DÉTERMINATION

DES

ÉQUATIONS RÉSOLUBLES ALGÉBRIQUEMENT

DANS LESQUELLES

CHAQUE RACINE PEUT S'EXPRIMER EN FONCTION RATIONNELLE DE L'UNE D'ENTRE ELLES (1),

PAR M. IVAR BENDIXSON,

Maître de Conférences à l'Université de Stockholm.

Le but du travail est de montrer que l'on peut parvenir à la détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation algébrique soit résoluble par radicaux sans avoir recours à la théorie des substitutions, introduite dans l'Algèbre par Galois. On peut en effet déterminer lesdites conditions par une extension très facile à effectuer des considérations employées par Abel dans ses deux Mémoires : *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement* et *Sur les équations résolubles algébriquement*.

Nous étudierons à cette fin les équations telles que chaque racine puisse s'exprimer en fonction rationnelle de l'une d'entre elles, chaque équation pouvant en effet être réduite à une telle équation. Par une *fonction rationnelle* de x, nous entendons toujours ici une fonction formée par de seules opérations arithmétiques de x et des quantités R', ..., R^s définissant le domaine de rationnalité donné.

Soit

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

(1) Cette Note est le résumé d'un travail publié en suédois dans les *Ofversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Forhandlingar;* 1891. N° 3. Stockholm.

une équation irréductible dans le domaine de rationnalité donné, dont les racines peuvent s'écrire

$$\begin{array}{llll} x_1, & \theta x_1 & \ldots, & \theta^{n-1} x_1, \\ \theta_1 x_1, & \theta\theta_1 x_1, & \ldots, & \theta^{n-1}\theta_1 x_1, \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ \theta_{\mu-1} x_1, & \theta\theta_{\mu-1} x_1, & \ldots, & \theta^{n-1}\theta_{\mu-1} x_1, \end{array}$$

les fonctions θ_ν désignant des fonctions rationnelles de x et θ satisfaisant en outre à

$$\theta^\nu \theta x_1 = \theta^{\nu+1} x_1, \qquad \theta^n x_1 = x_1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Posons

$$f(x) = (x - x_1)(x - \theta x_1)\ldots(x - \theta^{n-1} x_1).$$

Les coefficients de $f(x)$ peuvent alors s'exprimer en fonctions rationnelles de la quantité

$$\psi(t, x_1) = (t - x_1)(t - \theta x_1)\ldots(t - \theta^{n-1} x_1),$$

t désignant une quantité indéterminée, et cette quantité ψ satisfait à une équation de degré μ à coefficients rationnels

$$(2) \qquad F_1(x') = [x' - \psi(t, x_1)][x' - \psi(t, \theta_1 x_1)]\ldots[x' - \psi(t, \theta_{\mu-1} x_1)] = 0.$$

L'équation (1) de degré μn est donc réduite à une équation de degré μ

$$F_1(x') = 0,$$

qui est irréductible (ce que l'on prouve aisément), et à une équation abélienne

$$f(x) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de l'une des racines de l'équation $F_1 = 0$.

Si l'on savait maintenant que l'une des racines de $F_1 = 0$ pouvait s'exprimer en fonction rationnelle d'une autre de ses racines, celles-ci pourraient s'écrire

$$\left.\begin{array}{llll} x'_1, & \lambda x'_1, & \ldots, & \lambda^{n_1-1} x'_1 \\ x'_2, & \lambda x'_2, & \ldots, & \lambda^{n_1-1} x'_2 \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots \\ x'_{\mu_1}, & \lambda x'_{\mu_1}, & \ldots, & \lambda^{n_1-1} x'_{\mu_1} \end{array}\right\} \mu_1 n_1 = n,$$

où λ est une fonction rationnelle telle que l'on ait $\lambda^{n_1}x'_1 = x'_1$. On pourrait donc réduire $F_1 = 0$ à une équation de degré μ_1

$$F_2(x'') = 0$$

et une équation abélienne du degré n_1

$$f_1(x') = (x' - x'_1)(x' - \lambda x'_1)\ldots(x' - \lambda^{n_1-1}x'_1) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de l'une des racines de F_2.

Dans ce cas on aura donc une fonction rationnelle θ_1 telle que

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \lambda\,\psi(t, x_1),$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\psi(t, \theta_1\theta x_1) &= \lambda\,\psi(t, \theta x_1)\\ &= \psi(t, \theta_1 x_1).\end{aligned}$$

Mais t est une quantité indéterminée, ce qui fait voir qu'il existe un nombre entier α tel que l'on ait

$$\theta_1\theta x_1 = \theta^\alpha\theta_1 x_1.$$

De l'autre côté, on voit que cette dernière équation a pour conséquence

$$\psi(t, \theta_1\theta x_1) = \psi(t, \theta_1 x_1),$$

ce qui nous donne

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \frac{1}{n}[\psi(t, \theta_1 x_1) + \psi(t, \theta_1\theta x_1) + \ldots + \psi(t, \theta_1\theta^{n-1}x_1)],$$

d'où l'on conclut que $\psi(t, \theta_1 x_1)$ est une fonction rationnelle de $\psi(t, x_1)$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'une des racines de

$$F_1(x') = 0$$

puisse être exprimée en fonction rationnelle d'une autre de ces racines, c'est donc qu'il existe un tel nombre α que l'on ait

$$\theta_1\theta x_1 = \theta^\alpha\theta_1 x_1.$$

On voit alors que l'équation (2) peut se réduire à une équation abélienne de degré n_1

$$f_1(x') = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de

$$
\begin{aligned}
x''_1 &= (t_1 - x'_1)(t_1 - \lambda x'_1)\ldots(t_1 - \lambda^{n_1-1} x'_1) \\
&= [t_1 - \psi(t, x_1)][t_1 - \psi(t, \theta_1 x_1)]\ldots[t_1 - \psi(t, \theta_1^{n-1} x_1)] = \psi_1(t_1, t, x_1),
\end{aligned}
$$

laquelle expression est elle-même racine d'une équation

$$F_2(x'') = 0$$

de degré μ_2 à coefficients rationnels.

On prouve maintenant par des considérations tout analogues aux précédentes que la condition, pour que l'une des racines de F_2 soit une fonction rationnelle d'une autre de ses racines, est qu'il existe des nombres entiers α', β', α'', β'' tels que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\theta_2 \theta x_1 &= \theta^{\alpha'} \theta_1^{\beta'} \theta_2 x_1, \\
\theta_2 \theta_1 x_1 &= \theta^{\alpha''} \theta_1^{\beta''} \theta_2 x_1.
\end{aligned}
$$

Ces dernières équations constituent en même temps les conditions suffisantes pour que l'une des racines de F_2 soit une fonction rationnelle d'une autre de ces racines.

On parvient de cette manière au théorème que voici :

Étant donnée une équation dont chaque racine peut s'exprimer en fonction rationnelle $\theta_\nu x_1$ de l'une d'entre elles x_1, si entre les fonctions $\theta_\nu x_1$ les relations suivantes ont lieu

$$
(3) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\theta_1 \theta x_1 &= \theta^{\alpha_1} \theta_1 x_1, \\
\theta_2 \theta x_1 &= \theta^{\alpha_2} \theta_1^{\beta_2} \theta_2 x_1, \\
\theta_2 \theta_1 x_1 &= \theta^{\alpha'_2} \theta_1^{\beta'_2} \theta_2 x_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\theta_\nu \theta x_1 &= \theta^{\alpha_\nu} \theta_1^{\beta_\nu} \ldots \theta_{\nu-1}^{k_\nu} \theta_\nu x_1, \\
\theta_\nu \theta_1 x_1 &= \theta^{\alpha'_\nu} \theta_1^{\beta'_\nu} \ldots \theta_{\nu-1}^{k'_\nu} \theta_\nu x_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\theta_\nu \theta_{\nu-1} x_1 &= \theta^{\alpha_\nu^{\nu-1}} \theta_1^{\beta_\nu^{\nu-1}} \ldots \theta_{\nu-1}^{k_\nu^{\nu-1}} \theta_\nu x_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

l'équation donnée se réduit alors à une suite d'équations abéliennes et elle est par conséquent résoluble par radicaux.

Jusqu'ici nous n'avons employé que les considérations dont s'est servi Abel dans le premier des Mémoires mentionnés, et l'on voit que l'on trouve par ces considérations seules la classe la plus générale d'équations résolubles algébriquement.

Il nous reste à prouver que l'ensemble des équations (3) forme la condition nécessaire pour que l'équation (1) soit résoluble par radicaux.

Afin d'y parvenir, nous ferons usage des considérations du second Mémoire cité d'Abel.

Nous avons supposé de l'équation (1) qu'elle est résoluble algébriquement. Une de ses racines peut alors s'écrire

$$x_1 = \varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_q),$$

où $R', \ldots, R^s$ désignent les quantités qui définissent le domaine de rationnalité donné et où les quantités V_ν satisfont aux équations suivantes

$$\begin{aligned} &V_1^{p_1} - \varphi_1(R', \ldots, R^s) = 0, \\ &V_2^{p_2} - \varphi_2(R'_1, \ldots, R^s, V_1) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &V_q^{p_q} - \varphi_q(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}) = 0, \end{aligned}$$

les $\varphi_1, \ldots, \varphi_q, \varphi$ désignant des fonctions rationnelles de $R', \ldots, R^s$ et des fonctions entières rationnelles de $V_1, \ldots, V_q$ de degré $p_1 - 1, \ldots, p_q - 1$. Je suppose ici que l'on ait adjoint au domaine de rationnalité donné les quantités $\omega_1, \ldots, \omega_q$ qui satisfont à

$$\omega_\nu^{p_\nu - 1} + \omega_\nu^{p_\nu - 2} + \ldots + \omega_\nu + 1 = 0,$$

que l'équation

$$V_\nu^{p_\nu} - \varphi_\nu(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{\nu-1}) = 0$$

soit irréductible dans le domaine de rationnalité $R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{\nu-1}$, et que les p_ν soient des nombres premiers.

En mettant $\omega_q V_q$ en φ au lieu de V_q, on obtient une nouvelle racine, ce qui nous donne

$$\varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}, \omega_q V_q) = \theta\varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}, V_q),$$

d'où l'on conclut

$$\varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}, \omega_q^\nu V_q) = \theta^\nu x_1$$

et

$$\theta^{p_q} x_1 = x_1.$$

Formons maintenant

$$\psi(t, x_1) = (t - x_1)(t - \theta x_1), \ldots, (t - \theta^{p_q - 1} x_1) = \mathrm{H}(t, \mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{q-1}),$$

et supposons pour plus de simplicité que V_{q-1} soit réellement contenue en H.

En mettant $\omega_{q-1}\mathrm{V}_{q-1}$ au lieu de V_{q-1} dans les équations ci-dessus, la fonction V_q se change en $\overline{\mathrm{V}_q}$ et l'on obtient une racine

$$x_2 = \varphi(\mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \omega_{q-1}\mathrm{V}_{q-1}, \overline{\mathrm{V}_q}).$$

On aura alors

$$\varphi(\mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \omega_{q-1}\mathrm{V}_{q-1}, \omega_q^\nu \overline{\mathrm{V}_q}) = \theta^\nu x_2.$$

Comme

$$\psi(t, x_2) = \mathrm{H}(t, \mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \omega_{q-1}\mathrm{V}_{q-1})$$

est différent de $\psi(t, x_1)$, il faut que x_2 soit une racine différente de tous les $\theta^\nu x_1$.

On aura donc

$$x_2 = \theta_1 x_1.$$

En mettant

$$y_\nu = \mathrm{H}(t, \mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \omega_{q-1}^\nu \mathrm{V}_{q-1}), \qquad \nu = 1, \ldots, p_{q-1},$$

chaque fonction cyclique de $y_1, \ldots, y_{p_{q-1}}$ est indépendante de V_{q-1}.

L'équation

$$(y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_{p_{q-1}}) = 0$$

sera donc une équation abélienne dans le domaine de rationnalité $\mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{q-2}$, ce qui nous permet d'affirmer que

$$(4) \qquad y_2 = \bar{\lambda}(y_1, \mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{q-2}),$$

$\bar{\lambda}$ désignant une fonction rationnelle.

Mais l'équation

$$\mathrm{H}(x, \mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{q-1}) = 0$$

est évidemment irréductible dans le domaine de rationnalité $\mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{q-1}$, ce que l'on prouve aisément en observant que $\mathrm{V}_q^{p_q} - \varphi_q$ est irréductible dans ce domaine et que p_q est un nombre premier. L'équation (4), qui peut être écrite

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \bar{\lambda}[\psi(t, x_1), \mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{q-2}],$$

a donc pour conséquence

$$\psi(t, \theta_1 \theta x_1) = \bar{\lambda}[\psi(t, \theta x_1), \mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{q-2}] = \psi(t, \theta_1 x_1).$$

De cette dernière relation on conclut enfin que l'on a

$$\theta_1 \theta x_1 = \theta^\alpha \theta_1 x_1.$$

Les autres relations (3) se démontrent d'une manière analogue, et l'on peut enfin affirmer qu'elles constituent les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathrm{F}(x)$ soit résoluble algébriquement.

Les équations (3) sont identiques à celles que l'on obtient par la méthode de Galois.