SUR LA

DÉFORMATION INFINITÉSIMALE DES SURFACES,

PAR M. E. GENTY,

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées à Oran.

1. Soient x, y et z les coordonnées d'un point A d'une surface (A); les expressions

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = x + \varepsilon\xi, \\ y' = y + \varepsilon\eta, \\ z' = z + \varepsilon\zeta, \end{cases}$$

où ε est une constante infiniment petite, seront les coordonnées d'un point A′ d'une surface (A′) infiniment voisine de la surface (A) et applicable sur elle, sous la condition

$$(2)\qquad \Sigma\, dx\, d\xi = 0,$$

ce qui montre que ξ, η et ζ sont les coordonnées d'un point P d'une surface (P) correspondant à (A) par orthogonalité des éléments.

2. La condition (2) étant vérifiée, on pourra poser

$$(3)\qquad \begin{cases} d\xi = z_1\, dy - y_1\, dz, \\ d\eta = x_1\, dz - z_1\, dx, \\ d\zeta = y_1\, dx - x_1\, dy, \end{cases}$$

x_1, y_1 et z_1 étant des fonctions des paramètres u et v auxquels on rapporte la surface (A).

Aussi, à tout système de fonctions x_1, y_1 et z_1, telles que les seconds membres des équations (3) soient des différentielles exactes, correspond une déformation infinitésimale de la surface (A). Si nous désignons par (A_1) la surface lieu du point A_1 qui a pour coordonnées x_1, y_1 et z_1, nous dirons que (A_1) est la *surface caractéristique* de cette déformation.

3. Les conditions d'intégrabilité des équations (3) sont

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial z_1}{\partial v} - \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial y_1}{\partial v} = \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial z_1}{\partial u} - \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial y_1}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial x_1}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial z_1}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial x_1}{\partial u} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial z_1}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y_1}{\partial v} - \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y_1}{\partial u} - \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial x_1}{\partial u}. \end{cases}$$

Elles sont évidemment satisfaites si l'on suppose que x_1, y_1 et z_1 soient des constantes. La surface (A_1) est alors un point fixe A_1, et l'on a

$$\begin{aligned} \xi &= z_1 y - y_1 z + a, \\ \eta &= x_1 z - z_1 x + b, \\ \zeta &= y_1 x - x_1 y + c, \end{aligned}$$

a, b et c étant des constantes.

On voit que, dans ce cas, la déformation de la surface (A) consiste dans une simple rotation autour de OA, suivie d'une translation. En d'autres termes, la surface est simplement déplacée, mais non déformée.

La proposition réciproque est évidente; il en résulte qu'à toute surface (A_1) correspond une déformation effective de (A).

4. Soient λ, μ et ν les cosinus directeurs de la normale au point A de (A).

Si nous ajoutons les équations (4) après les avoir multipliées respectivement par $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, puis par $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, puis enfin par λ, μ et ν, il vient

$$(5)\quad \sum \lambda \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0,$$

$$(6)\quad \sum \lambda \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0$$

et

$$(7)\quad \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial y_1}{\partial v} & \dfrac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial y_1}{\partial u} & \dfrac{\partial z_1}{\partial u} \end{vmatrix}.$$

Des équations (5) et (6), il résulte que les surfaces (A) et (A_1) ont aux points correspondants leurs plans parallèles.

Si enfin nous ajoutons les équations (3), après les avoir multipliées respectivement par x_1, y_1 et z_1, il vient

$$\Sigma x_1 \, d\xi = 0,$$

ce qui montre que la droite OA_1 est parallèle à la normale au point P de la surface (P) qui correspond à (A) par orthogonalité des éléments.

5. Posons

$$\mathrm{D} = \sum \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\sum \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\mathrm{D}' = \sum \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} = -\sum \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\sum \frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\mathrm{D}'' = \sum \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\sum \frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} \ (^1)$$

$$h = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} & \dfrac{\partial \mu}{\partial u} & \dfrac{\partial \nu}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} & \dfrac{\partial \mu}{\partial v} & \dfrac{\partial \nu}{\partial v} \end{vmatrix} = \sqrt{eg - f^2},$$

e, f et g étant les coefficients de l'élément linéaire de la représentation sphérique de la surface (A).

A l'aide de ces notations, on obtient sans peine les relations suivantes

$$h\left(\mu \frac{\partial z}{\partial u} - \nu \frac{\partial y}{\partial u}\right) = \mathrm{D}' \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \mathrm{D} \frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

$$h\left(\mu \frac{\partial z}{\partial v} - \nu \frac{\partial y}{\partial v}\right) = \mathrm{D}'' \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \mathrm{D}' \frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

et celles analogues obtenues en permutant x, y et z, λ, μ et ν.

En tenant compte de ces relations, l'équation (7) peut se mettre sous la forme

$$(8) \qquad \mathrm{D} \sum \frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} - 2\mathrm{D}' \sum \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \mathrm{D}'' \sum \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0.$$

Soient u et v les paramètres des lignes asymptotiques de la surface (A).

---

(1) D, D' et D'' sont identiques, à un facteur près, aux fonctions que Gauss a désignées par les mêmes lettres.

On aura

$$D = 0 \quad \text{et} \quad D'' = 0;$$

$$\frac{\nu\frac{\partial\mu}{\partial v} - \mu\frac{\partial\nu}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial v}} = \frac{\lambda\frac{\partial\nu}{\partial v} - \nu\frac{\partial\lambda}{\partial v}}{\frac{\partial y}{\partial v}} = \frac{\mu\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \lambda\frac{\partial\mu}{\partial v}}{\frac{\partial z}{\partial v}},$$

$$\frac{\mu\frac{\partial\nu}{\partial u} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}} = \frac{\nu\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \lambda\frac{\partial\nu}{\partial u}}{\frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{\lambda\frac{\partial\mu}{\partial u} - \mu\frac{\partial\lambda}{\partial u}}{\frac{\partial z}{\partial u}}.$$

L'équation (8) donnera alors

$$\sum \frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = \sum \frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0,$$

d'où

$$\frac{\frac{\partial x_1}{du}}{\nu\frac{\partial\mu}{\partial v} - \mu\frac{\partial\nu}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial u}}{\lambda\frac{\partial\nu}{\partial v} - \nu\frac{\partial\lambda}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial u}}{\mu\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \lambda\frac{\partial\mu}{\partial v}},$$

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial v}}{\mu\frac{\partial\nu}{\partial u} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial v}}{\nu\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \lambda\frac{\partial\nu}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial v}}{\lambda\frac{\partial\mu}{\partial u} - \mu\frac{\partial\lambda}{\partial u}},$$

et l'on aura enfin

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial v}}{\frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial v}}{\frac{\partial z}{\partial u}},$$

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial u}}{\frac{\partial y}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial u}}{\frac{\partial z}{\partial v}}.$$

M. Bianchi dit que deux surfaces sont *associées* lorsqu'elles se correspondent point par point avec parallélisme des plans tangents, de telle sorte qu'aux asymptotiques de la première correspond sur la seconde un réseau conjugué. On reconnaît alors très simplement :

1° Qu'aux asymptotiques de la seconde correspond sur la première un réseau conjugué;

2° Que les asymptotiques d'une des surfaces et les courbes qui leur correspondent sur la surface associée ont aux points correspondants des tangentes parallèles.

Les résultats que nous venons d'obtenir montrent que *les surfaces* (A) *et* (A_1) *sont associées.*

Si la surface (A) est une sphère, la surface associée (A_1) est une surface minima.

5. Les équations (5), (6) et (8) conduisent très simplement à l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre dont dépend le problème de la déformation infinitésimale des surfaces.

Posons, en effet,

$$\Sigma \lambda x_1 = p, \tag{9}$$

on aura, en tenant compte des équations (5) et (6),

$$\sum x_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial u}, \qquad \sum x_1 \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial v}. \tag{10}$$

Si, d'ailleurs, on pose

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} &= \alpha \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \alpha_1 \frac{\partial \lambda}{\partial v} - e\lambda, \\
\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} &= \beta \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \beta_1 \frac{\partial \lambda}{\partial v} - f\lambda, \\
\frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} &= \gamma \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \gamma_1 \frac{\partial \lambda}{\partial v} - g\lambda \text{ (1)},
\end{aligned}$$

avec les équations analogues obtenues en remplaçant λ soit par μ, soit

---

(1) α, α_1, β, β_1, γ et γ_1 sont les symboles de M. Cristoffel, dérivés de l'élément linéaire de la représentation sphérique de (A). (*Voir* le § 3 du Mémoire de M. Cosserat *Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces*). On a d'ailleurs

$$h\alpha = \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial v} & \frac{\partial \mu}{\partial v} & \frac{\partial \nu}{\partial v} \\ \lambda & \mu & \nu \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \nu}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \qquad h\alpha_1 = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u} & \frac{\partial \mu}{\partial u} & \frac{\partial \nu}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \nu}{\partial u^2} \end{vmatrix},$$

avec des expressions analogues pour β et β_1, γ et γ_1.

par ν, on aura

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \sum x_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} = \mathrm{T},$$

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \sum \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial v} - \sum x_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{T}',$$

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} - \sum x_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} = \mathrm{T}'',$$

où l'on a posé

$$\mathrm{T} = \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \alpha \frac{\partial p}{\partial u} - \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial v} + ep,$$

$$\mathrm{T}' = \frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial v} - \beta \frac{\partial p}{\partial u} - \beta_1 \frac{\partial p}{\partial v} + fp,$$

$$\mathrm{T}'' = \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} - \gamma \frac{\partial p}{\partial u} - \gamma_1 \frac{\partial p}{\partial v} + gp.$$

L'équation (8) devient alors

$$\mathrm{DT}'' - 2\mathrm{D}'\mathrm{T}' + \mathrm{D}''\mathrm{T} = 0: \tag{11}$$

c'est l'équation cherchée; *elle a pour caractéristiques les asymptotiques de* (A).

A toute solution p de cette équation correspond une surface caractéristique, dont on obtient les coordonnées en résolvant les équations (9) et (10), ce qui donne :

$$x_1 = p\lambda + \frac{\frac{\partial p}{\partial u}\left(\nu \frac{\partial \mu}{\partial v} - \mu \frac{\partial \nu}{\partial v}\right) + \frac{\partial p}{\partial v}\left(\mu \frac{\partial \nu}{\partial u} - \nu \frac{\partial \mu}{\partial u}\right)}{h},$$

avec des expressions analogues pour y_1 et z_1.

Cette surface, qui est évidemment l'enveloppe d'un plan parallèle au plan tangent à (A) en A, mené à une distance p de l'origine, définit une déformation infinitésimale de (A); nous dirons avec M. Bianchi que p est la *fonction caractéristique* de cette déformation.

On peut remarquer que l'équation (11) admet comme solution particulière les cosinus de l'angle que fait la normale à la surface (A) avec une direction fixe quelconque. A cette solution correspond le cas particulier déjà considéré où la surface (A) est simplement déplacée, mais non déformée.

Si, enfin, on rapporte (A) à ses lignes asymptotiques, l'équation (11) se réduit à

$$T = \frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial v} - \beta \frac{\partial p}{\partial u} - \beta_1 \frac{\partial p}{\partial v} + pf = 0.$$

6. On a, pour les coordonnées de la surface déformée (A′) les expressions suivantes :

$$x' = x + \varepsilon\xi,$$
$$y' = y + \varepsilon\eta,$$
$$z' = z + \varepsilon\zeta,$$

d'où

$$dx' = dx + \varepsilon(z_1\, dy - y_1\, dz),$$
$$dy' = dy + \varepsilon(x_1\, dz - z_1\, dx),$$
$$dz' = dz + \varepsilon(y_1\, dx - x_1\, dy).$$

De ces équations, on déduit immédiatement, en négligeant les puissances de ε supérieures à la première,

$$dx = dx' - \varepsilon(z_1\, dy' - y_1\, dz'),$$
$$dy = dy' - \varepsilon(x_1\, dz' - z_1\, dx'),$$
$$dz = dz' - \varepsilon(y_1\, dx' - x_1\, dy').$$

Si nous ajoutons ces équations après les avoir multipliées respectivement par λ, μ et ν, il vient :

$$dx'[\lambda + \varepsilon(\mu z_1 - \nu y_1)] + dy'[\mu + \varepsilon(\nu x_1 - \lambda y_1)] + dz'[\nu + \varepsilon(\lambda y_1 - \mu x_1)] = 0.$$

Si donc on désigne par λ', μ' et ν' les cosinus directeurs de la normale à la surface (A′), on aura

$$\lambda' = \lambda + \varepsilon(\mu z_1 - \nu y_1),$$
$$\mu' = \mu + \varepsilon(\nu x_1 - \lambda z_1),$$
$$\nu' = \nu + \varepsilon(\lambda y_1 - \mu x_1),$$

et, par suite,

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial u} = \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \varepsilon\left(\frac{\partial \mu}{\partial u} z_1 - \frac{\partial \nu}{\partial u} y_1 + \mu \frac{\partial z_1}{\partial u} - \nu \frac{\partial y_1}{\partial u}\right),$$
$$\frac{\partial \lambda'}{\partial v} = \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \varepsilon\left(\frac{\partial \mu}{\partial v} z_1 - \frac{\partial \nu}{\partial v} y_1 + \mu \frac{\partial z_1}{\partial v} - \nu \frac{\partial y_1}{\partial v}\right),$$

avec des expressions analogues pour les dérivées partielles de μ et de ν.

On a d'ailleurs

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + \varepsilon\left(z_1 \frac{\partial y}{\partial u} - y_1 \frac{\partial z}{\partial u}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{\partial x'}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} + \varepsilon\left(z_1 \frac{\partial y}{\partial v} - y_1 \frac{\partial z}{\partial v}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Si l'on désigne alors par $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}''$ les valeurs des fonctions D, D' et D'' pour la surface donnée, on trouve sans difficulté

$$\mathfrak{D} = -\sum \frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial \lambda'}{\partial u} = \mathrm{D} + \frac{\varepsilon}{h}(\mathrm{D'T} - \mathrm{DT'}),$$
$$\mathfrak{D}' = -\sum \frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial \lambda'}{\partial v} = \mathrm{D}' - \frac{\varepsilon}{h}(\mathrm{D'T'} - \mathrm{D''T}) = \mathrm{D}' - \frac{\varepsilon}{h}(\mathrm{DT''} - \mathrm{D'T'}),$$
$$\mathfrak{D}'' = -\sum \frac{\partial x'}{\partial v}\frac{\partial \lambda'}{\partial v} = \mathrm{D}'' + \frac{\varepsilon}{h}(\mathrm{D''T'} - \mathrm{D'T''}).$$

On a de même, pour la surface (A_1),

$$\Delta = -\mathrm{T}, \qquad \Delta' = -\mathrm{T}', \qquad \Delta'' = -\mathrm{T}''.$$

Soient u et v les paramètres du réseau conjugué à (A) et (A'). On aura

$$\mathrm{D}' = 0, \qquad \mathfrak{D}' = 0,$$

et, par suite,

$$\mathrm{T} = 0, \qquad \mathrm{T}'' = 0;$$

donc u et v sont les paramètres des lignes asymptotiques des (A_1).

Donc *aux lignes asymptotiques de la surface* (A_1) *correspond sur* (A) *un réseau conjugué qui reste conjugué dans la déformation.*

On peut énoncer aussi la proposition suivante :

Si u et v sont les paramètres d'un réseau conjugué à une surface (A) *et à une surface infiniment voisine* (A') *provenant de la déformation de* (A), *les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre*

$$\mathrm{T} = 0, \qquad \mathrm{T}'' = 0,$$

dans lesquelles n'entrent que les éléments linéaires de la représentation sphérique de (A), *ont une solution commune.*

Il résulte enfin, de ce qui précède, que le problème de la déformation infinitésimale d'une surface (A) revient à la détermination des réseaux conjugués, tracés sur cette surface, qui ont une représentation sphérique identique à celle des asymptotiques d'une surface, ou, ce qui revient au même, qui ont leurs invariants égaux.

7. Comme application, nous allons chercher si, parmi les déformations infinitésimales de (A), il y en a une qui conserve les lignes de courbure.

Soient alors u et v les paramètres des lignes de courbure de la surface (A); la représentation sphérique des lignes de courbure devant être identique à celle des asymptotiques d'une surface, on aura, d'après un théorème de M. Dini,

$$\frac{\partial\beta}{\partial u}=\frac{\partial\beta_1}{\partial v},$$

ou

$$\frac{\partial^2 \log e}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial^2 \log g}{\partial u\,\partial v}.$$

Donc, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une déformation infinitésimale conservant les lignes de courbure d'une surface (A) est que l'image sphérique des lignes de courbure de cette surface forme un réseau isotherme.

On peut alors poser

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}=\rho\,\frac{\partial\lambda}{\partial v},\qquad \frac{\partial y_1}{\partial u}=\rho\,\frac{\partial\mu}{\partial v},\qquad \frac{\partial z_1}{\partial u}=\rho\,\frac{\partial\nu}{\partial v},$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial v}=\sigma\,\frac{\partial\lambda}{\partial u},\qquad \frac{\partial y_1}{\partial v}=\sigma\,\frac{\partial\mu}{\partial u},\qquad \frac{\partial z_1}{\partial v}=\sigma\,\frac{\partial\nu}{\partial u}.$$

Les conditions d'intégrabilité de ces équations sont

$$\frac{\partial\rho}{\partial v}\,\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\rho\,\frac{\partial^2\lambda}{\partial v^2}=\frac{\partial\sigma}{\partial u}\,\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\sigma\,\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2},$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial v}\,\frac{\partial\mu}{\partial v}+\rho\,\frac{\partial^2\mu}{\partial v^2}=\frac{\partial\sigma}{\partial u}\,\frac{\partial\mu}{\partial u}+\sigma\,\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2},$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial v}\,\frac{\partial\nu}{\partial v}+\rho\,\frac{\partial^2\nu}{\partial v^2}=\frac{\partial\sigma}{\partial u}\,\frac{\partial\nu}{\partial u}+\sigma\,\frac{\partial^2\nu}{\partial u^2}.$$

Nous supposerons d'ailleurs que les paramètres u et v aient été particularisés de telle sorte qu'on ait

$$e=g.$$

Si alors, on ajoute les équations qui précèdent après les avoir multipliées respectivement, et à tour de rôle, par λ, μ et ν; $\frac{\partial\lambda}{\partial u}$, $\frac{\partial\mu}{\partial u}$, et $\frac{\partial\nu}{\partial u}$; $\frac{\partial\lambda}{\partial v}$, $\frac{\partial\mu}{\partial v}$, et $\frac{\partial\nu}{\partial v}$, il vient

$$\rho = \sigma,$$

$$e\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{1}{2}\rho\frac{\partial e}{\partial u} + \frac{\sigma}{2}\frac{\partial e}{\partial u} = 0$$

$$e\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \frac{1}{2}\sigma\frac{\partial e}{\partial v} + \frac{\rho}{2}\frac{\partial e}{\partial v} = 0.$$

Si l'on tient compte de la première équation, les deux dernières donnent

$$\frac{\partial(\sigma e)}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial(\sigma e)}{\partial v} = 0.$$

On a donc

$$\sigma e = C,$$

où C est une constante qu'on peut supposer égale à un.

Il vient alors

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{1}{e}\frac{\partial\lambda}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{1}{e}\frac{\partial\lambda}{\partial u},$$

avec des formules analogues pour les dérivées partielles de y_1 et de z_1, et l'on a

$$x_1 = \int\left(\frac{1}{e}\frac{\partial\lambda}{\partial v}du + \frac{1}{e}\frac{\partial\lambda}{\partial u}dv\right)\cdots$$

Il est facile de vérifier d'ailleurs que l'expression

$$p = \varepsilon\lambda x$$

est une solution commune des deux équations

$$T = 0 \qquad \text{et} \qquad T'' = 0.$$

Donc, *si l'on connaît les lignes de courbure d'une surface* (A) *ayant pour image sphérique de ses lignes de courbure un réseau isotherme, on peut trouver, par de simples quadratures, une déformation infinitésimale de* (A) *qui conserve ses lignes de courbure.*

Mais il est facile de voir que les lignes de courbure de cette famille de surfaces s'obtiennent, elles-mêmes, par de simples quadratures.

Rapportons, en effet, la surface aux lignes de longueur nulle de sa représentation sphérique. L'équation de ses lignes de courbure sera

$$D\,du^2 - D''dv^2 = 0.$$

Supposons qu'on ait

$$\frac{\partial^2 \log D}{\partial u \, \partial v} = \frac{\partial^2 \log D''}{\partial u \, \partial v}$$

ou

$$(12) \qquad UD'' - VD = 0,$$

U et V étant des fonctions de u et de v; respectivement l'équation des lignes de courbure deviendra

$$U \, du^2 - V \, dv^2 = 0.$$

Si donc on pose

$$\sqrt{U} \, du + \sqrt{V} \, dv = 2 \, du_1,$$
$$\sqrt{U} \, du - \sqrt{V} \, dv = 2 i \, dv_1,$$

u_1 et v_1 seront les paramètres des lignes de courbure de la surface, et l'on aura, pour l'élément linéaire de la représentation sphérique,

$$ds^2 = 2 f \, du \, dv = \frac{2 f}{\sqrt{UV}} (du_1^2 + dv_1^2);$$

donc u_1 et v_1 sont les paramètres d'un système isotherme de la représentation sphérique.

La réciproque est évidente : si les lignes de courbure d'une surface (A) ont pour image sphérique un réseau isotherme, l'équation (12) sera vérifiée et les lignes de courbure de la surface s'obtiendront par de simples quadratures.

Donc enfin, on peut énoncer la proposition suivante, plus générale que celle qui précède :

Si une surface (A) *admet, pour représentation sphérique de ses lignes de courbure, un réseau isotherme, on pourra obtenir, par de simples quadratures, une déformation infinitésimale de* (A) *conservant les lignes de courbure.*