldots n}f^n(\xi),$$

en posant

$$\varphi(z)=(z-x)(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n).$$

ξ désigne un nombre compris entre la plus petite et la plus grande des quantités $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et la fonction $f(z)$ est supposée admettre des dérivées $f'(z), \ldots, f^n(z)$ pour toutes les valeurs de z comprises entre la plus petite et la plus grande des quantités $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La démonstration de la formule (3) repose sur le lemme suivant :

Si $G(z)$ *est une fonction qui s'annule pour les* $n+1$ *valeurs distinctes* $z=x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ *et qui admet des dérivées successives* $G'(z), \ldots, G^n(z)$, *cette dernière dérivée* $G^n(z)$ *s'annule pour une valeur* $z=\xi$, *comprise entre le plus petit et le plus grand des nombres* $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si l'on suppose maintenant que la fonction $f^n(z)$ est continue pour la valeur particulière $z=X$ et si l'on fait tendre $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ vers X, on voit que l'on a la définition suivante de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(z)$ pour $z=X$:

$$f^n(X)=1.2.3\ldots n\times\lim\left[\frac{f(x)}{\varphi'(x)}+\frac{f(x_1)}{\varphi'(x_1)}+\ldots+\frac{f(x_n)}{\varphi'(x_n)}\right].$$

Stieltjes montre ensuite la grande analogie de la formule (3) avec le théorème de Taylor, en introduisant la forme donnée par Newton du polynome $F(x)$. Ceci le conduit à envisager le cas où plusieurs des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tendent vers une même limite et l'amène au polynome $H(x)$ de M. Hermite, défini par les relations (2). Généralisant le lemme employé précédemment, il parvient à la formule

$$f(x)=H(x)+\frac{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}}{1.2.3\ldots k}f^k(\xi),$$

où ξ est compris entre le plus petit et le plus grand des nombres $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et où $f(x)$ est supposée avoir k dérivées successives.

Généralisant encore le résultant précédent, il établit enfin la formule suivante. Gardant pour $f(x)$ et $H(x)$ la même définition, soient $f_1(x)$

une nouvelle fonction de x et $H_1(x)$ la fonction analogue à $H(x)$, qui lui correspond et qui serait définie par les relations (2) où l'on remplacerait f, H par f_1, H_1. On a alors

$$f(x) = \mathrm{H}(x) + [f_1(x) - \mathrm{H}_1(x)] \frac{f^k(\xi)}{f_1^k(\xi)},$$

où ξ a toujours la même signification.

Un supplément annexé au Mémoire précédent est consacré à la démonstration de l'existence unique du polynome $H(x)$, du degré $k - 1$ au plus, satisfaisant aux conditions (2).

5. *Eenige bemerkingen omtrent de differentiaalquotienten van eene functie van eene veranderlijke* (Nieuw Archief voor Wiskunde, t. IX, p. 106-111; 1882).

Si une fonction $f(x)$ est définie et admet une dérivée dans un intervalle comprenant deux nombres a, b, on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \qquad (a < \xi < b).$$

Si a et b tendent vers une même limite X et si $f'(x)$ est continue pour $x = \mathrm{X}$, on en déduit

$$(1) \qquad f'(\mathrm{X}) = \lim \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Stieltjes remarque que si a et b tendent vers leur limite X, de telle façon que X appartienne toujours à l'intervalle (a, b), la formule (1) résulte simplement de l'existence de $f'(\mathrm{X})$.

Revenant ensuite à la formule

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n} f^n(\mathrm{X}) = \lim \left[\frac{f(x)}{\varphi'(x)} + \frac{f(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \ldots + \frac{f(x_n)}{\varphi'(x_n)} \right]$$

établie dans le Mémoire précédent : *Over Lagrange's interpolatie formule*, en supposant que $f^n(z)$ soit continue pour $z = \mathrm{X}$, il montre qu'elle est encore vraie, lorsqu'on suppose simplement l'existence de $f^n(\mathrm{X})$, pourvu que X appartienne toujours à l'intervalle formé par la plus petite et par la plus grande des quantités x; $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

6. *Over eenige theoremas omtrent oneindige reeksen* (Nieuw Archief voor Wiskunde, t. IX, p. 98-106; 1882).

Stieltjes, généralisant une proposition de M. Frobenius [1], énonce le théorème suivant :

Si u est positif, les expressions

$$(1-x)^u\left[s_0+\frac{u}{1}s_1x+\frac{u(u+1)}{1.2}s_2x^2+\frac{u(u+1)(u+2)}{1.2.3}s_3x^3+\ldots\right]$$

et

$$\frac{s_1x+\frac{1}{2}s_2x^2+\frac{1}{3}s_3x^3+\frac{1}{4}s_4x^4+\ldots}{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)},$$

où s_n varie avec n, ont, lorsque x tend en croissant vers 1, *la même limite que*

$$\frac{s_0+s_1+\ldots+s_{n-1}}{n},$$

pour n croissant indéfiniment.

Se plaçant d'abord dans le cas où s_n a une limite, lorsque n croît indéfiniment, Stieltjes établit la proposition suivante, qui comprend alors le théorème qu'il s'agit de démontrer :

Soient a_0, a_1, a_2, ... des nombres qui ne sont pas négatifs et supposons que la série

$$\Psi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

soit convergente pour $0<x<1$, mais soit divergente pour $x=1$; la série

$$f(x)=a_0s_0+a_1s_1x+a_2s_2x^2+\ldots$$

est également convergente pour $0<x<1$ et le rapport

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

lorsque x tend vers 1 en croissant constamment, a pour limite le nombre vers lequel tend s_n.

Après avoir, comme application de ce qui précède, retrouvé des résultats

---

[1] G. Frobenius, *Ueber die Leibnitzsche Reihe* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXXXIX, p. 262-264; 1880).

établis par Gauss et relatifs à la série hypergéométrique, Stieltjes en indique une généralisation et revient ensuite à la démonstration du théorème énoncé en premier lieu, pour laquelle il lui suffit de suivre le raisonnement fait par M. Frobenius dans le cas particulier déjà cité.

7. *Over de transformatie van de periodieke functie*

$$A_0 + A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi + \ldots + A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$$

(Nieuw Archief voor Wiskunde, t. IX, p. 111-116; 1882).

La décomposition en facteurs d'une expression de la forme précédente où les coefficients A_k, B_k sont réels a été considérée par Hansen; Stieltjes se propose ici d'établir un ensemble concis de formules nécessaires pour cette réduction.

8. *Over een algorithmus voor het meetkunding midden* (Nieuw Archief voor Wiskunde, t. IX, p. 198-211; 1882).

Ce Mémoire, qui constitue le développement de la Note *Notiz über einen elementaren Algorithmus* (n° 3), est consacré à l'étude du mode de calcul suivant, par lequel on déduit de k nombres donnés a_1, a_2, ... a_k, k nouveaux nombres $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$ dont le produit est égal au produit des k premiers. Soient :

M_1 la moyenne arithmétique de $a_1, a_2, \ldots, a_k$;
M_2 la moyenne arithmétique de tous les produits formés avec deux de ces nombres;
M_3 la moyenne arithmétique de tous les produits formés de trois de ces nombres, etc.;

le dernier nombre ainsi formé est $M_k = a_1 a_2 \ldots a_k$; soit de plus $M_0 = 1$; on a alors, pour définir les nombres $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$, les formules

$$a'_p = \frac{M_p}{M_{p-1}} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots, k).$$

Stieltjes donne d'abord une démonstration de cette proposition connue que, si $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont réels, l'expression

$$M_p^2 - M_{p-1} M_{p+1},$$

où p peut prendre l'une des valeurs $1, 2, \ldots, k-1$, n'est jamais négative et s'annule seulement, soit lorsque tous les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont égaux, soit lorsque $k-p+1$ au moins de ces nombres sont nuls.

Supposant ensuite que $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont réels et *tous positifs*, il établit que l'on a

$$a'_1 a'_2 \ldots a'_k = a_1 a_2 \ldots a_k,$$

$$a_1 > a'_1 > a'_2 > \ldots > a'_k > a_k,$$

$$0 < a'_1 - a'_k < \frac{k-1}{k}(a_1 - a_k),$$

en désignant par a_k et a_1 ($a_k < a_1$) les limites de l'intervalle qui comprend tous les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

L'application répétée de l'opération par laquelle les nombres $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$ sont déduits de $a_1, a_2, \ldots, a_k$ conduit ainsi à des groupes successifs de k nombres positifs; les nombres d'un même groupe ont un produit invariable, ils se rapprochent indéfiniment les uns des autres et tendent par suite vers une limite commune égale à la moyenne géométrique de $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Stieltjes démontre de plus que si l'on désigne les nombres du $n^{\text{ième}}$ groupe dérivé par

$$a_p^{(n)} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots, k),$$

les $k-1$ différences

$$a_p^{(n)} - a_{p+1}^{(n)},$$

qui tendent vers zéro, ont des rapports mutuels qui tendent vers l'unité lorsque n croît indéfiniment.

Stieltjes termine en remarquant que si $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ont des valeurs complexes, il est facile d'indiquer des conditions dans lesquelles le procédé de calcul conduit à des nombres ayant une limite, mais il lui semble difficile de conclure, dans le cas général, à l'existence de cette limite. Le cas de $k=2$ est le seul qui ne présente pas de difficulté; il conduit Stieltjes à une série rentrant dans celles, considérées d'abord (¹) par MM. Weierstrass et Tannery, dont les termes sont des fonctions rationnelles d'une variable z et qui possèdent la propriété d'avoir pour valeur $+1$ ou -1, selon que la partie réelle de z est positive ou négative.

(¹) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. V, Ire Partie, p. 157, 181; avril 1881.

9. *Over het quadratische rest-karakter van het getal* 2 (Nieuw Archief voor Wiskunde, t. IX, p. 193-195; 1882).

Étude du caractère du nombre 2 comme résidu ou non résidu quadratique.

10. *Bijdrage tot de theorie der derde-en vierde-machtsresten* (Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 2^e^ série, t. XVII, p. 338-417; 1882).

Une reproduction en français de ce Mémoire a paru ultérieurement et sera analysée plus loin (n° 15).

11. *Sur un théorème de M. Tisserand* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCV, p. 901-903, 13 novembre 1882).

Cette Note, qui renferme une démonstration élégante et une généralisation d'un théorème de M. Tisserand, est développée dans le Mémoire (n° 65) que l'on trouvera plus loin.

12. *Sur un théorème de M. Tisserand* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCV, p. 1043-1044; 27 novembre 1882).

Stieltjes généralise la formule donnée dans la Communication précédente en introduisant les fonctions sphériques, d'ordre p, de M. Heine.

13. *Bewijs van de stelling, dat een geheele rationale functie altijd, voor zekere reële of complexe waarden van de veranderlijke, de waarde nul aanneemt* (Nieuw Archief voor Wiskunde, t. IX, p. 196-197; 1882).

Stieltjes indique ici une démonstration du théorème de d'Alembert qui présente une certaine analogie avec l'une des démonstrations de Gauss, mais en diffère essentiellement par la façon dont on termine le raisonnement.

$f(z)$ désignant un polynome entier du degré n, soit

$$f(x+yi) = u + vi;$$

les polynomes entiers u et v en x et y, à coefficients réels jouissent de cette propriété que, aussi grand que soit donné un nombre positif A, on peut déterminer un nombre positif R assez grand pour que, pour toutes les valeurs de $z = x + yi$ dont le module est supérieur ou égal à R, le module de $u + vi$ soit plus grand que A. Sans s'arrêter à la démonstration de cette propriété, Stieltjes remarque qu'il s'agit d'établir l'existence de valeurs réelles de x et y qui satisfont simultanément aux relations

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

et que si de telles valeurs n'existaient pas, la fonction $w = \log(u^2 + v^2)$ de x et y serait définie et continue pour toutes les valeurs de x et y ainsi que ses dérivées partielles de tous les ordres par rapport à x et y.

Or, la fonction w satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

sa valeur en un point (x_0, y_0) est donnée par la formule

$$w(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(x_0 + \mathrm{R}\cos\varphi, y_0 + \mathrm{R}\sin\varphi)\, d\varphi;$$

ceci conduit immédiatement à une contradiction puisque, d'après la proposition admise précédemment, on peut supposer R assez grand pour que $w(x_0 + \mathrm{R}\cos\varphi, y_0 + \mathrm{R}\sin\varphi)$ soit, pour toutes les valeurs de φ, plus grand qu'un nombre choisi arbitrairement.

14. *Quelques considérations sur la fonction rationnelle entière d'une variable complexe* (Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, t. XVIII, p. 1-21; 1883).

Dans la démonstration de Cauchy du théorème de d'Alembert, on établit que le module d'un polynome entier $f(z)$ n'admet pas de minimum différent de zéro et il est clair que le raisonnement employé prouve également la non-existence d'un maximum pour le module considéré. En d'autres termes, on peut énoncer la proposition suivante : étant donnés dans un plan n points fixes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et, en outre, un point variable z, le produit des distances de z à $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne prend jamais une valeur maximum ou minimum, sauf lorsque le point z coïncide avec un des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Cette remarque faite, Stieltjes reprend la démonstration de la proposition précédente sans s'occuper de sa relation avec la théorie des équations algébriques. Il est conduit au résultat suivant : les points multiples des courbes pour lesquelles on a $\operatorname{mod} f(z) = C$, C prenant des valeurs constantes, coïncident avec les points dont les affixes sont les racines de $f'(z) = 0$; c'est seulement pour des valeurs particulières de C, en nombre tout au plus égal à $n-1$, que la courbe $\operatorname{mod} f(z) = C$ a de pareils points multiples.

L'allure des courbes

$$\operatorname{mod} f(z) = C$$

résulte aussi de ce qui précède; une telle courbe peut être considérée comme la limite du domaine où $f(z)$ est moindre que C; ce domaine renferme, à son intérieur, au moins une des racines de $f(z) = 0$; pour des valeurs suffisamment petites de C, il se compose de pièces continues entièrement isolées les unes des autres, dont chacune renferme une des racines de $f(z) = 0$, de sorte que la courbe $\operatorname{mod} f(z) = C$ consiste en courbes fermées qui entourent ces racines. Si C croît, chacune des pièces continues précédentes s'étend et, au moment où C dépasse la plus petite des valeurs de $\operatorname{mod} f(z)$ correspondant aux racines de $f'(z) = 0$ qui n'annulent pas $f(z)$, deux ou plusieurs pièces séparées du domaine $\operatorname{mod} f(z) \leqq C$ se réunissent; il en est de même pour chacune des racines de $f'(z) = 0$ qui n'annulent pas $f(z)$, et, finalement, on arrive à une courbe fermée unique qui entoure toutes les racines de $f(z) = 0$.

Après avoir appliqué ce qui précède à l'exemple suivant

$$f(z) = z^4 + z^3 - 2,$$

Stieltjes revient à la courbe

$$\operatorname{mod} f(z) = C$$

pour indiquer comment sont distribuées les racines de l'équation

$$f(z) = t,$$

où t est une quantité complexe dont le module est C.

15. *Contribution à la théorie des résidus cubiques et biquadratiques* (Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, t. XVIII, p. 358-436; 1883).

La loi de réciprocité de Legendre est relative à deux nombres premiers impairs et, dans une théorie complète, le caractère du nombre 2, comme résidu ou non-résidu quadratique d'un autre nombre premier impair, doit être déterminé séparément. Des remarques analogues se présentent dans la théorie des résidus biquadratiques et dans celle des résidus cubiques. D'autre part, les déterminations données par Eisenstein du caractère biquadratique de $1+i$ et du caractère cubique de $1-\rho$ sont fondées sur la loi générale de réciprocité au contraire de la marche suivie par Gauss pour établir le caractère de $1+i$ qui, purement arithmétique, est aussi complètement indépendante de la loi générale de réciprocité.

Les remarques précédentes, faites par Stieltjes, l'ont conduit à une méthode *uniforme* permettant d'établir les théorèmes relatifs aux nombres premiers 2, $1+i$, $1-\rho$, et nécessaires pour compléter les lois de réciprocité. Le principe de cette méthode consiste à remplacer le nombre premier, dont il s'agit de déterminer le caractère, par un produit congruent de facteurs. On détermine alors le caractère de ces facteurs par des considérations tout à fait analogues à celles dont Gauss s'est servi dans les Articles 15-20 de son premier Mémoire sur la théorie des résidus biquadratiques.

Comme conséquence des développements donnés à propos de la détermination du caractère biquadratique de $1+i$, Stieltjes établit les théorèmes énoncés par Gauss, dans l'Article 28 de la *Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda,* et qui n'avaient jusque-là été démontrés que partiellement par Lebesgue [1].

La fin du Mémoire (Art. 40) a trait à une congruence remarquable, donnée, pour la première fois, par Jacobi et dont la démonstration est ordinairement déduite de formules employées dans la théorie de la division du cercle; on trouvera une addition à ces dernières remarques dans le Mémoire : *Over de quadratische ontbinding van priemgetallen van den vorm* $3n+1$, cité plus loin (n° 25).

16. *Sur la théorie des résidus biquadratiques* (Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. VII, p. 139-142; 1883).

Extrait du Mémoire précédent.

---

(1) LEBESGUE, *Suite des recherches sur les nombres,* p. 51, 52, *Remarque* 1° (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IV; 1839).

17. *Sur le nombre des diviseurs d'un nombre entier* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVI, p. 764-766; 19 mars 1883).

$f(n)$ désignant le nombre des diviseurs de n, Stieltjes établit que

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}-\log n\right]=-1-2\Gamma'(1).$$

On trouvera, dans le même Tome des *Comptes rendus,* p. 1029 et suiv., une Note de M. E. Cesàro relative au théorème précédent.

18. *Sur l'évaluation approchée des intégrales* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVII, p. 740-742; 1er octobre 1883).

Soit $f(x)$ une fonction qui reste constamment positive, quand la variable croît de $x=a$ jusqu'à $x=b$, et considérons l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{F}(x)\,dx. \tag{1}$$

M. Heine, dans son *Traité des fonctions sphériques,* a démontré que si $\mathrm{F}(x)$ est un polynome $\mathrm{G}(x)$, du degré $2n-1$ au plus, la valeur de cette intégrale peut s'obtenir à l'aide de n valeurs spéciales convenablement choisies $\mathrm{G}(x_1), \mathrm{G}(x_2), \ldots, \mathrm{G}(x_n)$. Les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont toutes différentes entre elles et s'obtiennent comme les racines d'une équation de degré n, dont les coefficients dépendent rationnellement des $2n$ constantes

$$c_t=\int_a^b x^t f(x)\,dx \qquad (t=0, 1, 2, \ldots, 2n-1).$$

La valeur de l'intégrale (1) se présente alors sous la forme

$$\mathrm{A}_1\mathrm{G}(x_1)+\mathrm{A}_2\mathrm{G}(x_2)+\ldots+\mathrm{A}_n\mathrm{G}(x_n).$$

Stieltjes remarque que les coefficients $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ sont tous positifs et en déduit une conséquence qui est précisée et étendue dans le Mémoire : *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques,* que l'on trouvera plus loin (n° 31).

19. *Sur l'évaluation approchée des intégrales* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVII, p. 798-799; 8 octobre 1883).

La remarque, faite dans la Note précédente, que les A_k sont positifs conduit à d'autres conclusions.

Si l'on considère l'expression

$$\Omega = \int_a^b \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \ldots,$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines du polynome, qui est le dénominateur de la réduite $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ d'ordre n de la fraction continue

$$\Omega = c_0 : (x-\alpha_0) - \lambda_1 : (x-\alpha_1) - \lambda_2 : (x-\alpha_2) - \lambda_3 : (x-\alpha_3) - \ldots.$$

Stieltjes énonce, comme conséquences de ce que les A_k sont positifs, les résultats suivants :

Les racines de l'équation $P_n(x) = 0$ séparent celles de l'équation $Q_n(x) = 0$.

Les racines de $Q_{n-1}(x) = 0$ séparent celles de $Q_n(x) = 0$ et les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ sont toutes positives.

α_{n-1} est compris dans l'intervalle limité par la plus petite et par la plus grande des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

20. *Sur quelques théorèmes arithmétiques* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVII, p. 889-892, 22 octobre 1883).

Cet extrait d'une lettre adressée à M. Hermite est relatif aux fonctions $f(n)$, $F(n)$ exprimant le nombre des représentations de n par les formes x^2+y^2 et x^2+2y^2 et à la fonction $\varphi(x)$ désignant la somme des diviseurs impairs de x.

21. *Sur la décomposition d'un nombre en cinq carrés* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVII, p. 981-983, 5 novembre 1883).

Stieltjes indique une formule nouvelle pour le nombre des représentations d'un nombre $N \equiv 5$, mod. 8 en cinq carrés impairs et positifs.

A cette Communication est adjointe une Note de M. Hermite, où se trouve énoncée, pour la décomposition en cinq carrés impairs et positifs, une proposition que donnent les formules de la théorie des fonctions elliptiques.

22. *Sur un théorème de M. Liouville* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVII, p. 1358; 10 décembre 1883).

Énoncé de trois théorèmes nouveaux analogues au théorème de Liouville sur les nombres de classes de formes quadratiques. Ces théorèmes ont été obtenus à l'aide de considérations arithmétiques et ont été ensuite vérifiés à l'aide de formules tirées de la théorie des fonctions elliptiques.

23. *Sur un théorème de M. Liouville* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVII, p. 1415; 17 décembre 1883).

Après avoir montré comment la théorie des fonctions elliptiques conduit au théorème de Liouville, rappelé dans la précédente Note, Stieltjes ajoute, aux théorèmes qui y sont énoncés, trois autres propositions analogues.

24. *Sur le nombre de décompositions d'un entier en cinq carrés* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVII, p. 1545-1548; 31 décembre 1883).

Soient $\varphi(n)$ la somme des diviseurs impairs de n, $F(n)$ le nombre total des décompositions de n en cinq carrés; si l'on pose

$$\begin{aligned} A(n) &= \varphi(n) + 2\varphi(n-4) + 2\varphi(n-16) + 2\varphi(n-36) + \ldots, \\ B(n) &= \varphi(n-1) + \varphi(n-9) + \varphi(n-25) + \varphi(n-49) + \ldots, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} F(n) &= 24A(n) + 16B(n) \qquad (n \text{ pair}), \\ F(n) &= 8A(n) + 48B(n) \qquad (n \text{ impair}). \end{aligned}$$

En utilisant la relation

$$\begin{aligned} &q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + \ldots \\ &\quad = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)\left[\frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2} + \ldots\right] \end{aligned}$$

qui lui a été communiquée par M. Hermite, Stieltjes montre que l'on peut toujours exprimer les deux fonctions $A(n)$ et $B(n)$ l'une par l'autre; il indique ensuite des relations qui permettent d'exprimer $B(4n)$ au moyen de $B(n)$ et qui ont leurs correspondantes pour la fonction $F(n)$.

La Note se termine par l'énoncé de résultats d'induction qui se traduisent par les formules

$$B(p^2) = \frac{p^3 - p + 1}{4}, \qquad F(p^2) = 10(p^3 - p + 1),$$

$$B(p^4) = \frac{p(p^2-1)(p^3+1)+1}{24}, \qquad F(p^4) = 10[p(p^2-1)(p^3+1)+1].$$

On pourra lire à ce propos une Note ultérieure de M. Hurwitz (1).

25. *Over de quadratische ontbinding van priemgetallen van den vorm* $3n+1$ (Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 2e série, t. XIX, p. 105-111; 1884).

Tout nombre premier p de la forme $3n+1$ jouit des propriétés exprimées par les formules suivantes

$$p = c^2 + 3d^2, \tag{1}$$

$$4p = A^2 + 27B^2, \tag{2}$$

où c, d, A, B sont des entiers et chacune de ces deux décompositions n'est possible que d'une seule manière.

Jacobi a indiqué, sans démonstration, que la valeur de A qui figure dans (2) est égale au reste qu'on obtient en divisant le nombre entier

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}$$

par p et choisissant le reste compris entre $-\frac{1}{2}p$ et $+\frac{1}{2}p$.

La démonstration de cette propriété, qui est étroitement liée à l'étude de l'équation algébrique dont dépend la division de la circonférence en p parties égales, a été donnée par différents auteurs et notamment par Cauchy et Lebesgue; dans l'Article 40 du Mémoire : *Contribution à la théorie des résidus cubiques et biquadratiques* (nos 10 et 15), Stieltjes, désignant par $a + b\rho$ un facteur primaire de p et par ρ une racine cubique primitive de l'unité, a établi la congruence

$$2a - b \equiv -\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n} \bmod p,$$

(1) A. Hurwitz, *Sur la décomposition des nombres en cinq carrés* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCVIII, p. 504; 25 février 1884).

qui correspond au théorème de Jacobi; il se propose ici, comme addition, de déduire de cette congruence la détermination directe suivante de la racine c du carré simple figurant dans (1) : c est le reste, compris entre $-\frac{1}{2}p$ et $+\frac{1}{2}p$, que l'on obtient dans la division de

$$2^{n-1}\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}$$

par p; de plus $c-1$ est divisible par 3.

Stieltjes déduit de son résultat la congruence donnée, pour la détermination de c, par M. Oltramare [1].

26. *Note sur le déplacement d'un système invariable dont un point est fixe* (Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, t. XIX, p. 372-390; 1884).

Le déplacement considéré se ramène toujours, comme on sait, à une rotation autour d'un axe passant par le point fixe. Les formules données par différents auteurs, et en particulier par Duhamel, pour déterminer la position de l'axe de rotation cessent de donner cette position dans un cas où elle est cependant parfaitement déterminée, savoir dans le cas où le déplacement se ramène, suivant une expression de M. Darboux, à un renversement, c'est-à-dire à une rotation d'un angle égal à 180°. C'est ce qui amène Stieltjes à revenir sur cette question et le conduit à des propositions intéressantes d'Algèbre, parmi lesquelles on peut citer un théorème que l'on trouvera énoncé de nouveau dans l'article *Un théorème d'Algèbre* (n° 39).

27. *Sur quelques applications arithmétiques de la théorie des fonctions elliptiques* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVIII, p. 663; 17 mars 1884).

Stieltjes énonce, à l'égard de la décomposition en 7 carrés, des résultats qui ne sont guère plus compliqués que dans le cas de la décomposition en 5 carrés. La fin de la Note renferme l'énoncé d'un autre résultat auquel

---

(1) G. Oltramare, *Sur la transformation des formes linéaires des nombres premiers en formes quadratiques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVII, p. 734; 1878).

conduit l'analyse des fonctions elliptiques et qui est relatif à la fonction $F(n)$ de M. Kronecker.

28. *Sur le caractère du nombre 2 comme résidu ou non-résidu quadratique* (Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. VIII, p. 175-176; 1884).

Cette détermination du caractère du nombre 2 est devenue classique (1).

29. *Quelques remarques sur l'intégration d'une équation différentielle* (Astronomische Nachrichten, t. CIX, p. 145, 261, nos 2602, 2609; 1884).

Stieltjes remarque que l'équation différentielle

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + n^2 x = 2\beta x \cos t$$

où n, β sont des constantes, étudiée par M. H. Bruns dans les nos 2533, 2553 du même Recueil, et par M. Callandreau dans le no 2547, a été considérée aussi par M. F. Lindemann (2). Il montre comment on peut déduire les conclusions de M. Bruns de l'analyse de M. Lindemann et revient sur le calcul d'une constante dont la détermination est la principale difficulté qu'on rencontre dans l'application numérique.

30. *Note sur le problème du plus court crépuscule* (Astronomische Nachrichten, t. CX, p. 7, no 2617; 1884).

Dans cette Note, Stieltjes remarque que la solution du problème ne devient guère plus compliquée en tenant compte de la réfraction et du diamètre du Soleil.

31. *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques* (Annales de l'École Normale supérieure, 3e série, t. I, p. 409-426; 1884).

Le but de ces recherches, qui ont été précédées de deux Notes *Sur*

---

(1) *Voir* E. Borel et J. Drach, *Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure*, p. 85 et suivantes.

(2) F. Lindemann, *Ueber die Differentialgleichung der Functionen des elliptischen Cylinders* (*Mathematische Annalen*, t. XXII, p. 117; 1883).

l'évaluation approchée des intégrales (nos 18, 19), est d'examiner si les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie permettent d'atteindre une approximation indéfinie.

Le Traité des fonctions sphériques de M. Heine sert de base pour le commencement de l'exposition.

Soit $f(x)$ une fonction *donnée* qui n'est pas constamment nulle et qui ne devient pas négative, quand x prend les valeurs a, b et toutes les valeurs intermédiaires, et telle que $\int_a^b f(x)dx$ ait un sens. Si l'on cherche à déterminer un polynome $P(x)$ d'un degré *donné* n, et pour lequel le coefficient de x^n est égal à l'unité, par les conditions

$$\int_a^b f(x)P(x)x^k dx = 0 \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{1}$$

on obtient une solution unique qui sera désignée par $P_n(x)$.

On aura ainsi, pour $n=1, 2, 3, \ldots$, des polynomes $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, ...

La propriété principale de ces polynomes consiste en ce que l'on a

$$\int_a^b f(x)\,P_n(x)\,(\alpha x^{n-1}+\beta x^{n-2}+\ldots+\lambda x+\mu)\,dx = 0,$$

quelles que soient les constantes α, β, ..., λ, μ.

On en déduit que l'on a

$$\int_a^b f(x)\,P_m(x)\,P_n(x)\,dx = 0$$

et que les racines de l'équation $P_n(x)=0$ sont réelles, inégales et comprises entre a et b en excluant les limites.

Le polynome $Q(x)$, du degré n, le plus général qui satisfasse aux mêmes conditions (1) que $P(x)$ ne se distingue de $P_n(x)$ que par un facteur constant.

Entre trois polynomes consécutifs P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, existe une relation de la forme

$$P_n(x) = (x-\alpha_{n-1})\,P_{n-1}(x) - \lambda_{n-1}\,P_{n-2}(x). \tag{2}$$

avec

$$P_1(x) = x - \alpha_0,$$
$$P_2(x) = (x - \alpha_1) P_1(x) - \lambda_1.$$

Les constantes α_k, λ_k qui y figurent s'expriment par les formules élégantes

$$\alpha_k = \frac{\displaystyle\int_a^b x P_k(x) P_k(x) f(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b P_k(x) P_k(x) f(x)\,dx}, \tag{3}$$

$$\lambda_k = \frac{\displaystyle\int_a^b P_k(x) P_k(x) f(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b P_{k-1}(x) P_{k-1}(x) f(x)\,dx}, \tag{4}$$

en sorte que α_k reste compris entre a et b, tandis que λ_k est toujours positif.

Les relations (2) jointes à (3), (4) permettent de calculer de proche en proche tous les polynomes $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... et elles montrent que les racines de $P_{k-1}(x) = 0$ séparent celles de $P_k(x) = 0$.

Les résultats précédents s'appliquent immédiatement à la quadrature mécanique; soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de $P_n(x) = 0$ rangées par ordre de grandeur croissante et $G(x)$ un polynome entier en x, du degré $2n - 1$ au plus; on a

$$\int_a^b f(x) G(x)\,dx = A_1 G(x_1) + A_2 G(x_2) + \ldots + A_n G(x_n),$$

où les constantes A_k ne dépendent en aucune façon du polynome $G(x)$ et sont déterminées par la formule

$$A_k = \int_a^b f(x) \frac{P_n(x)}{(x - x_k) P'_n(x_k)}\,dx.$$

Ces constantes A_k sont positives et vérifient les inégalités

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_k > \int_a^{x_k} f(x)\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n),$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_k < \int_a^{x_{k+1}} f(x)\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1),$$

qui, à l'insu de Stieltjes, avaient été déjà découvertes par M. Tchebychef. Ce dernier les avaient publiées sans démonstration (1) et un de ses élèves, M. Markoff, en a donné une démonstration (2) qui a été publiée très peu de temps avant le Mémoire de Stieltjes (3).

Avant de poursuivre les considérations générales, Stieltjes considère le cas particulier de la quadrature de Gauss où l'on a $f(x)=1$, $a=-1$, $b=+1$, et où le polynome $P_n(x)$ ne diffère que par un facteur constant du polynome X_n de Legendre; il arrive à cette conclusion que l'expression

$$A_1 F(x_1)+A_2 F(x_2)+\ldots+A_n F(x_n)$$

donne, avec une approximation indéfinie, la valeur de $\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx$, en augmentant n, toutes les fois que $F(x)$ est limitée et intégrable dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Cette conclusion, relative au cas spécial que l'on vient de considérer, repose sur ce que les connaissances acquises sur les polynomes de Legendre permettent d'affirmer que les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont alors distribuées de façon que les quantités x_1+1, x_2-x_1, $\ldots$, x_n-x_{n-1}, $1-x_n$ deviennent infiniment petites avec $\frac{1}{n}$.

Peut-on, dans le cas général, énoncer des résultats analogues?

La réponse donnée par Stieltjes est la suivante : dans le cas général, lorsque n augmente indéfiniment, les intégrales

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx,\quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx,\quad \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx,\quad \ldots,\quad \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx,\quad \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx$$

convergent toutes vers zéro, sans qu'on puisse dire la même chose des différences

$$x_1-a,\quad x_2-x_1,\quad x_3-x_2,\quad \ldots,\quad x_n-x_{n-1},\quad b-x_n;$$

de plus les A_k convergent vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

(1) TCHEBYCHEF, *Sur les valeurs limites des intégrales* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XIX, p. 157; 1874).

(2) A. MARKOFF, *Démonstration de certaines inégalités de M. Tchebychef* (*Mathematische Annalen*, t. XXIV, p. 172; 1884).

(3) *Voir* plus loin la *Note à l'occasion de la réclamation de M. Markoff* (n° 37).

Comme application du résultat précédent, Stieltjes prouve que si l'on assujettit la fonction $f(x)$ à cette *nouvelle condition,* qu'il n'existe pas un intervalle (α, β), compris dans l'intervalle (a, b), et tel que l'on ait

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 0$$

l'expression

$$A_1 F(x_1) + A_2 F(x_2) + \ldots + A_n F(x_n),$$

relative à la fonction intégrable $F(x)$, donne, avec une approximation indéfinie, la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x) F(x)\,dx$.

32. *Sur un développement en fraction continue* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCIX, p. 508-509, 22 septembre 1884.)

Si $A_1 F(x_1) + A_2 F(x_2) + \ldots + A_n F(x_n)$ est l'expression approchée de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx$, donnée par la quadrature de Gauss, et si l'on désigne par $\frac{P_n}{Q_n}$ la réduite d'ordre n de la fraction continue

$$\Omega = 2 : z - \frac{1.1}{1.3} : z - \frac{3.3}{5.7} : z - \frac{4.4}{7.9} : z - \ldots,$$

on sait que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines de l'équation $Q_n = 0$; et la décomposition en fractions simples donne

$$(1) \qquad \frac{P_n}{Q_n} = \frac{A_1}{z - x_1} + \frac{A_2}{z - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{z - x_n}.$$

Stieltjes remarque que si z a une valeur quelconque réelle ou imaginaire, non comprise dans l'intervalle $(-1, +1)$, il résulte des inégalités de M. Tchebychef (n° 31) qui deviennent ici

$$-1 < x_1 < -1 + A_1 < x_2 < -1 + A_1 + A_2 < x_3 < \ldots < -1 + A_1 + \ldots + A_{n-1} < x_n < 1$$

et de la définition même de l'intégrale définie que le second membre de (1) converge, lorsque n augmente indéfiniment, vers une limite déterminée, savoir l'intégrale (rectiligne) $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{z - x}$.

Ainsi, la fraction continue Ω converge dans tout le plan, en exceptant la coupure rectiligne de -1 à $+1$ et l'on voit facilement qu'elle converge uniformément dans le voisinage de toute valeur particulière appartenant à la région de convergence.

Cette démonstration très simple du résultat connu a cela de remarquable qu'elle présente la fraction continue comme une *transformation identique* de l'intégrale définie. C'est le désir de généraliser cette singulière réduction l'une à l'autre de deux expressions analytiques si différentes, une intégrale définie et une fraction continue, qui a conduit Stieltjes [1] à de nouvelles recherches inaugurées dans ses deux Notes publiées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* des 25 mars et 24 juin 1889 (n^{os} 66 et 67).

Stieltjes termine sa Note en indiquant que la démonstration qu'il vient de donner est encore applicable à la fraction continue que l'on obtient pour l'intégrale $\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}dx$, $f(x)$ étant une fonction qui ne devient pas négative dans l'intervalle (a, b).

33. *Note sur la densité de la Terre* (Bulletin astronomique, t. I, p. 465; 1884).

Cette Note, provoquée par les recherches de M. Tisserand sur le même sujet, est consacrée à la démonstration d'une inégalité qui entraîne une limite inférieure pour la densité ρ_0 au centre de la Terre, en considérant cette dernière comme entièrement fluide et composée d'une infinité de couches ellipsoïdales homogènes de révolution. Cette inégalité, que l'on trouvera établie par une autre voie au tome II, p. 226, du *Traité de Mécanique céleste* de M. Tisserand, est la suivante :

Soient a le demi petit axe et ρ la densité correspondante d'une couche quelconque; prenons, comme unité de longueur, la valeur de a à la surface, désignons par

$$\Delta = 3\int_0^1 \rho a^2 da,$$

[1] Le lecteur pourra se reporter à la fin de la page 96 du Mémoire : *Recherches sur les fractions continues* (n° 82).

la densité moyenne de la Terre et par λ la fraction

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \rho a^2 \, da}{\int_0^1 \rho a^4 \, da}.$$

Si ρ_0 et ρ_1 désignent les densités de la Terre au centre et à la surface, on a l'inégalité suivante

$$(\rho_0 - \rho_1)^2 (\Gamma - \rho_1)^3 > (\Delta - \rho_1)^5,$$

où nous posons, avec M. Tisserand,

$$\Gamma = \frac{5\Delta}{3\lambda} = 5 \int_0^1 \rho a^4 \, da.$$

34. *Quelques remarques sur la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre* (Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, t. XIX, p. 435-460; 1884).

Ce Mémoire a été réimprimé en 1885 et sera analysé plus loin (n° 38).

35. *Note sur quelques formules pour l'évaluation de certaines intégrales* (Bulletin astronomique, t. I, p. 568; 1884).

Cette Note renferme l'indication de formules relatives au calcul approché des intégrales définies prises sous les formes suivantes :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} f(x) dx, \quad \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x) dx$$

et

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x) dx, \quad \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} f(x) dx.$$

36. *Sur une généralisation de la théorie des quadratures mécaniques* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCIX, p. 850; 17 novembre 1884).

Soit $f(x)$ une fonction qui ne devient pas négative dans l'intervalle de zéro à l'unité, et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des nombres positifs inégaux donnés;

lorsque n est pair, égal à $2m$, le système des $2m$ équations

$$(1) \qquad a_k = \int_0^1 x^{\lambda_k} f(x)\,dx = A_1 x_1^{\lambda_k} + A_2 x_2^{\lambda_k} + \ldots + A_m x_m^{\lambda_k}$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, 2m)$$

admet une solution par des nombres positifs $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ qui sont positives, inégales et inférieures à l'unité. Cette solution est unique, en faisant abstraction des permutations que l'on peut effectuer simultanément sur les quantités $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

De même, lorsque $n = 2m + 1$, le système des équations

$$(2) \qquad a_k = A_1 x_1^{\lambda_k} + A_2 x_2^{\lambda_k} + \ldots + A_m x_m^{\lambda_k} + A_{m+1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, 2m+1)$$

admet une solution unique, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ étant positifs, inégaux et inférieurs à l'unité, $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}$ étant positifs.

Lorsque n est pair et qu'on prend $\lambda_k = k - 1$, on se trouve dans le cas des quadratures mécaniques.

Stieltjes conclut que l'on a

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m \leqq \int_0^1 f(x)\,dx,$$

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{m+1} \leqq \int_0^1 f(x)\,dx,$$

d'une interprétation mécanique des formules (1), (2), que l'on retrouvera dans le Mémoire : *Recherches sur les fractions continues* (n° 82).

37. *Note à l'occasion de la réclamation de M. Markoff* (Annales de l'École Normale supérieure, 3e série, t. II, p. 183-184; 1885).

Stieltjes se plaît à reconnaître que M. Markoff a, le premier, publié une démonstration des inégalités de M. Tchebychef, et il profite de l'occasion pour présenter quelques remarques et pour indiquer des propriétés nouvelles des coefficients A_k exprimées par les inégalités

$$A_1^{n+1} + A_2^{n+1} + \ldots + A_k^{n+1} < A_1^n + A_2^n + \ldots + A_k^n,$$
$$A_1^{n+1} + A_2^{n+1} + \ldots + A_k^{n+1} > A_1^n + A_2^n + \ldots + A_{k-1}^n,$$

où, pour expliquer la dépendance de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vis-à-vis du nombre entier n, on a maintenant désigné ces nombres par $A_1^n, A_2^n, \ldots, A_n^n$.

38. *Quelques remarques sur la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre* (Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 3e série, t. I, 272-297; 1885).

Ce travail, publié déjà en 1884 dans un autre Recueil (n° 34), et qui fait suite à la *Note sur la densité de la Terre* (n° 33), a un rapport intime avec les inégalités de M. Tchebychef établies dans le Mémoire : *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques* (n° 31), et avec certaines recherches presque simultanées de M. Markoff publiées en russe (1).

Stieltjes examine ici la question de savoir si les données d'observation permettent d'enfermer les variations possibles de la densité à l'intérieur de la Terre dans des limites déterminées (2).

Conservons les notations de la *Note sur la densité de la Terre* (n° 33); Stieltjes supposant que l'on connaisse les deux intégrales

$$\int_0^1 \rho a^2 da, \quad \int_0^1 \rho a^4 da,$$

ainsi que la valeur de la densité ρ à la surface, se propose de limiter, autant que possible, la marche de la fonction inconnue ρ de a; il examine successivement les deux hypothèses suivantes :

1° La densité va continuellement en croissant de la surface jusqu'au centre de la Terre;

2° La densité va continuellement en croissant de la surface jusqu'au centre, mais la rapidité de cet accroissement va en diminuant de la surface jusqu'au centre.

Pour chacune de ces hypothèses, Stieltjes détermine les limites entre lesquelles est comprise la densité correspondant à une valeur déterminée, mais arbitraire, de a; il est digne de remarque que son analyse repose à peu près uniquement sur la proposition suivante :

Lorsqu'on vérifie les deux relations

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{H}(x)\,dx = \mathrm{A}, \quad \int_0^1 x^4 \mathrm{H}(x)\,dx = \mathrm{B},$$

(1) Ces recherches ont été publiées plus tard en français : A. Markoff, *Sur une question de maximum et de minimum proposée par M. Tchebychef* (*Acta Mathematica*, t. IX, p. 57; 1886).

(2) On trouvera dans le *Traité de Mécanique céleste* de M. Tisserand (t. II, p. 227 et suivantes) une démonstration, due à M. Radau, de quelques-uns des résultats de Stieltjes.

où A et B sont deux nombres donnés, en y remplaçant successivement $H(x)$ par deux fonctions $F(x)$, $G(x)$, la différence $F(x) - G(x)$, si elle n'est pas identiquement nulle, change au moins deux fois de signe dans l'intervalle de zéro à l'unité.

La fin du Mémoire est consacrée à la mise en nombres des résultats obtenus et à une discussion des hypothèses proposées par Legendre, Roche et M. Lipschitz pour la constitution intérieure de la Terre.

39. *Un théorème d'Algèbre* (Acta Mathematica, t. VI, p. 319-320; 1885).

Dans la *Note sur le déplacement d'un système invariable dont un point est fixe* (n° 26), Stieltjes a rencontré le théorème suivant:

Soient

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

les déterminants, égaux à $+1$, de deux substitutions orthogonales; le déterminant

$$\begin{vmatrix} A+a & B+b & C+c \\ A'+a' & B'+b' & C'+c' \\ A''+a'' & B''+b'' & C''+c'' \end{vmatrix}$$

jouit de cette propriété que, lorsqu'il s'annule, il en est de même de tous ses mineurs du premier ordre.

Ce théorème, qui trouve sa signification géométrique dans la considération d'un déplacement se ramenant à une rotation de 180° autour d'un certain axe, est encore vrai dans le cas de déterminants à deux lignes et deux colonnes.

Stieltjes, en terminant, demande s'il est possible de l'étendre à un nombre quelconque de variables.

La réponse à cette question a été donnée par M. Netto qui est revenu à deux reprises différentes sur le sujet (1).

(1) E. Netto, *Ueber orthogonale Substitutionen* (*Acta Mathematica,* t. IX, p. 295-300; 1887). — *Zur Theorie der orthogonalen Determinanten* (*Acta Mathematica,* t. XIX, p. 105-114; 1895).

40. *Sur certains polynomes qui vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé* (Acta Mathematica, t. VI, p. 321-326; 1885).

M. Klein avait complété et étendu (1) certaines propositions de Liouville relatives aux fonctions de Lamé. Dans le travail actuel, Stieltjes donne du théorème de M. Klein une autre démonstration qui joint à l'avantage de la simplicité celui de s'appliquer à une classe plus générale de polynomes; elle se relie à la proposition suivante de M. Heine (2): Soient A et B deux polynomes donnés en x, le premier du degré $p+1$, le second du degré p au plus, ces polynomes étant d'ailleurs tout à fait généraux et n'étant assujettis à aucune condition; considérons l'équation différentielle

$$A\frac{d^2y}{dx^2}+2B\frac{dy}{dx}+Cy=0, \tag{1}$$

où C est un polynome en x du degré $p-1$ au plus; il existe toujours des déterminations particulières du polynome C, telles que l'équation (1) admette comme intégrale un polynome en x du degré n; le nombre de ces déterminations et des polynomes correspondants y s'élève à $(n.p)$, en posant

$$(n.1)=1,$$
$$(n.p)=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots(p-1)}.$$

A ce théorème, qui constitue le fondement principal de la théorie générale des fonctions de Lamé qu'on doit à M. Heine, Stieltjes ajoute le suivant :

Lorsque les racines $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ de l'équation $A=0$ sont réelles et inégales et qu'en posant

$$\frac{B}{A}=\frac{\alpha_0}{x-a_0}+\frac{\alpha_1}{x-a_1}+\ldots+\frac{\alpha_p}{x-a_p},$$

les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont positives, alors les $(n.p)$ déterminations

(1) F. Klein, *Ueber Lamé'sche Functionen* (*Mathematische Annalen*, t. XVIII, p. 237; 1881).

(2) Heine, *Traité des fonctions sphériques*, 2e édition, t. I, p. 472 et suivantes.

du polynome C sont toutes réelles ainsi que les polynomes correspondants y du degré n. Un tel polynome y a ses racines réelles, inégales et distribuées dans les p intervalles des racines de $A = 0$; de plus, il est caractérisé par la distribution de ses n racines dans ces p intervalles.

L'application du théorème précédent aux fonctions de Lamé conduit immédiatement au théorème de M. F. Klein.

41. *Sur quelques théorèmes d'Algèbre* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. C, p. 439-440; 16 février 1885).

L'expression

$$(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)\ldots(1-\xi_n^2)\Pi(\xi_k-\xi_l)^2 \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

est maxima lorsqu'on prend pour $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les racines du polynome X_n de Legendre.

De même les racines du polynome

$$U_n = x^n - 1.\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} + 1.3\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4} - \ldots,$$

défini par la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} U_m U_n\,dx = 0 \qquad (m \gtrless n),$$

font acquérir un maximum à l'expression

$$e^{-\frac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2)}\Pi(\xi_k-\xi_l)^2.$$

Enfin, parmi toutes les équations du degré n, dont les racines sont réelles et comprises dans l'intervalle $(-1, +1)$, celle qui a son discriminant maximum est $V_n = 0$, en posant

$$\sqrt{1-2xz+z^2} = \sum_0^{\infty} V_n z^n.$$

42. *Sur les polynomes de Jacobi* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. C, p. 620-622; 2 mars 1885).

L'équation

$$F(-n, n+\alpha+\beta-1, \alpha, x) = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$X = x^n - \frac{n.a}{1.c} x^{n-1} + \frac{n(n-1)a(a-1)}{1.2.c(c-1)} x^{n-3} - \ldots = 0,$$

où

$$a = \alpha + n - 1, \qquad c = \alpha + \beta + 2n - 2.$$

Après avoir donné des expressions remarquables des termes de la suite de Sturm relative au polynome X et indiqué que l'équation $X = 0$ ne peut avoir d'autres racines multiples que 0 et 1, Stieltjes termine par l'énoncé de la proposition suivante :

Lorsque α et β sont positifs, les racines de $X = 0$ sont comprises dans l'intervalle (0, 1) et font acquérir un maximum à l'expression

$$(\xi_1\xi_2\ldots\xi_n)^\alpha[(1-\xi_1)(1-\xi_2)\ldots(1-\xi_n)]^\beta \Pi(\xi_r - \xi_s)^2 \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n).$$

43. *Sur une généralisation de la série de Lagrange* (Annales de l'École Normale supérieure, 3e série, t. II, p. 93-98; 1885).

Stieltjes établit que la généralisation de la série de Lagrange, donnée pour la première fois par M. Darboux ([1]), dans le cas de deux variables, peut être étendue au cas d'un nombre quelconque de variables.

44. *Sur l'intégrale* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}}$ (Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. IX, p. 306-311; 1885).

Stieltjes se propose d'obtenir le développement de cette intégrale ([2]) suivant les puissances descendantes de a, développement qui peut servir utilement pour le calcul numérique dans le cas où le nombre positif a est très grand et que b ne l'est pas; il obtient la formule suivante

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} = V_0(b) + \frac{V_1(b)}{a} + \frac{V_2(b)}{a^2} + \ldots + \frac{V_{n-1}(b)}{a^n} + \frac{R_n}{a^n},$$

([1]) G. Darboux, *Sur la série de Laplace* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXVIII, p. 324; 1869).

([2]) Au sujet de l'origine de cette intégrale, on pourra lire, par exemple, dans le *Bulletin astronomique* (t. II, p. 573 et suivantes), l'analyse, faite par M. Radau, d'un Mémoire de M. Schols.

dans laquelle les polynomes $V_0(b)$, $V_1(b)$, $V_2(b)$, ... se calculent de proche en proche par les relations

$$
\begin{aligned}
&V_0(b) = \tfrac{1}{2},\\
&V_1(b) = -\tfrac{1}{2}[\,b \qquad V_0(b)],\\
&V_2(b) = -\tfrac{1}{2}[(b+1)\,V_1(b)],\\
&V_3(b) = -\tfrac{1}{2}[(b+2)\,V_2(b)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

où le symbole $[f(b)]$ désigne le résultat obtenu en ordonnant $f(b)$ suivant les puissances de b et en remplaçant b^k par

$$b^k - \frac{k}{2}\,b^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2.2}\,b^{k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{2.2.2}\,b^{k-3} + \ldots.$$

Quant au reste $\frac{R_n}{a^n}$, il est déterminé au moyen du polynome $V_{n-1}(b)$ par la formule

$$R_n = \int_0^\infty \frac{(x-b-n+1)\,V_{n-1}(b-x)\,e^{-x}\,dx}{\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{a+b+n}}.$$

45. *Sur une fonction uniforme* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CI, p. 153-154; 13 juillet 1885).

Cette Note est consacrée à l'étude des racines imaginaires de l'équation $\zeta(z) = 0$, dont le premier membre est défini pour les valeurs de z dont la partie réelle surpasse l'unité par la série

$$1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \ldots.$$

Stieltjes, après avoir démontré que la série d'Euler

$$\frac{1}{\zeta(z)} = 1 - \frac{1}{2^z} - \frac{1}{3^z} - \frac{1}{5^z} + \frac{1}{6^z} - \frac{1}{7^z} + \frac{1}{10^z} - \ldots,$$

est convergente et définit une fonction analytique tant que la partie réelle de z surpasse $\frac{1}{2}$, en déduit que toutes les racines imaginaires de $\zeta(z) = 0$ sont, conformément aux prévisions de Riemann, de la forme $\frac{1}{2} + ai$, a étant réel.

On trouvera dans le même Tome des *Comptes rendus,* p. 112-115, une Note de M. Hermite au sujet de la Communication précédente de Stieltjes.

46. *Sur une loi asymptotique dans la théorie des nombres* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CI, p. 368-370; 3 août 1885).

Le théorème énoncé dans la précédente Note (n° 45), savoir que la série

$$1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \ldots$$

est convergente pour $s > \frac{1}{2}$, conduit Stieltjes à une conséquence importante relative à la fonction $\Theta(x)$ considérée par M. Tchebychef et qui représente la somme des logarithmes des nombres premiers qui ne surpassent pas x.

En posant

$$\Theta(n) + \Theta\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + \Theta\left(n^{\frac{1}{3}}\right) + \ldots = n + A_n n^s,$$

on trouve

$$\lim A_n = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = \infty, \qquad s > \tfrac{3}{4}.$$

On a aussi

$$\Theta(n) = n + B_n n^s$$

où

$$\lim B_n = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = \infty, \qquad s > \tfrac{3}{4}.$$

On en déduit ce résultat que, quelque petit que soit un nombre positif h, le nombre des nombres premiers compris entre

$$n \quad \text{et} \quad (1+h)n$$

finit toujours par croître, au delà de toute limite, quand n croît indéfiniment.

Stieltjes utilise ici des propriétés de séries de la forme $\sum_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^s}$, où s est positif, sur lesquelles on trouvera également des indications dans la *Note sur la multiplication de deux séries,* analysée plus loin (n° 55).

47. *Sur quelques formules qui se rapportent à la théorie des fonctions elliptiques* (Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 3e série, t. II, p. 101-104; 1886).

Les formules en question se déduisent des propriétés fondamentales de la fonction Θ et de formules données par Gauss.

Soit D un nombre entier positif ou négatif qui n'est divisible par aucun carré, hors l'unité; à l'égard de ce nombre D, Stieltjes distingue quatre cas; il nous suffira, pour indiquer le caractère des formules écrites ici, de transcrire celles qui se rapportent au premier cas

$$D > 0, \qquad D \equiv 2, 3 \bmod 4.$$

Posons

$$F(x) = \sum \left(\frac{D}{m}\right) e^{-\frac{m^2 \pi x}{D}},$$

où m désigne les nombres impairs 1.3.5.7... et où $\left(\frac{D}{m}\right)$ est le symbole de Legendre généralisé par Jacobi, avec la convention ordinaire que $\left(\frac{D}{m}\right) = 0$, lorsque D et m ne sont pas premiers entre eux.

Cette fonction $F(x)$ jouit des propriétés suivantes

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\, F(x),$$
$$F(x + Di) = e^{-\frac{\pi i}{4}} F(x).$$

48. *Sur quelques intégrales définies* (Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 3[e] série, t. II, p. 210-216; 1886).

Stieltjes remarque qu'on doit regarder la formule de Legendre

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{e^{2\pi x} - 1} dx = \frac{1}{4} \frac{e^m + 1}{e^m - 1} - \frac{1}{2m}$$

comme le cas le plus simple de toute une série de formules qui présentent un caractère éminemment arithmétique; il se borne à indiquer les deux exemples suivants comme devant faire connaître suffisamment le caractère des formules nouvelles.

Soit p un nombre entier positif impair ($p > 1$) sans diviseur carré, et posons

$$f(x) = \sum_1^{p-1} \left(\frac{n}{p}\right) x^n,$$

$\left(\frac{n}{p}\right)$ étant, comme dans la Communication précédente (n° 47), le symbole de Legendre généralisé par Jacobi.

Si l'on suppose $p \equiv 1 \bmod 4$, on a

$$\int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1 - e^{-px}} \sin\left(\frac{ptx}{2\pi}\right) dx = \frac{\pi}{\sqrt{p}} \frac{f(e^{-t})}{1 - e^{-pt}}.$$

Si l'on suppose, au contraire, $p \equiv 3 \bmod 4$, on a

$$\int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1 - e^{-px}} \cos\left(\frac{ptx}{2\pi}\right) dx = \frac{\pi}{\sqrt{p}} \frac{f(e^{-t})}{1 - e^{-pt}}.$$

Ces résultats se déduisent des deux développements en série, correspondant aux hypothèses précédentes faites sur p, de l'expression $\frac{f(e^{-x})}{1 - e^{-px}}$; ces développements s'expriment au moyen de la fonction

$$\varphi(s) = \sum_1^\infty \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1 - e^{-px}} x^{s-1} dx.$$

Stieltjes, s'attachant ensuite à cette fonction $\varphi(s)$ et après avoir rappelé qu'elle est holomorphe dans tout le plan, établit, par un raisonnement qui lui est propre, la relation remarquable, découverte par M. Hurwitz, entre $\varphi(s)$ et $\varphi(1 - s)$; il remarque également que les formules données dans sa Communication précédente (n° 47) permettent d'établir d'une manière beaucoup plus simple encore cette relation entre $\varphi(s)$ et $\varphi(1 - s)$; il termine en examinant d'un peu plus près les développements donnés précédemment pour $\frac{f(e^{-x})}{1 - e^{-px}}$ et il retrouve, en particulier, une formule qui s'était présentée déjà à Dirichlet dans ses recherches sur la détermination du nombre des classes de formes quadratiques à deux indéterminées.

49. *Sur le nombre des pôles à la surface d'un corps magnétique* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CII, p. 805; 5 avril 1886).

Généralisation de résultats obtenus par Betti et par M. Reech. Lorsque la surface fermée, qui limite le corps magnétique, est $2k + 1$ fois connexe, le nombre des pôles neutres, diminué du nombre des autres pôles, est égal à $2k - 2$; comme il y a toujours au moins un pôle boréal et un pôle austral, il s'ensuit que le nombre des pôles neutres est au moins égal à $2k$.

50. *Recherches sur quelques séries semi-convergentes. Thèse de doctorat* (Annales de l'École Normale supérieure, 3e série, t. III, p. 201-258; 1886).

L'objet de ce Travail est l'étude de quelques développements de la forme

$$(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{F}(a) = m_0 + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \frac{m_3}{a^3} + \ldots,$$

que l'on ne pourrait continuer indéfiniment s'il s'agissait d'un calcul numérique, la série étant divergente. Un tel développement a un sens précis pourvu que l'on regarde la formule (A) comme une manière symbolique d'exprimer que, pour $a = \infty$:

$$\lim \mathrm{F}(a) = m_0,$$
$$\lim a\,[\mathrm{F}(a) - m_0] = m_1,$$
$$\lim a^2 \left[\mathrm{F}(a) - m_0 - \frac{m_1}{a}\right] = m_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Stieltjes distingue, parmi les développements précédents, les *séries de première espèce,* pour lesquelles le signe des coefficients $m_0, m_1, m_2, \ldots$ est alternativement positif et négatif, et les *séries de seconde espèce* pour lesquelles les coefficients ont le même signe.

Ce sont surtout ces dernières qui sont envisagées ici; Stieltjes considère que, si l'on veut se servir de la formule (A) pour évaluer $\mathrm{F}(a)$, le vrai problème à résoudre, dans le cas où la série est de seconde espèce, est la détermination du rang du reste R_n qui, pour la première fois, a changé de signe. Le logarithme intégral lui fournit le premier exemple d'une série de seconde espèce; il considère ensuite les transcendantes $\int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2}du$, $\int_0^\infty \frac{u\cos au}{1+u^2}du$ qui donnent aussi des séries de seconde espèce. La considération de $\log\Gamma(ai)$ le conduit encore à une telle série et le résultat, auquel il parvient, permet de se faire une idée nette de la manière dont se comporte la fonction holomorphe $\frac{1}{\Gamma(z)}$, lorsque la variable z décrit l'axe des y. Il considère ensuite les deux intégrales $\mathrm{J}(a)$, $\mathrm{K}(a)$ de l'équation différentielle

$$\frac{d^2z}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dz}{da} + z = 0;$$

elles donnent lieu à des séries de première espèce et conduisent, dans le cas où l'argument est de la forme ai, à deux séries rencontrées par Riemann; l'une de ces séries est de première espèce; l'autre, donnée par $J(ai)$, est de seconde espèce et, dans ce cas, la résolution approchée de l'équation $R_n = 0$ présente d'assez grandes difficultés.

Le Mémoire se termine par l'étude d'un cas intéressant donné par M. Schlömilch, celui de la série de seconde espèce qui peut servir au calcul de la fonction

$$P(a) = \sum_1^\infty \frac{1}{e^{\frac{n}{a}} - 1};$$

Stieltjes obtient encore, dans ce cas, la solution approchée de l'équation transcendante $R_n = 0$.

51. *Note sur le développement de l'intégrale* $\int_0^a e^{x^2} dx$ (Acta Mathematica, t. IX, p. 167-176; 1886).

Cette Note, qui se rattache au Mémoire précédent (n° 50), est consacrée à l'étude, faite toujours au même point de vue, du développement

$$(1) \qquad e^{-a^2}\varphi(a) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a^3} + \frac{1.3}{8a^5} + \frac{1.3.5}{16a^7} + \ldots,$$

où

$$\varphi(a) = \int_0^a e^{x^2} dx.$$

La série considérée est divergente; mais la formule (1) a un sens précis, pourvu qu'on la regarde comme une manière symbolique d'exprimer que, pour $a = \infty$, on a

$$\lim a e^{-a^2}\varphi(a) = \frac{1}{2},$$

$$\lim a^3 \left[e^{-a^2}\varphi(a) - \frac{1}{2a}\right] = \frac{1}{4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'étude du développement (1) et de l'utilité qu'il présente pour le calcul de l'intégrale $\int_0^a e^{x^2} dx$ est faite en utilisant la notion de Cauchy de la *valeur principale* d'une intégrale définie portant sur une fonction qui devient infinie entre les limites d'intégration. Stieltjes ajoute que, dans cette occasion, il lui semble qu'on pourrait difficilement atteindre le but d'une autre manière et il pense avoir ainsi montré l'utilité et même la nécessité de l'introduction de la conception de Cauchy.

52. *Sur les séries qui procèdent suivant les puissances d'une variable* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CIII, p. 1243-1246; 20 décembre 1886).

Si l'on considère la fonction $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$, représentée entre $x = 0$ et $x = 1$ par une série que l'on sait être convergente pour $x = 1$, on doit prendre, comme définition de $f'(1)$:

$$f'(1) = \lim_{x=1} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}.$$

Stieltjes montre que $f'(1)$ n'existe pas nécessairement en considérant la fonction particulière suivante

$$f(x) = (1 - x) \sin\left(\log \frac{1}{1 - x}\right)$$

et il pose ensuite la question suivante :

Supposons que $f'(1)$ existe et ait une valeur finie, peut-on en conclure que

$$\lim_{x=1} f'(x) = f'(1)?$$

La réponse est affirmative lorsque la série $\sum_1^\infty s_n$, où $s_k = \sum_k^\infty a_n$, est convergente, ainsi qu'il résulte d'une proposition de M. Frobenius dont il a été déjà question dans le Travail *Over eenige theorema's omtrent oneindige reeksen* (n° 6).

53. *Sur les racines de l'équation* $X_n = 0$ (Acta Mathematica, t. IX, p. 385-400; 1887).

Stieltjes retrouve les limitations obtenues par MM. Bruns [1] et Markoff [2] pour les racines de l'équation $X_n = 0$; sa démonstration est

(1) H. Bruns, *Zur Theorie der Kugelfunctionen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XC, p. 322; 1881).

(2) A. Markoff, *Sur les racines de certaines équations* (*Mathematische Annalen*, t. XXVII, p. 177; 1886).

fondée sur le théorème d'Algèbre suivant qu'il montre ensuite comme étroitement lié à une question qui se présente dans le problème de la distribution d'électricité sur un système de conducteurs.

Soit

$$X = \sum_1^m \sum_1^m a_{ik} x_i x_k$$

une forme quadratique *positive* dans laquelle les coefficients $a_{ik} (i \gtrless k)$ sont tous négatifs ou nuls. Si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ sont des quantités toutes positives ou nulles, aucune des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, tirées des équations

$$\frac{1}{2} \frac{\partial X}{\partial x_i} = \xi_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

ne peut être négative, et si les quantités ξ_i sont toutes positives, il en est de même des x_i. De plus, aucun des mineurs D_{ik} du déterminant D de X ne peut être négatif.

54. *Exemple d'une fonction qui n'existe qu'à l'intérieur d'un cercle* (Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. XI, p. 46-51; 1887).

Considérons une suite infinie de quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, dont le module est égal à l'unité et choisies de la façon suivante. Soit C la circonférence de rayon 1 ayant l'origine pour centre et sur laquelle se trouvent les points $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ qui représentent les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; prenons a_1, a_2 de manière que P_1, P_2 se trouvent aux extrémités d'un diamètre de C; choisissons ensuite a_3, a_4 de manière que la circonférence C se trouve divisée en quatre parties égales par les points P_1, P_2, P_3, P_4, et généralement, pour $k = 2^{n-1}$, prenons

$$a_{k+1}, \quad a_{k+2}, \quad \ldots, \quad a_{2k}$$

de manière que la circonférence C se trouve divisée en $2k$ parties égales par les points $P_1, P_2, \ldots, P_{2k}$.

Cela posé, la fonction considérée par Stieltjes est définie par la série

$$f(z) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^3} \frac{z}{a_n - z},$$

qui est convergente lorsque le module de z est inférieur à 1; quel que soit le choix des quantités a_n de module égal à l'unité, cette expression est développable en série suivant les puissances positives de z; le cercle de convergence de cette série est le cercle C; en introduisant les hypothèses faites sur $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, Stieltjes établit qu'il est impossible de continuer la fonction $f(z)$ en dehors du cercle C.

55. *Note sur la multiplication de deux séries* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. VI, p. 210-215; 1887).

Considérons deux séries, l'une

$$t = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

absolument convergente, l'autre

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

convergente et envisageons la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$, en précisant l'ordre dans lequel on effectue la sommation de la façon suivante :

Figurons un Tableau à double entrée où le terme situé à l'intersection de la $\alpha^{\text{ième}}$ colonne et de la $\beta^{\text{ième}}$ ligne soit $u_\alpha v_\beta$; traçons dans ce Tableau une courbe C qui est coupée en un point seulement par une droite horizontale; si l'on prend la somme de tous les termes $u_\alpha v_\beta$ qui se trouvent du même côté de cette courbe que $u_1 v_1$ et si l'on déforme la courbe C de façon qu'elle s'éloigne indéfiniment, on aura fixé par là l'ordre dans lequel on doit prendre les termes de la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$.

Stieltjes démontre que, dans ces conditions, on a

$$\Sigma u_\alpha v_\beta = s . t$$

et il en fait l'application aux séries entières et aux séries de la forme $\sum_1^\infty \frac{f(n)}{n^s}$ à propos desquelles il généralise la proposition déjà utilisée dans la Note *Sur une loi asymptotique dans la théorie des nombres* (nº 46).

56. *Table des valeurs des sommes* $S_k = \sum_1^\infty n^{-k}$ (Acta Mathematica, t. X, p. 299-302; 1887).

Cette Table donne, pour les nombres entiers k qui ne dépassent pas 70, les valeurs des sommes S_k avec 32 décimales à 15 unités près de la 32e décimale; elle montre que les six sommes

$$S_5, \quad S_7, \quad S_{10}, \quad S_{11}, \quad S_{16}, \quad S_{35}$$

doivent, dans la Table donnée par Legendre avec 16 décimales, recevoir une correction de la dernière (seizième) décimale.

Stieltjes a mis à profit ses résultats pour calculer la constante eulérienne dont il a obtenu la valeur avec 33 décimales.

57. *Sur les maxima et minima d'une fonction étendue sur une surface fermée* (Association française pour l'avancement des Sciences, 16e session, Toulouse, Ire Partie, p. 168; 1887).

Généralisation d'un résultat qui se déduit d'un Article de M. Reech. Pour une surface fermée quelconque, $2k+1$ fois connexe, on trouve $2-2k$ pour la différence entre le nombre des maxima et minima et le nombre des cols.

58. *Sur une généralisation de la formule des accroissements finis* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. VII, p. 26-31; 1888).

Ce Travail se rapporte à un théorème donné par M. Schwarz [1] et démontré par lui au moyen du Calcul intégral; Stieltjes a cherché si l'on ne pouvait pas arriver au but d'une manière plus élémentaire et il y parvient au moyen du lemme déjà utilisé dans le Mémoire *Over Lagrange's interpolatie-formule* (no 4); il est ainsi conduit à énoncer la proposition suivante :

Soient $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, $k(u)$ des fonctions de u que, pour fixer les idées, nous prenons en nombre égal à 4; supposons que ces fonctions admettent des dérivées premières, secondes et troisièmes dans un intervalle; si x, y, z, t sont quatre valeurs appartenant à cet intervalle, on a

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(t) & g(t) & h(t) & k(t) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{1!\,2!\,3!} \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix},$$

(1) A. Schwarz, *Verallgemeinerung eines analytischen Fundamentalsatzes* (*Annali di Matematica*, 2e série, t. X, p. 129).

où $\xi = (x, y)$, $\eta = (x, y, z)$, $\zeta = (x, y, z, t)$, en désignant par $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ un nombre compris entre le plus petit et le plus grand des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

La démonstration de cette proposition suppose seulement que les fonctions f'', g'', ... admettent des dérivées f''', g''', .. ; si l'on suppose de plus que les fonctions f''', g''', ... sont continues pour la valeur a, on obtient, lorsque x, y, z, t tendent vers la même limite a,

$$(2) \qquad \lim A = \frac{1}{1!\,2!\,3!} \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) & k(a) \\ f'(a) & g'(a) & h'(a) & k'(a) \\ f''(a) & g''(a) & h''(a) & k''(a) \\ f'''(a) & g'''(a) & h'''(a) & k'''(a) \end{vmatrix}$$

en désignant par A le premier membre de la formule (1).

59. *Sur une généralisation de la formule des accroissements finis* (Bulletin de la Société mathématique, t. XVI, p. 100-113; 1888).

Dans ce Travail, plus complet que le précédent, et où il conserve les mêmes notations, Stieltjes reprend d'abord la démonstration des formules (1) et (2) qui y étaient établies. Se plaçant ensuite dans un ordre d'idées analogue à celui qui est suivi dans le Mémoire *Eenige bemerkingen omtrent de differentiaalquotienten van eene functie van eene veranderlijke* (n° 5), il considère le cas où les nombres x, y, z, t tendent vers leur limite commune a, de telle façon que a ne soit jamais en dehors de l'intervalle compris entre le plus petit et le plus grand des nombres x, y, z, t et il démontre que la formule (2) subsiste alors sous des conditions bien plus larges, relatives aux fonctions $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, $k(u)$ qui sont supposées toujours admettre des dérivées du premier et du second ordre; il suffit, en effet, que leurs dérivées du troisième ordre existent seulement pour la valeur particulière a de la variable.

La remarque précédente qui s'applique, quel que soit le nombre, supérieur à deux, des fonctions que l'on considère, permet, ainsi que l'indique en terminant Stieltjes, d'énoncer des propriétés relatives à l'existence du plan osculateur considéré comme la position limite d'un plan passant par un point de la courbe et par deux autres points infiniment voisins du premier, du cercle osculateur, de la sphère osculatrice, ... lorsqu'on adopte pour ces éléments une définition analogue.

60. *Note sur l'intégrale* $\int_a^b f(x)\mathrm{G}(x)\,dx$ (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. VII, p. 161-171; 1888).

Stieltjes établit la proposition suivante, dont la démonstration se relie à des recherches précédentes (nos 18, 19, 31) :

Soit $f(x)$ une fonction non décroissante entre les limites $x=a$ et $x=b\,(a<b)$. Alors il est toujours possible de déterminer

$$n \text{ constantes } x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad (a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n<b)$$

et $n+1$ constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ qui sont comprises respectivement dans les $n+1$ intervalles formés par les $n+2$ quantités

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, \qquad f(x_{n-1}), f(x_n), f(b),$$

de telle façon qu'on ait

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{G}_{2n}(x)\,dx = a_1\int_a^{x_1}\mathrm{G}_{2n}(x)\,dx + a_2\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{G}_{2n}(x)\,dx + \ldots\\ + a_n\int_{x_{n-1}}^{x_n}\mathrm{G}_{2n}(x)\,dx + a_{n+1}\int_{x_n}^{b}\mathrm{G}_{2n}(x)\,dx,\end{aligned}$$

$\mathrm{G}_{2n}(x)$ étant un polynome quelconque en x du degré $2n$ au plus.

61. *Sur l'équation d'Euler* (Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. XII, p. 222-227; 1888).

L'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}} \pm \frac{dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}} = 0, \tag{1}$$

où

$$\begin{aligned}\mathrm{X} &= a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4,\\ \mathrm{Y} &= a_0y^4 + 4a_1y^3 + 6a_2y^2 + 4a_3y + a_4,\end{aligned}$$

peut se mettre sous la forme élégante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\dfrac{x+y}{2} & xy \\ 1 & a_0 & a_1 & a_2 - 2m \\ -\dfrac{x+y}{2} & a_1 & a_2+m & a_3 \\ xy & a_2-2m & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

m étant la constante arbitraire.

Après avoir montré comment cette formule, qui semble nouvelle, résulte facilement d'un Mémoire de Richelot ([1]), Stieltjes remarque que si l'on détermine la constante m par l'équation

$$(3) \qquad 4m^3 - Sm - T = 0,$$

où S et T sont les invariants de X, le premier membre de (2) est un carré parfait et l'on satisfait ainsi à l'équation différentielle (1) par trois relations de la forme

$$p + qx + ry + sxy = 0,$$

auxquelles il faut joindre la relation évidente $x - y = 0$. Pour parler autrement, on a quatre substitutions linéaires qui transforment en elle-même la différentielle elliptique $\frac{dx}{\sqrt{X}}$; l'une d'elles est $x = y$; les trois autres sont définies par

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_1 \\ -\frac{x+y}{2} & a_1 & a_2 + m \\ xy & a_2 - 2m & a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

où m doit être remplacé successivement par les racines de l'équation (3).

Soit H le hessien de X; si l'on pose $y = x$ dans le premier membre de (2) changé de signe, on obtient $H + mX$ qui devient un carré parfait si l'on prend pour m une racine de l'équation (3); Stieltjes énonce en conséquence la proposition suivante :

Soit $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ un polynome du second degré, qui ne diffère que par un facteur constant de $\sqrt{H + mX}$; alors, en posant

$$\alpha xy + \beta(x + y) + \gamma = 0,$$

on aura une substitution linéaire qui transforme en elle-même la différentielle elliptique $\frac{dx}{\sqrt{X}}$.

Une remarque de Halphen conduit enfin Stieltjes à écrire la relation (2) sous la forme

$$h + mf + \left(\tfrac{1}{12}S - m^2\right)(x - y)^2 = 0$$

([1]) Richelot, *Einige Bemerkungen zum Eulerschen Additionstheorem der elliptischen Integrale* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XLIV, p. 277; 1852).

due à Cayley et retrouvée par Laguerre, et dans laquelle h et f sont les secondes polaires de H et de X respectivement.

62. *Sur l'équation d'Euler* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CVII, p. 617; 15 octobre 1888).

Extrait de l'Article précédent portant le même titre.

63. *Sur la réduction de la différentielle elliptique à la forme normale* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CVII, p. 651; 22 octobre 1888).

Stieltjes présente la réduction de la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4),$$

à la forme normale

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - Sy - T}},$$

où S et T sont les invariants de X, sous la forme suivante :

L'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - Sy - T}}$$

est donnée par la relation

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & x & 0 & \frac{1}{2}y & -xy \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & c \\ x & 0 & 0 & -2 & c & 0 \\ 0 & 0 & -2 & a_0 & a_1 & a_2 \\ \frac{1}{2}y & -\frac{1}{2} & c & a_1 & a_2 & a_3 \\ -xy & c & 0 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0,$$

c désignant la constante arbitraire.

La formule (1) donne immédiatement les substitutions linéaires qui permettent d'effectuer la réduction; si l'on détermine, en effet, c par l'équation

$$a_0 c^4 + 4a_1 c^3 + 6a_2 c^2 + 4a_3 c + a_4 = 0,$$

le premier membre de (1) est un carré parfait.

Pour terminer, Stieltjes montre la concordance de la formule (1) avec celle qu'on déduit des recherches de Cayley.

64. *Sur la transformation linéaire de la différentielle elliptique* $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (*Première Partie*) (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. II, p. K.1; 1888).

Ce Mémoire, qui se rattache aux trois Notes précédentes, semble bien éclairer d'un jour tout nouveau le problème qui y est traité.

En introduisant dans la différentielle elliptique

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4),$$

une nouvelle variable y liée à x par la relation homographique

$$(1) \qquad p + qx + ry + sxy = 0,$$

on obtient un résultat de cette forme

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

où Y désigne un polynome du quatrième degré en y

$$Y = b_0 y^4 + 4b_1 y^3 + 6b_2 y^2 + 4b_3 y + b_4.$$

Stieltjes établit d'abord la proposition suivante : étant donnés deux polynomes du quatrième degré X, Y dépendant respectivement de x et de y, pour qu'il soit possible de satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

par une relation de la forme

$$p + qx + ry + sxy = 0,$$

il faut et il suffit que les invariants de X soient égaux aux invariants de Y; si cette condition est remplie, il existe toujours quatre relations de cette forme qui satisfont à l'équation différentielle.

Donnant à ces relations le nom d'*intégrales linéaires de l'équation* *différentielle,* Stieltjes se propose d'approfondir au point de vue algébrique la question de leur détermination et de former l'équation du quatrième degré de la résolution de laquelle elle dépend uniquement. Les résultats obtenus par M. Hermite dans ses Mémoires classiques (¹) lui servent de base.

Désignant par

$$H_x = \frac{1}{144}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial x'} \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial x'\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 X}{\partial x'^2} \end{vmatrix},$$

où x' est la variable d'homogénéité, le hessien de X et par H_y le hessien de Y, Stieltjes parvient à la proposition suivante :

Lorsque deux formes biquadratiques X, Y ont leurs invariants égaux, l'expression

$$X H_y - Y H_x$$

est décomposable en un produit de quatre expressions de la forme

$$p + qx + ry + sxy,$$

et, en annulant ces facteurs, on obtient précisément les quatre intégrales linéaires de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

On est donc amené à l'étude de la décomposition en facteurs de l'expression

$$x H_y - y H_x.$$

Soient u', u'', u''' les racines de l'équation

$$4u^3 - Su - T = 0; \tag{2}$$

M. Hermite a prouvé que les fonctions obtenues en remplaçant u par u', u'', u''' dans $H_x + uX$ étaient des carrés parfaits $\varphi_x'^2$, $\varphi_x''^2$, $\varphi_x'''^2$ et que de même l'expression $H_y + uY$ donnait pour $u = u'$, u'', u''' des carrés parfaits $\varphi_y'^2$,

(¹) Ch. Hermite, *Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LII, p. 1-38; 1856).

$\varphi_y''^2$, $\varphi_y'''^2$; cela posé, Stieltjes obtient le résultat suivant qui donne la solution du problème qu'il a en vue.

L'expression

$$(u''-u''')\varphi_x'\varphi_y'+(u'''-u')\varphi_x''\varphi_y''+(u'-u'')\varphi_x'''\varphi_y'''$$

est, sauf un facteur constant, le carré de l'un des facteurs de $XH_y - YH_x$.

Appliquant ces résultats à l'équation d'Euler, il parvient ensuite à la proposition suivante :

Les intégrales linéaires, autres que $x-y=0$, de l'équation différentielle

$$(3)\qquad \frac{dx^2}{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}=\frac{dy^2}{a_0y^4+4a_1y^3+6a_2y^2+4a_3y+a_4}$$

s'obtiennent en posant

$$(4)\qquad h+uf+(\tfrac{1}{12}S-u^2)(x-y)^2=0,$$

où h et f sont les secondes polaires de H_x et de X et où u doit être remplacé successivement par les racines u', u'', u''' de l'équation (2). Sauf un facteur constant, le premier membre de (4) est alors un carré exact et la relation entre x et y se réduit bien à la forme (1).

Ce résultat peut s'obtenir en partant de la forme donnée (n° 61) par Cayley et Laguerre à l'intégrale générale de l'équation d'Euler, savoir

$$(5)\qquad h+Cf+(\tfrac{1}{12}S-C^2)(x-y)^2=0,$$

que l'on obtient en remplaçant, dans (4), u par la constante arbitraire C.

Stieltjes remarque que, en considérant C comme une variable, y comme une constante arbitraire, la relation (5) est l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}=\pm\frac{dC}{\sqrt{4C^3-SC-T}}$$

et que, pour avoir les intégrales linéaires de cette équation, il suffit de résoudre l'équation $X=0$. C'est, on le voit, le résultat présenté sous une autre forme dans la Note : *Sur la réduction de la différentielle elliptique à la forme normale* analysée précédemment (n° 63).

L'examen des cas particuliers, qu'il vient de traiter, amène Stieltjes à prévoir une liaison intime entre la recherche des intégrales linéaires de l'équation (3) et l'intégration générale de cette équation. Cette étude est renvoyée à une seconde Partie qui n'a pas paru.

65. *Sur le développement de l'expression*

$$\{R^2 - 2Rr[\cos u \cos u' \cos(x - x') + \sin u \sin u' \cos(y - y')] + r^2\}^{-1}$$

(Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4e série, t. V, p. 55-65; 1889).

La plus grande partie de ce Mémoire est consacrée au développement de la première (n° 11) des Notes : *Sur un théorème de M. Tisserand,* qui ont été signalées précédemment et où Stieltjes montre que c'est dans l'extension de la théorie du potentiel au cas de quatre variables, que l'on doit chercher la véritable origine du beau résultat obtenu par M. Tisserand, dans ses recherches sur le développement de la fonction perturbatrice, lorsque l'inclinaison mutuelle des orbites est considérable.

La démonstration de Stieltjes est reproduite dans le *Traité de Mécanique céleste* de M. Tisserand (t. I, p. 448 et suiv.), et il nous suffira de transcrire le résultat de son analyse.

Soit

$$\cos\varphi = \cos u \cos u' \cos(x - x') + \sin u \sin u' \cos(y - y');$$

on a

$$\{R^2 - 2Rr[\cos u \cos u' \cos(x - x') + \sin u \sin u' \cos(y - y')] + r^2\}^{-1} = \sum_0^\infty V_n \frac{r^n}{R^{n+2}},$$

$$V_n = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = \sum_i{}' \sum_k{}' 4 c_{i,k}^n (\cos u \cos u')^i (\sin u \sin u')^k$$
$$\times F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u) F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u') \cos i(x - x') \cos k(y - y'),$$

où l'on pose

$$\alpha = \frac{i + k - n}{2}, \qquad \beta = \frac{i + k + n}{2}, \qquad \gamma = k + 1,$$

$$c_{i,k}^n = \frac{\Pi\left(\frac{n - i + k}{2}\right) \Pi\left(\frac{n + i + k}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n - i - k}{2}\right) \Pi\left(\frac{n + i - k}{2}\right) \Pi(k) \Pi(k)},$$

En posant, dans ces formules, $u = u' = \frac{J}{2}$, $x' = 0$, $y' = 0$, on retrouve la formule spéciale obtenue, pour la première fois, par M. Tisserand.

Stieltjes termine son Mémoire en appelant l'attention sur la formule

$$\cos n\varphi = n \sum_i{}' 2 \frac{\Pi(n+i-1)}{\Pi(n-i)\,\Pi(2i)} \sin^{2i} u \times F(i-n, i+n, 2i+1, \sin^2 u) \cos i\psi,$$

où

$$\cos\varphi = \cos^2 u + \sin^2 u \cos\psi,$$

et sur la suivante due à Hansen

$$\begin{aligned} X_n(\cos^2 u \cos x + \sin^2 u \cos y) \\ = \sum_i{}' \sum_k{}' 4 c_{i,k}^n \cos^{2i} u \sin^{2k} u\, F(i+k-n, i+k+n+1, 2k+1, \sin^2 u) \cos ix \cos kx, \end{aligned}$$

et en posant la question de savoir s'il ne serait pas possible d'arriver à ces résultats par une théorie analogue à celle du potentiel.

66. *Sur les dérivées de* séc x (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CVIII, p. 605-607; 25 mars 1889).

Les résultats contenus dans cette Note sont développés et complétés dans le Mémoire : *Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes d'une variable,* qui sera analysé plus loin (n° 68).

67. *Sur un développement en fraction continue* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CVIII, p. 1297-1298; 24 juin 1889).

Le Mémoire : *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques* (n° 31) a, comme on sait, et ainsi qu'on l'a rappelé partiellement dans la Note : *Sur un développement en fraction continue* (n° 32), un rapport intime avec un certain développement en fraction continue. C'est la question de la convergence de cette fraction continue qui est envisagée ici ; les résultats qui sont énoncés sont développés et étendus dans le grand Mémoire : *Recherches sur les fractions continues* (n° 82).

68. *Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes d'une variable* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. III, p. H.1; 1889).

Stieltjes propose, pour le problème de la transformation de la série

$$\frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} - \ldots + (-1)^n \frac{a_n}{x^{n+1}} + \ldots,$$

dans l'une des fractions continues,

$$c_0 : x + c_1 : 1 + c_2 : x + c_3 : 1 + \ldots + c_{2n-1} : 1 + c_{2n} : x + \ldots,$$
$$c_0 : (x + c_1) - c_1 c_2 : (x + c_2 + c_3) - c_3 c_4 : (x + c_4 + c_5) - \ldots,$$

une solution nouvelle basée sur les deux théorèmes suivants :

1° *Considérons une série de quantités $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ déterminées par les formules*

$$\alpha_{0,0} = 1, \qquad \beta_{i,k} = \alpha_{i,k} + c_{2i+2}\alpha_{i+1,k},$$
$$\alpha_{i,k} = 0, \quad \text{lorsque} \quad i > k, \qquad \alpha_{i,k+1} = c_{2i+1}\beta_{i,k} + \beta_{i-1,k};$$
$$\beta_{i,k} = 0, \quad \text{lorsque} \quad i > k,$$

la forme quadratique à une infinité de variables

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k$$

est égale à

$$\begin{aligned} & c_0[\alpha_{0,0} X_0 + \alpha_{0,1} X_1 + \alpha_{0,2} X_2 + \alpha_{0,3} X_3 + \ldots]^2 \\ & + c_0 c_1 c_2 [\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,3} X_3 + \ldots]^2 \\ & + c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 [\alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,3} X_3 + \ldots]^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et, de même, la forme quadratique

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k+1} X_i X_k$$

est égale à

$$\begin{aligned} & c_0 c_1 [\beta_{0,0} X_0 + \beta_{0,1} X_1 + \beta_{0,2} X_2 + \beta_{0,3} X_3 + \ldots]^2 \\ & + c_0 c_1 c_2 c_3 [\beta_{1,1} X_1 + \beta_{1,2} X_2 + \beta_{1,3} X_3 + \ldots]^2 \\ & + c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 [\beta_{2,2} X_2 + \beta_{2,3} X_3 + \ldots]^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

2° *Si l'on a identiquement*

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k = \varepsilon_0[X_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots]^2 + \varepsilon_1[X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots]^2 + \ldots$$

on a, en même temps :

$$\frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} - \frac{a_3}{x^4} + \ldots$$
$$= \varepsilon_0 : (x + \alpha_1) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} : (x + \beta_2 - \alpha_1) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} : (x + \gamma_3 - \beta_2) - \ldots.$$

Comme applications des propositions précédentes, Stieltjes donne les développements en fractions continues des quatre expressions que l'on obtient en remplaçant, dans l'intégrale

$$\int_0^\infty \varphi(z) e^{-xz} dz,$$

la fonction $\varphi(z)$ successivement par les quatre valeurs particulières

$$\left(\frac{2}{e^z + e^{-z}}\right)^k, \quad \operatorname{sn} z, \quad \operatorname{cn} z, \quad \operatorname{dn} z.$$

On trouvera, dans l'Introduction et dans les n^{os} 82 et suivants du Mémoire *Recherches sur les fractions continues*, la démonstration de ce point que les trois dernières des fractions continues ainsi obtenues sont convergentes et représentent effectivement les intégrales qui leur ont donné naissance.

69. *Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite* (Bulletin des Sciences mathématiques, 2^e série, t. XIII, I^{re} Partie, p. 170-172, 1889).

Stieltjes indique, de la formule de M. Hermite

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\psi(x,y)} dx\, dy = \frac{\operatorname{arc} \cos\left(\frac{b}{\sqrt{ac}}\right)}{2\sqrt{ac - b^2}}$$

où

$$\psi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

une démonstration à laquelle il a été conduit par cette remarque que l'angle $\operatorname{arc}\cos\left(\frac{b}{\sqrt{ac}}\right)$ qui y figure et qui est compris entre o et π, est précisément l'angle qu'on rencontre en représentant géométriquement la forme positive $\psi(x, y)$.

La méthode s'applique avec la même facilité au cas de trois variables et le conduit à la détermination de

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\psi(x,y,z)}\,dx\,dy\,dz,$$

où ψ désigne une forme quadratique des trois variables x, y, z.

70. *Sur un passage de la théorie analytique de la chaleur* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3ᵉ série, t. VIII, p. 472; 1889).

Stieltjes montre que la méthode suivie par Fourier pour obtenir le développement

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \ldots,$$

valable pour x compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, méthode qui manque de rigueur, conduit à un résultat exact. Le procédé employé permet d'obtenir d'une façon analogue le développement

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x - \ldots.$$

71. *Sur le développement de* $\log\Gamma(a)$ (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4ᵉ série, t. V, p. 425-444; 1889).

Le but principal de ce Travail, dit Stieltjes, est de donner une nouvelle démonstration de la formule de Stirling

$$\log\Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \frac{B_1}{1.2.a} - \frac{B_2}{3.4.a^3} + \ldots,$$

et de montrer que le second membre représente asymptotiquement la valeur de $\log\Gamma(a)$ (dans un sens qui est précisé), même dans le cas où la valeur de a est imaginaire, la partie réelle de a étant négative.

Les intégrales définies qui avaient été introduites dans cette théorie présentent toutes cette particularité qu'elles n'ont un sens qu'en supposant la partie réelle de a positive; Stieltjes se propose de lever cette restriction qui n'est pas dans la nature des choses et de mettre en évidence des intégrales valables dans tout le plan.

Adoptant, comme définition de $\Gamma(a)$, la formule

$$\Gamma(a) = \lim_{n=\infty} \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}\,n^a,$$

il considère la branche particulière de $\log \Gamma(a)$ définie, en supposant que $\log \Gamma(a)$ est réel lorsque a est réel et positif et en limitant la marche de la variable par une coupure tracée le long de l'axe des x, de o à $-\infty$.

Posant

$$J(a) = \int_0^\infty \frac{P(x)}{x+a}\,dx,$$

où $P(x)$ désigne une fonction de la variable réelle x définie par les relations

$$P(x) = \frac{1}{2} - x, \qquad 0 < x < 1,$$
$$P(x+1) = P(x),$$

Stieltjes établit la formule suivante

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a + \frac{1}{2}\log(2\pi) + J(a),$$

qu'il attribue à M. Bourget, et où l'on considère la fonction $\log a$ en limitant la marche de la variable comme dans le cas de $\log \Gamma(a)$.

Cette formule, qui lui sert de point de départ, ne se distingue de celle qui est employée ordinairement que par la forme sous laquelle se présente la fonction $J(a)$.

Après avoir montré que, lorsque a croît indéfiniment, $J(a)$ tend, en général, vers zéro et étudié le développement de $J(a)$ suivant les puissances descendantes de a, il passe à des applications de formules importantes relatives à une fonction $f(z)$ uniforme dans la région du plan située à droite de l'axe des y, n'ayant dans ce domaine ni pôles, ni points singuliers essentiels et telle que l'on ait

$$\lim \int \operatorname{mod} \frac{f(z)}{z^2}\,dz = \lim \frac{1}{R^2}\int \operatorname{mod} f(z)\,dz = 0, \qquad R = \infty,$$

l'intégrale étant prise le long du demi-cercle de rayon R ayant pour centre l'origine et situé à droite de l'axe des y; on a alors, la partie réelle de a étant positive,

$$f(a) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a f(ui)}{a^2+u^2}\,du,$$

et si la fonction $f(z)$ prend des valeurs conjuguées pour des valeurs conjuguées de la variable

$$f(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\mathrm{A}}{a^2+u^2}\,du,$$

en désignant par A la partie réelle de $f(ui)$.

Ces formules et d'autres semblables conduisent, comme application, à la formule de Binet relative à $\mathrm{J}(a)$ et à des développements analogues à la série de Stirling.

72. *Sur la fonction exponentielle* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CX, p. 267-270; 10 février 1890).

Prenant comme point de départ des résultats obtenus par M. Hermite dans le Mémoire classique (1) *Sur la fonction exponentielle,* Stieltjes parvient à une démonstration très simple de l'impossibilité d'une relation de la forme

$$\mathrm{N} + e^a\mathrm{N}_1 + e^b\mathrm{N}_2 + \ldots + e^h\mathrm{N}_n = 0,$$

où les exposants $a, b, \ldots, h$ ainsi que les coefficients $\mathrm{N}, \mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_n$ sont des nombres entiers.

73. *Sur la valeur asymptotique des polynomes de Legendre* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CX, p. 1026-1027; 19 mai 1890).

Extrait du Mémoire : *Sur les polynomes de Legendre,* n° 74.

74. *Sur les polynomes de Legendre* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. IV, p. G.1; 1890).

M. Darboux a donné (2) une formule qui permet d'obtenir une expression approchée de $\mathrm{X}_n(\cos\theta)$, l'erreur commise étant de l'ordre d'une puissance aussi grande qu'on le voudra de $\frac{1}{n}$. Stieltjes développe ici un résultat

(1) Ch. Hermite, *Sur la fonction exponentielle* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. LXXVII, p. 18, 74, 226 et 285; 1873).

(2) G. Darboux, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 3e série, t. IV, p. 5; 1878).

plus complet; posant

$$0 < \theta < \pi, \qquad \alpha = \theta - \frac{\pi}{2}, \qquad C_n = \frac{4}{\pi}\frac{2.4.6\ldots(2n)}{3.5.7\ldots(2n+1)},$$

il trouve qu'on peut exprimer $X_n(\cos\theta)$ par la série

$$(1) \quad X_n(\cos\theta) = C_n\left[\frac{\cos(n\theta+\frac{1}{2}\alpha)}{\sqrt{2\sin\theta}} + \frac{1^2}{2(2n+3)}\frac{\cos(n\theta+\frac{3}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\theta)^3}} + \frac{1^2.3^2}{2.4.(2n+3)(2n+5)}\frac{\cos(n\theta+\frac{5}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\theta)^5}} + \ldots\right],$$

qui est convergente tant que θ appartient à l'intervalle $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$. C'est seulement en dehors de cet intervalle que la série précédente prend le caractère d'une simple expression asymptotique; mais, même dans ce cas, Stieltjes obtient une limite très simple de l'erreur commise en s'arrêtant à un nombre fini de termes par la proposition suivante :

Soit M un facteur numérique, compris entre 1 et 2, et défini en posant

$$M = \frac{1}{|\cos\theta|} \quad \text{lorsque} \quad \sin^2\theta \leqq \frac{1}{2},$$
$$M = 2\sin\theta \quad \text{lorsque} \quad \sin^2\theta \geqq \frac{1}{2};$$

l'erreur commise en prenant la somme des p premiers termes du développement (1) est inférieure, en valeur absolue, à M fois le terme suivant dans lequel on aurait remplacé d'abord par l'unité, le cosinus qui y figure au numérateur.

Les propositions précédentes conduisent Stieltjes à plusieurs résultats intéressants dont certains avaient été déjà l'objet des recherches de Poisson, de MM. Bruns et Heine; il retrouve en particulier la limitation de M. Bruns, déjà considérée dans le Mémoire *Sur les racines de l'équation* $X_n = 0$ (n° 53), des racines du polynome X_n de Legendre.

75. *Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. IV, p. J.1; 1890).

Soit $F(x) = X_n$ le polynome de Legendre du degré n, et $R(x)$ la partie entière du produit

$$F(x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots\right);$$

posons

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} F(x) \log \frac{x+1}{x-1} - R(x), \qquad \text{si} \qquad |x| > 1,$$

et

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} F(x) \log \frac{1+x}{1-x} - R(x), \qquad \text{si} \qquad |x| < 1,$$

Ces expressions représentent dans tout le plan, sauf sur la circonférence de rayon égal à l'unité et dont le centre est à l'origine, ce que Heine nomme la *fonction sphérique de seconde espèce*.

Considérons, par exemple, le cas où le module de x est supérieur à 1; M. Hermite, effectuant le changement de variable défini en posant

$$\frac{x+1}{x-1} = e^z,$$

avait obtenu (¹) la distribution des racines de l'équation

$$(e^z - 1)^n \left[\frac{1}{2} z F\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right) - R\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right) \right] = 0$$

sur le plan des z.

Stieltjes, après avoir déduit des résultats obtenus par M. Hermite et qui se rapportent au plan des z les propositions équivalentes relatives au plan des x, établit ces dernières par une méthode directe.

76. *Note sur l'intégrale* $\int_0^\infty e^{-u^2}\,du$ (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. IX, p. 479-480; 1890).

M. Méray a montré (²) que l'on peut déduire la formule

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

(¹) CH. HERMITE, *Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IV, p. I.1; 1890).

(²) CH. MÉRAY, *Valeur de l'intégrale définie* $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ *déduite de la formule de Wallis* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XII, Ire Partie, p. 174; 1888).

de celle de Wallis; Stieltjes propose ici, pour le même but, une démonstration plus simple.

77. *Sur la théorie des nombres* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. IV, p. 1-103; 1890).

Cette étude bibliographique renferme les trois premiers Chapitres d'un Travail étendu que Stieltjes se proposait de publier sur la théorie des nombres et qui aurait constitué une œuvre capitale.

Le premier Chapitre traite de la divisibilité des nombres; le deuxième et le troisième, consacrés aux propositions générales sur les congruences, aux matrices, aux équations linéaires indéterminées, aux systèmes de congruences linéaires, renferment des propositions importantes de MM. Hermite, Smith et Frobenius.

78. *Sur quelques intégrales définies et leur développement en fractions continues* (The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, t. XXIV, p. 370-382; 1890).

Les intégrales considérées ici rentrent dans la même forme générale que celles qui ont été envisagées dans le Mémoire : *Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes d'une variable* (n° 68); elles s'obtiennent en adoptant successivement dans l'intégrale

$$\int_0^\infty \varphi(u) e^{-xu} du,$$

des expressions particulières pour la fonction $\varphi(u)$.

Les développements en fractions continues correspondants sont donnés encore en se plaçant au point de vue purement formel; on trouvera dans le Mémoire : *Recherches sur les fractions continues,* et pour des cas particuliers des exemples considérés ici, la démonstration de ce point que les fractions continues obtenues sont convergentes et représentent effectivement les intégrales qui leur ont donné naissance.

79. *Note sur quelques fractions continues* (The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, t. XXV, p. 198-200; 1891).

On doit à M. Hermite (¹) le résultat élégant exprimé par la formule

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\varepsilon)}},$$

où ε désigne un nombre compris entre 0 et $\frac{1}{2}$.

Stieltjes trouve qu'en posant

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n \varphi(n)}},$$

$\varphi(n)$ peut s'exprimer par une fraction continue convergente d'une loi très simple; la démonstration de ce résultat est reliée à un développement en fraction continue, qui se déduit ainsi qu'un autre développement semblable des formules données dans l'Article : *Sur quelques intégrales définies et leur développement en fractions continues* (nº 78).

80. *Sur une application des fractions continues* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CXVIII, p. 1315; 11 juin 1894).

Les résultats de cette Communication sont développés dans le Mémoire : *Recherches sur les fractions continues* (nº 82) et, en particulier, dans la Note annexée à ce Mémoire.

81. *Recherches sur les fractions continues* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CXVIII, p. 1401; 18 juin 1894).

Extrait du Mémoire suivant (nº 82).

82. *Recherches sur les fractions continues* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. VIII, p. J.1, t. IX, p. A.1; 1894-1895).

Nous avons eu, au commencement de cette Notice, l'occasion de citer le Rapport élogieux de M. Poincaré sur ces recherches qui trouvent leur origine, ainsi que nous l'avons déjà dit, dans un Travail publié dix ans auparavant, en 1884. Ce n'est que peu de temps avant sa mort, que Stieltjes, par la découverte d'un théorème remarquable de la théorie générale des fonctions, a pu considérer comme atteint le but vers lequel tendaient ses

(¹) Ch. Hermite, *Cours de la Faculté des Sciences de Paris*, p. 116, 4ᵉ édition; 1891.

efforts; ses amis savent quelle grande joie il en ressentit et l'on s'explique ainsi, dans une certaine mesure, comment, accablé par la maladie, il a pu la dompter pendant quelque temps et avoir la force d'écrire et de publier son beau et dernier Travail.

Le lecteur acquerra une idée d'ensemble très nette de ce Mémoire, en consultant le Rapport de M. Poincaré et l'extrait cité précédemment (n° 81); il retrouvera ensuite, en lisant les *Recherches sur les fractions continues*, toutes les qualités d'élégance, de clarté, de profonde et puissante originalité, qui caractérisent l'œuvre entière de Stieltjes.