
QUELQUES PROPRIÉTÉS
DES
SURFACES HARMONIQUES,

PAR M. L. RAFFY,

Maitre de Conférences à l'École Normale supérieure
et à la Faculté des Sciences de Paris.

J'appelle *surfaces harmoniques* les surfaces dont l'élément linéaire est réductible à la forme

$$ds^2 = [U(u) - V(v)](du^2 + dv^2),$$

qui a permis à Jacobi de trouver les lignes géodésiques des surfaces du second degré.

Les résultats du présent travail ⁽¹⁾ sont de nature diverse, mais se groupent naturellement ensemble à raison de la similitude des procédés qui les fournissent. Nous déterminons d'abord les surfaces harmoniques dont les lignes d'égal courbure sont parallèles, puis celles qui sont réglées. Enfin nous étudions les surfaces pour lesquelles le problème des cercles géodésiques admet une intégrale quadratique.

(1) Première Partie de mes *Recherches sur les surfaces harmoniques*, qui ont obtenu de l'Académie des Sciences une mention honorable dans le concours pour le prix Bordin (1892). L'auteur, ne devant pas se faire connaître, ne pouvait renvoyer à ses travaux antérieurs. La citation en sera faite en note, entre crochets. La deuxième Partie de ces *Recherches* a paru dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (4^e série, t. X, p. 331; 1894), la troisième et dernière dans les *Annales de l'École Normale supérieure* (3^e série, t. XII, p. 145; 1895).

CHAPITRE I.

LA MÉTHODE DE L'INTÉGRALE QUADRATIQUE POUR LES ÉLÉMENTS
LINÉAIRES DONNÉS SOUS LA FORME DE GAUSS.

1. Nous prendrons pour point de départ une proposition due à M. Massieu, qui est capitale dans la théorie des surfaces harmoniques et qui peut s'énoncer ainsi ⁽¹⁾ :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Pour qu'une surface d'élément linéaire*

$$(1) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

soit harmonique, il faut et il suffit que l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \quad \Delta(u, v; p, q) = \frac{Eq^2 - 2Fpq + Gp^2}{EG - F^2} = 1,$$

dont dépend la détermination de ses géodésiques, admette une intégrale quadratique

$$(3) \quad I = Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 = \text{const.},$$

dont le premier membre n'ait pas de facteur linéaire $\varepsilon p + \eta q$ commun avec le trinome $Eq^2 - 2Fpq + Gp^2$. Si, pour une valeur convenable de la constante S, la forme $I - S\Delta$ est le carré d'une fonction linéaire de p et de q , la surface considérée est applicable sur une surface de révolution.

Cette proposition fournit, on le voit, un moyen théorique de reconnaître si un élément linéaire donné est ou n'est pas harmonique. En effet, la condition connue pour que la relation (3) soit une intégrale de l'équation (2) est que l'on ait, pour toutes les valeurs de p et de q ,

$$(4) \quad \frac{\partial \Delta}{\partial u} \frac{\partial I}{\partial p} - \frac{\partial \Delta}{\partial p} \frac{\partial I}{\partial u} + \frac{\partial \Delta}{\partial v} \frac{\partial I}{\partial q} - \frac{\partial \Delta}{\partial q} \frac{\partial I}{\partial v} = 0.$$

⁽¹⁾ Voir DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, p. 30 à 34.

Le premier membre de cette équation est une forme binaire cubique en p et q . On égale à zéro les coefficients de p^3 , p^2q , pq^2 et q^3 , ce qui fournit quatre équations linéaires aux dérivées partielles entre les trois fonctions inconnues A , B et C des deux variables u et v et les coefficients E , F , G de l'élément linéaire. Il reste à reconnaître si ces équations admettent ou non des solutions communes.

Ce problème présente de grandes difficultés quand l'élément linéaire considéré dépend de fonctions inconnues. C'est ce qui arrive quand, s'étant donné seulement la forme analytique d'un élément linéaire, on veut déterminer les fonctions qui y entrent de manière à le rendre harmonique. Néanmoins on réussit parfois par l'emploi d'un procédé particulier que je vais indiquer (1).

2. Soit un élément linéaire donné sous la forme de Gauss

$$ds^2 = du^2 + G dv^2;$$

l'équation aux géodésiques est ici

$$\Delta = \frac{q^2}{G} + p^2 = 1.$$

Soit, comme plus haut, l'intégrale quadratique cherchée

$$I = Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 = \text{const.}$$

Formant le crochet $[\Delta, I]$ dont l'évanouissement exprime que I est une intégrale de l'équation $\Delta = 1$, on arrive à l'identité

$$q^2[(Ap + Bq)G'_u + (Bp + Cq)G'_v] + Gq(A'_v p^2 + 2B'_v pq + C'_v q^2) + G^2 p(A'_u p^2 + 2B'_u pq + C'_u q^2) = 0;$$

d'où, en égalant à zéro les coefficients des quatre termes de la forme cubique,

$$\begin{aligned} BG'_u + CG'_v + C'_v G &= 0, & A'_v G + 2B'_u G^2 &= 0, \\ AG'_u + BG'_v + 2B'_v G + C'_u G^2 &= 0, & A'_u G^2 &= 0. \end{aligned}$$

La dernière de ces équations montre que A est une fonction de v seulement. Nous écrirons donc désormais A' au lieu de A'_v , et nous mettrons les

(1) [L. RAFFY, Sur une classe de surfaces harmoniques (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CXII, p. 424; 1891)].

trois autres équations sous la forme suivante

$$(5) \quad \text{BG}'_u + (\text{CG})'_v = 0,$$

$$(6) \quad \text{AG}'_u + \text{G}^2 \text{C}'_u + 2\sqrt{\text{G}} (\text{B}\sqrt{\text{G}})'_v = 0,$$

$$(7) \quad \text{A}' + 2\text{GB}'_u = 0.$$

A la dernière ajoutons la première multipliée par 2; il vient

$$\text{A}' + 2(\text{CG})'_v + 2(\text{BG})'_u = 0.$$

Nous avons donc, en introduisant une nouvelle fonction inconnue μ ,

$$(8) \quad \text{A} + 2\text{CG} = \frac{\partial \mu}{\partial u},$$

$$(9) \quad 2\text{BG} = -\frac{\partial \mu}{\partial v}.$$

Ainsi, quand on connaîtra A et μ , les deux fonctions B et C seront explicitement déterminées. Si l'on porte les valeurs (8) et (9) de C et de B dans les équations (5) et (7), elles se réduisent l'une et l'autre à

$$(10) \quad \text{A}' = \text{G} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\text{G}} \frac{\partial \mu}{\partial v} \right).$$

Quant à l'équation (6), elle se transforme en celle-ci

$$(11) \quad \text{AG}'_u + \frac{\text{G}^2}{2} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\mu'_u - \text{A}}{\text{G}} - \sqrt{\text{G}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\mu'_v}{\sqrt{\text{G}}} = 0.$$

Il suffira donc qu'on puisse trouver deux fonctions, l'une μ dépendant de u et de v , l'autre A dépendant seulement de v , qui vérifient le système (10) et (11) pour que l'équation aux géodésiques

$$\Delta \equiv p^2 + \frac{q^2}{\text{G}} = 1$$

admette une intégrale quadratique. La condition est d'ailleurs nécessaire.

3. En vue des applications qui vont suivre, nous écrirons le système précédent d'une manière un peu différente. Divisons les deux membres de l'équation (10) par G et intégrons par rapport à u ; en introduisant une fonction W de v seulement, nous pourrons écrire

$$(10') \quad \frac{1}{\text{G}} \frac{\partial \mu}{\partial v} = \text{W} + \text{A}' \int \frac{du}{\text{G}},$$

et il viendra pour l'équation (11)

$$(11') \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{\mu'_u - 3A}{G} = \frac{2}{G\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \left[\sqrt{G} \left(W + A' \int \frac{du}{G} \right) \right].$$

Si la fonction G est d'une forme analytique telle qu'on puisse effectuer au moyen de symboles explicites les deux quadratures dont dépendent les deux dérivées partielles μ'_u et μ'_v , on n'aura plus qu'à poser

$$\frac{\partial \mu'_u}{\partial v} = \frac{\partial \mu'_v}{\partial u},$$

pour obtenir l'unique équation du problème. Cette équation ne contiendra, en dehors de la fonction G et de fonctions connues introduites par l'intégration, que trois fonctions inconnues d'une seule variable v , savoir A, W et la fonction V_1 qui s'ajoute comme constante au second membre de l'équation (11') intégrée par rapport à u . La question se trouvera ainsi simplifiée, puisqu'on n'aura plus à déterminer que des fonctions d'une seule variable. Dans ce qui va suivre, l'application de ce procédé conduit à la solution complète des questions proposées.

4. *Remarque I.* — Quand on sait que la fonction A est constante, on peut la supposer nulle. En effet, quand A est constant, on a

$$A \left(p^2 + \frac{q^2}{G} \right) = A = \text{const.},$$

en même temps que l'intégrale quadratique

$$Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 = \text{const.}$$

Il suffit de retrancher ces équations membre à membre pour obtenir une nouvelle intégrale

$$2Bpq + \left(C - \frac{A}{G} \right) q^2 = \text{const.},$$

où ne figure plus de terme en p^2 , ce qui justifie notre assertion.

Remarque II. — Quand A est constant, s'il en est de même de μ , l'intégrale quadratique disparaît. En effet, puisqu'on peut faire $A = 0$, les équations (8) et (9) se réduisent actuellement à

$$C = 0, \quad B = 0.$$

Comme A est nul aussi, l'intégrale quadratique cesse d'exister.

CHAPITRE II.

LES SURFACES HARMONIQUES A LIGNES D'ÉGALE COURBURE PARALLÈLES.

1. Le procédé de calcul indiqué au Chapitre précédent va nous donner une proposition importante pour la théorie des surfaces harmoniques et qu'il semble difficile d'établir autrement.

THÉORÈME. — *Toute surface harmonique dont les lignes d'égale courbure sont parallèles est applicable sur une surface de révolution.*

L'élément linéaire des surfaces dont les lignes d'égale courbure $u = \text{const.}$ sont parallèles est de la forme

$$ds^2 = du^2 + \frac{(U - V)^2}{U'} dv^2,$$

et, pour qu'il convienne à une surface de révolution, il faut et il suffit que la courbure géodésique des courbes $u = \text{const.}$ soit indépendante de v :

$$\frac{1}{\rho_u} = \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{U - V}{\sqrt{U'}} = \frac{U'}{U - V} - \frac{1}{2} \frac{U''}{U} = f(u);$$

c'est-à-dire que la fonction V doit se réduire à une constante. Il n'y a d'exception que si la courbure totale de la surface est invariable, cas que notre analyse nous fournira. Or, pour que l'élément linéaire

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + G dv^2$$

soit réductible à la forme harmonique, il faut et il suffit (Chapitre I, n° 3) qu'on puisse, en choisissant convenablement les deux fonctions A et W de la seule variable v , satisfaire aux deux équations

$$(2) \quad \frac{1}{G} \frac{\partial \mu}{\partial v} = W + A' \int \frac{du}{G},$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{v'_u - 3A}{G} \right) = \frac{2}{G\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \left[\sqrt{G} \left(W + A' \int \frac{du}{G} \right) \right].$$

2. Dans le cas présent, nous nous donnons

$$(4) \quad G = \frac{(U - V)^2}{U'};$$

on peut alors effectuer la quadrature indiquée, et il vient

$$(2') \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{(U - V)^2}{U'} \left(W - \frac{A'}{U - V} \right) = W \frac{(U - V)^2}{U'} - A' \frac{U - V}{U'},$$

d'où l'on déduit par différentiation

$$(5) \quad \frac{\partial \mu}{\partial u \partial v} = -W \frac{U''}{U'^2} (U - V)^2 + \left(2W + A' \frac{U''}{U'^2} \right) (U - V) - A'.$$

Quant à la formule (3), elle devient

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{U'(\mu'_u - 3A)}{(U - V)^2} = \frac{{}_2U'}{(U - V)^3} \frac{\partial}{\partial v} [(U - V)W - A'] = 2 \frac{U'W'}{(U - V)^2} - (V'W + A'') \frac{{}_2U'}{(U - V)^3}.$$

L'intégration est immédiate; elle introduit une nouvelle fonction inconnue V_1 de v :

$$\frac{U'(\mu'_u - 3A)}{(U - V)^2} = V_1 - \frac{{}_2W'}{U - V} + \frac{V'W + A''}{(U - V)^2}.$$

Nous avons donc la valeur explicite de μ'_u

$$(3') \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = V_1 \frac{(U - V)^2}{U'} - {}_2W' \frac{U - V}{U'} + \frac{V'W + A''}{U'} + 3A,$$

ce qui nous fournit une nouvelle expression de la dérivée seconde

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} = V_1' \frac{(U - V)^2}{U'} - 2(V'V_1 + W'') \frac{U - V}{U'} + \frac{{}_2V'W' + (V'W)' + A'''}{U'} + 3A'.$$

La seule condition d'existence de la fonction auxiliaire μ et, par suite, de l'intégrale quadratique est donc l'identité des deux expressions (5) et (6). On est ainsi conduit à l'équation indéterminée

$$(7) \quad (WU'' + V_1'U')(U - V)^2 - [{}_2WU'^2 + A'U'' + {}_2U'(V_1V' + W'')](U - V) + [{}_2V'W' + (V'W)' + A''']U' + 4AU'^2 = 0.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit de traiter. Il y figure quatre fonctions

inconnues de ν , savoir A, V, W et V_1 et une seule fonction U de u . Comme cette fonction ne peut se réduire à une constante, nous la prendrons pour nouvelle variable et nous poserons

$$U' = U_1, \quad U'' = \frac{dU'}{du} = U_1 U_1',$$

l'accent désignant maintenant la dérivée de U_1 par rapport à U . On peut supprimer le facteur U , commun à tous les termes, et faire pour abrégier

$$(8) \quad V_2 = 2V'W' + (V'W)' + A'', \quad V_3 = 2(V_1V' + W'').$$

Enfin, effectuons et groupons les termes de manière que chacun d'eux soit le produit d'une fonction de ν par une fonction de u ; nous arrivons à cette nouvelle forme de l'équation proposée

$$(9) \quad W(U^2U_1' - 2UU_1) - (2VW + A')UU_1' + (VW + A')VU_1' + 2(VW + 2A')U_1 \\ + V_1U^2 - (2VV_1 + V_3)U + (V^2V_1 + VV_3 + V_2) = 0.$$

3. Nous allons prouver que, si l'on exclut l'hypothèse $V = \text{const.}$ qui donne les surfaces à courbure variable applicables sur les surfaces de révolution, cette équation (9) n'admet pas d'autres solutions que celles qui correspondent aux surfaces à courbure totale constante. A cet effet, cherchons la forme la plus générale de l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + \frac{(U - V)^2}{U'} d\nu^2,$$

qui correspond à une courbure totale constante. On sait qu'avec l'élément linéaire (1) la courbure totale a pour expression

$$-\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = \frac{-U_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial U} \left(U_1 \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial U} \right), \quad U_1 = \frac{dU}{du}.$$

Si dans cette formule nous faisons

$$\sqrt{G} = \frac{U - V}{\sqrt{U_1}},$$

nous trouvons par un calcul facile

$$-\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = U_1 \sqrt{U_1} \frac{d^2 \sqrt{U_1}}{du^2}.$$

Nous devons donc avoir, en effectuant le second membre,

$$2U_1U_1'' - U_1'^2 = \text{const.}$$

Il suffit de différentier cette relation pour trouver $U_1''' = 0$; c'est-à-dire que U_1 ou U' est un trinôme du second degré en U . Les surfaces à courbure constante sont donc caractérisées par $U_1''' = 0$; la fonction V reste arbitraire.

Revenons maintenant à l'équation (9). On voit immédiatement que, quand on prend pour U_1 un trinôme du second degré en U , elle se réduit à

$$LU^2 + MU + N = 0,$$

L, M, N étant trois fonctions de ν . On devra donc, pour la vérifier, poser

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

ce qui fera trois équations seulement entre les quatre fonctions V, A', W et V_1 . On pourra donc se donner arbitrairement la première et déterminer les trois autres. A raison des constantes que l'intégration introduit, il y aura une infinité d'intégrales quadratiques; en effet, l'élément linéaire des surfaces à courbure constante est réductible d'une infinité de manières à la forme harmonique.

4. Il nous reste à prouver que l'équation (9) n'admet aucune solution quand on suppose $V' \neq 0$ et $U_1''' \neq 0$. Pour cela, nous différentions son premier membre trois fois successivement par rapport à U , ce qui donne

$$(10) \quad W(U^2U_1' - 2UU_1)''' - (2VW + A')(UU_1)''' + V(VW + A')U_1^{IV} + 2(VW + 2A')U_1''' = 0.$$

Afin de pouvoir diviser tous les termes par WU_1''' , montrons que W doit être supposé différent de zéro. En effet, quand $W = 0$, l'équation (10) se réduit à

$$A'(VU_1^{IV} + U_1''' - UU_1^{IV}) = 0.$$

Donc la parenthèse est nulle, ou bien A' est nul. Pour que la parenthèse soit nulle, V n'étant pas constant, il faut supposer $U_1''' = 0$, ce qui ramène aux surfaces à courbure constante.

D'autre part, je dis que A' n'est pas nul. Car, si A' est nul en même temps que W , l'équation (2) donne $\mu'_\nu = 0$; la dérivée seconde $\mu''_{\nu\nu}$ est donc

nulle aussi, en sorte que l'équation (6) devient

$$V'_1(U - V) - {}_2V'V_1 = 0,$$

ce qui entraîne $V'_1 = 0$ et, puisque V' n'est pas nul, $V_1 = 0$. Mais on a vu que A peut être supposé nul quand il est constant. Alors l'équation (3') donne $\mu'_u = 0$. Ainsi les deux dérivées de μ sont nulles; μ se réduit à une constante, et il n'y a plus d'intégrale quadratique (Chap. I, n° 4). Donc, en résumé, W n'est pas nul.

5. Nous pouvons en conséquence diviser l'équation (10) par le produit WU''_1 . Ensuite nous égalons à zéro la dérivée seconde de son premier membre prise par rapport à U et à v , ce qui donnera

$$(11) \quad \left({}_2V + \frac{A'}{W} \right)' \frac{d}{dU} \frac{(UU'_1)'''}{U''_1} = \left(v^2 + v \frac{A'}{W} \right)' \frac{d}{dU} \frac{U''_1}{U''_1}.$$

Je vais prouver qu'on ne peut supposer nulle ni la fonction de U qui figure au second membre, ni la fonction de v qui figure au premier.

Posons en effet

$$Q = \frac{U''_1}{U''_1}, \quad Q' = \frac{dQ}{dU}.$$

L'équation (11) deviendra

$$(11') \quad \left({}_2V + \frac{A'}{W} \right)' (Q + UQ') = \left(v^2 + v \frac{A'}{W} \right)' Q'.$$

Si nous supposons

$${}_2V + \frac{A'}{W} = \text{const.} = m,$$

elle se réduit à

$$V'(m - {}_2V)Q' = 0,$$

ce qui montre que Q est une constante.

D'autre part, en effectuant les calculs dans l'équation (10) et divisant par WU''_1 , on trouve

$$(10') \quad QU^2 + 4U - \left({}_2V + \frac{A'}{W} \right) (QU + 3) + \left(v^2 + v \frac{A'}{W} \right) Q + 2 \left(v + 2 \frac{A'}{W} \right) = 0,$$

relation impossible, car son premier membre est un trinôme du second

degré en U qui ne peut s'évanouir que si ses trois coefficients sont nuls; donc d'abord il faudrait prendre $Q = 0$; mais alors le terme en U a pour coefficient 4 et ne peut disparaître. Ainsi, on ne peut pas faire l'hypothèse

$$\left(2V + \frac{A'}{W}\right)' = 0.$$

On ne peut pas non plus supposer $Q' = 0$. Car, en vertu de l'équation (11'), cette hypothèse entraîne soit la précédente, qui vient d'être exclue, soit l'hypothèse $Q = 0$, incompatible avec l'équation (10').

6. Les deux fonctions que nous venons de considérer étant différentes de zéro, nous pouvons diviser les deux membres de l'équation (11') par leur produit, ce qui donne

$$(12) \quad \frac{(QU)'}{Q'} = \frac{\left(V^2 + V \frac{A'}{W}\right)'}{\left(2V + \frac{A'}{W}\right)'} = \text{const.} = n.$$

De là on déduit, en intégrant et désignant par a et b deux nouvelles constantes arbitraires,

$$QU = nQ + a, \quad V^2 + V \frac{A'}{W} = 2nV + n \frac{A'}{W} + b,$$

ou encore

$$Q = \frac{a}{U - n}, \quad \frac{A'}{W} = - \frac{V^2 - 2nV - b}{V - n}.$$

Substituons ces valeurs de Q et de $A' : W$ dans l'équation (10'); nous trouvons

$$a \frac{U^2 + b}{U - n} + 4U + (a - 1) \frac{V^2 - 2nV - b}{V - n} - 2(a + 2)V = 0.$$

Les termes qui dépendent de U et ceux qui dépendent de V devant séparément être constants, nous poserons

$$a \frac{U^2 + b}{U - n} + 4U + c = 0, \quad (a - 1) \frac{V^2 - 2nV - b}{V - n} - 2(a + 2)V - c = 0.$$

Chassant les dénominateurs, on aura deux trinomes, l'un en U , l'autre en V , qui devront être identiquement nuls. Annulant les coefficients de U^2

et de V^2 , on arrive aux deux conditions contradictoires

$$a + 4 = 0, \quad a + 5 = 0.$$

Ainsi, les solutions $V' = 0$ et $U_1''' = 0$ sont les seules qu'admette l'équation (9). Toutes deux ne donnent que des surfaces applicables sur des surfaces de révolution, puisque les surfaces à courbure constante sont applicables sur des surfaces de révolution. Notre théorème est donc complètement démontré.



CHAPITRE III.

LES SURFACES RÉGLÉES HARMONIQUES.

1. Les combinaisons analytiques dont nous avons donné le principe au Chapitre I s'appliquent avec succès à l'élément linéaire des surfaces réglées et conduisent, comme on va le voir, à la proposition suivante (1) :

THÉORÈME. — *Si l'on fait abstraction des surfaces qui ont même cône directeur que la sphère, il n'y a pas d'autres surfaces réglées harmoniques que celles qui sont applicables sur le plan, sur les surfaces de révolution ou sur les surfaces du second degré.*

Pour établir ce théorème, nous examinerons séparément les surfaces gauches qui n'ont pas de plan directeur tangent au cercle de l'infini et celles qui admettent un pareil plan directeur.

I. — Surfaces n'admettant pas de plan directeur tangent au cercle de l'infini.

2. Leur élément linéaire peut toujours être mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G dv^2, \quad G = (u - \alpha)^2 + k^2,$$

en désignant par α et k deux fonctions de la seule variable v . La fonction k est essentiellement différente de zéro dans les surfaces gauches : c'est le paramètre de distribution. Nous supposons en outre que les deux dérivées α' et k' ne sont pas nulles à la fois ; car alors on aurait des surfaces réglées applicables sur la surface de révolution qui a reçu le nom d'*alysséide*.

Nous allons déterminer α et k de manière que l'équation aux géodésiques admette une intégrale quadratique. Pour cela, il faut et il suffit (Chap. I, n° 3) qu'on puisse trouver trois fonctions, l'une μ dépendant de u et de v , les deux autres A et W dépendant seulement de v et qui vérifient les deux

(1) [L. RAFFY, *Détermination des surfaces harmoniques réglées* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CX, p. 223; 1890)].

équations

$$(1) \quad \frac{1}{\mathbf{G}} \frac{\partial \mu}{\partial v} = \mathbf{W} + \mathbf{A}' \int \frac{du}{\mathbf{G}},$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{\mu'_u - 3\mathbf{A}}{\mathbf{G}} = \frac{2}{\mathbf{G}\sqrt{\mathbf{G}}} \frac{\partial}{\partial v} \left[\sqrt{\mathbf{G}} \left(\mathbf{W} + \mathbf{A}' \int \frac{du}{\mathbf{G}} \right) \right].$$

Grâce à la forme particulière de la fonction \mathbf{G} , on peut, sans connaître α et k , effectuer la quadrature

$$\int \frac{du}{\mathbf{G}} = \int \frac{du}{(u - \alpha)^2 + k^2} = \frac{1}{k} \text{arc tang } \frac{u - \alpha}{k}.$$

Par suite, l'équation (1) devient

$$(1') \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = [(u - \alpha)^2 + k^2] \left(\mathbf{W} + \frac{\mathbf{A}'}{k} \text{arc tang } \frac{u - \alpha}{k} \right)$$

et donne une première expression de la dérivée μ''_{uv}

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} = \mathbf{A}' + 2(u - \alpha) \left(\mathbf{W} + \frac{\mathbf{A}'}{k} \text{arc tang } \frac{u - \alpha}{k} \right).$$

D'autre part, l'équation (2) devient

$$(2') \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\mathbf{G}} \frac{\partial \mu}{\partial u} \right) \\ &= 3\mathbf{A} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\mathbf{G}} + 2 \frac{kk' - \alpha'(u - \alpha)}{[(u - \alpha)^2 + k^2]^2} \left(\mathbf{W} + \frac{\mathbf{A}'}{k} \text{arc tang } \frac{u - \alpha}{k} \right) \\ &+ \frac{2}{(u - \alpha)^2 + k^2} \left[\mathbf{W}' + \left(\frac{\mathbf{A}'}{k} \right)' \text{arc tang } \frac{u - \alpha}{k} - \frac{\mathbf{A}' k'(u - \alpha) + k\alpha'}{(u - \alpha)^2 + k^2} \right], \end{aligned}$$

en désignant par des accents les dérivées prises par rapport à v . Intégrons par rapport à u , ce qui introduit une nouvelle fonction arbitraire \mathbf{V} de v ; nous aurons, en séparant les termes de forme différente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{G}} \frac{\partial \mu}{\partial u} &= \mathbf{V} + \frac{3\mathbf{A}}{\mathbf{G}} + \frac{2\mathbf{W}'}{k} \text{arc tang } \frac{u - \alpha}{k} \\ &+ \frac{1}{k} \left(\frac{\mathbf{A}'}{k} \right)' \left(\text{arc tang } \frac{u - \alpha}{k} \right)^2 + \left(\mathbf{W}\alpha' + \frac{\mathbf{A}'k'}{k} \right) \frac{1}{\mathbf{G}} \\ &+ 2(\mathbf{W}kk' - \mathbf{A}'\alpha') \int \frac{du}{[(u - \alpha)^2 + k^2]^2} \\ &+ 2\mathbf{A}'k' \int \frac{\text{arc tang } \frac{u - \alpha}{k}}{[(u - \alpha)^2 + k^2]^2} du - 2\mathbf{A}'\frac{\alpha'}{k} \int \frac{(u - \alpha) \text{arc tang } \frac{u - \alpha}{k}}{[(u - \alpha)^2 + k^2]^2} du. \end{aligned}$$

Les quadratures indiquées peuvent s'effectuer et l'on trouve, tous calculs faits, après avoir multiplié par G,

$$(4) \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = V k^2 + 3A + W \alpha' + \frac{5}{4} \frac{A' k'}{k} + \frac{1}{k} \left(W k' - \frac{3}{2} \frac{A' \alpha'}{k} \right) (u - \alpha) \\ + \left(V - \frac{A' k'}{4 k^3} \right) (u - \alpha)^2 + \frac{A' \alpha'}{k} \operatorname{arc tang} \frac{u - \alpha}{k} \\ + \frac{A' k'}{k^2} (u - \alpha) \operatorname{arc tang} \frac{u - \alpha}{k} + N [(u - \alpha)^2 + k^2] \operatorname{arc tang} \frac{u - \alpha}{k} \\ + M [(u - \alpha)^2 + k^2] \left(\operatorname{arc tang} \frac{u - \alpha}{k} \right)^2,$$

en posant pour abrégier

$$N = \frac{2 W'}{k} + \frac{2 W k k' - 3 A' \alpha'}{2 k^3}, \quad M = \frac{2 A'' k - A' k'}{2 k^3}.$$

3. Il faut maintenant identifier la dérivée de μ'_u prise par rapport à v avec l'expression (3).

A cet effet, remarquons que la dérivée prise par rapport à v du second membre de l'équation (4) contient le terme

$$\frac{A'}{k} \frac{2 \alpha' k' (u - \alpha) + k (\alpha'^2 - k'^2)}{(u - \alpha)^2 + k^2},$$

qui n'a pas d'analogue dans la formule (3). Il faut donc que l'on ait, quel que soit u ,

$$A' [2 \alpha' k' (u - \alpha) + k (\alpha'^2 - k'^2)] = 0.$$

Or, pour que la fonction linéaire de u qui multiplie A' fût identiquement nulle, il faudrait

$$\alpha' = k' = 0,$$

hypothèse exclue. Il reste donc $A' = 0$, c'est-à-dire que A est une constante. L'équation (3) se réduit alors à

$$(3') \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} = 2 W (u - \alpha).$$

Mais on a vu (Chap. I, n° 4) que, quand la fonction A est constante, on peut la supposer nulle. Dans la relation (4), faisons donc $A = 0$; il reste

$$(4') \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = V k^2 + W \alpha' + \frac{W k'}{k} (u - \alpha) + V (u - \alpha)^2 \\ + \frac{2 W' k + W k'}{k^2} [(u - \alpha)^2 + k^2] \operatorname{arc tang} \frac{u - \alpha}{k}.$$

La différentiation par rapport à v donne, entre autres, un terme en arc tang $\frac{u-\alpha}{k}$, qui a pour coefficient

$$\frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{2\mathbf{W}'k + \mathbf{W}k'}{k^2} [(u-\alpha)^2 + k^2] \right\},$$

et qui doit disparaître, puisqu'il n'existe pas dans la formule (3'). En conséquence, l'expression

$$\frac{2\mathbf{W}'k + \mathbf{W}k'}{k^2} (u^2 - 2\alpha u + \alpha^2 + k^2)$$

doit être une fonction de u seulement, ce qui ne peut avoir lieu, en dehors de l'hypothèse exclue $\alpha' = k' = 0$, que si l'on suppose

$$2\mathbf{W}'k + \mathbf{W}k' = 0.$$

On tire de là, en désignant par h une constante arbitraire,

$$(5) \quad \mathbf{W} = \frac{h}{\sqrt{k}}.$$

L'équation (4') se simplifie encore

$$(4'') \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = \mathbf{V}k^2 + \frac{h\alpha'}{\sqrt{k}} + \frac{hk'}{k\sqrt{k}}(u-\alpha) + \mathbf{V}(u-\alpha)^2.$$

On voit que \mathbf{V} doit être une constante pour que la dérivée μ''_{uv} ne contienne pas de terme en $(u-\alpha)^2$. Effectuons maintenant la différentiation par rapport à v du second membre de l'équation (4''); le résultat doit être, en vertu des relations (3') et (5), identique à $2h(u-\alpha) : \sqrt{k}$. On doit donc avoir identiquement

$$\frac{2h(u-\alpha)}{\sqrt{k}} = \left(\mathbf{V}k^2 + \frac{h\alpha'}{\sqrt{k}} \right)' + \left[h \left(\frac{k'}{k\sqrt{k}} \right)' - 2\mathbf{V}\alpha' \right] (u-\alpha) - h \frac{\alpha'k'}{k\sqrt{k}},$$

d'où résultent les deux équations

$$(6) \quad \left(\mathbf{V}k^2 + h \frac{\alpha'}{\sqrt{k}} \right)' - h \frac{\alpha'k'}{k\sqrt{k}} = 0,$$

$$(7) \quad \frac{h}{2} \left(\frac{k'}{k\sqrt{k}} \right)' - \mathbf{V}\alpha' - \frac{h}{\sqrt{k}} = 0.$$

Il faut, puisque α' est multiplié par V dans la seconde, distinguer deux cas, suivant que V est différent de zéro ou égal à zéro.

4. *Premier cas.* — Supposons d'abord la constante V différente de zéro. De l'équation (7) on tire

$$(8) \quad \alpha' = \frac{h}{2V} \left[\left(\frac{k'}{k\sqrt{k}} \right)' - \frac{2}{\sqrt{k}} \right],$$

et, substituant dans la précédente, on trouve

$$(9) \quad \frac{d}{dv} \left\{ V k^2 + \frac{h^2}{2V\sqrt{k}} \left[\left(\frac{k'}{k\sqrt{k}} \right)' - \frac{2}{\sqrt{k}} \right] \right\} - \frac{h^2}{2V} \frac{k'}{k\sqrt{k}} \left[\left(\frac{k'}{k\sqrt{k}} \right)' - \frac{2}{\sqrt{k}} \right] = 0.$$

Telle est l'équation du troisième ordre qui détermine le paramètre de distribution k .

Nous allons l'intégrer. Remarquons, au préalable, que la constante h n'est pas nulle. Car si elle l'était, les équations (6) et (7) entraîneraient $\alpha' = k' = 0$, contrairement à nos hypothèses. Nous pouvons donc désigner par $gh^2 : 2V$ la constante qui s'introduit quand on intègre les trois termes de l'équation (9). Il vient alors

$$(10) \quad V k^2 + \frac{h^2}{2V\sqrt{k}} \left[\left(\frac{k'}{k\sqrt{k}} \right)' - \frac{2}{\sqrt{k}} \right] - \frac{h^2}{2V} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{k'}{k\sqrt{k}} \right)^2 + \frac{2}{k} + g \right] = 0,$$

ce qui est une équation du second ordre. Pour la simplifier, nous poserons

$$\rho = \frac{1}{k}, \quad \frac{2V^2}{h^2} = n,$$

ce qui donne, après quelques réductions,

$$(10') \quad \frac{n}{\rho^2} - \rho'' - 4\rho - g = 0.$$

Multiplions par la dérivée ρ' et intégrons; soit m la constante arbitraire; nous aurons

$$-4\rho^3 - 2g\rho^2 + m\rho - 2n = \rho\rho'^2 = \rho \left(\frac{d\rho}{dv} \right)^2,$$

d'où l'on déduit

$$(11) \quad dv = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{-4\rho^3 - 2g\rho^2 + m\rho - 2n\rho}}.$$

Telle est la quadrature elliptique dont dépendent ρ et, par suite, son inverse k .

Quant à la fonction α , on peut aussi l'exprimer en fonction de ρ en intégrant l'équation (8). On trouve ainsi

$$(12) \quad \sqrt{2n} \alpha = -\frac{\sqrt{-4\rho^3 - 2g\rho^2 + m\rho - 2n}}{\rho} - 2 \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{-4\rho^3 - 2g\rho^2 + m\rho - 2n}}.$$

On connaît donc les deux fonctions cherchées α et k de la variable v . Si l'on se rappelle que l'angle ω sous lequel la ligne de striction coupe les génératrices d'une surface réglée est donné par la formule

$$k \cot \omega = \alpha' = \frac{dx}{dv},$$

on voit que la relation (8) donne

$$\frac{1}{\rho} \cot \omega = -\frac{h}{V} \left(\sqrt{\rho} + \frac{d^2 \sqrt{\rho}}{dv^2} \right).$$

L'équation (11) permet de calculer explicitement le second membre; on trouve ainsi, en remplaçant ρ en fonction de k ,

$$(13) \quad \cot \omega = \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{2n}} (m - 4nk).$$

Cette formule nous servira bientôt, ainsi que la formule (11), à établir que les surfaces réglées qui viennent d'être trouvées sont applicables sur l'hyperboloïde.

5. *Second cas.* — Nous supposons maintenant $V = 0$. Si l'on fait, en outre, $h = 0$, il est clair qu'on vérifie les équations (6) et (7); mais alors les formules (3') et (4'') donnent

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0,$$

et nous avons vu (Chap. I, n° 4) que, quand A et μ se réduisent à des constantes, l'intégrale quadratique disparaît. Il faut donc supposer $h \neq 0$, et, supprimant ce facteur, on a

$$(6') \quad \left(\frac{\alpha'}{\sqrt{k}} \right)' - \frac{k'}{k} \frac{\alpha'}{\sqrt{k}} = 0,$$

$$(7') \quad -\frac{1}{2} \left(\frac{k'}{k\sqrt{k}} \right)' + \frac{1}{\sqrt{k}} = 0.$$

La seconde de ces équations n'est autre que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)'' + \frac{1}{\sqrt{k}} = 0.$$

On peut, sans restreindre la généralité, prendre pour son intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \beta \sin v,$$

au lieu de $\beta \sin(v - v_0)$, en désignant par β une constante arbitraire. On a donc

$$(14) \quad k = \frac{1}{\beta^2 \sin^2 v}.$$

D'autre part, l'équation (G') donne, avec une nouvelle constante γ ,

$$(15) \quad \frac{\alpha'}{\sqrt{k}} = \gamma k, \quad \alpha' = \gamma k \sqrt{k},$$

d'où, en ayant égard à la formule (14),

$$\alpha = \gamma \int k \sqrt{k} dv = \frac{\gamma}{\beta^3} \int \frac{dv}{\sin^3 v} = \frac{\gamma}{2\beta^3} \left(\log \operatorname{tang} \frac{v}{2} - \frac{\cos v}{\sin^2 v} \right) + \text{const.}$$

Ainsi se trouvent complètement déterminées les deux fonctions α et k dans l'hypothèse $V = 0$. Il suit de la relation (15) et de la formule rappelée plus haut que la ligne de striction coupe les génératrices sous un angle ω tel que

$$(16) \quad \cot \omega = \gamma \sqrt{k} = \frac{\gamma}{\beta \sin v}.$$

6. Pour être en droit d'affirmer que les éléments linéaires trouvés dans les deux cas $V \neq 0$ et $V = 0$ conviennent bien à des surfaces harmoniques, il faudrait calculer les coefficients de l'intégrale quadratique et discuter les deux cas d'exception prévus par la règle posée au début de ce travail. Mais nous allons montrer directement que ces deux éléments linéaires appartiennent à des quadriques, ce qui lèvera toute difficulté.

Commençons par le dernier, celui que déterminent les formules (14) et (15). Je dis qu'il existe un parabolôïde admettant cet élément linéaire. En effet, si dans la formule

$$ds^2 = du^2 + [(u - \alpha)^2 + k^2] dv^2$$

on introduit la variable

$$l = u - \alpha,$$

qui représente la distance du point (u, ν) au point central, il vient

$$(17) \quad ds^2 = (dl + dz)^2 + (l^2 + k^2) d\nu^2 = dl^2 + 2\alpha' dl d\nu + (l^2 + k^2 + \alpha'^2) d\nu^2.$$

Dans le cas présent nous avons

$$k = \frac{1}{\beta^2 \sin^2 \nu}, \quad \alpha' = \frac{\gamma}{\beta^3 \sin^3 \nu};$$

de sorte que notre élément linéaire peut s'écrire

$$(18) \quad ds^2 = dl^2 + \frac{2\gamma}{\beta^3} \frac{dl d\nu}{\sin^3 \nu} + \left(l^2 + \frac{1}{\beta^4 \sin^4 \nu} + \frac{\gamma^2}{\beta^6 \sin^6 \nu} \right) d\nu^2.$$

Or, si l'on considère la surface dont les coordonnées rectangulaires ont pour expressions

$$x = l \cos \nu - \frac{\gamma}{2\beta^3 \sin^3 \nu},$$

$$y = l \sin \nu - \frac{\gamma}{\beta^3} \cot \nu,$$

$$z = \frac{1}{\beta^2} \cot \nu,$$

on trouve aisément que son élément linéaire est représenté par la formule (18). D'autre part, l'élimination des deux paramètres l et ν se fait immédiatement et donne

$$\beta z \left(\beta y - \frac{\gamma}{2} z + \gamma \right) - x - \frac{\gamma}{2\beta^3} = 0,$$

ce qui est l'équation d'un paraboloides. Par là il est démontré tout à la fois que l'élément linéaire obtenu dans l'hypothèse $V = 0$ est harmonique et qu'il ne convient qu'à des surfaces applicables sur des paraboloides. Cet élément linéaire est le suivant

$$ds^2 = du^2 + [(u - \alpha)^2 + k^2] d\nu^2,$$

$$k = \frac{1}{\beta^2 \sin^2 \nu}, \quad \alpha = \frac{\gamma}{2\beta^3} \left(\log \operatorname{tang} \frac{\nu}{2} - \frac{\cos \nu}{\sin^2 \nu} \right).$$

7. Revenons maintenant à l'élément linéaire trouvé en premier lieu,

dans l'hypothèse $V \neq 0$, et que nous mettons sous la forme

$$ds^2 = dl^2 + 2\alpha' dl dv + (l^2 + k^2 + \alpha'^2) dv^2,$$

en posant, conformément aux équations (13) et (11),

$$(19) \quad 4\sqrt{\frac{n}{2}}\alpha' = \frac{m - 4nk}{\sqrt{k}},$$

$$(20) \quad \left(\frac{dk}{dv}\right)^2 = k^2(-4 - 2gk + mk^2 - 2nk^3).$$

Nous allons prouver que, quelles que soient les constantes g , m et n , on peut toujours trouver un hyperboloïde admettant cet élément linéaire. A cet effet, nous donnerons, mais sans les démontrer, certaines formules dont on ne saurait se passer quand on veut étudier l'hyperboloïde au point de vue de la théorie des surfaces réglées.

Soit, en coordonnées rectangulaires, l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

On peut évidemment poser

$$x = \frac{au}{r} \cos \varphi - a \sin \varphi, \quad y = \frac{bu}{r} \sin \varphi + b \cos \varphi, \quad z = \frac{cu}{r},$$

en faisant, pour abrégé,

$$r = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + c^2}.$$

Avec ces notations, on trouve, pour le paramètre de distribution,

$$k = -\frac{abc r^2}{P}, \quad P = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 + c^4 - c^2 r^2,$$

et pour l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 - 2\frac{r^2 - c^2}{r} du d\varphi + \left(\frac{P u^2}{r^4} + 2c^2 \frac{a^2 - b^2}{r^3} u \sin \varphi \cos \varphi + r^2 - c^2\right) d\varphi^2.$$

On en conclut que la valeur de u , qui correspond au point central, est

$$\alpha = -\frac{c^2(a^2 - b^2)}{P} r \sin \varphi \cos \varphi,$$

et, si l'on introduit la distance $l = u - \alpha$ comptée à partir de ce point, l'élément linéaire devient

$$ds^2 = \left\{ dl - \left[\frac{r^2 - c^2}{r} + c^2(a^2 - b^2) \left(\frac{r \sin \varphi \cos \varphi}{\mathbf{P}} \right)' \right] d\varphi \right\}^2 + \frac{\mathbf{P}}{r^4} (l^2 + k^2) d\varphi^2,$$

l'accent désignant une dérivée prise par rapport à φ . Or, si l'on compare avec la formule générale

$$ds^2 = (dl + d\alpha)^2 + (l^2 + k^2) dv^2,$$

on obtient les deux relations

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{r^2 dv}{\sqrt{\mathbf{P}}}, \\ d\alpha &= - \left[\frac{r^2 - c^2}{r} + c^2(a^2 - b^2) \left(\frac{r \sin \varphi \cos \varphi}{\mathbf{P}} \right)' \right] d\varphi, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \left(\frac{dk}{dv} \right)^2 &= \frac{r^4}{\mathbf{P}} \left(\frac{dk}{d\varphi} \right)^2, \\ \alpha' = \frac{d\alpha}{dv} &= - \frac{r^2}{\sqrt{\mathbf{P}}} \left[\frac{r^2 - c^2}{r} + c^2(a^2 - b^2) \left(\frac{r \sin \varphi \cos \varphi}{\mathbf{P}} \right)' \right]. \end{aligned}$$

8. Pour former la première de ces équations, il suffit de différentier par rapport à φ l'expression donnée plus haut

$$k = \frac{-abc r^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 + c^4 - c^2 r^2},$$

et de réintroduire partout k à la place de φ . On trouve ainsi

$$(20') \quad \left(\frac{dk}{dv} \right)^2 = \frac{4k^2}{a^2 b^2 c^2} (ak + bc)(bk + ac)(ck - ab).$$

De même, en effectuant les calculs dont dépend l'expression explicite de α' et tenant compte de la valeur de k , on élimine φ et l'on trouve

$$(19') \quad \alpha' = - \frac{1}{\sqrt{-abck}} \left(2k - \frac{a^2 b^2 - b^2 c^2 - c^2 a^2}{abc} \right).$$

Pour établir la proposition annoncée, il n'y a plus qu'à montrer qu'on peut identifier à la fois les formules (20) et (20') d'une part, ainsi que les

formules (19) et (19') d'autre part. La comparaison des deux premières donne

$$-a^2 b^2 c^2 = -\frac{n^2}{4}, \quad a^2 b^2 - b^2 c^2 - c^2 a^2 = -\frac{m}{2n^2}, \quad a^2 + b^2 - c^2 = \frac{4g}{n},$$

et l'on vérifie aisément que ces trois relations entraînent l'identité des formules (19) et (19'). En conséquence, on voit que l'élément linéaire obtenu dans l'hypothèse $V \neq 0$ convient à l'hyperboloïde dont les demi-axes sont a, b, c quand on prend pour a^2, b^2 et $-c^2$ les racines de l'équation

$$t^3 - \frac{4g}{n} t^2 - \frac{m}{2n^2} t + \frac{n^2}{4} = 0.$$

Notre théorème est donc démontré en ce qui concerne les surfaces réglées sans plan directeur tangent au cercle de l'infini.

II. — Surfaces admettant un plan directeur tangent au cercle de l'infini.

9. Leur élément linéaire peut toujours être mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + (pu + q) dv^2,$$

où p et q désignent deux fonctions de la seule variable v . Or la fonction p n'est pas nulle, sans quoi la surface serait développable. Nous pouvons donc faire $p = 1$. Enfin posons $q = -\alpha$ et remarquons que la dérivée α' n'est pas nulle; car si α était une constante, on aurait l'élément linéaire d'une surface de révolution. Soit donc désormais

$$ds^2 = du^2 + G dv^2, \quad G = u - \alpha, \quad (\alpha' \neq 0).$$

Nous aurons, en conservant toujours les mêmes notations,

$$(1) \quad \frac{1}{G} \frac{\partial \mu}{\partial v} = W + A' \int \frac{du}{G},$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{\mu'_u - 3A}{G} = \frac{2}{G\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \left[\sqrt{G} \left(W + A' \int \frac{du}{G} \right) \right].$$

Or l'intégration donne

$$\int \frac{du}{G} = \int \frac{du}{u - \alpha} = \log(u - \alpha),$$

en sorte qu'il vient d'après l'équation (1)

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} = (u - \alpha)[W + A' \log(u - \alpha)].$$

On déduit de là une première expression de μ''_{uv}

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} = A' \log(u - \alpha) + A' + W.$$

Calculons maintenant le second membre de l'équation (2); il vient

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(u - \alpha)\sqrt{u - \alpha}} \frac{\partial}{\partial u} \{ \sqrt{u - \alpha} [W + A' \log(u - \alpha)] \} \\ &= \frac{2W'}{u - \alpha} - \frac{(W + 2A')\alpha'}{(u - \alpha)^2} + 2A'' \frac{\log(u - \alpha)}{u - \alpha} - A'\alpha' \frac{\log(u - \alpha)}{(u - \alpha)^2}. \end{aligned}$$

Multiplions chaque terme par du et intégrons en faisant usage de la formule

$$\int \frac{\log t}{t^2} dt = -\frac{1}{t} (\log t + 1);$$

soit V la fonction de v qui s'introduit comme constante arbitraire. L'équation (2) ainsi intégrée nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial u} &= 3A + V(u - \alpha) + (W + 3A')\alpha' \\ &+ A'\alpha' \log(u - \alpha) + 2W'(u - \alpha) \log(u - \alpha) + A''(u - \alpha)[\log(u - \alpha)]^2. \end{aligned}$$

10. Si nous différencions par rapport à v , nous trouverons entre autres le terme $-A'\alpha'^2 : (u - \alpha)$ qui n'a pas d'analogue dans l'expression précédemment trouvée pour μ''_{uv} . En conséquence, comme α' est supposé différent de zéro, la dérivée A' doit être nulle, c'est-à-dire que A est une constante.

Cette constante peut être supposée nulle (Chap. I, n° 4, *Rem. I*). Alors la valeur de μ'_u se simplifie

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = V(u - \alpha) + W\alpha' + 2W'(u - \alpha) \log(u - \alpha),$$

ainsi que celle de μ''_{uv} , qui se réduit à W . Comme elle ne contient pas de terme logarithmique, il faut évaluer à zéro le coefficient du terme en $\log(u - \alpha)$, trouvé en différenciant μ'_u par rapport à v . On a donc, *quel*

que soit u ,

$$\frac{\partial}{\partial v} [W'(u - \alpha)] = 0,$$

c'est-à dire que le binôme $W'u - W'\alpha$ ne dépend pas de v . Comme α ne peut pas être supposé constant, on conclut de là que W' est nul. Donc W est une constante. Il vient alors, en comparant les deux expressions de μ''_{uv} , l'identité

$$W\alpha'' - V\alpha' + V'(u - \alpha) = W;$$

d'où l'on déduit

$$V = \text{const.}, \quad W\alpha'' - V\alpha' = W.$$

La constante W ne peut être nulle, sans quoi V serait nulle aussi; les deux dérivées μ'_u et μ'_v s'évanouiraient; l'intégrale quadratique disparaîtrait (Chap. I, n° 4, *Rem.* II).

11. Par contre, la constante V peut être nulle. D'où deux cas à distinguer.

Supposons d'abord $V \neq 0$ et soit $V = W : a$. Nous avons, pour déterminer α , l'équation

$$\alpha'' - \frac{\alpha'}{a} = 1,$$

qui donne, en désignant par v_0 et b deux constantes arbitraires,

$$\alpha = -a(v - v_0) - a^2 + be^{\frac{v}{a}}.$$

On aura donc, en faisant rentrer dans u la constante $a(v_0 + a)$, cet élément linéaire

$$(21) \quad ds^2 = du^2 + \left(u + av - be^{\frac{v}{a}} \right) dv^2.$$

Remarquons que la constante b n'est pas nulle, sans quoi nous aurions l'élément linéaire d'un paraboloid de révolution. Nous pouvons donc faire le changement de variables

$$u + av - a^2 = a(\rho + \rho_1), \quad u + av - be^{\frac{v}{a}} = -\rho\rho_1,$$

qui serait impossible si b était nul. Effectuant les calculs, on trouve aisément

$$(21') \quad ds^2 = (\rho - \rho_1) \left[\frac{\rho d\rho^2}{(\rho + a)^2} - \frac{\rho_1 d\rho_1^2}{(\rho_1 + a)^2} \right],$$

ce qui est une forme dégénérée de l'élément linéaire des quadriques rapportées à leurs lignes de courbure.

Supposons maintenant $V = 0$; il vient $\alpha'' = 1$, ce qui permet, sans restreindre la généralité, de prendre $2\alpha = v^2$, de sorte que l'élément linéaire est, dans ce cas particulier,

$$(22) \quad ds^2 = du^2 + \left(u - \frac{v^2}{2}\right) dv^2.$$

Il suffit de faire le changement de variables

$$v = \rho + \rho_1, \quad \frac{v^2}{2} - u = \rho\rho_1$$

pour trouver par un calcul facile

$$(22') \quad ds^2 = (\rho - \rho_1)(\rho d\rho^2 - \rho_1 d\rho_1^2),$$

ce qui est encore une forme dégénérée de l'élément linéaire des quadriques. Notre théorème est donc entièrement démontré. Des quatre formes que nous avons trouvées pour l'élément linéaire des surfaces réglées harmoniques, la première convient toujours à un hyperboloïde, les trois dernières appartiennent toujours à des paraboloides; mais, pour les éléments linéaires (21) et (22), le paraboloid ne peut être réel, puisqu'il admet un plan directeur, et un seul, tangent au cercle de l'infini.

Remarque. — L'analyse par laquelle nous avons obtenu tous les éléments linéaires des surfaces réglées harmoniques montre que l'intégrale quadratique de l'équation aux géodésiques est, pour ces surfaces, unique et parfaitement déterminée. Il suit de là que ces éléments linéaires ne sont réductibles *que d'une seule manière* à la forme harmonique. Nous avons donc démontré que *toutes les quadriques sont simplement harmoniques*, abstraction faite bien entendu de la sphère, que nous avons écartée dès le début.



CHAPITRE IV.

LES CERCLES GÉODÉSQUES ET LES SURFACES HARMONIQUES.

1. Les surfaces applicables sur les surfaces de révolution sont les seules, à ma connaissance du moins, dont on ait déterminé complètement les cercles géodésiques. M. Darboux (1), après avoir étendu aux cercles géodésiques la méthode de recherche des lignes géodésiques qui procède du théorème de Jacobi, a déterminé par deux quadratures les cercles géodésiques des surfaces de révolution. Nous nous proposons d'étudier ici les intégrales linéaires et quadratiques de l'équation aux cercles géodésiques. A cet effet, nous rappellerons la règle posée par M. Darboux.

Pour chercher sur les surfaces d'élément linéaire

$$ds^2 = 4\lambda dx dy$$

les courbes dont la courbure géodésique est donnée et égale à k, on détermine deux fonctions M et N, assujetties à l'unique condition

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 2ik\lambda$$

et l'on forme l'équation aux dérivées partielles

$$\nabla \equiv \frac{(p + M)(q + N)}{\lambda} = 1, \quad p = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Si l'on en peut trouver une intégrale θ qui dépende, ainsi que l'une au moins de ses dérivées p et q , d'une constante arbitraire a , l'équation finie des courbes cherchées s'obtient en égalant à une nouvelle constante arbitraire la dérivée de θ par rapport à a .

On est donc conduit à chercher s'il existe des intégrales

$$I(p, q, x, y) = \text{const.}$$

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III; Livre IV, Chap. VII.

compatibles avec $\nabla = 1$, c'est-à-dire telles que le crochet

$$[\nabla, I] = \frac{\partial \nabla}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial p} - \frac{\partial \nabla}{\partial y} \frac{\partial I}{\partial q} + \frac{\partial \nabla}{\partial p} \frac{\partial I}{\partial x} - \frac{\partial \nabla}{\partial q} \frac{\partial I}{\partial y}$$

soit nul en vertu de la seule hypothèse $\nabla - 1 = 0$. C'est faire, pour les cercles géodésiques, ce que M. Massieu a fait pour les lignes géodésiques. Mais ici l'expression ∇ n'étant pas homogène en p et q , on ne peut plus, comme dans le problème de M. Massieu, supposer homogènes les intégrales I , ce qui simplifiait considérablement les calculs.

I. — Intégrales linéaires.

2. Du résultat obtenu par M. Darboux on déduit aisément que, pour les surfaces applicables sur les surfaces de révolution, l'équation aux cercles géodésiques

$$\nabla \equiv \frac{(p + M)(q + N)}{\lambda} = 1$$

admet l'intégrale linéaire

$$I = p - q = \text{const.}$$

Nous allons voir que la réciproque de cette proposition est vraie. Supposons, en effet, que l'équation aux cercles géodésiques admette une intégrale linéaire

$$I = Ap + Bq + C = \text{const.},$$

où A , B et C sont des fonctions encore inconnues de x et y . Écrivons que le crochet $[\nabla, I]$ est nul en vertu de $\nabla - 1 = 0$. Comme c'est une fonction quadratique de p et de q , on devra avoir, quels que soient p et q ,

$$[\nabla, I] = \rho(\nabla - 1),$$

en désignant par ρ une fonction convenablement choisie de x et y . Le calcul effectué conduit à l'identité

$$\begin{aligned} & \left[A \left(\frac{1}{\lambda} \right)'_x + B \left(\frac{1}{\lambda} \right)'_y \right] (p + M)(q + N) \\ & + \frac{AM'_x + BM'_y}{\lambda} (q + N) + \frac{AN'_x + BN'_y}{\lambda} (p + M) \\ & - \frac{q + N}{\lambda} (A'_x p + B'_x q + C'_x) - \frac{p + M}{\lambda} (A'_y p + B'_y q + C'_y) = \rho \left[\frac{(p + M)(q + N)}{\lambda} - 1 \right]. \end{aligned}$$

On voit que le premier membre ne doit contenir ni terme en p^2 ni terme en q^2 . Donc on a

$$B'_x = 0, \quad A'_y = 0.$$

D'après cela, on peut, sans restreindre la généralité, prendre

$$B = 1, \quad A = 1.$$

On n'exclut ainsi que l'hypothèse où l'une des fonctions A et B serait nulle. Or, en supposant, par exemple, $B = 0$ avec $A = 1$, on est conduit aux relations d'identification

$$\rho = -\frac{\lambda'_x}{\lambda}, \quad M'_x = C'_x, \quad N'_x = C'_y, \quad (MN)'_x - (NC'_x + MC'_y) = \lambda'_x,$$

d'où l'on conclut $\lambda'_x = 0$. Les surfaces correspondantes sont développables.

Soit donc désormais $A = B = 1$. La comparaison des termes en pq dans les deux membres donne

$$(1) \quad \rho = -\frac{\lambda'_x + \lambda'_y}{\lambda},$$

et l'identité à vérifier se réduit à

$$(2) \quad (M'_x + M'_y - C'_x)q + (N'_x + N'_y - C'_x)p + (MN)'_x + (MN)'_y - (NC'_x + MC'_y) = \lambda'_x + \lambda'_y;$$

d'où les trois relations

$$(3) \quad C'_x = M'_x + M'_y, \quad C'_y = N'_x + N'_y, \quad \lambda'_x + \lambda'_y = (MN)'_x + (MN)'_y - (NC'_x + MC'_y).$$

Or, en vertu des deux premières, la dernière devient $\lambda'_x + \lambda'_y = 0$. Il en résulte que λ est une fonction de $x - y$ seulement; d'où la conclusion annoncée :

Les seules surfaces pour lesquelles l'équation aux cercles géodésiques admette une intégrale linéaire sont les surfaces applicables sur les surfaces de révolution.

M. Massieu a démontré la même propriété relativement aux *lignes* géodésiques. On voit que son théorème peut être généralisé et étendu aux *cercles* géodésiques.

3. Pour compléter la solution de notre problème, nous avons à écrire la condition

$$\frac{\partial C'_x}{\partial y} = \frac{\partial C'_y}{\partial x},$$

qui nous donne cette relation entre M et N

$$(4) \quad N''_{x^2} - M''_{yy} = - (N''_{xy} - M''_{y^2}).$$

Rappelons-nous, d'autre part, que M et N vérifient aussi l'équation

$$(5) \quad N'_x - M'_y = 2ik\lambda \quad (k = \text{const.}).$$

Mais, λ étant une fonction de $x - y$, les deux dérivées λ'_x et λ'_y sont égales et de signes contraires, ce qui entraîne l'équation (4). La relation (5) est donc la seule qui régit les fonctions M et N . Donc il y a une infinité de manières d'écrire l'équation aux cercles géodésiques, à chacune desquelles correspond une intégrale linéaire. Il va sans dire que, dans tous les cas, on trouve la même équation finie pour ces courbes. En vue de l'obtenir, posons

$$\lambda = f'(x - y), \quad N'_x = ik f'(x - y) + \mu''_{yx}, \quad M'_y = -ik f'(x - y) + \mu''_{xy},$$

de manière à vérifier l'équation (5), quelle que soit la fonction arbitraire μ''_{xy} . De là nous déduisons

$$\begin{aligned} N &= ik f(x - y) + \mu'_y, & M &= ik f(x - y) + \mu'_x, \\ N'_y &= -ik f'(x - y) + \mu''_{y^2}, & M'_x &= ik f'(x - y) + \mu''_{x^2}. \end{aligned}$$

Portons les valeurs de M'_x , M'_y , N'_x , N'_y dans les deux premières équations (3). Il vient

$$C'_x = M'_x + M'_y = \mu''_{x^2} + \mu''_{xy}, \quad C'_y = N'_x + N'_y = \mu''_{xy} + \mu''_{y^2},$$

d'où, en intégrant,

$$C = \mu'_x + \mu'_y.$$

L'intégrale linéaire est donc entièrement déterminée

$$I = p + q + \mu'_x + \mu'_y = \text{const.} = 2a.$$

Rapprochons-en l'équation $\nabla = 1$. Nous obtenons le système

$$\begin{aligned} (p + ikf + \mu'_x)(q + ikf + \mu'_y) &= f', \\ (p + ikf + \mu'_x)(q + ikf + \mu'_y) &= 2a + 2kif, \end{aligned}$$

dont la résolution donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial x} &= p = a - \mu'_x + \sqrt{(a + ikf)^2 - f'}, \\ \frac{\partial\theta}{\partial y} &= q = a - \mu'_y - \sqrt{(a + ikf)^2 - f'}.\end{aligned}$$

En conséquence, la fonction θ est déterminée par une seule quadrature

$$\theta = a(x + y) - \mu + \int \sqrt{[a + ikf(x - y)]^2 - f'(x - y)} d(x - y),$$

et l'équation finie des cercles géodésiques est la suivante :

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} \equiv x + y + \int \frac{[a + ikf(x - y)] d(x - y)}{\sqrt{[a + ikf(x - y)]^2 - f'(x - y)}} = \text{const.}$$

La fonction λ ayant été donnée sous la forme $f'(x - y)$, la solution du problème dépend bien de deux quadratures, conformément au résultat de M. Darboux.

II. — Intégrales quadratiques.

4. Nous allons rechercher maintenant dans quels cas l'équation aux cercles géodésiques

$$\nabla \equiv \frac{(p + M)(q + N)}{\lambda} = 1$$

admet une intégrale quadratique

$$I \equiv Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 + 2ap + 2bq + 2c = \text{const.}$$

On sait que l'équation aux *lignes* géodésiques

$$\frac{pq}{\lambda} = 1$$

admet une intégrale quadratique

$$Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 = \text{const.}$$

dans deux cas et deux seulement : 1° quand l'élément linéaire $\lambda dx dy$ est de la forme

$$ds^2 = [x + \eta(y)] dx dy,$$

la fonction $\eta(y)$ étant arbitraire, auquel cas il ne convient généralement qu'à des surfaces imaginaires; 2° quand l'élément linéaire $\lambda dx dy$ est de la forme

$$ds^2 = [\varphi(x+y) - f(x-y)] dx dy,$$

quelles que soient les fonctions φ et f , résultat capital dû à M. Massieu.

Dans le problème relatif aux *cercles* géodésiques, nous retrouverons les deux mêmes formes d'élément linéaire, mais plus déterminées, car elles ne dépendront que de constantes et non plus de fonctions arbitraires. En effet, l'existence d'une intégrale quadratique pour l'équation aux *cercles* géodésiques impose à l'élément linéaire des conditions plus restrictives que l'existence d'une intégrale quadratique pour l'équation aux *lignes* géodésiques, ce fait analytique étant supposé se produire pour une valeur constante *quelconque* de la courbure géodésique k , au lieu de la seule valeur $k = 0$.

Nous avons à exprimer que le crochet

$$[\nabla, \mathbf{I}] = \frac{\partial \nabla}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial p} - \frac{\partial \nabla}{\partial p} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x} + \frac{\partial \nabla}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial q} - \frac{\partial \nabla}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial y}$$

est nul en vertu de $\nabla - \mathbf{I} = 0$, ou qu'il est identique à

$$2(\alpha p + \beta q + \gamma)[(p + \mathbf{M})(q + \mathbf{N}) - \lambda],$$

α , β et γ étant des fonctions convenables de x et y .

Remarquons d'abord que l'équation $\nabla = \mathbf{I}$ permet d'exprimer le produit pq par une fonction linéaire de p et de q , en sorte que, dans l'intégrale \mathbf{I} , nous pouvons supposer $\mathbf{B} = 0$. Le calcul du crochet $[\nabla, \mathbf{I}]$ s'effectue aisément et nous arrivons à l'identité suivante :

$$\begin{aligned} & 2(\mathbf{A}p + a) \left[\left(\frac{\mathbf{I}}{\lambda} \right)'_x (p + \mathbf{M})(q + \mathbf{N}) + \frac{\mathbf{M}'_x}{\lambda} (q + \mathbf{N}) + \frac{\mathbf{N}'_x}{\lambda} (p + \mathbf{M}) \right] - \frac{q + \mathbf{N}}{\lambda} (\mathbf{A}'_x p^2 + \mathbf{C}'_x q^2 + 2a'_x p + 2b'_x q + 2c'_x) \\ & + 2(\mathbf{C}q + b) \left[\left(\frac{\mathbf{I}}{\lambda} \right)'_y (p + \mathbf{M})(q + \mathbf{N}) + \frac{\mathbf{M}'_y}{\lambda} (q + \mathbf{N}) + \frac{\mathbf{N}'_y}{\lambda} (p + \mathbf{M}) \right] - \frac{p + \mathbf{M}}{\lambda} (\mathbf{A}'_y p^2 + \mathbf{C}'_y q^2 + 2a'_y p + 2b'_y q + 2c'_y) \\ & \equiv 2(\alpha p + \beta q + \gamma)[(p + \mathbf{M})(q + \mathbf{N}) - \lambda]. \end{aligned}$$

On voit que le premier membre ne doit contenir ni terme en p^3 , ni terme en q^3 ; donc les dérivées \mathbf{A}'_y et \mathbf{C}'_x sont nulles. Ainsi \mathbf{A} ne dépend que de x et \mathbf{C} ne dépend que de y . Il faut distinguer deux cas, suivant que le produit $\mathbf{A}\mathbf{C}$ est nul ou différent de zéro.

5. *Premier cas.* — Le produit AC est nul. Ses deux facteurs ne peuvent être nuls, ce qui réduirait l'intégrale I au premier degré. Soit donc $C = 0$. Nous supposons aussi $A = 1$, moyennant un changement de variable qui ne porte que sur x . Alors l'identité à vérifier devient

$$\begin{aligned} (p + \alpha) \left[\left(\frac{1}{\lambda} \right)'_x (p + \mathbf{M})(q + \mathbf{N}) + \frac{\mathbf{M}'_x}{\lambda} (q + \mathbf{N}) + \frac{\mathbf{N}'_x}{\lambda} (p + \mathbf{M}) \right] - \frac{q + \mathbf{N}}{\lambda} (a'_x p + b'_x q + c'_x) \\ + b \left[\left(\frac{1}{\lambda} \right)'_y (p + \mathbf{M})(q + \mathbf{N}) + \frac{\mathbf{M}'_y}{\lambda} (q + \mathbf{N}) + \frac{\mathbf{N}'_y}{\lambda} (p + \mathbf{M}) \right] - \frac{p + \mathbf{M}}{\lambda} (a'_y p + b'_y q + c'_y) \\ \equiv (\alpha p + \beta q + \gamma)[(p + \mathbf{M})(q + \mathbf{N}) - \lambda]. \end{aligned}$$

Son premier membre ne contient pas de terme en pq^2 . Donc β est nul, ce qui réduit le second membre à une fonction linéaire de q . Le premier devant aussi en être une, la dérivée b'_x est nulle et b ne dépend que de y .

Soit d'abord $b = 0$. L'identification donne six équations d'où l'on tire aisément

$$\begin{aligned} \alpha = \left(\frac{1}{\lambda} \right)'_x, \quad \gamma = \mathbf{M} \left(\frac{1}{\lambda} \right)'_x, \quad \mathbf{N}'_x = \alpha'_y, \quad \mathbf{M} = a - \frac{\eta}{\lambda}, \\ c = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\eta^2}{2\lambda^2} + \mathbf{Y}, \quad c'_y = \alpha\alpha'_y - \lambda'_x, \end{aligned}$$

en désignant par η et \mathbf{Y} deux fonctions provisoirement indéterminées de y . Comparant les expressions de c et de c'_y , on trouve

$$\lambda'_x = \frac{\eta}{\lambda} \left(\frac{\eta}{\lambda} \right)'_y - \mathbf{Y}' = 2ik\eta - \mathbf{Y}',$$

parce que l'équation $\mathbf{N}'_x - \mathbf{M}'_y = 2ik\lambda$ se réduit ici à $\left(\frac{\eta}{\lambda} \right)'_y = 2ik\lambda$. On a donc

$$\lambda = (2ik\eta - \mathbf{Y}')x + \varphi(y).$$

Substituant cette expression dans la relation précédente

$$\lambda\eta' - \eta\lambda'_y - 2ik\lambda^3 = 0,$$

on trouve

$$2ik\eta - \mathbf{Y}' = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\eta}{\varphi(y)} = 2ik\varphi(y),$$

d'où l'on conclut d'abord que la surface est développable, λ'_x étant nul;

puis, calculant η et Y pour avoir c , on trouve $2c = \alpha^2 + \text{const.}$, en sorte que l'intégrale I se réduit au carré de $p + a$; ce n'est plus qu'une intégrale linéaire.

Lorsque b n'est pas nul, nous pouvons, au moyen d'un changement de variable portant sur y , faire $b = 1$. L'identité proposée devient

$$\begin{aligned} (p+a) \left[\left(\frac{1}{\lambda} \right)'_x (p+\mathbf{M})(q+\mathbf{N}) + \frac{\mathbf{M}'_x}{\lambda} (q+\mathbf{N}) + \frac{\mathbf{N}'_x}{\lambda} (p+\mathbf{M}) \right] - \frac{q+\mathbf{N}}{\lambda} (a'_x p + c'_x) \\ + \left[\left(\frac{1}{\lambda} \right)'_y (p+\mathbf{M})(q+\mathbf{N}) + \frac{\mathbf{M}'_y}{\lambda} (q+\mathbf{N}) + \frac{\mathbf{N}'_y}{\lambda} (p+\mathbf{M}) \right] - \frac{p+\mathbf{M}}{\lambda} (a'_y p + c'_y) \\ \equiv (\alpha p + \gamma) [(p+\mathbf{M})(q+\mathbf{N}) - \lambda]. \end{aligned}$$

Les deux membres sont linéaires par rapport à $q + \mathbf{N}$. Identifions les coefficients de $q + \mathbf{N}$ et les termes indépendants :

$$\begin{aligned} (p+a) \left[\left(\frac{1}{\lambda} \right)'_x (p+\mathbf{M}) + \frac{\mathbf{M}'_x}{\lambda} \right] - \frac{a'_x p + c'_x}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda} \right)'_y (p+\mathbf{M}) + \frac{\mathbf{M}'_y}{\lambda} \equiv (\alpha p + \gamma) (p+\mathbf{M}), \\ \frac{1}{\lambda} [\mathbf{N}'_x (p+a) + \mathbf{N}'_y - a'_y p - c'_y] (p+\mathbf{M}) \equiv -\lambda (\alpha p + \gamma). \end{aligned}$$

La seconde de ces identités donne

$$\mathbf{N}'_x = a'_y, \quad \alpha = -\frac{a\mathbf{N}'_x + \mathbf{N}'_y - c'_y}{\lambda^2}, \quad \gamma = -\frac{(a\mathbf{N}'_x + \mathbf{N}'_y - c'_y)\mathbf{M}}{\lambda^2}.$$

La première devient par suite

$$\begin{aligned} (p+a) [-\lambda'_x (p+\mathbf{M}) + \lambda \mathbf{M}'_x] - \lambda (a'_x p + c'_x) - \lambda'_y (p+\mathbf{M}) + \lambda \mathbf{M}'_y \\ \equiv - (a\mathbf{N}'_x + \mathbf{N}'_y - c'_y) (p+\mathbf{M})^2. \end{aligned}$$

Ordonnant son premier membre par rapport à $p + \mathbf{M}$, on trouve, par identification,

$$\lambda'_x = a\mathbf{N}'_x + \mathbf{N}'_y - c'_y, \quad [\lambda(\mathbf{M}-a)]'_x = \lambda'_y, \quad (\mathbf{M}a)_x - \mathbf{M}\mathbf{M}'_x + \mathbf{M}'_y - c'_x = 0;$$

ce qui, à raison de $\mathbf{N}'_x = a'_y$, peut s'écrire

$$\begin{aligned} c'_y = aa'_y + \mathbf{N}'_y - \lambda'_x, \quad c'_x = (\mathbf{M}a)'_x - \mathbf{M}\mathbf{M}'_x + \mathbf{M}'_y, \\ \lambda'_y = [\lambda(\mathbf{M}-a)]'_x, \quad \mathbf{N}'_x = a'_y. \end{aligned}$$

6. Telles sont les quatre équations du problème. Les deux premières feront connaître c quand les autres fonctions seront déterminées; mais

elles entraînent la condition d'intégrabilité $c''_{yx} = c''_{xy}$, qui, eu égard à $N'_x = a'_y$, peut s'écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{(\mathbf{M} - a)^2}{2} - \frac{\partial^2(\mathbf{M} - a)}{\partial y^2} = \lambda''_{x'}$$

Aux deux dernières équations $\lambda'_y = [\lambda(\mathbf{M} - a)]'_x$, $N'_x = a'_y$, il faut adjoindre la relation $N'_x - \mathbf{M}'_y = 2ik\lambda$.

L'élimination de \mathbf{N} et de λ se fait aisément et donne

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{(\mathbf{M} - a)^2}{2} - \frac{\partial^2(\mathbf{M} - a)}{\partial y^2} = 0.$$

De ce résultat et de celui qui précède, on conclut que la dérivée $\lambda''_{x'}$ est nulle; c'est-à-dire que λ est une fonction linéaire de x

$$\lambda = xY' + \eta',$$

Y' et η' étant deux fonctions de y . L'élément linéaire $\lambda dx dy$ a donc bien, comme nous l'annoncions au début, la forme

$$ds^2 = (xY' + \eta') dx dy,$$

qui a été trouvée par M. S. Lie (1) pour les surfaces représentables géométriquement sur d'autres surfaces avec conservation d'une seule famille de lignes de longueur nulle. Mais ici les fonctions Y' et η' ne sont pas arbitraires. Substituons en effet l'expression de λ dans les équations

$$\begin{aligned} \lambda'_y &= [\lambda(\mathbf{M} - a)]'_x, & -2ik\lambda &= \mathbf{M}'_y - N'_x = \mathbf{M}'_y - a'_y; \\ \text{il vient} & & & \\ [\lambda(\mathbf{M} - a)]'_x &= xY'' + \eta'', & (\mathbf{M} - a)'_y &= -2ik(xY' + \eta'), \end{aligned}$$

d'où, en intégrant et désignant par η_0 et ξ deux fonctions, l'une de y , l'autre de x , on tire

$$(xY' + \eta')(\mathbf{M} - a) = \frac{x^2}{2}Y'' + \eta''x + \eta_0, \quad \mathbf{M} - a = -2ikxY - 2ik(\xi + \eta).$$

Éliminant $\mathbf{M} - a$, nous arrivons à cette équation différentielle indéterminée

$$(1) \quad 2ik(xY' + \eta')(xY + \xi + \eta) + \frac{x^2}{2}Y'' + \eta''x + \eta_0 = 0.$$

(1) *Math. Annalen*, t. XX, p. 424.

Pour la résoudre, différencions-la trois fois successivement par rapport à x , ce qui donne

$$(2) \quad Y'(\xi x)''' + \eta' \xi''' = 0.$$

Je dis qu'on ne peut pas supposer $\xi''' \neq 0$. En effet, Y' n'étant pas nul, sans quoi la surface serait une développable, on pourrait, si ξ''' n'était pas nul, écrire

$$\frac{(\xi x)'''}{\xi'''} + \frac{\eta'}{Y'} = 0.$$

Cette équation se sépare et donne, avec une constante arbitraire m ,

$$(\xi x)''' = m \xi''', \quad \eta' = -m Y';$$

dès lors, l'élément linéaire $\lambda dx dy$ devient

$$ds^2 = (x - m) Y' dx dy,$$

ce qui ne correspond qu'à des surfaces développables imaginaires.

7. Soit donc désormais $\xi''' = 0$. Comme on a aussi

$$(\xi x)''' = \xi''' x + 3 \xi'' = 0,$$

la dérivée ξ'' est nulle également, et il vient, avec deux arbitraires b, β ,

$$\xi = bx + \beta.$$

Substituons ξ dans l'équation (1); nous trouvons

$$2ik[x(Y + b) + \eta + \beta](xY' + \eta') + \frac{x^2}{2} Y'' + \eta'' x + \eta_0 = 0.$$

Égalons à zéro les coefficients de x^2 et x , ainsi que le terme indépendant

$$4ikY'(Y + b) + Y'' = 0, \quad 2ik[(Y + b)(\eta + \beta)]' + \eta'' = 0, \\ 2ik\eta'(\eta + \beta) + \eta_0 = 0.$$

La dernière de ces équations fournira η_0 quand la fonction η sera connue. Les deux premières s'intègrent immédiatement. On en tire, avec deux arbitraires m et h ,

$$2ik(Y + b)^2 + Y' = -2ikm^2, \quad 2ik(Y + b)(\eta + \beta) + \eta' = 2h.$$

Supposons d'abord $m \neq 0$; nous aurons

$$\frac{d(Y+b)}{(Y+b)^2+m^2} = -2ik dy, \quad Y+b = -m \operatorname{tang} 2ikmy.$$

Eu égard à cette expression de $Y+b$, l'équation en η devient

$$-2ikm(\eta+\beta) \sin 2ikmy + \eta' \cos 2ikmy = 2ikmg \cos 2ikmy \quad (2h = 2ikmg)$$

et donne par intégration

$$\begin{aligned} (\eta+\beta) \cos 2ikmy &= g \sin 2ikmy + l, \\ \eta+\beta &= g \operatorname{tang} 2ikmy + \frac{l}{\cos 2ikmy}. \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$Y' = -\frac{2ikm^2}{\cos^2 2ikmy}, \quad \eta' = \frac{2ikm(g+l \sin 2ikmy)}{\cos^2 2ikmy};$$

d'où l'élément linéaire

$$ds^2 = (xY' + \eta') dx dy = \frac{2ikm(-mx + g + l \sin 2ikmy)}{\cos^2 2ikmy} dx dy,$$

ou, sous une autre forme,

$$ds^2 = \left(x' + \frac{\gamma y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) dx' dy'.$$

Si l'on fait $m = 0$, on trouve

$$-\frac{dY}{(Y+b)^2} = 2ik dy, \quad Y+b = \frac{l}{2iky};$$

l'équation en η devient alors

$$\eta + \beta + \eta'y = 2hy;$$

son intégration introduit une nouvelle constante l ,

$$y(\eta + \beta) = hy^2 + l, \quad \eta + \beta = hy + \frac{l}{y}.$$

Les expressions trouvées pour Y et η donnent

$$Y' = -\frac{l}{2iky^2}, \quad \eta' = \frac{hy^2 - l}{y^2},$$

d'où l'élément linéaire

$$ds^2 = (xY' + \eta') dx dy = \left(-\frac{x}{2ik} - l + hy^2 \right) \frac{dx dy}{y^2},$$

qu'on peut aussi écrire

$$ds^2 = \left(x' + \frac{\gamma}{y'^2} \right) dx' dy'.$$

Les deux éléments linéaires que nous venons d'obtenir

$$ds^2 = \left(x' + \frac{\gamma y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) dx' dy', \quad ds^2 = \left(x' + \frac{\gamma}{y'^2} \right) dx' dy'$$

sont, abstraction faite d'un élément linéaire de développable imaginaire, les deux seuls pour lesquels le problème des cercles géodésiques admette une intégrale quadratique, mais linéaire par rapport à l'une des dérivées p et q . Il est à peine besoin de faire remarquer qu'aucun de ces éléments linéaires ne convient à des surfaces réelles. On sait, en effet, que, si l'élément linéaire

$$ds^2 = (x + Y) dx dy$$

convient à des surfaces réelles, Y ne peut avoir que l'une des deux expressions

$$Y = \gamma y, \quad Y = \frac{\gamma}{\sqrt{y}}.$$

Ajoutons enfin que ni l'un ni l'autre ne peut être ramené à la forme harmonique. C'est ce dont on s'assure en déterminant la fonction η de la seule variable y par la condition que la fonction $\lambda = x + \eta$ satisfasse à l'équation de M. Darboux

$${}_2 X \lambda''_{x^2} + 3 X' \lambda'_x + \lambda X'' = {}_2 Y \lambda''_{y^2} + 3 Y' \lambda'_y + \lambda Y'',$$

par laquelle on exprime que l'élément linéaire $\lambda dx dy$ est réductible à la forme harmonique.

8. *Second cas.* — Le produit AC n'est pas nul. Revenons à l'identité

$$\begin{aligned} & {}_2(Ap + a) \left[\left(\frac{1}{\lambda} \right)'_x (p + M)(q + N) + \frac{M'_x}{\lambda} (q + N) + \frac{N'_x}{\lambda} (p + M) \right] - \frac{q + N}{\lambda} (A'_x p^2 + C'_x q^2 + 2a'_x p + 2b'_x q + 2c'_x) \\ & + {}_2(Cq + b) \left[\left(\frac{1}{\lambda} \right)'_y (p + M)(q + N) + \frac{M'_y}{\lambda} (q + N) + \frac{N'_y}{\lambda} (p + M) \right] - \frac{p + M}{\lambda} (A'_y p^2 + C'_y q^2 + 2a'_y p + 2b'_y q + 2c'_y) \\ & \equiv {}_2(\alpha p + \beta q + \gamma) [(p + M)(q + N) - \lambda]. \end{aligned}$$

Nous avons vu que A ne dépend que de x , et C que de y ; et nous supposons maintenant le produit AC différent de zéro. En changeant la variable x et aussi la variable y , nous pouvons réduire les deux fonctions A et C à l'unité. Alors l'identité proposée devient

$$\begin{aligned} & (p+a) \left[\left(\frac{1}{\lambda} \right)'_x (p+M)(q+N) + \frac{M'_x}{\lambda} (q+N) + \frac{N'_x}{\lambda} (p+M) \right] - \frac{q+N}{\lambda} (a'_x p + b'_x q + c'_x) \\ & + (q+b) \left[\left(\frac{1}{\lambda} \right)'_y (p+M)(q+N) + \frac{M'_y}{\lambda} (q+N) + \frac{N'_y}{\lambda} (p+M) \right] - \frac{p+M}{\lambda} (a'_y p + b'_y q + c'_y) \\ & \equiv (\alpha p + \beta q + \gamma) [(p+M)(q+N) - \lambda]. \end{aligned}$$

La comparaison des termes en $p^2 q$ et $q^2 p$ donne

$$\alpha = \left(\frac{1}{\lambda} \right)'_x, \quad \beta = \left(\frac{1}{\lambda} \right)'_y.$$

Identifions les termes en p^2 et q^2 ; nous aurons

$$(1) \quad a'_y = N'_x, \quad b'_x = M'_y;$$

puis ceux en pq ; il viendra

$$\gamma = a \left(\frac{1}{\lambda} \right)'_x - \frac{a'_x}{\lambda} + b \left(\frac{1}{\lambda} \right)'_y - \frac{b'_y}{\lambda} + \frac{M'_x + N'_y}{\lambda}.$$

Comparons les termes en p et en q , et remplaçons γ par sa valeur; nous trouvons

$$(2) \quad \begin{cases} c'_y = aN'_x + bN'_y + Nb'_y - NN'_y - \lambda'_x, \\ c'_x = bM'_y + aM'_x + Ma'_x - MM'_x - \lambda'_y. \end{cases}$$

Identifions enfin les termes indépendants, en ayant égard aux expressions de γ , c'_x et c'_y . Il vient, tous calculs faits,

$$(3) \quad (M\lambda)'_x - (a\lambda)'_x + (N\lambda)'_y - (b\lambda)'_y = 0.$$

9. Nous avons maintenant à discuter les cinq équations (1), (2) et (3) auxquelles s'ajoute la condition d'intégrabilité $c''_{yx} = c''_{xy}$,

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial x} [(bN)'_y + aN'_x - NN'_y - \lambda'_x] = \frac{\partial}{\partial y} [(aM)'_x + bM'_y - MM'_x - \lambda'_y].$$

Remarquons auparavant que, dans l'hypothèse

$$M = N = k = 0,$$

qui correspond aux *lignes* géodésiques, cette dernière condition donne $\lambda''_x - \lambda''_y = 0$, d'où $\lambda = \varphi(x + y) - f(x - y)$. On retrouve les surfaces harmoniques. Le calcul s'achève sans difficulté et conduit à l'intégrale quadratique connue, écrite sous forme non homogène

$$I = p^2 + q^2 - 2[\varphi(x + y) + f(x - y)] = \text{const.}$$

Nous pouvons faire abstraction des relations (2) qui déterminent c , moyennant la condition (4). Pour satisfaire aux équations (1), nous introduirons deux nouvelles fonctions inconnues ρ et σ en posant

$$(1') \quad a = \rho'_x, \quad N = \rho'_y; \quad b = \sigma'_y, \quad M = \sigma'_x.$$

Ces fonctions devront satisfaire à l'équation

$$(5) \quad \rho''_{xy} = \sigma''_{xy} = N'_x - M'_y = 2ik\lambda.$$

Remplaçons maintenant a , b , M , N par leurs expressions (1') dans les relations (3) et (4); il vient

$$(3') \quad \frac{\partial}{\partial x} [\lambda(\rho'_x - \sigma'_x)] = \frac{\partial}{\partial y} [\lambda(\rho'_y - \sigma'_y)],$$

pour la première, et pour la seconde

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} [(\rho'_x - \sigma'_x)\rho''_{xy} - (\rho'_y - \sigma'_y)\rho''_{y^2} + \rho'_y\sigma''_{y^2} + \sigma'_x\rho''_{xy} - \lambda'_x] \\ &= \frac{\partial}{\partial y} [(\sigma'_y - \rho'_y)\sigma''_{xy} - (\sigma'_x - \rho'_x)\sigma''_{x^2} + \sigma'_x\rho''_{xy} + \rho'_x\sigma''_{xy} - \lambda'_y], \end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire, en doublant les deux membres,

$$\frac{\partial}{\partial x} [(\rho'^2_x)'_y - (\rho'^2_y)'_x + 2(\rho'_y\sigma'_y)'_y - 2\lambda'_x] = \frac{\partial}{\partial y} [(\sigma'^2_y)'_x - (\sigma'^2_x)'_y + 2(\rho'_x\sigma'_x)'_x - 2\lambda'_y],$$

ou encore, en groupant convenablement les termes,

$$(4') \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [(\rho'_x - \sigma'_x)^2 - (\rho'_y - \sigma'_y)^2] = 2(\lambda''_x - \lambda''_y).$$

On voit que les fonctions ρ et σ n'entrent que par leur différence dans les équations (3'), (4') et (5), ce qui conduit à poser

$$(6) \quad \zeta = \rho - \sigma.$$

Alors l'équation (5) devient

$$(5') \quad \zeta''_{xy} = 2ik\lambda.$$

Portant cette expression de λ dans la relation (3'), on trouve

$$(3'') \quad \frac{\partial}{\partial x}(\zeta'_x \zeta''_{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(\zeta'_y \zeta''_{xy}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\zeta'^2_x - \zeta'^2_y) = 0.$$

D'autre part, l'équation (4') n'est autre que

$$(4'') \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\zeta'^2_x - \zeta'^2_y) = 2(\lambda''_{x^2} - \lambda''_{y^2}).$$

Ainsi la différence $\lambda''_{x^2} - \lambda''_{y^2}$ est nulle. D'où cette conclusion :

Les seules surfaces réelles pour lesquelles l'équation aux cercles géodésiques admette une intégrale quadratique sont des surfaces harmoniques.

10. Remarquons tout de suite que cette propriété n'appartient pas à toutes les surfaces harmoniques. Soit, en effet,

$$\lambda = \Phi'(x + y) - \mathbf{F}'(x - y);$$

les deux équations (3'') et (4'') se confondent en une seule; mais les fonctions Φ et \mathbf{F} doivent être choisies de manière que les deux équations

$$\zeta''_{xy} = 2ik[\Phi'(x + y) - \mathbf{F}'(x - y)], \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\zeta'^2_x - \zeta'^2_y) = 0$$

soient compatibles. Nous verrons qu'elles comportent des solutions communes en nombre infini. Soit ζ l'une d'elles; cette fonction ζ étant connue, l'élément linéaire est connu, puisque nous avons $2ik\lambda = \zeta''_{xy}$. On connaît aussi la différence $\rho - \sigma = \zeta$, qui seule est déterminée. On peut se donner *arbitrairement* la somme

$$\rho + \sigma = \mu(x, y).$$

Alors ρ et σ seront connus. Les formules (1') fournissent immédiatement \mathbf{M} , \mathbf{N} , a et b ; la fonction c s'obtient par quadrature, ses deux dérivées partielles étant données par les équations (2), maintenant compatibles. L'intégrale quadratique est entièrement connue. On sait l'usage qu'il en faut faire pour trouver l'équation *finie* des cercles géodésiques.

11. Tout revient donc à la solution de ce nouveau problème :

Trouver une fonction Φ de $x + y$ et une fonction F de $x - y$, telles que, si l'on pose

$$\zeta''_{xy} = 2ik[\Phi'(x+y) - F'(x-y)],$$

on ait identiquement

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\zeta'_x{}^2 - \zeta'_y{}^2) = 0.$$

La première de ces équations est immédiatement intégrable; on en déduit, en désignant par ξ et η deux fonctions inconnues, l'une de x , l'autre de y ,

$$\zeta = 2ik \left[\int \Phi(x+y) d(x+y) + \int F(x-y) d(x-y) + \int \xi dx - \int \eta dy \right].$$

Portant cette expression de ζ dans la seconde équation, nous avons

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [(\Phi + F + \xi)^2 - (\Phi - F - \eta)^2] = 0,$$

ou, en effectuant et réduisant,

$$(\xi' + \eta')(\Phi' - F') + \xi(\Phi'' - F'') + \eta(\Phi'' + F'') = 2(\Phi F'' - F \Phi'').$$

Donc, pour connaître tous les éléments linéaires harmoniques

$$ds^2 = [\Phi'(x+y) - F'(x-y)] dx dy,$$

tels que l'équation aux cercles géodésiques admette une intégrale quadratique, il faut trouver toutes les solutions de l'équation fonctionnelle

$$(\xi' + \eta')(\Phi' - F') + \xi(\Phi'' - F'') + \eta(\Phi'' + F'') = 2(\Phi F'' - F \Phi'').$$

12. Plaçons-nous d'abord dans un cas particulier et supposons que l'équation aux cercles géodésiques admette en outre une intégrale linéaire. Nous avons vu que l'élément linéaire convient alors à des surfaces de révolution, ce qui permet de supposer $F' = 0$ et, par suite, $F = 0$. L'équation précédente se simplifie :

$$(\xi' + \eta')\Phi' + (\xi + \eta)\Phi'' = 0.$$

Si nous posons, pour un instant,

$$\Phi'(x+y) = e^\omega, \quad ds^2 = e^\omega dx dy,$$

il viendra

$$(1) \quad \xi' + \eta' + (\xi + \eta)\omega' = 0,$$

ω' étant la dérivée de ω par rapport à la variable $t = x + y$. Égalons à zéro la dérivée seconde du premier membre prise par rapport à x et à y ; nous aurons

$$(2) \quad (\xi' + \eta')\omega'' + (\xi + \eta)\omega''' = 0.$$

Si le déterminant $\omega''' - \omega'\omega''$ des équations (1) et (2) n'est pas nul, on a

$$\xi' + \eta' = 0, \quad \xi + \eta = 0,$$

en sorte que la proposée se réduit à une identité et laisse la fonction Φ entièrement arbitraire. Mais on reconnaît alors aisément, en achevant les calculs, que l'intégrale quadratique se réduit à $(p - q)^2$ en vertu de

$$(p + M)(q + N) = \lambda.$$

Ce n'est pas là une intégrale quadratique proprement dite. On doit donc supposer $\omega''' - \omega'\omega'' = 0$. Or, si l'on se rappelle que la courbure totale de l'élément linéaire $e^\omega dx dy$ a pour expression

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -2\omega''_{xy} e^{-\omega},$$

on voit qu'ici elle est constante.

Donc, *les seules surfaces pour lesquelles l'équation aux cercles géodésiques admette à la fois une intégrale linéaire et une intégrale quadratique sont les surfaces à courbure totale constante.*

13. Les solutions correspondantes ne sont pas d'ailleurs les seules qu'admette l'équation du problème. On voit, en effet, immédiatement, qu'elle est vérifiée quand on prend

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \frac{F''}{F} = \frac{\Phi''}{\Phi} = \text{const.} = r^2.$$

On a alors pour Φ et F ces expressions

$$\Phi = le^{r(x+y)} - me^{-r(x+y)}, \quad F = ne^{r(x-y)} - pe^{-r(x-y)},$$

C.44 L. RAFFY. — QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SURFACES HARMONIQUES.

où l, m, n, p sont des constantes arbitraires. L'élément linéaire ainsi obtenu

$$\lambda dx dy = r[l e^{r(x+y)} + m e^{-r(x+y)} - n e^{r(x-y)} - p e^{-r(x-y)}] dx dy$$

correspond à des surfaces dont la courbure totale

$$\frac{-8r^3(lm - np)}{\lambda^3}$$

n'est pas nulle en général. De plus, on voit qu'elle est fonction de λ , et, comme le paramètre différentiel $\Delta\lambda = \lambda'_x \lambda'_y : \lambda$ ne se réduit pas à une fonction de λ , les lignes d'égale courbure ne sont pas parallèles, en sorte que l'élément linéaire $\lambda dx dy$ ne convient pas à des surfaces de révolution. On aura donc bien là une véritable solution de notre problème. Nous ne nous occuperons pas ici de trouver toutes les autres.

