SUR LES

POLYNÔMES DE LEGENDRE,

PAR M. T.-J. STIELTJES.

L'expression remarquable, obtenue d'abord par Laplace pour représenter asymptotiquement les polynômes de Legendre, a été depuis l'objet de plusieurs recherches, et M. Darboux notamment a donné une formule qui permet d'obtenir une expression approchée, l'erreur commise étant de l'ordre d'une puissance aussi grande qu'on le voudra de $\frac{1}{n}$ (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. IV; 1878).

Nous développons, dans le travail actuel, un résultat plus complet. En effet, nous trouvons qu'on peut exprimer le polynôme de Legendre par une série qui est *convergente* tant que la variable reste dans un certain intervalle. C'est seulement en dehors de cet intervalle que la série prend le caractère d'une simple expression asymptotique; mais, même dans ce cas, nous obtenons une expression très simple de l'erreur commise en s'arrêtant à un nombre fini de termes [1].

1. En définissant $P^n(x)$ comme coefficient de z^{-n-1} dans le développement de

$$(z^2 - 2xz + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les puissances descendantes de z, on obtient immédiatement l'expression par intégrale définie

$$P^n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{z^2 - 2xz + 1}}, \tag{1}$$

[1] Le résultat principal de ce travail a été énoncé dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* en mai 1890.

l'intégrale étant prise en sens direct sur un contour fermé C enveloppant les points

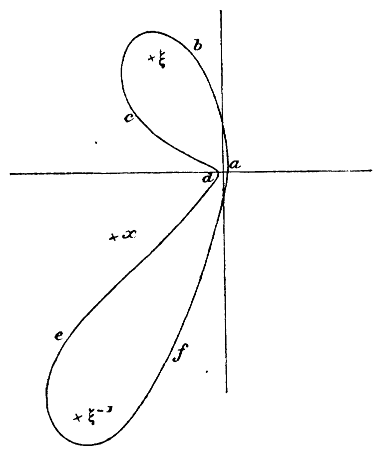
$$\xi\ \ = x+\sqrt{x^2-1},$$
$$\xi^{-1}= x-\sqrt{x^2-1},$$

qui sont les points critiques du radical. Ce radical doit être pris avec un signe tel que, lorsque $|z|$ est très grand, on ait, à peu près,

$$\sqrt{z^2-2xz+1} : z \qquad \text{égal à} \quad +1.$$

Le contour fermé C peut être remplacé par le chemin *abcdefa*, les points *a* et *d* étant très voisins de l'origine. Pour préciser, nous supposons que ξ

Fig. 1.



et ξ^{-1} ne sont pas réels, c'est-à-dire que x^2-1 n'est pas réel et positif. On désignera alors par ξ celui des points critiques qui est situé au-dessus de l'axe réel, en sorte que la partie réelle de

$$\frac{\xi}{i}$$

est positive.

On voit alors facilement que la valeur du radical en *a* doit être $+1$, et qu'en *d* elle est -1. On aura, par conséquent,

$$P^n(x) = \frac{1}{2\pi i}(\mathcal{A} - \mathcal{B}), \tag{2}$$

$\mathcal{A}$ étant la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{z^2 - 2xz + 1}}$$

prise sur un lacet partant de l'origine et enveloppant le point ξ, $\mathcal{B}$ la valeur de cette même intégrale sur un lacet partant de l'origine et enveloppant le point ξ^{-1}. Le sens dans lequel ces lacets sont parcourus est arbitraire; mais la valeur initiale du radical doit être toujours $+1$, et l'on a évidemment

$$(3) \qquad \mathcal{A} = 2\int_0^{\xi} \frac{z^n\,dz}{\sqrt{z^2 - 2xz + 1}}, \qquad \mathcal{B} = 2\int_0^{\xi^{-1}} \frac{z^n\,dz}{\sqrt{z^2 - 2xz + 1}},$$

les chemins d'intégration étant rectilignes.

2. Pour préparer le développement en série que nous avons en vue, nous allons transformer ces intégrales $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Posons, dans la première,

$$z = \xi(1 - u),$$

en sorte que u prendra les valeurs réelles de 0 à 1.

En remarquant que

$$(z^2 - 2xz + 1) = (1 - \xi z)(1 - \xi^{-1} z),$$

il viendra

$$(4) \qquad \mathcal{A} = 2\xi^{n+1}\sqrt{1-k}\int_0^1 \frac{(1-u)^n\,du}{\sqrt{u(1-ku)}}, \qquad k = \frac{\xi^2}{\xi^2 - 1}.$$

On pourra prendre ici $\sqrt{u}$ positif, pour $\sqrt{1 - ku}$ la valeur qui se réduit à $+1$ pour $u = 0$; mais alors il faudra adopter, pour $\sqrt{1-k}$, la valeur finale de $\sqrt{1 - ku}$ pour $u = 1$.

En procédant de la même façon pour la seconde intégrale, on aura l'expression suivante :

$$(5) \quad P^n(x) = \frac{1}{\pi i}\left[\xi^{n+1}\sqrt{1-k}\int_0^1 \frac{(1-u)^n\,du}{\sqrt{u(1-ku)}} - \xi^{-n-1}\sqrt{1-k_1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n\,du}{\sqrt{u(1-k_1 u)}}\right],$$

$$k = \frac{\xi^2}{\xi^2 - 1}, \qquad k_1 = \frac{\xi^{-2}}{\xi^{-2} - 1}.$$

Supposons maintenant $x = \cos\Theta$, Θ étant un angle compris entre 0 et π, on aura

$$\xi = e^{i\Theta}, \qquad \xi^{-1} = e^{-i\Theta};$$

$$k = \frac{\xi}{\xi - \xi^{-1}} = \frac{\cos\Theta + i\sin\Theta}{2i\sin\Theta}$$

ou

$$k = \frac{e^{i\alpha}}{2\sin\Theta},$$

en posant $\alpha = \Theta - \frac{\pi}{2}$.

Il est clair par cette valeur de k que la partie réelle de $\sqrt{1-k}$ doit être positive, car la partie réelle de $\sqrt{1-ku}$ ne peut s'évanouir pour aucune valeur de u comprise entre o et 1. Il faudra donc adopter la valeur suivante de ce radical

$$\sqrt{1-k} = \sqrt{-\frac{k}{\xi^2}} = \frac{i\sqrt{k}}{\xi} = \frac{ie^{\frac{1}{2}\alpha i}}{\xi\sqrt{2\sin\Theta}},$$

car la partie réelle de cette expression est

$$-\frac{\sin(\frac{1}{2}\alpha - \Theta)}{\sqrt{2\sin\Theta}} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\Theta + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\sin\Theta}} > 0.$$

On a donc

$$\xi^{n+1}\sqrt{1-k} = \frac{ie^{(n\Theta + \frac{1}{2}\alpha)i}}{\sqrt{2\sin\Theta}}$$

et de même

$$\xi^{-n-1}\sqrt{1-k_1} = \frac{-ie^{-(n\Theta + \frac{1}{2}\alpha)i}}{\sqrt{2\sin\Theta}},$$

k et k_1 étant des quantités imaginaires conjuguées, ainsi que ξ et ξ^{-1}.

La formule (5) prend donc cette forme

$$(6) \qquad P^n(\cos\Theta) = \frac{e^{(n\Theta + \frac{1}{2}\alpha)i}}{\pi\sqrt{2\sin\Theta}} \int_0^1 \frac{(1-u)^n\,du}{\sqrt{u(1-ku)}} + \frac{e^{-(n\Theta + \frac{1}{2}\alpha)i}}{\pi\sqrt{2\sin\Theta}} \int_0^1 \frac{(1-u)^n\,du}{\sqrt{u(1-k_1u)}}$$

ou, plus simplement,

$$(6') \qquad P^n(\cos\Theta) = \frac{2}{\pi\sqrt{2\sin\Theta}} \times \text{partie réelle de } e^{(n\Theta + \frac{1}{2}\alpha)i} \int_0^1 \frac{(1-u)^n\,du}{\sqrt{u(1-ku)}}.$$

3. Le module de $k = \frac{e^{i\alpha}}{2\sin\Theta}$ étant $\frac{1}{2\sin\Theta}$, ce module sera inférieur à

l'unité tant que l'on a

$$\frac{\pi}{6} < \Theta < \frac{5\pi}{6}.$$

Dans cette hypothèse, on pourra développer en série convergente le radical

$$\frac{1}{\sqrt{1-ku}} = 1 + \tfrac{1}{2}ku + \frac{1.3}{2.4}k^2u^2 + \ldots,$$

et l'on obtient ainsi

$$(7)\quad \mathrm{P}^n(\cos\Theta) = \mathrm{C}_n\left[\frac{\cos(n\Theta+\frac{1}{2}\alpha)}{\sqrt{2\sin\Theta}} + \frac{1^2}{2(2n+3)}\frac{\cos(n\Theta+\frac{3}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\Theta)^3}} + \frac{1^2.3^2}{2.4(2n+3)(2n+5)}\frac{\cos(n\Theta+\frac{5}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\Theta)^5}} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2.4.6(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\frac{\cos(n\Theta+\frac{7}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\Theta)^7}} + \ldots\right],$$

$$\mathrm{C}_n = \frac{4}{\pi}\,\frac{2.4.6\ldots(2n)}{3.5.7\ldots(2n+1)},$$

développement convergent même pour $\Theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\Theta = \frac{5\pi}{6}$.

Mais on peut procéder autrement et obtenir le même développement, mais limité à un nombre fini de termes avec un terme complémentaire, et cela pour une valeur quelconque de Θ comprise entre o et π.

Il suffit, pour cela, de remplacer, dans la formule (6′),

$$\frac{1}{\sqrt{1-ku}} \quad \text{par} \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{dv}{1-ku\sin^2 v}$$

et de faire usage ensuite, dans l'intégrale double obtenue, de l'identité

$$\frac{1}{1-ku\sin^2 v} = 1 + ku\sin^2 v + \ldots + (ku\sin^2 v)^{p-1} + \frac{(ku\sin^2 v)^p}{1-ku\sin^2 v}.$$

On retrouve ainsi le développement (7), mais limité à ses p premiers termes et avec le terme complémentaire

$$(8)\quad \mathrm{R}_p = \frac{2}{\pi\sqrt{2\sin\Theta}} \times \text{partie réelle de } \frac{e^{(n\Theta+\frac{1}{2}\alpha)i}}{\pi}\int_0^1\int_0^{\pi}\frac{(1-u)^n u^{p-\frac{1}{2}}k^p\sin^{2p}v}{1-ku\sin^2 v}\,du\,dv.$$

Le module de k étant $\frac{1}{2\sin\Theta}$, on en conclut

$$|R_p| < \frac{2}{\pi\sqrt{(2\sin\Theta)^{2p+1}}} \times \left| \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^\pi \frac{(1-u)^n u^{p-\frac{1}{2}} \sin^{2p} v}{1-ku\sin^2 v}\, du\, dv \right|,$$

et, en désignant par M le maximum du module de

$$\frac{1}{1-ku\sin^2 v},$$

on aura, à plus forte raison,

$$|R_p| < \frac{2M}{\pi^2\sqrt{(2\sin\Theta)^{2p+1}}}\int_0^1\int_0^\pi (1-u)^n u^{p-\frac{1}{2}} \sin^{2p} v\, du\, dv,$$

$$(9)\quad |R_p| < MC_n \frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2p-1)^2}{2.4.6\ldots(2p)(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2p+1)} \times \frac{1}{\sqrt{(2\sin\Theta)^{2p+1}}}.$$

Ainsi, *en prenant la somme des p premiers termes du développement* (7), *l'erreur commise est inférieure en valeur absolue, à* M *fois le terme suivant dans lequel on aurait remplacé d'abord par l'unité le cosinus qui y figure au numérateur.*

Quant à la valeur de M, puisque $k = \frac{1}{2}(1 - i\cot\Theta)$, on a

$$|1-ku\sin^2 v| = \sqrt{\cos^2\Theta + \frac{1}{4\sin^2\Theta}(2\sin^2\Theta - u\sin^2 v)^2};$$

d'où l'on conclut

$$(10)\qquad \begin{cases} M = \dfrac{1}{|\cos\Theta|} & \text{lorsque} \quad \sin^2\Theta \leqq \frac{1}{2}, \\ M = 2\sin\Theta & \text{lorsque} \quad \sin^2\Theta \geqq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ainsi ce facteur numérique M ne varie qu'entre 1 et 2.

4. Le résultat que nous venons d'obtenir conduit à plusieurs conséquences qu'il est bon de noter. En premier lieu, le raisonnement donne, dans le cas le plus simple $p = 0$,

$$|P^n(\cos\Theta)| < \frac{MC_n}{\sqrt{2\sin\Theta}}.$$

Or on sait que

$$C_n = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}(1+\varepsilon),$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Nous pouvons donc conclure que, lorsque Θ a une valeur fixe comprise entre o et π, on a toujours, pour $n = \infty$,

$$\lim P^n(\cos\Theta) = 0.$$

Et il est clair que cette relation subsiste encore, même lorsque Θ tendrait vers zéro avec $\frac{1}{n}$, si seulement $n\Theta$ croît au delà de toute limite. C'est là un résultat important obtenu d'abord d'une façon toute différente par M. Bruns dans le Tome 90 du *Journal de Borchardt*.

On sait, d'autre part, que

$$\lim P^n\left(\cos\frac{\Theta}{n}\right) = J(\Theta) = 1 - \frac{\Theta^2}{2^2} + \frac{\Theta^4}{2^2.4^2} - \frac{\Theta^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots.$$

En remplaçant Θ par $\frac{\Theta}{n}$ dans la formule (7) et posant $n = \infty$, on obtient donc

$$\text{(11)} \quad J(\Theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\cos\left(\Theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\Theta}} + \frac{1^2}{8}\,\frac{\cos\left(\Theta - \frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{\Theta^3}} + \frac{1^2.3^2}{8.16}\,\frac{\cos\left(\Theta - \frac{5\pi}{4}\right)}{\sqrt{\Theta^5}} + \ldots\right];$$

c'est le résultat dû à Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, XIX^e Cahier); mais nous pouvons ajouter maintenant qu'en prenant la somme des p premiers termes, l'erreur commise est inférieure en valeur absolue au terme suivant dans lequel on aurait remplacé par l'unité le cosinus qui y figure au numérateur. En effet, il est clair que le facteur numérique M est ici égal à l'unité.

5. En second lieu, nous pouvons maintenant séparer les racines de l'équation $P^n(\cos\Theta) = 0$. En effet, prenons $p = 1$ et remplaçons, pour simplifier, M par sa limite supérieure, on aura

$$\text{(12)} \qquad P^n(\cos\Theta) = \frac{C_n}{\sqrt{2\sin\Theta}}\left[\cos(n\Theta + \tfrac{1}{2}\alpha) + \frac{\lambda}{2(2n+3)\sin\Theta}\right].$$

$$-1 < \lambda < +1.$$

Posons

$$\Theta = \frac{k\pi}{2n+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n);$$

la valeur correspondante de $n\Theta + \frac{1}{2}\alpha$ est $\frac{2k-1}{4}\pi$: donc

$$\cos(n\Theta + \tfrac{1}{2}\alpha) = (-1)^{\frac{k^2-k}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, la plus petite valeur de $2(2n+3)\sin\Theta$ pour les valeurs de Θ que nous considérons est

$$2(2n+3)\sin\frac{\pi}{2n+1} > 2(2n+1)\sin\frac{\pi}{2n+1}.$$

Or l'expression $2(2n+1)\sin\frac{\pi}{2n+1}$ croît avec n, et, pour la plus petite valeur de n, $n = 1$, elle est $= 3\sqrt{3} > \sqrt{2}$.

On voit donc que

$$P^n\left(\cos\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

a le signe de $(-1)^{\frac{k^2-k}{2}}$; d'où l'on conclut qu'en désignant par

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n$$

les racines de $P^n(x) = 0$, on a

$$\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}\right] > x_k > \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right).$$

C'est une limitation obtenue par M. Bruns dans le Mémoire déjà cité; on pourrait trouver facilement des intervalles plus étroits pour ces racines, mais nous n'insisterons pas.

Si l'on s'en tenait au premier terme du développement de $P^n(\cos\Theta)$, on aurait $\cos\frac{(4k-1)\pi}{4n+2}$ comme valeur approchée de x_k. On obtient une approximation bien plus grande par l'expression

$$\left[1 - \frac{1}{2(2n+1)^2}\right]\cos\frac{(4k-1)\pi}{4n+2},$$

obtenue en tenant compte aussi du terme suivant :

$n=9$.	Val. approchée.	Correction.	$n=10$.	Val. approchée.	Correction.
x_1......	0,968 058	+ 0,000 102	x_1......	0,973 823	+ 0,000 084
x_2......	0,836 007	+ 0,000 024	x_2......	0,865 044	+ 0,000 019
x_3......	0,613 362	+ 0,000 009	x_3......	0,679 402	+ 0,000 008
x_4......	0,324 250	+ 0,000 003	x_4......	0,433 392	+ 0,000 003
			x_5......	0,148 873	+ 0,000 001

6. En ayant égard à la formule (5), on reconnaît facilement que la formule (7) peut s'écrire ainsi

$$P^n(\cos\Theta) = \text{partie réelle de } \frac{C_n}{i}\,\xi^{n+1}\sqrt{1-k}\,\mathcal{F}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, n+\tfrac{3}{2}, k\right),$$

le symbole $\mathcal{F}$ désignant la série hypergéométrique.

Or on a

$$\sqrt{1-k}\,\mathcal{F}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, n+\tfrac{3}{2}, k\right) = \mathcal{F}\left(\tfrac{1}{2}, n+1, n+\tfrac{3}{2}, \frac{k}{k-1}\right);$$

donc

$$P^n(\cos\Theta) = \text{partie réelle de } \frac{C_n}{i}\,\xi^{n+1}\,\mathcal{F}\left(\tfrac{1}{2}, n+1, n+\tfrac{3}{2}, \xi^2\right),$$

c'est-à-dire

$$(13)\qquad P^n(\cos\Theta) = C_n\Bigg[\sin(n+1)\Theta + \frac{1(n+1)}{1(2n+3)}\sin(n+3)\Theta + \frac{1.3(n+1)(n+2)}{1.2(2n+3)(2n+5)}\sin(n+5)\Theta + \ldots\Bigg].$$

C'est là le développement de $P^n(\cos\Theta)$ en série de sinus par la formule de Fourier, obtenu par M. Heine (*Traité des fonctions sphériques*, t. I, p. 19, 89). La série cesse évidemment de représenter la fonction pour $\Theta = 0$ et $\Theta = \pi$, mais elle la représente pour toutes les valeurs de Θ entre ces limites.

Cette déduction de la formule (13) ne saurait être considérée comme entièrement satisfaisante sans de nouveaux éclaircissements, d'abord parce que la série (7) n'est pas convergente dans tout l'intervalle $(0, \pi)$ et ensuite parce qu'on a considéré la série hypergéométrique sur le contour même du cercle de convergence. Mais nous n'insistons pas, ayant voulu simplement indiquer ce rapprochement entre les deux formules.

7. Le polynôme $P^n(x)$ satisfait à l'équation différentielle linéaire

$$(14)\qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0,$$

dont une seconde solution est donnée par l'expression

$$Q^n(x) = P^n(x)\int \frac{dx}{(1-x^2)\,P^n(x)^2}.$$

En effectuant la décomposition en fractions simples, on a

$$\frac{1}{(1-x^2)\,P^n(x)^2} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{A_1}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-x_n)^2},$$

car les fractions simples de la forme $\frac{B_k}{x-x_k}$ doivent disparaître, l'équation différentielle n'admettant que les points singuliers ± 1.

Il vient, par conséquent,

$$(15)\qquad Q^n(x) = \tfrac{1}{2}P^n(x)\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - R^n(x),$$

$R^n(x)$ étant un polynôme du degré $n-1$.

Il est clair qu'on peut développer $Q^n(x)$ en série suivant les puissances descendantes de x, mais une telle série satisfaisant à l'équation différentielle (14) doit commencer par un terme en x^n ou en x^{-n-1}. On voit par là que $R^n(x)$ est la partie entière de

$$\tfrac{1}{2}P^n(x)\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = P^n(x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots\right),$$

et que, dans ce produit, les termes en $x^{-1}, x^{-2}, \ldots, x^{-n}$ manquent.

La fonction $Q^n(x)$ n'est pas réelle dans l'intervalle $(-1, +1)$, et, comme nous voulons envisager particulièrement les intégrales de l'équation différentielle dans cet intervalle, nous sommes amené à considérer, au lieu de $Q^n(x)$, cette autre solution de (14)

$$(16)\qquad S^n(x) = \tfrac{1}{2}P^n(x)\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - R^n(x).$$

8. L'expression explicite du polynôme $R^n(x)$ est assez compliquée et difficile à obtenir. Dans le Tome 55 du *Journal de Borchardt,* M. Christoffel a obtenu cette formule

$$R^n(x) = \frac{2n-1}{1.n}P^{n-1}(x) + \frac{2n-5}{3(n-1)}P^{n-3}(x) + \frac{2n-9}{5(n-2)}P^{n-5}(x) + \ldots,$$

et M. Hermite a donné, il y a plusieurs années, dans son Cours à la Sorbonne, cette expression

$$\mathrm{R}^n(x) = \sum_1^n \frac{1}{k} \mathrm{P}^{k-1}(x)\, \mathrm{P}^{n-k}(x),$$

qui peut se déduire aussi du Mémoire de M. Christoffel.

Mais c'est une autre formule qui va nous permettre d'obtenir la limite de $\mathrm{S}^n\left(\cos\frac{\Theta}{n}\right)$ pour $n=\infty$. Rappelons, pour cela, la formule connue

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^n(x) &= 1 + \frac{n(n+1)}{1^2}\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1^2.2^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \ldots \\ &= \mathfrak{F}\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right),\end{aligned}$$

que nous écrirons ainsi

$$\mathrm{P}^n(x) = \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{x-1}{2}\right) + \alpha_2\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \ldots + \alpha_n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n; \tag{17}$$

alors on a

$$\mathrm{R}^n(x) = \beta_0 + \beta_1\left(\frac{x-1}{2}\right) + \beta_2\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \ldots + \beta_{n-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}, \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\alpha_0, \\ \beta_1 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\alpha_1, \\ \beta_2 &= \left(\frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\alpha_2, \\ \beta_{n-1} &= \frac{1}{n}\,\alpha_{n-1}.\end{aligned}$$

On obtient cette formule à l'aide de l'équation différentielle à laquelle satisfait $\mathrm{R}^n(x)$

$$(1-x^2)\frac{d^2\mathrm{R}^n(x)}{dx^2} - 2x\frac{d\mathrm{R}^n(x)}{dx} + n(n+1)\mathrm{R}^n(x) = 2\frac{d\mathrm{P}^n(x)}{dx}.$$

Les formules (16), (17), (18) donnent maintenant

$$\begin{aligned}S^n\left(\cos\frac{\Theta}{n}\right) = -\,P^n\left(\cos\frac{\Theta}{n}\right)\log\left(n\,\text{tang}\frac{\Theta}{2n}\right) &- \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)\alpha_0\\ &+\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)\alpha_1\sin^2\frac{\Theta}{2n}\\ &-\left(\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)\alpha_2\sin^4\frac{\Theta}{2n}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}$$

d'où l'on conclut, pour $n=\infty$,

$$(19)\quad \begin{aligned}\lim S^n\left(\cos\frac{\Theta}{n}\right) = J(\Theta)\log\left(\frac{2}{\Theta}\right) - C + (C-1)\frac{\Theta^2}{2^2}\\ -\left(C-1-\frac{1}{2}\right)\frac{\Theta^4}{2^2.4^2}+\left(C-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\frac{\Theta^6}{2^2.4^2.6^2}-\ldots,\end{aligned}$$

$C=0,577,\ldots$ étant la constante eulérienne.

Nous désignerons cette fonction par $K(\Theta)$, c'est là une solution de l'équation différentielle de Fourier et de Bessel

$$\Theta\frac{d^2y}{d\Theta^2}+\frac{dy}{d\Theta}+\Theta y=0,$$

dont l'intégrale générale est $y=C_1\,J(\Theta)+C_2\,K(\Theta)$.

9. Nous allons vérifier maintenant à l'aide de la formule (1) que $P^n(x)$ satisfait bien à l'équation différentielle (14). Soit

$$V=\int\frac{z^n\,dz}{\sqrt{z^2-2xz+1}},$$

le chemin d'intégration étant quelconque.

Par un calcul facile on obtient

$$(1-x^2)\frac{d^2V}{dx^2}-2x\frac{dV}{dx}+n(n+1)V=\int\frac{d(L)}{dz}dz,$$

$$L=\frac{z^{n+1}[n-(2n+1)xz+(n+1)z^2]}{\sqrt{(1-2xz+z^2)^3}}.$$

On obtient donc une solution de (14) en prenant l'intégrale V sur un contour fermé enveloppant les points ξ et ξ^{-1}, de manière que le radical revienne à sa valeur initiale. C'est la solution $P^n(x)$ qu'on obtient ici; mais il est clair maintenant qu'on a encore une solution en prenant l'intégrale sur un lacet partant de l'origine et enveloppant l'un ou l'autre des points critiques. Par conséquent, les intégrales $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ considérées dans le n° 1 satisfont séparément à l'équation différentielle, et l'on pourra les exprimer linéairement à l'aide de $P^n(x)$ et de $S^n(x)$. C'est ce que nous nous proposons de faire maintenant.

10. Considérons d'abord l'intégrale V prise en sens direct sur un cercle décrit autour de l'origine comme centre avec un rayon très grand, et posons

$$\sqrt{z^2 - 2xz + 1} = -z + u \tag{20}$$

ou

$$z = \frac{u^2 - 1}{2(u - x)}.$$

Pour $z = \xi$, on a $u = \xi$, et pour $z = \xi^{-1}$, $u = \xi^{-1}$, il est facile alors à voir qu'on peut écrire la relation entre z et u ainsi

$$\frac{z - \xi}{z - \xi^{-1}} = \left(\frac{u - \xi}{u - \xi^{-1}}\right)^2. \tag{20'}$$

Il vient

$$\int \frac{z^n\, dz}{\sqrt{z^2 - 2xz + 1}} = \int \frac{(u^2 - 1)^n}{2^n (u - x)^{n+1}}\, du.$$

Quant au chemin d'intégration de l'intégrale transformée, puisque $|z|$ est très grand, on a, d'après (20), à fort peu près,

$$u = 2z - x,$$

en sorte que u décrit autour du point $-x$ comme centre, et dans le sens direct, un cercle de rayon double de celui décrit par z.

Puisque la fonction intégrée n'a qu'un pôle $u = x$, on peut en conclure immédiatement la formule de Rodrigues

$$P^n(x) = \frac{1}{2^n . 1 . 2 . 3 \ldots n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}. \tag{21}$$

Par un changement continu, on peut transformer le cercle décrit par la variable z dans le contour *abcdefa* considéré dans le n° 1. Quel sera le contour correspondant de la variable u? Il est clair qu'on pourra supposer qu'en se transformant le contour décrit par z ne présente jamais un point double. Il en sera de même alors pour le contour décrit par u. En effet, z est une fonction uniforme de u, et un contour fermé décrit par u correspond toujours à un contour fermé décrit par z.

Ainsi, si le chemin de u avait un point double, il en serait de même du chemin décrit par z contre notre hypothèse. Ensuite, en a, z est très petit ou nul, et le radical égal à $+1$, donc $u = +1$; de même on verra qu'en d u est égal à -1. Puisque z reste fini et ne passe point par les points ξ et ξ^{-1}, il s'ensuit que u reste toujours à une distance finie de x et des points ξ et ξ^{-1}.

On conclut de tout ce qui précède que le chemin de u, correspondant au contour $abcdefa$, est un contour fermé qui part de $+1$, passe par -1 et revient à $+1$ après avoir enveloppé en sens direct les points x, ξ et ξ^{-1}.

Mais il est clair que la seule chose essentielle à savoir, c'est que ce chemin enveloppe en sens direct le point x qui est le seul pôle, les points ξ et ξ^{-1} ne jouant aucun rôle dans l'intégrale relative à u.

Il est clair maintenant aussi que l'intégrale $\mathcal{A}$ se présente sous cette forme nouvelle

$$\mathcal{A} = \int \frac{(u^2-1)^n}{2^n(u-x)^{n+1}}\,du \tag{22}$$

de $u = +1$ à $u = -1$, mais tous les chemins de $+1$ à -1 ne conduisent pas à la même valeur de l'intégrale, et tout ce que nous avons dit jusqu'à présent ne suffit pas pour déterminer avec précision le chemin d'intégration qu'il faut adopter dans cette formule (22). En effet, nous n'avons point fait intervenir encore la circonstance que le point ξ est au-dessus de l'axe réel, ce qui permet de distinguer les intégrales $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Considérons la droite D dont tous les points sont également éloignés de ξ et de ξ^{-1}, droite qui passe évidemment par le point $x = \dfrac{\xi+\xi^{-1}}{2}$.

Il est clair par la relation (20′) que les points correspondants z et u sont toujours du même côté de D. Les trois points 0, ± 1 sont donc du même côté de D. Deux cas sont à distinguer maintenant :

1° Le point ξ se trouve du même côté de D que les points ± 1. Dans ce cas, on peut évidemment supposer que le contour $abcd$ ne coupe pas la droite D. Il en sera donc de même du chemin correspondant de u allant de $+1$ à -1. Mais ce chemin peut être tracé maintenant arbitrairement, à la seule condition de ne pas traverser D; car, x étant sur D, on obtiendra toujours la même valeur de l'intégrale (22).

2° Le point ξ se trouve par rapport à D du côté opposé des points ± 1. Dans ce cas, le point ξ^{-1} se trouve du même côté que les points ± 1, et l'on conclut, maintenant comme tout à l'heure, que le chemin *defa* de z correspond à un chemin quelconque de u allant de -1 à $+1$ et ne coupant pas la droite D. Cela étant, on peut tracer aussi sans ambiguïté le chemin de u qu'on doit adopter dans l'intégrale $\mathcal{A}$, car on sait que le contour entier *abcdefa* de z doit correspondre à un contour fermé passant par les points ± 1 et qui enveloppe en sens *direct* le point x.

11. Supposons maintenant

$$x = \cos\Theta, \qquad 0 < \Theta < \pi,$$
$$\xi = e^{i\Theta}, \qquad \xi^{-1} = e^{-i\Theta}.$$

La droite D se confond avec l'axe réel; le contour *abcd* peut donc être tracé tout entier dans la moitié supérieure du plan; il en sera donc de même du chemin dans l'intégrale transformée

$$\mathcal{A} = \int_{+1}^{-1} \frac{(u^2-1)^n}{2^n (u-x)^{n+1}}\, du.$$

Pour achever le calcul de cette intégrale, nous suivons la méthode donnée par M. Hermite dans son *Cours de la Sorbonne* (3ᵉ édition, p. 173). En intégrant par parties n fois, il vient, en faisant attention à la formule (21),

$$\mathcal{A} = \int_{+1}^{-1} \frac{P^n(u)}{u-x}\, du$$

ou

$$\mathcal{A} = P^n(x) \int_{+1}^{-1} \frac{du}{u-x} - \int_{+1}^{-1} \frac{P^n(x) - P^n(u)}{u-x}\, du.$$

Or, x étant réel et compris entre les limites ± 1, et le chemin d'intégration étant tracé dans la moitié supérieure du plan, on a

$$\int_{+1}^{-1} \frac{du}{u-x} = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \pi i,$$

$$\mathcal{A} = P^n(x)\left[\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \pi i\right] - 2R_n(x).$$

$\mathcal{A}$, en effet, doit être de la forme $\alpha\,P^n(x) + \beta\,S^n(x)$; on a donc nécessairement

$$(23) \qquad 2R_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{P^n(x) - P^n(u)}{x-u}\,du,$$

$$(24) \qquad \mathcal{A} = 2S^n(x) + \pi i\,P^n(x)$$

et de même

$$\mathcal{B} = 2S^n(x) - \pi i\,P^n(x).$$

Il est aisé de vérifier la formule (23); car on constate facilement que, $P^n(x)$ étant un polynôme quelconque en x, l'intégrale du second membre est toujours la partie entière de

$$P^n(x)\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

12. Nous pouvons obtenir maintenant un développement en série de $S^n(\cos\Theta)$ entièrement analogue au développement de $P^n(\cos\Theta)$.

En effet, les formules (4) et (24) donnent

$$S^n(\cos\Theta) = \text{partie réelle de } \xi^{n+1}\sqrt{1-k}\int_0^1 \frac{(1-u)^n\,du}{\sqrt{u(1-ku)}},$$

c'est-à-dire

$$S^n(\cos\Theta) = \text{partie réelle de } \frac{ie^{(n\Theta+\frac{1}{2}\alpha)i}}{\sqrt{2\sin\Theta}}\int_0^1 \frac{(1-u)^n\,du}{\sqrt{u(1-ku)}};$$

d'où l'on conclut

$$(25) \quad \frac{2}{\pi}S^n(\cos\Theta) = -C_n\left[\frac{\sin(n\Theta+\frac{1}{2}\alpha)}{\sqrt{2\sin\Theta}} + \frac{1^2}{2(2n+3)}\frac{\sin(n\Theta+\frac{3}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\Theta)^3}} + \frac{1^2.3^2}{2.4(2n+3)(2n+5)}\frac{\sin(n\Theta+\frac{5}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\Theta)^5}} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2.4.6(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\frac{\sin(n\Theta+\frac{7}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\Theta)^7}} + \ldots\right],$$

$$C_n = \frac{4}{\pi}\,\frac{2.4.6\ldots(2n)}{3.5.7\ldots(2n+1)}.$$

Quant à la convergence de ce développement, et l'erreur commise en prenant seulement les p premiers termes, on arrive évidemment à des conclusions parfaitement analogues à celles obtenues précédemment.

En remplaçant Θ par $\frac{\Theta}{n}$ et passant à la limite pour $n = \infty$, on trouve

$$(26) \quad \mathrm{K}(\Theta) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin\left(\Theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\Theta}} + \frac{1^2}{8}\frac{\sin\left(\Theta - \frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{\Theta^3}} + \frac{1^2.3^2}{8.16}\frac{\sin\left(\Theta - \frac{5\pi}{4}\right)}{\sqrt{\Theta^5}} + \ldots\right].$$

On reconnaît encore facilement que

$$\mathrm{S}^n\left(\cos\frac{k\pi}{2n+1}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n)$$

a le signe de $(-1)^{\frac{k^2+k}{2}}$; d'où l'on conclut que l'équation

$$\mathrm{S}^n(x) = 0$$

admet $n+1$ racines comprises dans les intervalles

$$\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right), \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right] \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Entre deux racines consécutives de $\mathrm{S}^n(x) = 0$ se trouve une racine de $\mathrm{P}^n(x) = 0$, ce qui est bien conforme à un théorème connu dû à Sturm.

Enfin, de même que nous avons pu passer de la formule (7) au développement de Heine (13), on pourra déduire de la formule (25) cet autre développement obtenu aussi par Heine (*Fonctions sphér.*, t. I, p. 130)

$$(27) \quad \frac{2}{\pi}\mathrm{S}^n(\cos\Theta) = \mathrm{C}_n\left[\cos(n+1)\Theta + \frac{1(n+1)}{1(2n+3)}\cos(n+3)\Theta \right.$$
$$\left. + \frac{1.3(n+1)(n+2)}{1.2(2n+3)(2n+5)}\cos(n+5)\Theta + \ldots\right],$$
$$(0 < \Theta < \pi).$$