SOLUTION

D'UNE

QUESTION POSÉE PAR M. HERMITE,

PAR M. LE VAVASSEUR,

Professeur au Lycée de Moulins.

1. *Problème.* — L'intégrale elliptique de seconde espèce

$$J=\int_0^K k^2\,\mathrm{sn}^2 x\,dx$$

peut s'écrire sous la forme

$$J=Kk^2\,\mathrm{sn}^2(\xi,k),$$

ξ étant compris entre les limites o et K.

Cette quantité ξ donne le maximum de la fonction $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$, comme le montre la relation de Jacobi

$$\int_0^x k^2\,\mathrm{sn}^2 x\,dx=\frac{Jx}{K}-\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

On demande de la définir en fonction du module par une équation différentielle (Ch. Hermite, *Intermédiaire des Mathématiciens*, n° 1, janvier 1894).

2. Soit

$$J=\int_0^1\frac{k^2y^2\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},\qquad K=\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},\qquad k^2+k'^2=1.$$

On a

$$\frac{dJ}{dk}=\frac{k(K-J)}{k'^2},\qquad \frac{dK}{dk}=\frac{k^2K-J}{kk'^2}.$$

Rappelons aussi que K et $K' = K(k')$ sont des intégrales de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$kk'^2 \frac{d^2 K}{dk^2} + (1 - 3k^2) \frac{dK}{dk} - kK = 0.$$

3. Partons de l'équation

$$J = K k^2 \operatorname{sn}^2(\xi, k).$$

Prenons une première fois la dérivée des deux membres de cette équation par rapport à k,

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dk} = & \left(k^2 \frac{dK}{dk} + 2kK\right) \operatorname{sn}^2(\xi, k) \\ & + 2K k^2 \operatorname{sn}(\xi, k) \operatorname{cn}(\xi, k) \operatorname{dn}(\xi, k) \frac{d\xi}{dk} + 2K k^2 \operatorname{sn}(\xi, k) \frac{\partial \operatorname{sn}(\xi, k)}{\partial k}. \end{aligned}$$

Dans cette équation, remplaçons $\frac{dJ}{dk}$, $\frac{dK}{dk}$ par leurs valeurs; remarquons, en outre, qu'on a

$$\operatorname{sn}(\xi, k) = \frac{\sqrt{J}}{k\sqrt{K}}, \qquad \operatorname{cn}(\xi, k) = \frac{\sqrt{k^2 K - J}}{k\sqrt{K}}, \qquad \operatorname{dn}(\xi, k) = \frac{\sqrt{K - J}}{\sqrt{K}},$$

enfin que

$$kk' \frac{\partial \operatorname{sn}(x, k)}{\partial k} = k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn}^2 x + \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \left[\frac{J x}{K} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - k^2 x\right]$$

(voir *Cours* Hermite, 3e édition, page 263).

Il vient, après simplifications,

$$(1) \qquad kk'^2 \frac{d\xi}{dk} + \frac{J - k^2 K}{K} \xi - \frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)} = \frac{k^2 K^2 - 2(1 + k^2) KJ + 3J^2}{2\sqrt{KJ(K - J)(k^2 K - J)}}.$$

4. Posons, d'autre part, avec M. Hermite,

$$U(x) = \frac{J x}{K} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

et servons-nous de la formule

$$kk'^2 \frac{\partial U}{\partial k} = U \frac{\partial U}{\partial x} - k^2 \left(U + x \frac{\partial U}{\partial x}\right) + k^2 (x - \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x)$$

(voir *Cours* Hermite, 3e édition, page 264).

On en déduit, en observant que ξ annule la dérivée par rapport à x de $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$,

$$kk'^2 \frac{\partial}{\partial k}\left[\frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)}\right] = \frac{J - k^2 K}{K} \frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)} + \frac{\sqrt{KJ(K-J)(k^2K-J)}}{K^2}.$$

5. Prenant dès lors la dérivée par rapport à k des deux membres de l'équation (1) et éliminant $\frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)}$ entre le résultat obtenu et l'équation (1), on trouve, après un calcul assez long, mais n'offrant aucune difficulté, que l'équation différentielle demandée est

$$kk'^2 \frac{d^2\xi}{dk^2} + (1 - 3k^2)\frac{d\xi}{dk} - k\xi = \frac{[k^2(K-J)^2 + k'^2 J^2][J^2 - k^2K^2][(K-J)^2 - k'^2K^2]}{4kk'^2[KJ(K-J)(k^2K-J)]^{\frac{3}{2}}}.$$

La fonction ξ de k sera donc de la forme

$$\xi = K(k) f(k) + K'(k)\varphi(k);$$

les fonctions $f(k)$ et $\varphi(k)$ seront données par de simples quadratures.