
SUR DES
FONCTIONS VOISINES DES FONCTIONS MODULAIRES,

PAR M. X. STOUFF,

Maitre de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

I.

Les substitutions dont l'expression générale est (1)

$$(1) \quad S, \left(z, \frac{[\alpha_1(j+j^4) + \alpha_2(j^2+j^3)]z + \Delta[\gamma_1(j+j^4) + \gamma_2(j^2+j^3)]}{\varepsilon\{\gamma_1(j^2+j^3) + \gamma_2(j+j^4)\}z - \alpha_1(j^2+j^3) - \alpha_2(j+j^4)} \right),$$

où l'on a

$$j^5 = 1, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (2) \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 3\alpha_1\alpha_2 + \Delta(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 3\gamma_1\gamma_2) = \varepsilon,$$

jouissent de cette propriété que le changement de j en j^2 , ou une transformation par la substitution $\left(z, -\frac{\Delta}{z}\right)$, produisent sur elles le même effet. Δ désigne ici un entier positif fixe. L'ensemble de ces substitutions forme par suite un groupe fuchsien que nous appellerons G_5^Δ . On peut se dispenser de considérer les groupes dont le Δ serait divisible par un carré, car, d'après la théorie exposée dans un Mémoire antérieur, ces groupes pourraient se ramener à des groupes de même forme dont le Δ serait le quotient du Δ primitif par ce carré. Les substitutions réduites pourraient, il est vrai, présenter des déterminants supérieurs à 1, mais en tout cas limités. La forme quadratique

$$(2) \quad x^2 - 3xy + y^2 = -[x(j+j^4) + y(j^2+j^3)][x(j^2+j^3) + y(j+j^4)]$$

joue dans la théorie de ces groupes un rôle essentiel. D'abord, toutes les fois

(1) Les résultats obtenus dans ce paragraphe ne diffèrent pas essentiellement de ceux auxquels est arrivé antérieurement M. Bianchi. (Voir *Accademia dei Lincei*, 1890. *Mathematische Annalen*, 1891.)

que Δ peut être représenté par cette forme, le groupe G_s^Δ est un transformé d'un sous-groupe du groupe appelé G_s dans mon précédent Mémoire. En effet, soit

$$\Delta = -[\lambda_1(j+j^4) + \lambda_2(j^2+j^3)][\lambda_1(j^2+j^3) + \lambda_2(j+j^4)].$$

On vérifie immédiatement que la substitution (1) est la transformée de la substitution

$$z, \quad \frac{a_j z + l_j g_j}{\varepsilon(g_j^2 l_j^2 z - a_j^2)},$$

où a_j est le premier coefficient de S , g_j le quotient du second par Δ , et

$$l_j = \lambda_1(j+j^4) + \lambda_2(j^2+j^3)$$

par la substitution

$$\left(z, \quad -\frac{z}{l_j^2} \right).$$

Examinons d'abord dans quels cas Δ peut se représenter par la forme (2) (1). Si

$$\Delta = x^2 - 3xy + y^2,$$

sans que Δ soit divisible par un carré, x et y sont premiers entre eux, et en déterminant deux nombres ξ et η tels que

$$x\eta - y\xi = 1,$$

la substitution

$$X = xX' + \xi Y', \quad Y = yX' + \eta Y'$$

change

$$X^2 + Y^2 - 3XY$$

en une forme quadratique dont le premier coefficient est Δ

$$(3) \quad \Delta X'^2 + mX'Y' + nY'^2.$$

On devra avoir

$$(4) \quad m^2 - 4n\Delta = 5.$$

Donc 5 doit être reste quadratique de 4Δ ; il faut, par suite, que Δ soit

(1) C'est à M. Bianchi qu'on doit d'avoir trouvé que le déterminant Δ doit se représenter par une forme quadratique dans les circonstances analogues.

Je dois aussi signaler les importants travaux de M. Fricke, *Mathematische Annalen*, vol. XXXVIII et XXXIX. Le présent travail a été livré à l'impression avant que j'en eusse connaissance.

impair et ne contienne comme facteurs premiers que 5 ou des nombres de la forme $10h \pm 1$ (1). Cette condition est, d'ailleurs, suffisante, car, si elle est remplie, on peut satisfaire à l'équation (4); par suite la forme (3) existe et elle est équivalente à la forme (2). En effet, il n'existe que deux formes réduites de déterminant 5, $x^2 + 4xy - y^2$ et $x^2 + xy - y^2$. Cette dernière est équivalente à (2) et, m étant impair, (3) est aussi nécessairement équivalente à (2). Nous étudierons spécialement les groupes dont le Δ ne satisfait pas à cette condition.

Voyons quelles périodes peuvent présenter les solutions du groupe.

Période 2. — Pour que la substitution (1) soit de période 2, il faut que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \varepsilon \alpha_2, \\ (2 - 3\varepsilon)\alpha_1^2 + \Delta(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 3\gamma_1\gamma_2) &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Supposons d'abord que Δ ne soit pas divisible par 5; il faudra d'abord que

$$(2 - 3\varepsilon)\alpha_1^2 \equiv \varepsilon \pmod{\Delta};$$

pour cela il faut et il suffit que $\varepsilon(2 - 3\varepsilon)$ soit reste quadratique de Δ . Si $\varepsilon = 1$, il vient

$$\Delta(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 3\gamma_1\gamma_2) = 1 + \alpha_1^2.$$

Pour qu'il existe des valeurs de α_1 qui rendent le second membre divisible par Δ , il faut et il suffit que Δ ne contienne que le facteur 2 et des facteurs premiers de la forme $4n + 1$, c'est-à-dire que Δ soit une suite de deux carrés $m^2 + n^2$. On aura

$$(1 + \alpha_1^2) = (m^2 + n^2)(x^2 + y^2),$$

et, par suite, si le système de décomposition (m, n) a été convenablement choisi,

$$mx - ny = 1, \quad mx + ny = \pm \alpha_1,$$

d'où

$$\begin{aligned} x &= x_0 + kn, & y &= y_0 + km, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 3\gamma_1\gamma_2 &= (x_0 + kn)^2 + (y_0 + km)^2. \end{aligned}$$

Le problème revient ensuite à chercher des nombres qui puissent être représentés à la fois par le premier et par le second membre, et il paraît fort probable qu'il en existe toujours. Si $\varepsilon = -1$, on a

$$\Delta(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 3\gamma_1\gamma_2) = -1 - 5\alpha_1^2;$$

(1) Voir DIRICHLET, DEDEKIND, *Zahlentheorie*.

il faut que Δ soit un diviseur de la forme $x^2 + 5y^2$. Donc -5 doit être reste quadratique de Δ , et Δ ne doit contenir que le facteur 2 et des facteurs premiers des formes $20h + 1$, $20h + 9$, $20h + 3$, $20h + 7$. D'ailleurs l'égalité précédente peut s'écrire

$$\Delta(\gamma_1 + \gamma_2)^2 \equiv -1 \pmod{5}.$$

Donc il faut que $-\Delta$ ou, ce qui revient au même, Δ soit reste quadratique de 5. On peut dire que Δ doit être de la forme $x^2 + 5y^2$. En effet, d'après cette dernière condition, il ne peut se représenter par la seconde forme réduite de déterminant -5 , qui est $2x^2 - 2xy + 3y^2$. Si Δ est divisible par 5, aucune des substitutions paires n'est de période 2. Pour qu'il existe une substitution impaire de période 2, il faut que Δ soit une somme de deux carrés.

Période 3. — Les substitutions de période 3 sont nécessairement paires; on a

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1,$$

et, en portant dans la relation (2), il vient

$$\Delta(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 3\gamma_1\gamma_2) = -2 + 5\alpha_1 - 5\alpha_1^2.$$

Donc, il faut que Δ soit un diviseur de la forme $2x^2 - 5xy + 5y^2$ de déterminant -15 . Donc -15 doit être reste quadratique de tous les facteurs premiers de Δ , et Δ ne doit contenir que le facteur 2 ou des facteurs premiers de la forme $60h + 1$, $60h + 17$, $60h + 19$, $60h + 23$, $60h + 31$, $60h + 47$, $60h + 49$, $60h + 53$; de plus on doit avoir

$$\Delta(\gamma_1 + \gamma_2)^2 \equiv -2 \pmod{5};$$

donc Δ doit être un non-reste de 5. Si Δ est impair, Δ est de la forme $3x^2 + 5y^2$. S'il est pair, il faudra qu'il soit de la forme $2x^2 + 2xy + 8y^2$. Les autres formes réduites de déterminant -15 ne conviennent pas; en effet, dans le premier cas, les formes $2x^2 + 2xy + 8y^2$, $4x^2 + 2xy + 4y^2$ ne peuvent représenter un nombre impair; dans le second, la seconde de ces deux formes ne convient pas parce qu'elle ne représente que des restes mod 5, et $3x^2 + 5y^2$ ne convient pas non plus parce qu'elle ne représente que des nombres pairs divisibles par 4. Enfin $x^2 + 15y^2$ ne convient jamais parce qu'il ne peut représenter que des restes mod. 5.

Période ∞ . — Les substitutions paraboliques sont nécessairement

païres; on a

$$\alpha_2 = 2 - \alpha_1,$$

et, en portant dans la relation (2),

$$\Delta(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 3\gamma_1\gamma_2) = -5(\alpha_1 - 1)^2.$$

Supposons d'abord que Δ ne soit pas divisible par 5, il faudra que $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 3\gamma_1\gamma_2$ le soit, ce qui est toujours possible, et le quotient de cette quantité par -5 sera de la forme $x^2 + y^2 - 3xy$ et devra être précisément égale à Δ . Donc, il faut et il suffit, pour que le groupe présente des substitutions paraboliques, que Δ soit de la forme $x^2 + y^2 - 3xy$.

Si Δ est divisible par 5 on voit facilement qu'on arrive à la même conclusion.

II.

Je reprends l'étude du groupe G_3^1 afin de montrer sur cet exemple la manière de former les fonctions fuchsienues engendrées par nos groupes.

Les substitutions génératrices du groupe G_3^1 sont

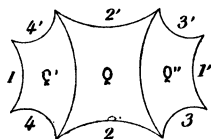
$$A = [0, 0, 1, 1], \quad B = (0, 0, 1, 0), \quad C = (-2, -2, -1, 1).$$

Les substitutions

$$BA = (-1, 0, 0, 0), \quad CA = (-1, 1, 2, 2)$$

conjuguent les côtés opposés d'un quadrilatère curviligne Q. Le sous-

Fig. 1.



groupe engendré par ces deux substitutions correspond donc à un système de fonctions elliptiques dont nous allons calculer le module. Pour cela j'utilise la substitution extérieure au groupe

$$(3) \quad [1, 1, 1, 1]$$

de déterminant 2 et de période 4. Soient Q' et Q'' les quadrilatères déduits

de Q par les substitutions BA et AB. Ils ont chacun un côté commun avec Q. Les substitutions $(BA)^3$, CA, ABCABA, BACB font correspondre les côtés 1, 1'; 2, 2'; 3, 3'; 4, 4', l'octogone obtenu par la juxtaposition de ces trois quadrilatères, de telle sorte que Q'Q'Q'' engendre des fonctions elliptiques dont le rapport des périodes est triple du rapport qui correspond au quadrilatère Q. Si l'on transforme une substitution impaire

$$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$$

par la substitution (3), on obtient une substitution impaire

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{-\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2}{2}, \quad \frac{\alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2}{2}, \right. \\ \left. \frac{-\alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2}{2}, \quad \frac{-\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 - \beta_2}{2} \right); \end{array} \right.$$

de même, la substitution paire

$$[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]$$

donne la substitution paire

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{-\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 - \beta_2}{2}, \quad \frac{-\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2}{2}, \right. \\ \left. \frac{-\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 - \beta_2}{2}, \quad \frac{-\beta_1 - \beta_2 + \alpha_1 - \alpha_2}{2} \right], \end{array} \right.$$

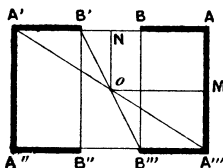
D'après ces formules, on a pour transformées

$$\begin{array}{ll} \text{de } CA = (-1, 1, 2, 2), & (3, 1, 0, 0) = (BA)^3, \\ \text{de } (BA)^3 = (3, 1, 0, 0), & (-1, 1, -2, -2) = AC, \\ \text{de } ABCABA = (1, -1, 2, 4), & (2, 4, 1, -1) = ABCAB, \\ \text{de } BACB = (1, -1, -4, -2), & (-4, -2, 1, -1) = BCABA, \end{array}$$

et l'on arrive à cette conséquence remarquable. La rotation (3) fait coïncider le polygone Q'Q'Q'' avec lui-même, de sorte que les côtés 2, 2' viennent sur 1, 1'; 3, 3' sur 4, 3; 4, 4' sur 4', 3'; 1, 1' sur 2', 2. Il en résulte que les axes des substitutions hyperboliques CA et BA sont perpendiculaires et, par suite, que les fonctions elliptiques du polygone Q et celle du polygone Q'Q'Q'' possèdent des modules réels. Soit AA'A''A''' (*fig. 2*) leur rectangle des périodes. Il doit jouir de la propriété suivante : je divise les côtés opposés AA', A''A''' chacun en trois parties égales par les points B, B', B'', B'''.

Je fais correspondre alors les diverses parties du contour du rectangle deux à deux, de telle sorte que deux longueurs correspondantes soient toujours égales de la manière suivante : BB' avec $B''B''$, BA avec $B'A'$, AA'' avec

Fig. 2.



$A'A''$, $A''B''$ avec $A''B''$. La figure ainsi formée engendre un nouveau système de fonctions elliptiques. Il faut que ce système soit identique au premier (1). Désignons par $2K$ et $2iK'$ les périodes AA' , $A'A''$, par k le module de Legendre, u et v les valeurs des intégrales de première espèce dans les deux systèmes correspondant à un même point du rectangle. Les fonctions $cn^2 u$ et $cn^2 v$ prennent une fois chaque valeur dans le triangle $AA'A''$ dont on conjugue les demi-côtés, donc elles sont fonctions linéaires l'une de l'autre, et comme à $cn u = 0, \infty, \frac{-ik'}{k}$ correspondent respectivement $cn v = \infty, 0, \frac{-ik'}{k}$, on a

$$cn u \, cn v = -\frac{k'^2}{k^2};$$

au point B, $u = \frac{2K}{3}$, et $cn v = -1$; donc

$$cn \frac{2K}{3} = \frac{k'^2}{k^2}.$$

Or l'équation qui donne $cn \frac{2K}{3}$ s'obtient en égalant à 0 l'expression de $sn 3u$ en fonction de $cn u$, ce qui donne

$$2cn^2 u \, dn^2 u (1 - k^2 sn^4 u) + (cn^2 u - sn^2 u \, dn^2 u)(dn^2 u - k^2 sn^2 u \, cn^2 u) = 0.$$

En posant $a = -\frac{k^2}{k'^2}$, on trouve l'équation

$$a^4 + 2a^3 - a^2 + 2a + 1 = 0,$$

d'où

$$a^2 - a + 1 = 0;$$

les valeurs correspondantes de k ne conviennent pas parce qu'elles sont imaginaires, ou

$$a^2 + 3a + 1 = 0,$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad k^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}.$$

Soit

$$x = a \operatorname{cn}^2 u;$$

la surface de Riemann de genre 1 qui se représente sur le polygone $Q'QQ''$ peut être considérée comme définie par la relation

$$y = \sqrt{x^3 - (1+a)x^2 + ax}.$$

Les invariants g_2 et g_3 du polynôme placé dans le radical ont pour valeurs

$$g_2 = -\frac{a}{3}, \quad g_3 = \frac{(1+a)(2a^2 - 5a + 2)}{2^4 \cdot 3^3}.$$

L'invariant absolu J de M. Klein est

$$J = \frac{256}{135} = \frac{2^8}{5 \cdot 3^3}.$$

L'invariant absolu J' relatif au polygone Q se calcule d'après les formules données par M. Klein pour la transformation du troisième ordre (1)

$$(6) \quad J : J - 1 : 1 = (\tau - 1)(9\tau - 1)^3 : (27\tau^2 - 18\tau - 1)^2 : -64\tau, \quad \tau\tau' = 1,$$

$$(7) \quad J' : J' - 1 : 1 = (\tau' - 1)(9\tau' - 1)^3 : (27\tau'^2 - 18\tau' - 1)^2 : -64\tau'.$$

Les équations (6) donnent

$$\tau = -\frac{5}{27},$$

d'où

$$J' = \frac{2^8 \cdot (31)^3}{5^3 \cdot 3^3}.$$

On peut former d'une manière analogue l'équation fuchsienne relative au polygone $Q'QQ''$. En prenant pour variable $x = a \operatorname{cn}^2 u$, cette équation

(1) *Mathematische Annalen*, t. XIV.

est de la forme

$$(8) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\mathbf{A}_0 x^6 + \mathbf{A}_1 x^5 + \mathbf{A}_2 x^4 + \mathbf{A}_3 x^3 + \mathbf{A}_2 x^2 + \mathbf{A}_1 x + \mathbf{A}_0}{x^2(x-1)^2(x-a)^2\left(x-\frac{1}{a}\right)^2} v = f(x) v.$$

Les coefficients \mathbf{A} satisfont, d'après la nature des points singuliers, aux relations

$$\mathbf{A}_0 = -\frac{3}{16}, \quad 2\mathbf{A}_0 + 2\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 = -\frac{75}{16}, \quad -18\mathbf{A}_0 + 7\mathbf{A}_1 - 3\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 = \frac{25}{4},$$

qui ne suffisent pas à les déterminer. Soient

$$(9) \quad u_1 = u + \frac{2\mathbf{K}}{3}, \quad y = a \operatorname{cn}^2 u_1;$$

si l'on prend, au lieu de x , y pour variable dans l'équation (8), la nouvelle équation, après que l'on aura réduit à zéro le coefficient de la dérivée première de la fonction inconnue, devra être identique à l'équation (8). Si dans l'équation

$$(10) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = f(x) v$$

on fait un changement de variable en prenant $x = \varphi(y)$, l'équation (10) a pour transformée

$$(11) \quad \frac{d^2 w}{dy^2} = \{f[\varphi(y)] - \operatorname{schw}_y \varphi\} \varphi'^2 w$$

où $\operatorname{schw}_y \varphi$ désigne la fonction

$$\frac{2\varphi'\varphi''' - 3\varphi''^2}{4\varphi'^4} \quad (1).$$

On a, d'après des formules connues, si v est une fonction de u et que u soit lui-même fonction d'une variable x ,

$$(12) \quad \operatorname{schw}_x v = \operatorname{schw}_u v + \frac{1}{\varphi'^2} \operatorname{schw}_x u,$$

(1) M. Sylvester dans sa *Théorie des réciproquants* (*American Journal*) appelle *schwarzian* la quantité un peu différente $\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{2} \frac{\varphi''^2}{\varphi'^2}$.

et si u et x sont deux fonctions inverses,

$$(13) \quad \text{schw}_x u = -x'_u{}^2 \text{schw}_u x,$$

D'après les formules (12) et (13), après la substitution de la variable y à la variable x , l'équation (8) devient

$$(14) \quad \frac{d^2 w}{dy^2} = \left\{ \frac{x'_u{}^2}{y'^2_{u_1}} [f(x) - \text{schw}_u x] + \text{schw}_{u_1} y \right\} y,$$

on a

$$\text{schw}_u \text{cn}^2 u = \frac{\left\{ \begin{array}{l} -3(1-k^2)^2 - 4(1-k^2)(2k^2-1)\text{cn}^2 u - (10k^4 - 10k^2 + 4)\text{cn}^4 u \\ + 4k^2(2k^2-1)\text{cn}^6 u - 3k^4 \text{cn}^8 u \end{array} \right\}}{16 \text{sn}^4 u \text{cn}^4 u \text{dn}^4 u},$$

et il vient

$$\frac{x'_u{}^2}{y'^2_{u_1}} [f(x) - \text{schw}_u(x)] = \frac{\left\{ \begin{array}{l} 16 \left[\begin{array}{l} \mathbf{A}_0 a^6 \text{cn}^{12} u + \mathbf{A}_1 a^5 \text{cn}^{10} u + \mathbf{A}_2 a^4 \text{cn}^8 u \\ + \mathbf{A}_3 a^3 \text{cn}^6 u + \mathbf{A}_2 a^2 \text{cn}^4 u + \mathbf{A}_1 a \text{cn}^2 u + \mathbf{A}_0 \end{array} \right] \\ + (a^2 \text{cn}^2 u - 1)^2 \left[\begin{array}{l} 3a^2 \text{cn}^8 u - 4a(a+1)\text{cn}^6 u + (4a^2 + 2a + 4)\text{cn}^4 u \\ - 4(a+1)\text{cn}^2 u + 3 \end{array} \right] \end{array} \right\}}{16 a^6 (a-1)^2 \text{sn}^2 u \text{cn}^2 u \text{dn}^2 u \text{sn}^2 u_1 \text{cn}^2 u_1 \text{dn}^2 u_1 \left(\text{cn}^2 u - \text{cn}^2 \frac{2\mathbf{K}}{3} \right)^2}.$$

On vérifie facilement que le numérateur de cette fraction est du 10^e degré seulement, et qu'en vertu des relations déjà obtenues entre les \mathbf{A} , il est divisible par $\text{cn}^2 u \text{dn}^2 u$. Le dénominateur peut s'écrire, d'après la formule facile à établir,

$$\text{sn} u \left(\text{cn}^2 \frac{2\mathbf{K}}{3} - \text{cn}^2 u \right) = \frac{\text{sn} u_1 \left(\text{cn}^2 \frac{2\mathbf{K}}{3} - \text{cn}^2 u_1 \right)}{1 - k^2 \text{sn}^2 u_1 \text{sn}^2 \frac{2\mathbf{K}}{3}} \left(1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 \frac{2\mathbf{K}}{3} \right),$$

$$\frac{16 a^6 (a-1)^2 \text{sn}^4 u_1 \text{cn}^2 u_1 \text{dn}^2 u_1 \text{cn}^2 u \text{dn}^2 u \left(\text{cn}^2 u_1 - \text{cn}^2 \frac{2\mathbf{K}}{3} \right)^2 \left(1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 \frac{2\mathbf{K}}{3} \right)^2}{\left(1 - k^2 \text{sn}^2 u_1 \text{sn}^2 \frac{2\mathbf{K}}{3} \right)^2}.$$

Pour achever le calcul, il sera commode de former les termes qui deviennent infinis dans $f(x)$ pour $\text{cn} u = 0$, et dans $f(y)$ pour $\text{cn} u_1 = 0$, on a

$$f(x) = \frac{\mathbf{A}_0}{a^2 \text{cn}^4 u} + \frac{\mathbf{A}_1 - 4\mathbf{A}_0}{a \text{cn}^2 u} + \dots$$

et

$$f(y) = -\frac{3}{16a^2 \operatorname{cn}^4 u_1} - \frac{(a+1)}{8a^2 \operatorname{cn}^2 u_1} + \frac{16 \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_0[(a+1)^6 + 1] + \mathbf{A}_1(a+1)[(a+1)^4 + 1] \\ + \mathbf{A}_2(a+1)^2[(a+1)^2 + 1] + \mathbf{A}_3(a+1)^3 \{-64a\} \end{array} \right.}{16a(a+1) \operatorname{cn}^2 u_1} + \dots$$

En égalant les multiplicateurs de $\frac{1}{\operatorname{cn}^2 u}$ et de $\frac{1}{\operatorname{cn}^2 u_1}$ et en réduisant

$$\mathbf{A}_0(4a-1) - \mathbf{A}_1(5a+2) + \mathbf{A}_2(4a+1) - \mathbf{A}_3(2a+1) = \frac{1-32a}{8},$$

on a enfin

$$\mathbf{A}_0 = -\frac{3}{16}, \quad \mathbf{A}_1 = -\frac{-38+3a}{80}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{-153+3a}{80}, \quad \mathbf{A}_3 = \frac{-12a+37}{80}.$$

Voici encore une propriété du même genre du groupe G_5 . J'envisage la substitution de période 3 extérieure au groupe

$$(15) \quad (1, 0, 2, 0),$$

une substitution paire et une substitution impaire :

$$[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2] \quad \text{et} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$$

ont respectivement pour transformées, par la substitution (15)

$$(16) \quad \left[\begin{array}{cc} \frac{\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\beta_1 + 4\beta_2}{5}, & \frac{4\alpha_1 + \alpha_2 + 2\beta_1 - 4\beta_2}{5} \\ \frac{2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\beta_1 + 13\beta_2}{5}, & \frac{-2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \beta_1 + 7\beta_2}{5} \end{array} \right],$$

et

$$(17) \quad \left(\begin{array}{cc} \frac{\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\beta_1 - 8\beta_2}{5}, & \frac{-4\alpha_1 + \alpha_2 + 2\beta_1 - 8\beta_2}{5} \\ \frac{2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\beta_1 - 11\beta_2}{5}, & \frac{2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \beta_1 - \beta_2}{5} \end{array} \right).$$

Pour que la substitution (16) fasse partie du groupe G_5 , il faut que ses coefficients soient entiers, c'est-à-dire que l'on ait

$$(18) \quad \alpha_1 - \alpha_2 - 2\beta_1 - \beta_2 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Si l'on veut que la transformée de (16) fasse aussi partie de G_5 , il faut que, outre la congruence (18), on ait la congruence

$$(19) \quad \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 \equiv 0 \pmod{5};$$

l'ensemble des deux congruences (18) et (19) définit un sous-groupe permutable avec la substitution (15).

Pour que la substitution (17) ait ses coefficients entiers, il faut que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 2(\beta_1 + \beta_2) \equiv 0 \pmod{5};$$

mais, d'après l'équation (2), il vient

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2) \equiv 1 \pmod{5},$$

ou

$$5(\beta_1 + \beta_2)^2 \equiv 1 \pmod{5},$$

ce qui est impossible. Donc aucune substitution impaire du groupe G_5 ne se transforme en une substitution de ce groupe.

Le sous-groupe défini par les équations (18) et (19) admet pour substitutions génératrices

$$\begin{aligned} (BA)^{10} &= [89, 34, 0, 0], & CBA &= [2, 0, 2, 3], & BCA &= [-2, 0, 3, 2], \\ (AB)^2(CBA)(BA)^2 &= [2, 0, 2, 3], & (AB)^2(BCA)(BA)^2 &= [2, 0, -3, -7], \\ (AB)^4 BCA (BA)^4 &= [2, 0, -18, -47], & (AB)^4 CBA (BA)^4 &= [2, 0, 47, 123], \\ (AB)^6(BCA)(BA)^6 &= [2, 0, -123, -322], & (AB)^6 CAB (BA)^6 &= [2, 0, 322, 843], \\ (AB)^8(BCA)(BA)^8 &= [2, 0, -843, -2207], & (AB)^8 CBA (BA)^8 &= [2, 0, 2207, 5778]. \end{aligned}$$

III.

Le groupe G_5^2 ne contient pas de substitutions paraboliques. Convenons de représenter par

$$(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2), \text{ ou } [\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2]$$

la substitution (1), S suivant que ϵ est positif ou négatif.

On reconnaît aisément que G_5^2 admet comme substitutions génératrices

$$\begin{aligned} A &= (-1, -1, 1, 0), & B &= [1, 0, -1, -1], \\ C &= [0, 1, -1, -1], & D &= (1, 1, 1, 0). \end{aligned}$$

Les substitutions A et D sont de période 2 et les substitutions B et C de période 3; elles satisfont à la relation ABCD = 1.

Parmi les substitutions qui transforment ce groupe en un groupe commensurable avec lui, remarquons d'abord la substitution $\Theta = \left(z, -\frac{2}{z}\right)$;

elle transforme respectivement l'une dans l'autre, A et D, B et C. Par suite G_3^2 est un sous-groupe d'indice 2, d'un groupe Γ admettant comme substitutions génératrices D, C et Θ .

Considérons la substitution de période 6 et de déterminant 3,

$$\sigma = [2, 1, 1, 1];$$

si l'on transforme par cette substitution une substitution du groupe G_3^2 , on obtient les formules

$$\begin{array}{l} \text{Pour une substitution impaire.} \\ \text{Pour une substitution paire.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \alpha'_1 = \frac{\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\gamma_1 - 8\gamma_2}{3}, \\ \alpha'_2 = \frac{-2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\gamma_1 - 8\gamma_2}{3}, \\ \gamma'_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \gamma_1 + \gamma_2}{3}, \\ \gamma'_2 = \frac{2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5\gamma_1 + 8\gamma_2}{3}, \\ \\ \alpha'_1 = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\gamma_1 + 4\gamma_2}{3}, \\ \alpha'_2 = \frac{2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\gamma_1 - 4\gamma_2}{3}, \\ \gamma'_1 = \frac{-\alpha_1 + \alpha_2 - \gamma_1 + 5\gamma_2}{3}, \\ \gamma'_2 = \frac{-4\alpha_1 + 4\alpha_2 - \gamma_1 + 8\gamma_2}{3}. \end{array} \right.$$

Pour que la transformée d'une substitution appartienne encore à G_3^2 , il faut que

$$(20) \quad \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma_1 + \gamma_2 \equiv 0 \pmod{3},$$

si la substitution est impaire, et que

$$(21) \quad \alpha_1 - \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 \equiv 0 \pmod{3},$$

si elle est paire. Lorsque la condition (20) pour une substitution impaire et la condition (21) pour une substitution paire est remplie, la transformée de la substitution satisfait encore, soit à la congruence (20), soit à la congruence (21). Les congruences (20) et (21) séparent dans le groupe G_3^2 un sous-

groupe Γ d'indice 4 qui admet, pour substitutions génératrices,

$$\begin{aligned} A &= (-1, -1, 1, 0), & C &= [0, 1, -1, -1], & B^{-1}AB &= (1, 1, 0, 1), \\ BCB &= [-7, 0, 5, 5], & BACB^{-1} &= (10, 13, -4, 3), \\ BC^{-1}B^{-1}CB^{-1} &= [-24, 25, 47, 35]; \end{aligned}$$

les différents cycles correspondent aux points doubles des substitutions, C et $BC^{-1}B^{-1}CB^{-1}$ de période 3; A, $B^{-1}AB$, $B^{-1}CAB^{-1}$, BDB^{-1} qui sont de période 2. Il y a un cycle pour lequel la somme des angles est 2π . On a

$$\begin{aligned} B^{-1}CAB^{-1} &= (9, 9, -1, 5), & BDB^{-1} &= (9, 9, -5, 1), \\ \text{et} & & \sigma^{-1}C\sigma &= C, & \sigma^{-1}BC^{-1}B^{-1}CB^{-1}\sigma &= [24, -23, 59, 143], \\ \sigma^{-1}A\sigma &= (1, 1, -1, -3), & \sigma^{-1}B^{-1}AB\sigma &= (-3, -3, 1, 4), \\ \sigma^{-1}B^{-1}CAB^{-1}\sigma &= (-17, -17, 8, 27), & \sigma^{-1}BDB^{-1}\sigma &= (-9, -9, 8, 23). \end{aligned}$$

La substitution σ transforme le point double de chaque substitution C, et $BC^{-1}BC^{-1}B^{-1}$, de période 3, en un point qui lui est homologue par rapport au groupe Γ . On a

$$\begin{aligned} (1, 1, -1, -3) &= B^{-1}AB \cdot BCAB^{-1} \cdot B^{-1}AB, \\ (-3, -3, 1, 4) &= CABABC^{-1}AB = C \cdot A \cdot BACB^{-1} \cdot BCB \cdot B^{-1}CBC^{-1}B \cdot B^{-1}AB, \\ (-3, -3, 1, 4) &= C \cdot A \cdot BDB^{-1} \cdot A \cdot C^{-1}, \end{aligned}$$

comme le carré de σ appartient au groupe Γ , la permutation des cycles présente la période 2, et les cycles ne doivent subir que des transpositions. Les deux équations précédentes montrent donc que les cycles de A et de $BCAB^{-1}$, de $B^{-1}AB$ et de BDB^{-1} s'échangent respectivement.

Désignons par x la variable qui représente conformément sur un plan le polygone générateur du groupe G_3^2 , en lui imposant de prendre les valeurs 0, ∞ , respectivement aux points doubles de B et de C, et par y celle qui représente sur le plan le polygone générateur du groupe Γ ; x s'exprime par une fraction du 4^e degré en y . Aux valeurs 0 et ∞ de x correspondent des valeurs triples de y . On peut imposer à y la condition que ces valeurs triples soient 0 et ∞ . On a alors

$$(22) \quad x = \frac{y^4 - my^3}{y - n};$$

m et n sont deux constantes qu'il reste à déterminer.

Or la dérivée de la fraction (22) a des zéros simples correspondant aux

points doubles des substitutions D et BAB^{-1} , lesquelles ne font pas partie du groupe Γ' . Les valeurs correspondantes de y sont données par l'équation

$$(23) \quad 3y^2 - 2y(m + 2n) + 3mn = 0.$$

Soient y_1 et y_2 les deux racines de cette équation; en les portant dans (22), on obtiendra deux valeurs de x , x_1 et x_2 .

Inversement, si dans (22) on donne à x , par exemple, la valeur x_1 , les valeurs correspondantes de y sont, y_1 comptée deux fois, et deux autres valeurs distinctes correspondant aux points doubles des substitutions BDB^{-1} et $B^{-1}CAB^{-1}$; l'équation du second degré qui fournit ces deux dernières valeurs s'obtient en divisant par $(y - y_1)^2$ le polynôme

$$(y^3 - my^3)(y_1 - n) - (y - n)(y_1^3 - my_1^3):$$

c'est

$$(24) \quad y^2 + y(2y_1 - m) + 3y_1^2 - 2my_1 = 0.$$

De même les valeurs de y qui correspondent aux points doubles de A et de $B^{-1}AB$ sont données par l'équation précédente en y changeant y_1 en y_2 :

$$(25) \quad y^2 + y(2y_2 - m) + 3y_2^2 - 2my_2 = 0;$$

mais la substitution σ étant permutable avec le groupe Γ' , les deux valeurs de y correspondant à un point P du cercle fondamental et au point $P\sigma$ sont fonctions linéaires l'une de l'autre, et, comme σ^2 fait partie de Γ' , la relation entre ces deux valeurs de y est une *involution*.

D'après la manière dont σ permute les points doubles, cette involution a pour points doubles m et n ; elle peut donc s'écrire

$$\frac{y - m}{y - n} + \frac{y' - m}{y' - n} = 0,$$

et elle échange les deux équations (24) et (25). En posant

$$\frac{y - m}{y - n} = t,$$

les équations (24) et (25) deviennent

$$(26) \quad [3y_1^2 - 2(m - n)y_1 + n^2 - mn]t^2 - [6y_1^2 + 2y_1(n - m) + mn - m^2]t + 3y_1^2 = 0,$$

$$(27) \quad [3y_2^2 - 2(m - n)y_2 + n^2 - mn]t^2 - [6y_2^2 + 2y_2(n - m) + mn - m^2]t + 3y_2^2 = 0;$$

les équations doivent avoir leurs racines égales et de signes contraires, ce qui donne les équations

$$(28) \quad \frac{3y_1^2 - 2(m-n)y_1 + n^2 - mn}{3y_2^2 - 2(m-n)y_2 + n^2 - mn} = -\frac{6y_1^2 + 2y_1(n-m) + mn - m^2}{6y_2^2 + 2y_2(n-m) + mn - m^2} = \frac{y_1^2}{y_2^2},$$

en chassant les dénominateurs et en remplaçant partout les fonctions symétriques de y_1 et de y_2 par

$$y_1 + y_2 = \frac{2}{3}(m + 2n), \quad y_1 y_2 = mn,$$

on voit que les équations (28) admettent une solution commune et une seule

$$n = -2m.$$

Prenons, pour simplifier, $m = 1$, ce qui est permis. On trouve

$$y_1 = -1 + \sqrt{3}, \quad y_2 = -1 - \sqrt{3}, \quad x_1 = -\frac{y_1^6}{4}, \quad x_2 = -\frac{y_2^6}{4}.$$

Ainsi l'équation fuchsienne de G_5^2 a pour points singuliers 0 , ∞ , $-\frac{y_1^6}{4}$, $-\frac{y_2^6}{4}$. On calculerait facilement cette équation par la méthode exposée à propos du groupe G_5^1 .

IV.

En général, toute substitution qui, prise comme substitution transformante, engendre un groupe fuchsien correspondant à une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité doit avoir un carré parfait pour norme de son déterminant. Pour que le groupe ainsi formé ne soit pas réductible à des coefficients entiers ⁽¹⁾, il faut et il suffit que la racine carrée de cette norme ne puisse être considérée comme la norme d'un nombre abélien.

On voit facilement que tout nombre qui peut être représenté par une norme abélienne en prenant pour éléments les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité est reste de puissance $\frac{p-1}{2}$ de p , lorsque p est de la forme $4n + 3$; la recherche de nombres abéliens à normes carrées, et dont la racine carrée ne soit pas norme abélienne, présente de grandes difficultés. On y arrive beaucoup plus facilement si p est de la forme $4n + 1$. Par exemple, pour $p = 17$, le nombre $6j + 6j^{16}$ jouit de cette propriété.

(1) Voir le travail précédent dans ce journal, p. 15 et 16.