Posons

$$x = \frac{1}{x'},$$

le système (A) deviendra

$$(\mathrm{A}') \qquad -\frac{dy_i}{dx'} = \frac{1}{x'^2}(a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n),$$

et l'on voit qu'au point $x = \infty$, ou $x' = 0$, tous les coefficients des équations (A′) cessent d'être continus.

Pour étudier l'intégration complète du système (A), nous ferons un changement de variable indépendante qui ramènera le système (A) à une forme plus importante que nous étudierons plus loin avec tous les détails nécessaires.

Nous poserons

$$e^x = z$$

et, par suite,

$$e^x\, dx = dz = z\, dx.$$

Il vient alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = z\frac{dy}{dz},$$

et le système (A) deviendra

$$(\mathrm{A}'') \qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,$$

en rétablissant la lettre x pour désigner la variable indépendante.

C'est sous la forme (A″) et d'une manière tout à fait générale, c'est-à-dire en ne supposant plus que les coefficients a soient des constantes, que nous intégrerons le système (A).

Ajoutons une remarque. Le changement de variable $e^x = z$ donne bien z comme fonction uniforme de x; mais on a $x = \log z$, de sorte que x n'est pas uniforme en z dans toute région du plan qui renferme le point $z = 0$ ou le point $z = \infty$.

79. Nous considérerons maintenant le système le plus général

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_i y_n,$$

en supposant que les coefficients a soient uniformes dans le domaine de l'origine. Rappelons que l'origine est un point quelconque. Nous supposerons, en outre, que le point $x = 0$ est un point singulier ou non des coefficients a.

Soit $\mathrm{R}(\omega)$ le déterminant qui résulte de la considération des éléments d'un système fondamental de solutions, quand la variable x fait le tour de l'origine.

Soit

$$(\omega_k - \omega)^{e_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \rho)$$

un diviseur élémentaire quelconque de $R(\omega)$. On peut ramener le déterminant $R(\omega)$ à une forme canonique $R'(\omega)$, comme on l'a vu dans la théorie des diviseurs élémentaires (Chapitre II, n° 53). Cette forme étant unique, la méthode de recherche d'un système spécial de solution des équations (A) doit conduire précisément aux solutions qui correspondent à la forme canonique $R'(\omega)$. Nous avons exposé cette méthode pratique aux n^{os} 68 et suivants du Chapitre III.

Nous voulons maintenant étudier directement *le* système spécial de solutions des équations (A). Nous considérerons ce système comme étant seul de son espèce, quoiqu'il reste dans sa construction une certaine indétermination. En effet, si deux solutions, par exemple, satisfont aux relations

$$Y_i = \omega y_i \quad \text{et} \quad Y'_i = \omega y'_i,$$

on peut, dans certains cas, les remplacer par des combinaisons

$$a Y_i + b Y'_i, \quad a' Y_i + b' Y'_i,$$

pourvu que le déterminant $ab' - ba'$ soit différent de zéro. Abstraction faite de ces modifications possibles qui n'ont aucune importance dans nos théories, nous pouvons dire que le système spécial de solutions est unique.

Ce système spécial est caractérisé par les équations suivantes.

Soit $(\omega_k - \omega)^{e_k}$ *un diviseur élémentaire quelconque du déterminant* $R(\omega)$ *ou de son équivalent* $R'(\omega)$, *il y a* e_k *solutions satisfaisant aux relations*

$$(74)\qquad \left\{\begin{array}{l} Y^k_{i1} = \omega_k y^k_{i1}, \\ Y^k_{i2} = \omega_k y^k_{i2} + y^k_{i1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ Y^k_{ie_k} = \omega_k y^k_{ie_k} + y^k_{i,e_k-1}, \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} (i = 1, 2, \dots, n) \\ (k = 1, 2, \dots, \rho) \end{array}$$

et les n *solutions dont les éléments entrent dans ces équations forment un système fondamental.*

80. Pour plus de simplicité, considérons un groupe de relations de la forme

$$(75)\qquad \left\{\begin{array}{l} Y_1 = \omega y_1, \\ Y_2 = \omega y_2 + y_1, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ Y_m = \omega y_m + y_{m-1}. \end{array}\right.$$

Posons

$$\frac{\log x}{2\pi\sqrt{-1}} = u,$$

de sorte que u augmente de 1 quand la variable x fait le tour de l'origine.

Soit $f(u)$ une fonction entière du degré $m-1$ formée arbitrairement avec u et des coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ uniformes dans le domaine de l'origine. Définissons enfin r par la relation

$$e^{2\pi r\sqrt{-1}} = \omega, \tag{76}$$

et appelons $\Delta_k f(u)$ la différence d'ordre k de $f(u)$ par rapport à l'accroissement 1 de u.

On pourra donner aux fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les formes

$$\tag{77} \begin{cases} y_m = x^r f(u), \\ y_{m-1} = x^r \omega \Delta f(u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{m-k} = x^r \omega^k \Delta_k f(u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_1 = x^r \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f(u). \end{cases}$$

On voit que $\Delta_{m-1} f(u) = 1.2\ldots(m-1)A_{m-1}$ ne contient pas u et que y_1 est la seule fonction y qui ne contienne pas de logarithmes.

D'abord les expressions précédentes satisfont aux relations imposées. En effet, on a

$$Y_{m-k} = x^r \omega^{k+1} \Delta_k f(u+1) = x^r \omega^{k+1}[\Delta_k f(u) + \Delta_{k+1} f(u)] = \omega y_{m-k} + y_{m-k-1}.$$

Ensuite on peut toujours donner aux fonctions $y_1, \ldots, y_m$ les formes précédentes. En effet, $y_1 x^{-r}$ est une fonction uniforme dans le domaine de l'origine, et l'on peut la représenter par $\omega^{m-1}\Delta_{m-1} f(u)$; on tire de là

$$y_1 = x^r \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f(u).$$

On peut poser ensuite

$$y_2 = \omega^{m-2} x^r z,$$

d'où

$$Y_2 = \omega^{m-1} x^r Z.$$

Si l'on veut satisfaire à la relation

$$Y_2 = \omega y_2 + y_1,$$

on posera

$$Z = z + \Delta_{m-1} f(u).$$

En représentant par $[\varphi]'$ ce que devient une expression φ, quand on tourne autour de l'origine, et remarquant que l'on a

$$\Delta_{m-1} f(u) = \Delta_{m-2} f(u+1) - \Delta_{m-2} f(u) = [\Delta_{m-2} f(u)]' - \Delta_{m-2} f(u),$$

on voit que l'on a

$$[z - \Delta_{m-2} f(u)]' = z - \Delta_{m-2} f(u);$$

$z - \Delta_{m-2} f(u)$ est donc une fonction uniforme de x. Dans le domaine de l'origine, on peut poser simplement

$$z = \Delta_{m-2} f(u),$$

en réunissant cette fonction uniforme au terme indépendant de $\Delta_{m-2} f(u)$. On a ainsi

$$y_2 = \omega^{m-2} x^r \Delta_{m-2} f(u).$$

On remontera ainsi de proche en proche.

La suite des expressions précédentes montre que l'élément y_m, qui contient la plus haute puissance de $\log x$, renferme les m fonctions de x, uniformes dans le domaine de l'origine, qui entrent dans le groupe des expressions $y_1, \ldots, y_m$.

Les relations entre les coefficients des puissances de u, dans les différents éléments du groupe, sont mises en évidence par la forme des expressions précédentes. Le nombre de ces coefficients est

$$1 + 2 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Il y en a m arbitraires. On peut donc dire que ces éléments sont liés entre eux par

$$\frac{m(m+1)}{2} - m \quad \text{ou} \quad \frac{m(m-1)}{2}$$

relations distinctes.

81. Appliquons les résultats précédents aux fonctions y qui satisfont aux relations (74).

Nous aurons, pour les éléments des solutions du système fondamental spécial, les formes analytiques suivantes, valables dans le domaine de l'origine

$$(78) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_{ie_k}^k &= x^r f_i^k(u), \\ y_{i,e_k-1}^k &= x^r \omega \Delta f_i^k(u), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{i1}^k &= x^r \omega^{e_k-1} \Delta_{e_k-1} f_i^k(u). \end{aligned} \right\} \qquad \begin{aligned} &(i = 1, 2, \ldots, n), \\ &(k = 1, 2, \ldots, \rho). \end{aligned}$$

82. Dans les relations (77), posons

$$x = \frac{1}{x'},$$

et, par suite,

$$u = \frac{\log x}{2\pi\sqrt{-1}} = -\frac{\log x'}{2\pi\sqrt{-1}}.$$

Nous aurons, en général,

$$y_{m-k} = \frac{\omega^k}{x'^r} \Delta_k f(u),$$

ou encore

$$y_{m-k} = x'^{-r} \omega^k \Delta_k f(u).$$

Nous poserons

$$e^{-2\pi r \sqrt{-1}} = \omega.$$

Nous en concluons que, dans le domaine de l'infini, nous devrons, dans les formules (78), changer les signes de u et de r.

83. Nous terminerons ces études d'intégration par les séries, en montrant que les éléments des solutions du système général

$$\text{(B)} \qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

jouissent de propriétés spéciales qui les rapprochent des fonctions algébriques.

Nous venons de voir que les solutions d'un système (A) quelconque s'obtiennent par des combinaisons linéaires d'expressions de la forme

$$x^r(\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 \log x + \ldots + \mathrm{A}_k \log^k x).$$

Si les parenthèses sont infinies d'ordre fini pour $x = 0$, c'est-à-dire si l'on peut trouver un nombre entier α tel que le produit

$$x^\alpha(\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 \log x + \ldots + \mathrm{A}_k \log^k x)$$

soit nul pour $x = 0$, on dit, d'après M. Thomé, que, quel que soit r, l'expression

$$x^r(\mathrm{A}_0 + \ldots + \mathrm{A}_k \log^k x)$$

est *régulière* au point $x = 0$. Il suffit évidemment que les fonctions A ne renferment dans leurs développements qu'un nombre fini de puissances négatives x.

Toute combinaison linéaire et homogène à coefficients constants d'expressions *régulières* étant aussi appelée *régulière*, nous allons montrer que tous les éléments des solutions du système (B) sont des expressions régulières, quand les coefficients a sont holomorphes dans le domaine de l'origine.

84. Voici, d'après M. Horn, la manière d'intégrer le système (B), c'est-à-dire le système

$$(79) \qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on a

$$a_{ij} = a^0_{ij} + x a^1_{ij} + \ldots, \tag{80}$$

dans le domaine de l'origine.

Soient

$$y_i = x^r \varphi_i = x^r(\varphi^0_i + x\varphi^1_i + \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{81}$$

les éléments d'une solution du système (79). Nous avons déjà vu qu'il existe une telle solution, et que les séries φ_i sont uniformément convergentes dans un certain domaine de l'origine (Chapitre I, n° 4).

En portant les valeurs (81) dans les équations (79), on a les relations en nombre infini

$$\left\{\begin{array}{ll} (\alpha) & \sum_j (a^0_{ij} - r\delta_{ij})\varphi^0_j = 0, \\ (\beta) & \sum_j [a^0_{ij} - (r+1)\delta_{ij}]\varphi^1_j + \sum_j a^1_{ij}\varphi^0_j = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (\lambda) & \sum_j [a^0_{ij} - (r+k)\delta_{ij}]\varphi^k_j + \sum_j a^1_{ij}\varphi^{k-1}_j + \ldots + \sum_j a^k_{ij}\varphi^0_j = 0, \end{array}\right. \tag{82}$$

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{pmatrix}.$$

Toutes les valeurs initiales φ^0_i des séries φ_i ne sont pas nulles. Donc, d'après les équations (82α), r doit être l'une des racines de l'équation caractéristique

$$F(r) = |a^0_{ij} - r\delta_{ij}| = 0.$$

Or, laissons de côté précisément les conditions (82_α); nous pourrons considérer dans toutes les autres la lettre r comme une arbitraire, et nous aurons, par un calcul de proche en proche,

$$\varphi^k_i = \sum_j \frac{\mathfrak{F}^k_{ij}(r)}{F(r+1)F(r+2)\ldots F(r+k)}\varphi^0_j, \tag{83}$$

expression dans laquelle $\mathfrak{F}$ est une fonction entière des lettres r, a^0_{ij}, a^1_{ij}, ..., a^k_{ij}.

Le dénominateur commun ne peut s'annuler que si $r+1$, $r+2$, ... ou $r+k$ satisfait à un moment donné à l'équation caractéristique $F(r) = 0$.

Appelons $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les n racines, distinctes ou non, de cette équation. On aura à ce moment

$$r + k' = r_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ k' = 1, 2, \ldots, k).$$

Mais k croît indéfiniment dans la suite des relations (82). Il suffit donc d'écrire

$$r = r_\alpha - k \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, \infty).$$

On voit ainsi que les φ_i^k seront finis, ou infinis d'un ordre varié.

Fixons maintenant les valeurs des indéterminées r, φ_1^0, ..., φ_n^0 d'après les règles suivantes :

1° Soit un groupe

$$r_{\alpha_1}, \quad r_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad r_{\alpha_\mu}$$

de μ racines de l'équation caractéristique, telles que deux quelconques de ces racines diffèrent d'un nombre entier.

Il peut y avoir d'autres groupes pareils à celui-là.

Nous supposerons que la suite de ces valeurs ne va pas en croissant, et nous poserons

$$(84) \qquad \left\{ \begin{array}{l} r_{\alpha_{\mu-1}} = r_{\alpha_\mu} \;\; + d_\mu, \\ r_{\alpha_{\mu-2}} = r_{\alpha_{\mu-1}} + d_{\mu-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_{\alpha_1} \;\; = r_{\alpha_2} \;\; + d_2, \end{array} \right.$$

d_2, d_3, ..., d_μ étant des nombres entiers positifs.

Ces relations peuvent encore s'écrire

$$(84') \qquad \left\{ \begin{array}{l} r_{\alpha_{\mu-1}} = r_{\alpha_\mu} + d_\mu, \\ r_{\alpha_{\mu-2}} = r_{\alpha_\mu} + d_{\mu-1} + d_\mu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_\alpha \quad\; = r_{\alpha_\mu} + d_2 \quad + d_3 + \ldots + d_{\mu-1} + d_\mu. \end{array} \right.$$

Si les nombres r sont imaginaires, c'est sur la partie réelle que porte le calcul.

La conséquence que nous avons en vue est la suivante. Toutes les expressions

$$\begin{array}{l} F(r + d_\mu), \\ F(r + d_{\mu-1} + d_\mu), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F(r + d_2 + \ldots + d_{\mu-1} + d_\mu) \end{array}$$

s'annulent pour

$$r = r_{\alpha_\mu},$$

que nous représenterons seulement par r_α.

2° Nous prendrons les arbitraires φ_i^0 dont les valeurs proportionnelles interviennent seules dans le calcul, avec un facteur $r - r_\alpha$ élevé à une puissance nécessaire et suffisante pour que toutes les expressions φ_i^k restent finies et ne s'annulent pas toutes pour $r = r_\alpha$.

3° Enfin nous donnerons à r une des valeurs $r_1, r_2, \ldots, r_n$ qui satisfont à l'équation caractéristique, et nous choisirons les quantités φ_i^0 de manière à satisfaire aux équations (82_α).

Il est évident que les expressions y_i (81) ainsi déterminées satisferont aux équations (79), et que les séries φ_i seront absolument convergentes dans un certain domaine de l'origine, comme au n° 4 du Chapitre I.

Voici maintenant les résultats généraux du calcul ainsi préparé. Représentons par

$$f_i(y_1, \ldots, y_n) = -x\frac{dy_i}{dx} + \sum_j a_{ij}y_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{85}$$

les expressions qui, égalées à zéro, donnent les équations (79).

En supposant d'abord les lettres r et φ_i^0 indéterminées, nous aurons identiquement

$$f_i(x^r\varphi_1, \ldots, x^r\varphi_n) = x^r \sum_j (a_{ij}^0 - r\delta_{ij})\varphi_j^0. \tag{86}$$

Choisissons $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$, de sorte qu'aucune des quantités φ_i^k ne devienne infinie pour $r = r_\alpha$, et en outre de manière que

$$f_i(x^r\varphi_1, \ldots, x^r\varphi_n)$$

s'annule h fois pour $r = r_\alpha$, h étant un nombre entier quelconque. Nous devons avoir

$$\left[\frac{\partial^\lambda f_i}{\partial r^\lambda}\right]_{(r=r_\alpha)} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, h-1). \tag{87}$$

Mais

$$\frac{\partial^\lambda f_i}{\partial r^\lambda} = f_i\left(\frac{\partial^\lambda y_1}{\partial r^\lambda}, \ldots, \frac{\partial^\lambda y_n}{\partial r^\lambda}\right). \tag{88}$$

Nous voyons, par suite, que l'on peut former les h solutions suivantes du système (79)

$$y_i = \left[\frac{\partial^\lambda(x^r\varphi_i)}{\partial r^\lambda}\right]_{(r=r_\alpha)}$$

ou

$$y_i = x^{r_\alpha}\left[\frac{\partial^\lambda\varphi_i}{\partial r^\lambda} + \frac{\lambda}{1}\frac{\partial^{\lambda-1}\varphi_i}{\partial r^{\lambda-1}}\log x + \ldots + \binom{\lambda}{\lambda-1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\log^{\lambda-1}x + \varphi_i\log^\lambda x\right]_{(r=r_\alpha)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, h-1). \tag{89}$$

Les parenthèses de ces expressions, renfermant les dérivées de séries uniformément convergentes, auront pour les puissances de $\log x$ des coefficients, eux-mêmes uniformément convergents.

C'est avec ce programme général de calcul que nous allons construire un système fondamental de n solutions du système (79). Nous emploierons maintenant les notations de M. Horn, en les modifiant très légèrement.

85. Nous préparerons d'abord le système différentiel

$$(79)\qquad \begin{cases} x\dfrac{dy_\alpha}{dx} = \sum_\beta \mathrm{A}_{\alpha\beta} y_\beta & (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m), \\ \mathrm{A}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + x a'_{\alpha\beta} + x^2 a''_{\alpha\beta} + \ldots. \end{cases}$$

Multiplions ces équations par des constantes encore indéterminées $u_1, u_2, \ldots, u_m$ et ajoutons les résultats. Nous aurons une équation de la forme

$$(90)\qquad x\frac{d\sum_\alpha u_\alpha y_\alpha}{dx} = \sum_{\alpha\beta} \mathrm{A}_{\alpha\beta} u_\alpha y_\beta.$$

On peut ramener les deux formes bilinéaires

$$\sum_\alpha u_\alpha y_\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha\beta} a^0_{\alpha\beta} u_\alpha y_\beta$$

aux deux *formes canoniques* (*Théorie des diviseurs élémentaires*)

$$\sum_\alpha v_\alpha z_\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha\beta} b^0_{\alpha\beta} v_\alpha z_\beta.$$

Les substitutions employées sont de la forme

$$u_\alpha = \sum_\beta g_{\alpha\beta} v_\beta, \qquad y_\alpha = \sum_\beta h_{\alpha\beta} z_\beta,$$

ou encore

$$v_\beta = \sum_\alpha h_{\alpha\beta} u_\alpha, \qquad z_\beta = \sum_\alpha g_{\alpha\beta} y_\alpha,$$

à cause de la forme de l'expression

$$\sum_\alpha u_\alpha y_\alpha.$$

Or, les v étant indéterminés, ainsi que les u, on pourra transformer le système (79) en un autre

$$(91)\qquad x\frac{dz_\alpha}{dx} = \sum_\beta \mathrm{P}_{\alpha\beta} z_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m),$$

où l'on aura

$$P_{\alpha\beta}=\sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}g_{\lambda\alpha}h_{\mu\beta}=p_{\alpha\beta}+xp'_{\alpha\beta}+x^2p''_{\alpha\beta}+\ldots.$$

Considérons maintenant l'équation caractéristique du nouveau système différentiel

$$P(p)=|a_{\alpha\beta}-p\delta_{\alpha\beta}|=(p_1-p)\ldots(p_m-p)=0.$$

Soit $p-p_\alpha$ un diviseur élémentaire simple de $P(p)$, on aura

$$p_{\alpha\alpha}=p_\alpha,\quad p_{\alpha\beta}=0\qquad(\beta=1,\ldots,\alpha-1,\alpha+1,\ldots,m),$$

et à ce diviseur correspondra l'équation

$$x\frac{dz_\alpha}{dx}=p_\alpha z_\alpha+x\sum_\beta p'_{\alpha\beta}z_\beta+\ldots.$$

Supposons ensuite que l'on ait

$$p_{\alpha'}=p_{\alpha''}=\ldots=p_{\alpha^{(e)}}=p_0$$

et que $(p-p_0)^e$ soit un diviseur multiple d'ordre e de $P(p)$, nous aurons

$$(92)\qquad\begin{cases} p_{\alpha'\alpha'}=p_0, & p_{\alpha''\alpha''}=p_0, & \ldots, & p_{\alpha^{(e)}\alpha^{(e)}}=p_0,\\ p_{\alpha''\alpha'}=1, & p_{\alpha'''\alpha''}=1, & \ldots, & p_{\alpha^{(e)}\alpha^{(e-1)}}=1,\end{cases}$$

et tous les autres $p_{\alpha\beta}$ seront nuls. Donc, au diviseur considéré correspondront les équations

$$(93)\qquad\begin{cases} x\dfrac{dz_{\alpha'}}{dx}=p_0z_{\alpha'}+\ldots,\\ x\dfrac{dz_{\alpha''}}{dx}=p_0z_{\alpha''}+z_{\alpha'}+\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x\dfrac{dz_{\alpha^{(e)}}}{dx}=p_0z_{\alpha^{(e)}}+z_{\alpha^{(e-1)}}+\ldots;\end{cases}$$

les parties des seconds membres remplacées par des points sont des expressions telles que

$$x\sum_\beta p'_{\alpha\beta}z_\beta+x^2\sum_\beta p''_{\alpha\beta}z_\beta+\ldots.$$

Cette préparation des équations a pour résultat : 1° de simplifier les calculs qu'on aura à faire plus loin ; 2° de préciser le sens des indices $1, 2, \ldots, m$ qu'on attribue aux racines de l'équation caractéristique. Nous considérerons plus loin des groupes de quantités

$$p_{\lambda_1},\quad p_{\lambda_2},\quad\ldots,\quad p_{\lambda_r},$$

dont la signification est dès maintenant précisée.

86. Nous considérerons plusieurs cas :

Premier cas. — *p_0 étant une racine de l'équation caractéristique* $\mathrm{P}(p) = 0$ *fournit r diviseurs élémentaires simples*

$$p - p_\lambda \qquad (\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$

du déterminant $\mathrm{P}(p)$. *D'ailleurs, entre p_0 et toute autre racine qui ne lui serait pas égale, il n'existe pas de différence entière.*

Soit p_λ une quelconque des racines égales à p_0, nous pouvons poser

$$z_\alpha = x^p \zeta_\alpha(x) = x^p [(\zeta_\alpha)_0 + x(\zeta_\alpha)_1 + x^2(\zeta_\alpha)_2 + \ldots] \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$(\zeta_\lambda)_0 = \varepsilon_\lambda, \qquad (\zeta_\alpha)_0 = 0 \qquad (\alpha \neq \lambda), \tag{94}$$

ε_λ étant une constante, ou une fonction entière de p qui ne s'annule pas pour $p = p_0$.

Soient ζ_α les séries calculées dans ces conditions, mais où p reste indéterminé, on aura, à cause des équations (86) et (93),

$$\begin{cases} \mathrm{P}_\lambda(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_n) = -\varepsilon_\lambda(p - p_0)x^p, \\ \mathrm{P}_\alpha(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_n) = 0 \qquad (\alpha \neq \lambda), \end{cases} \tag{95}$$

et, par suite, si l'on pose

$$\zeta_\alpha^0(x)_\lambda = [\zeta_\alpha(x)_\lambda]_{(p=p_0)},$$

les éléments

$$z_\alpha^\lambda = x^{p_0}\zeta_\alpha^0(x)_\lambda \tag{96}$$

constitueront une solution des équations (79).

Cette solution est régulière. De plus, pour $x = 0$, la valeur initiale de $\zeta_\lambda(x)_\lambda$ étant ε_λ, c'est-à-dire une valeur qui n'est pas nulle, *cette solution appartient à l'exposant p_0.*

En général, en employant le langage de M. Fuchs, nous disons que toute solution des équations (79) de la forme

$$y_i = x^\rho(\theta_i + \eta_i \log x + \ldots + \varphi_i \log^h x)$$

est de forme simplifiée, et appartient à l'exposant ρ, lorsque toutes les fonctions $\theta, \eta, \ldots, \varphi$ sont holomorphes dans le domaine de l'origine, et que l'une d'elles au moins ne s'annule pas pour $x = 0$.

L'équation (96) fournit r solutions appartenant à l'exposant p_0, lorsqu'on remplace λ par les indices successifs

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_r.$$

Ces r solutions sont linéairement indépendantes, car, si l'on avait

$$\sum_{\lambda} C_\lambda z_\alpha^\lambda = 0 \qquad (\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_r),$$

on en déduirait

$$\sum_{\lambda} C_\lambda \zeta_\alpha^0(x)_\lambda = 0,$$

et, pour $x = 0$,

$$C_\lambda \varepsilon_\lambda = 0 \qquad (\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_r),$$

ce qui est impossible, à moins que les constantes C_λ ne soient toutes nulles.

Deuxième cas. — *Les racines $p_{\lambda^0}, \ldots, p_{\lambda^n}$ fournissent, d'une part, des groupes de $r^0, r^1, \ldots, r^n$ racines égales entre elles*

$$p_{\lambda_1^0} = p_{\lambda_2^0} = \ldots = p_{\lambda_{r^0}^0} = p_{\lambda^0} = p_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$p_{\lambda_1^n} = p_{\lambda_2^n} = \ldots = p_{\lambda_{r^n}^n} = p_{\lambda^n} = p_n,$$

et, d'autre part,

r^0 diviseurs élémentaires simples $p - p_0$ de $P(p)$,
r^1 » $p - p_1$,
....,
r^n » $p - p_n$.

D'ailleurs, entre $p_0, p_1, \ldots, p_n$ et toute autre racine qui ne soit égale à aucune d'elles, il n'existe pas de différence entière. Enfin les différences

$$p_0 \quad - p_1 = d_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$p_{n-1} - p_n = d_n$$

sont des nombres entiers positifs.

Considérons un groupe quelconque correspondant à l'indice i, et posons

$$(97) \qquad (\zeta_{\lambda^i})_0 = \varepsilon_{\lambda^i}(p - p_i)^i, \qquad (\zeta_\alpha)_0 = 0 \qquad (\alpha \neq \lambda^i,\ \lambda^i = \lambda_1^i;\ \lambda_2^i;\ \ldots;\ \lambda_{r^i}^i);$$

nous aurons, en vertu des équations (86) et (93),

$$P_{\lambda^i}(x^p \zeta_1, \ldots, x^p \zeta_m) = -\varepsilon_{\lambda^i}(p - p_i)^{i+1} x^p,$$
$$P_\alpha(x^p \zeta_1, \ldots, x^p \zeta_m) = 0 \qquad (\alpha \neq \lambda^i).$$

En effet, le déterminant $P(p)$ a la forme spéciale

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & p_{\lambda_1^i} - p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & p_{\lambda_2^i} - p & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & p_{\lambda_{r,i}^i} - p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

et l'expression qui entre dans les équations (86) se réduit, à cause des hypothèses (97), au seul terme

$$(p_{\lambda_i^i} - p)\,\varepsilon_{\lambda^i}(p - p_i)^i,$$

ou encore à

$$-\,\varepsilon_{\lambda^i}(p - p_i)^{i+1}.$$

Les $i+1$ expressions

$$z_\alpha^{\lambda^i, h} = \left[\frac{\partial^h (x^p \zeta_\alpha)}{\partial p^h}\right]_{p^i} \qquad (h = 0, 1, \ldots, i) \tag{98}$$

seront des solutions régulières du système différentiel (79).

Mais les formules (82) (excepté la première) conduisent à l'expression

$$(\zeta_\alpha)_\nu = \frac{Q_\alpha^{\nu \lambda^i}(p)}{Q(p+1)\ldots Q(p+\nu)}\,\varepsilon_{\lambda^i}(p - p_i)^i,$$

où

$$Q(p) = (p - p_0)\ldots(p - p_n)$$

et où $Q(p)$ est une fraction rationnelle en p ne devenant pas infinie pour $p = p_0$, $p_1, \ldots, p_n$.

Par suite, pour $p = p_i$,

$(\zeta_\alpha)_0, \ldots, (\zeta_\alpha)_{d_i - 1}$ s'annulent au degré i par rapport à p,
$(\zeta_\alpha)_{d_i}, \ldots, (\zeta_\alpha)_{d_i + d_{i-1} - 1}$ s'annulent au degré $i - 1$,
. . . . ,
$(\zeta_\alpha)_{d_i + \ldots + d_2}, \ldots, (\zeta_\alpha)_{d_i + \ldots + d_1 - 1}$ s'annulent au degré 1.

On peut alors poser

$$[\zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}]_{p^i} = x^{d_i + \ldots + d_1} \zeta_\alpha^0(x)_{\lambda^i},$$

$$\left[\frac{\partial \zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}}{\partial p}\right]_{p^i} = x^{d_i + \ldots + d_1} \zeta_\alpha^1(x)_{\lambda^i},$$

. . . . ,

$$\left[\frac{\partial^i \zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}}{(\partial p^i)}\right]_{p^i} = \zeta_\alpha^i(x)_{\lambda^i}.$$

Mais, la valeur initiale de $\zeta^{i}_{\lambda^i}(x)_{\lambda^i}$ étant égale à

$$\left[\frac{\partial^i[\varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^i]}{(\partial p)^i}\right]_{p^i}$$

n'est pas nulle. On en conclut que, dans les $i+1$ expressions (98), la dernière

$$z_\alpha^{\lambda^i, i}$$

ou simplement

$$z_\alpha^{\lambda^i}$$

appartient à l'exposant p_i.

Cette solution est de la forme

$$\begin{aligned} z_\alpha^{\lambda^i} = x^{p_i}\zeta_\alpha^i(x)_{\lambda^i} &+ \binom{i}{1} x^{p_{i-1}}\zeta_\alpha^{i-1}(x)_{\lambda^i}\log x + \ldots \\ &+ \binom{i}{i-1} x^{p_1}\zeta_\alpha^1(x)_{\lambda^i}\log^{i-1} x + x^{p_0}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda^i}\log^i x. \end{aligned}$$

Ce sera la seule que nous considérerons pour la valeur λ^i.

On a donc le Tableau suivant de solutions, dans le développement desquelles tous les termes sont séparément de forme simplifiée,

$$(99)\quad \left\{ \begin{aligned} z_\alpha^{\lambda^0} &= x^{p_0}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda^0}, \\ z_\alpha^{\lambda^1} &= x^{p_1}\zeta_\alpha^1(x)_{\lambda^1} + x^{p_0}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda^1}\log x, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_\alpha^{\lambda^n} &= x^{p_n}\zeta_\alpha^n(x)_{\lambda^n} + x^{p_{n-1}}\zeta_\alpha^{n-1}(x)_{\lambda^n}\log x + \ldots + x^{p_0}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda^n}\log^n x. \end{aligned} \right.$$

Dans ce Tableau, il y a

$$r^0 + r^1 + \ldots + r^n$$

solutions.

Les i séries $\zeta_\alpha^k(x)_{\lambda^i}$ qui entrent dans $z_\alpha^{\lambda^i}$ peuvent s'annuler de différentes façons, de sorte que tout ou partie des logarithmes peuvent disparaître.

Les solutions (99) sont linéairement indépendantes. Car, si l'on avait la relation

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{\lambda^i} C_{\lambda^i} z_\alpha^{\lambda^i} = 0,$$

on en déduirait

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{\lambda^i} C_{\lambda^i} x^{p_i}\zeta_\alpha^i(x)_{\lambda^i} = 0.$$

En divisant par x^{p_n}, et en faisant ensuite $x=0$, on aurait

$$\sum_{\lambda^n} C_{\lambda^n}\varepsilon_{\lambda^n} = 0 \qquad (\lambda^n = \lambda_1^n, \ldots, \lambda_{r^n}^n),$$

ce qui est impossible si les $C_{\lambda''}$ ne sont pas tous nuls. De même les $C_{\lambda''-1}$ seront tous nuls, etc.

TROISIÈME CAS. — *La racine p_0 de l'équation caractéristique fournit les diviseurs élémentaires*

$$(p-p_0)^{e_{\lambda_1}}, \quad \ldots, \quad (p-p_0)^{e_{\lambda_r}}$$

du déterminant $P(p)$. *D'ailleurs, entre p_0 et toute racine qui ne lui serait pas égale, il n'existe pas de différence entière.*

Au diviseur élémentaire $(p-p_0)^{e_\lambda}$ correspondent par exemple les équations

$$\text{(100)} \qquad \left\{\begin{array}{l} x\,\dfrac{dz_{\alpha'}}{dx} = p_0 z_{\alpha'} + \ldots, \\ x\,\dfrac{dx_{\alpha''}}{dx} = p_0 z_{\alpha''} + z_{\alpha'} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x\,\dfrac{dz_{\alpha^{(e_\lambda)}}}{dx} = p_0 z_{\alpha^{(e_\lambda)}} + z_{\alpha^{(e_\lambda)}} + \ldots. \end{array}\right.$$

Posons, en conséquence,

$$\text{(101)} \qquad \left\{\begin{array}{l} (\zeta_{\alpha'})_0 = \varepsilon_\lambda (p-p_0)^{e_\lambda - 1}, \\ (\zeta_{\alpha''})_0 = \varepsilon_\lambda (p-p_0)^{e_\lambda - 2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (\zeta_{\alpha^{(e_\lambda)}})_0 = \varepsilon_\lambda, \end{array}\right.$$

ε_λ étant une constante, et prenons nulles toutes les autres quantités $(\zeta_\alpha)_0$. Soient $\zeta_\alpha = \zeta_\alpha(x)_\lambda$ les séries déterminées dans ces conditions.

Nous aurons les relations

$$\text{(102)} \qquad \left\{\begin{array}{l} P_{\alpha'}(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = -\varepsilon_\lambda (p-p_0)^{e_\lambda}, \\ P_\alpha(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = 0 \qquad (\alpha \neq \alpha'). \end{array}\right.$$

En effet, on a, par exemple, identiquement

$$(p_0-p)(\zeta_{\alpha''})_0 + (\zeta_{\alpha'})_0 = 0.$$

Posons alors

$$\text{(103)} \qquad \left\{\begin{array}{l} [\zeta_\alpha(x)_\lambda]_{p_0} = \zeta_\alpha^0(x)_\lambda, \\ \left[\dfrac{\partial \zeta_\alpha(x)_\lambda}{\partial p}\right]_{p_0} = \zeta_\alpha^1(x)_\lambda, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \left[\dfrac{\partial^{e_\lambda - 1}\zeta_\alpha(x)_\lambda}{(\partial p)^{e_\lambda - 1}}\right]_{p_0} = \zeta_\alpha^{e_\lambda - 1}(x)_\lambda. \end{array}\right.$$

Les seconds membres ne seront pas tous nuls pour $x=0$. En effet, d'après les formules (101),

$$\zeta^0_{\alpha'},\quad \zeta^1_{\alpha''},\quad \ldots,\quad \zeta^{e_\lambda-1}_{\alpha^{(e_\lambda)}}$$

se réduisent à ε_λ pour $x=0$.

En conséquence, on peut former le groupe de e_λ solutions

$$(104)\quad \begin{cases} z^{\lambda,0}_{\alpha} = x^{p_0}\zeta^0_{\alpha}(x)_\lambda, \\ z^{\lambda,1}_{\alpha} = x^{p_0}[\zeta^1_{\alpha}(x)_\lambda + \zeta^0_{\alpha}(x)_\lambda \log x], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ z^{\lambda,e_\lambda-1}_{\alpha} = x^{p_0}\left[\zeta^{e_\lambda-1}_{\alpha}(x)_\lambda + \binom{e_\lambda-1}{1}\zeta^{e_\lambda-2}_{\alpha}(x)_\lambda \log x + \ldots + \zeta^0_{\alpha}(x)_\lambda \log^{e_\lambda-1} x\right], \end{cases}$$

appartenant toutes à l'exposant p_0.

On remarquera que la dernière relation fait connaître toutes les autres, puisqu'elle renferme tous leurs coefficients.

Les solutions (104) sont linéairement indépendantes; car, si l'on avait la relation

$$\sum_\lambda \left(C_{\lambda,0}\, z^{\lambda,0}_{\alpha} + \ldots + C_{\lambda,e^\lambda-1}\, z^{\lambda,e-1}_{\alpha}\right) = 0,$$

en divisant par x^{p_0} les diverses équations qui s'obtiennent en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de $\log x$, on reconnaîtrait qu'en faisant $x=0$ on doit avoir

$$C_{\lambda,h} = 0.$$

Quatrième cas. — C'est le cas général.

Les racines $p_0, p_1, \ldots, p_n$ de l'équation caractéristique fournissent les diviseurs élémentaires

$$\begin{matrix} (p-p_0)^{e_{\lambda^0}} & (\lambda^0 = \lambda^0_1, \ldots, \lambda^0_{r^0}), \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots, \\ (p-p_n)^{e_{\lambda^n}} & (\lambda^n = \lambda^n_1, \ldots, \lambda^n_{r^n}). \end{matrix}$$

D'ailleurs, entre ces racines et toute autre racine qui ne serait pas égale à l'une d'elles, il n'existe pas de différence entière. Enfin les différences

$$\begin{matrix} p_0 - p_1 = d_1, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ p_{n-1} - p_n = d_n \end{matrix}$$

sont des nombres entiers positifs, de sorte que l'on a

$$(105)\quad \begin{cases} p_{n-1} = p_n + d_n, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ p_0 = p_n + d_n + \ldots + d_1. \end{cases}$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{e_{\lambda^i}}$ les indices correspondant au diviseur élémentaire

$(p-p_i)^{e_{\lambda^i}}$ dans le système d'équations différentielles en z. Posons

$$(106)\quad \begin{cases} (\zeta_{\alpha_1})_0 \;\;= \varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{e^0+\ldots+e^{i-1}+e_{\lambda^i}-1}, \\ (\zeta_{\alpha_2})_0 \;\;= \varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{e^0+\ldots+e^{i-1}+e_{\lambda^i}-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (\zeta_{\alpha_{e_{\lambda^i}-1}})_0 = \varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{e^0+\ldots+e^{i-1}+1}, \\ (\zeta_{\alpha_{e_{\lambda^i}}})_0 \;\;= \varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{e^0+\ldots+e^{i-1}}, \end{cases}$$

où ε_{λ^i} est une constante ou une fonction de p qui ne s'annule pas pour $p=p_i$. On prend nuls tous les autres $(\zeta_\alpha)_0$. Soient ζ_α les séries $\zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}$ déterminées dans ces conditions, il vient

$$\begin{aligned} &P_{\alpha_1}(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = -\varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{e^0+\ldots+e^{i-1}+e_{\lambda^i}}x^p, \\ &P_\alpha\,(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = 0 \qquad (\alpha \neq \alpha_1). \end{aligned}$$

Si l'on prend pour e^k le plus grand des nombres e_{λ^k}, et si l'on pose

$$(107)\quad \begin{cases} l^0 \;\;= e^0, \\ l^1 \;\;= e^0+e^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l^{i-1} = e^0+\ldots+e^{i-1}, \\ l_{\lambda^i} \;\;= e^0+\ldots+e^{i-1}+e_{\lambda^i}, \end{cases}$$

on obtiendra les solutions

$$(108)\quad \begin{cases} z_\alpha = \left[\dfrac{\partial^{\mu^0}(x^p\zeta_\alpha)}{(\partial p)^{\mu^0}}\right]_{p_i} & (\mu^0 = 0, \ldots, l^0-1), \\ z_\alpha = \left[\dfrac{\partial^{\mu^1}(x^p\zeta_\alpha)}{(\partial p)^{\mu^1}}\right]_{p_i} & (\mu^1 = l^0, \ldots, l^1-1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_\alpha = \left[\dfrac{\partial^{\mu^{i-1}}(x_p\zeta_\alpha)}{(\partial p)^{\mu^{i-1}}}\right]_{p_i} & (\mu^{i-1} = l^{i-2}, \ldots, l^{i-1}+1), \\ z_\alpha = \left[\dfrac{\partial^{\mu_{\lambda^i}}(x^p\zeta_\alpha)}{(\partial p)^{\mu_{\lambda^i}}}\right]_{p_i} & (\mu_{\lambda^i} = l^{i-1}, \ldots, l_{\lambda^i}-1). \end{cases}$$

Ensuite les formules générales (82) (excepté la première) donneront

$$(\zeta_\alpha)_\nu = \sum_{h=1}^{h=e_{\lambda^i}} \frac{Q^\nu_{\alpha\alpha_h}(p).(p-p_i)^{h-1}}{Q(p+1)\ldots Q(p+\nu)}\,\varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{l^{i-1}},$$

où

$$Q(p) = (p-p_0)^{e^0}(p-p_1)^{e^1}\ldots(p-p)^{e^n},$$

et où $Q(p)$ est une fonction rationnelle de p, qui ne s'annule pas pour $p=p_0$, $p_1, \ldots, p_n$.

Par conséquent, pour $p=p_i$,

$(\zeta_\alpha)_0, \ldots$		$(\zeta_\alpha)_{d_i-1}$	s'annulent au degré	l^{i-1},
$(\zeta_\alpha)_{d_i}, \ldots$		$(\zeta_\alpha)_{d_i+d_{i-1}-1}$	»	l^{i-2},
....		....		...,
$(\zeta_\alpha)_{d_i+\ldots+d_3}$,	...,	$(\zeta_\alpha)_{d_i+\ldots+d_2-1}$	»	l^1,
$(\zeta_\alpha)_{d_i+\ldots+d_2}$,	...,	$(\zeta_\alpha)_{d_i+\ldots+d_1-1}$	»	l^0,

et l'on peut écrire

$$
(109)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^{\mu^0}\zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}}{(\partial p)^{\mu^0}}\right]_{p_i} = x^{d_i+\ldots+d_1}\zeta_\alpha^{0,\rho^0}(x)_{\lambda^i},\\
&\left[\frac{\partial^{\mu^1}\zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}}{(\partial p)^{\mu^1}}\right]_{p_i} = x^{d_i+\ldots+d_2}\zeta_\alpha^{1,\rho^1}(x)_{\lambda^i},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\left[\frac{\partial^{\mu_{\lambda^i}}\zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}}{(\partial p)^{\mu_{\lambda^i}}}\right]_{p_i} = \zeta_\alpha^{\rho_{\lambda^i}}(x)_{\lambda^i},
\end{aligned}
\right.
$$

où l'on a

$$
\begin{array}{rlllll}
 & \mu_0 = \rho^0 & = 0, & \ldots, & e^0 & -1,\\
\mu^1 & -\, l^0 = \rho^1 & = 0, & \ldots, & e^1 & -1,\\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots,\\
\mu^{i-1} & -\, l^{i-2} = \rho^{i-1} & = 0, & \ldots, & e^{i-1} & -1,\\
\mu_{\lambda^i} & -\, l^{i-1} = \rho_{\lambda^i} & = 0, & \ldots, & e_{\lambda^i} & -1.
\end{array}
$$

On obtient ainsi e_{λ^i} solutions

$$
z_\alpha = \left[\frac{\partial^{\mu_{\lambda^i}}(x^p\zeta_\alpha)}{(\partial p)^{\mu_{\lambda^i}}}\right]_{p_i}
$$

ou

$$
(110)\qquad z_\alpha = x^{p_i}\left\{\left[\frac{\partial^{\mu_{\lambda^i}}\zeta_\alpha}{(\partial p)^{\mu_{\lambda^i}}}\right]_{p_i} + \binom{\mu_{\lambda^i}}{1}\left[\frac{\partial^{\mu_{\lambda^i}-1}\zeta_\alpha}{(\partial p)^{\mu_{\lambda^i}-1}}\right]_{p_i}\log x + \ldots + \binom{\mu_{\lambda^i}}{\mu_{\lambda^i}}(\zeta_\alpha)_{p_i}\log^{\mu_{\lambda^i}} x\right\}
$$

$$
(\mu_{\lambda^i} = l^{i-1}, \ \ldots, \ l_{\lambda^i} - 1),
$$

appartenant à l'exposant p_i.

Il suffit de connaître la dernière de ces solutions pour connaître toutes les autres, c'est-à-dire celle qui correspond à $\mu_{\lambda^i} = l_{\lambda^i} - 1$. Pour avoir leurs expressions développées, posons

$$
(111)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{Z}_\alpha\ (x)_{\lambda^i} &= \zeta_\alpha^{e_{\lambda^i}-1}(x)_{\lambda^i} + \binom{l_{\lambda^i}-1}{1}\zeta_\alpha^{e_{\lambda^i}-2}(x)_{\lambda^i}\log x + \ldots\\
&\quad + \binom{l_{\lambda^i}-1}{e_{\lambda^i}-1}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda^i}\log^{e_{\lambda^i}-1} x,\\
\mathrm{Z}_\alpha^{i-1}(x)_{\lambda^i} &= \binom{l_{\lambda^i}-1}{e_{\lambda^i}}\zeta_\alpha^{i-1,e^{i-1}-1}(x)_{\lambda^i}\\
&\quad + \binom{l_{\lambda^i}-1}{e_{\lambda^i}+1}\zeta_\alpha^{i-1,e^{i-1}-2}(x)_{\lambda^i}\log x\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad + \binom{l_{\lambda^i}-1}{e^{i-1}+e_{\lambda^i}-1}\zeta_\alpha^{i-1,0}(x)_{\lambda^i}\log^{e^{i-1}-1} x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{Z}_\alpha^0(x)_{\lambda^i} &= \binom{l_{\lambda^i}-1}{e^1+\ldots+e_{\lambda^i}}\zeta_\alpha^{0,e^0-1}(x)_{\lambda^i}\\
&\quad + \binom{l_{\lambda^i}-1}{e^1+\ldots+e_{\lambda^i}+1}\zeta_\alpha^{0,e^0-2}(x)_{\lambda^i}\log x\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad + \binom{l_{\lambda^i}-1}{e^0+\ldots+e_{\lambda^i}-1}\zeta_\alpha^{0,0}(x)_{\lambda^i}\log^{e^0-1} x.
\end{aligned}
\right.
$$

Les valeurs initiales de

$$\zeta_{\alpha_{e_{\lambda^i}}}^{e_{\lambda^i}-1}(x)_{\lambda^i}, \quad \ldots, \quad \zeta_{\alpha_1}^0(x)_{\lambda^i}$$

n'étant pas nulles, les logarithmes ne disparaîtront pas de ces formules.

Les solutions cherchées sont enfin

$$(112)\qquad \left\{\begin{aligned}
z_\alpha^{\lambda^0} &= x^{p_0}\,Z_\alpha(x)_{\lambda^0},\\
z_\alpha^{\lambda^1} &= x^{p_1}\,Z_\alpha(x)_{\lambda^1} + x^{p_0}\,Z_\alpha^0(x)_{\lambda^1}\log^{e_{\lambda^1}} x,\\
z_\alpha^{\lambda^2} &= x^{p_2}\,Z_\alpha(x)_{\lambda^2} + x^{p_1}\,Z_\alpha^1(x)_{\lambda^2}\log^{e_{\lambda^2}} x + x^{p_0}\,Z_\alpha^0(x)_{\lambda^2}\log^{e^1+e_{\lambda^2}} x,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
z_\alpha^{\lambda^n} &= \quad x^{p_n}\;Z_\alpha\;(x)_{\lambda^n}\\
&\quad + x^{p_{n-1}}\,Z_\alpha^{n-1}(x)_{\lambda^n}\log^{e_{\lambda^n}} x\\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad + x^{p_0}\;Z_\alpha^0\;(x)_{\lambda^n}\log^{e^1+\ldots+e_{\lambda_n}} x \qquad (\lambda^0 = \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{r^0}^0;\ \ldots;\ \lambda^n = \lambda_1^n, \ldots, \lambda_{r^n}^n).
\end{aligned}\right.$$

Les degrés des fonctions Z en $\log x$ sont respectivement

$$e_{\lambda^i} - 1, \quad e^{i-1} - 1, \quad \ldots, \quad e^0 - 1.$$

Les solutions précédentes sont linéairement indépendantes, comme on pourrait le démontrer par le même procédé qui a servi dans les autres cas.

87. Il ne reste plus à démontrer qu'une seule proposition : *Toutes les solutions calculées forment un système fondamental.*

Après ce qu'on a déjà vu, il suffit de faire voir qu'*il ne peut exister aucun groupe de n relations identiques de la forme*

$$(113)\qquad C_1 A_{i1} + \ldots + C_\mu A_{i\mu} = 0$$

entre des solutions formant l'ensemble A_{i1} *appartenant à un exposant* r_1, *des solutions formant l'ensemble* A_{i2} *appartenant à l'exposant* r_2, ..., *des solutions formant l'ensemble* $A_{i\mu}$ *appartenant à l'exposant* r_μ, les C étant d'ailleurs des constantes, et les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ n'ayant entre eux aucune différence entière, *à moins que séparément on n'ait*

$$A_{i1} = 0, \qquad \ldots, \qquad A_{i\mu} = 0.$$

Mais on sait que chacune de ces conditions particulières est impossible dans le problème d'intégration qui nous a occupé. Donc on pourra, après avoir démontré la proposition qu'on vient d'énoncer, affirmer que les solutions précédemment obtenues forment un système fondamental.

Faisons, en effet, tourner x autour de l'origine un nombre $\mu - 1$ de fois, et désignons par

$$B_{i1}^{\eta_1}, \quad B_{i2}^{\eta_2}, \quad \ldots, \quad B_{i\mu}^{\eta_\mu}$$

les coefficients des plus hautes puissances de $\log x$ dans les groupements $A_{i1}, \ldots, A_{i\mu}$. Nous aurons

$$\begin{array}{r}
C_1 A_{i1} + \ldots + \qquad C_\mu A_{i\mu} = 0, \\
\omega_1 C_1 A_{i1} + \ldots + \quad \omega_\mu C_\mu A_{i\mu} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\omega_1^{\mu-1} C_1 A_{i1} + \ldots + \omega_\mu^{\mu-1} C_\mu A_{i\mu} = 0, \\
\left(\omega = e^{2\pi r\sqrt{-1}}\right).
\end{array}$$

Éliminant les C entre ces équations, on aura une équation qu'on pourra ordonner en $\log x$ et qui aura la forme

$$P_{i1} + P_{i2} \log x + \ldots + P_{i\eta} \log^{\eta} x = 0.$$

Les coefficients de cette équation seront d'ailleurs uniformes et, comme cette équation étant algébrique en $\log x$ ne peut admettre une infinité de racines, on devra avoir séparément

$$P_{i\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \eta).$$

En particulier, on aura

$$P_{i\eta} = 0$$

ou encore

$$P_{i\eta} = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \omega_1 & \ldots & \omega_\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{\mu-1} & \ldots & \omega_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix} B_{i1}^{\eta_1} \ldots B_{i\mu}^{\eta_\mu} = 0. \tag{114}$$

Comme aucun des facteurs de $P_{i\eta}$ n'est nul, l'hypothèse faite est inadmissible, et le théorème qu'on avait en vue est démontré.