SUR

CERTAINS DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. LERCH A M. APPELL.

La méthode que vous avez appliquée [1] au développement en séries trigonométriques de la fonction $\frac{d\mathfrak{S}_1}{du}$ m'a suggéré quelques considérations que je prends la liberté de vous communiquer.

La série qui définit la fonction $\frac{d\mathfrak{S}_1}{du}$ de votre Mémoire est contenue dans la suivante

$$\mathfrak{F}(x, s, u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(x-m)^2 + u]^{\frac{1}{2}s}}, \tag{1}$$

dont je vais m'occuper.

Je suppose que les trois quantités x, u, s soient réelles et que la quantité $\mathfrak{R}(x)^2 + u$ soit positive, $\mathfrak{R}(x)$ désignant la plus petite en valeur absolue des quantités $x - m$, $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$, et que la puissance

$$[(x-m)^2 + u]^{\frac{1}{2}s}$$

soit prise dans le sens arithmétique. La formule

$$\int_0^\infty e^{-z[(x-m)^2+u]} z^{\frac{1}{2}s-1}\, dz = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}s)}{[(x-m)^2+u]^{\frac{1}{2}s}} \tag{2}$$

nous permet de mettre la série (1) sous la forme

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,\mathfrak{F}(x, s, u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty e^{-z[(x-m)^2+u]} z^{\frac{1}{2}s-1}\, dz, \tag{3}$$

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Jordan, année 1886.

de sorte que, si nous pouvons démontrer la formule

$$(4)\qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty e^{-z[(x-m)^2+u]}\,z^{\frac{1}{2}s-1}\,dz=\int_0^\infty\sum_m e^{-z[(x-m)^2+u]}\,z^{\frac{1}{2}s-1}\,dz,$$

nous aurons l'équation

$$(5)\qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,\mathfrak{F}(x,s,u)=\int_0^\infty e^{-uz-x^2z}\,\vartheta_3\left(\frac{xz}{\pi i}\,\middle|\,\frac{zi}{\pi}\right)z^{\frac{1}{2}s-1}\,dz,$$

en posant

$$\vartheta_3(v\,|\,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{\pi i(m^2\tau+2mv)}.$$

La formule de Cauchy et de Poisson relative à la transformation de la fonction ϑ nous donne, comme dans votre Mémoire,

$$(6)\qquad \vartheta_3\left(\frac{xz}{\pi i}\,\middle|\,\frac{zi}{\pi}\right)=\sqrt{\pi}\,z^{-\frac{1}{2}}e^{x^2z}\,\vartheta_3\left(x\,\middle|\,\frac{\pi i}{z}\right),$$

de sorte que l'équation (5) devient

$$(7)\qquad \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,\mathfrak{F}(x,s,u)=\int_0^\infty e^{-uz}\,\vartheta_3\left(x\,\middle|\,\frac{\pi i}{z}\right)z^{\frac{s-3}{2}}\,dz,$$

et, si l'intégrale, dans le second membre de cette équation, est égale à la somme des intégrales des termes de la série

$$(8)\qquad e^{-uz}\,\vartheta_3\left(x\,\middle|\,\frac{\pi i}{z}\right)z^{\frac{s-3}{2}}=e^{-uz}z^{\frac{s-3}{2}}+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-uz-\frac{\pi^2n^2}{z}}\,z^{\frac{s-3}{2}}\cos 2n\pi x,$$

nous aurons évidemment

$$(9)\qquad \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,\mathfrak{F}(x,s,u)=\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)u^{-\frac{s-1}{2}}+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n\cos 2n\pi x,$$

en posant

$$(10)\qquad \mathfrak{A}_n=\int_0^\infty e^{-uz-\frac{\pi^2n^2}{z}}\,z^{\frac{s-3}{2}}\,dz.$$

Or, pour que ces conclusions soient permises, on doit prouver que l'égalité (4) subsiste et que la série (8) permet l'intégration à termes.

Mais, d'abord, considérons l'intégrale (5). La fonction à intégrer ne présentant des singularités qu'aux limites de l'intégration $z = 0, \infty$, il suffit de l'étudier au voisinage de ces limites. Pour des valeurs de z infiniment petites, la fonction à intégrer a, d'après l'équation (6), la forme

$$\sqrt{\pi}\, e^{-uz} z^{\frac{s-3}{2}} + \varepsilon,$$

ε désignant une fonction infiniment petite, et, par conséquent, la seule condition à remplir, pour que la fonction considérée soit intégrable pour des valeurs infiniment petites de z, est celle que la quantité $s - 1$ soit positive. D'autre part, la fonction à intégrer étant donnée par la somme des termes de la forme

$$e^{-z[(x-m)^2+u]} z^{\frac{1}{2}s-1}$$

deviendra infiniment petite pour des valeurs indéfiniment croissantes de z, et cela aussi quand on la multiplie par une puissance quelconque de z, et, par conséquent, l'intégrabilité relative à la limite $z = \infty$ de la fonction considérée n'exige aucune condition nouvelle.

Donc l'intégrale (5) *aura toujours une valeur finie, si la quantité* $s - 1$, *ainsi que* $\mathfrak{R}(x)^2 + u$, *est positive.*

L'existence de l'intégrale (5) étant démontrée, je vais prouver l'égalité des deux membres de l'équation (4). La série

$$\varphi(z) = \sum_m e^{-z[(x-m)^2+u]} z^{\frac{1}{2}s-1}$$

étant uniformément convergente dans chaque intervalle $(\delta, \ldots, h)$ à limites positives, on aura, d'après un théorème connu,

$$(a) \qquad \int_\delta^h \varphi(z)\, dz = \sum_m \mathfrak{I}_m(\delta, h),$$

en posant

$$(b) \qquad \mathfrak{I}_m(\delta, h) = \int_\delta^h e^{-z[(x-m)^2+u]} z^{\frac{1}{2}s-1}\, dz.$$

Or les termes de la série (1) ne différant de ceux de la série

$$(c) \qquad \sum_m \mathfrak{I}_m(0, \infty)$$

que par un facteur constant, comme le montre l'équation (2), cette série (c) est évidemment convergente et se compose de termes positifs. Je vais montrer que la différence

$$(d) \qquad \sum_m \mathfrak{J}_m(0,\infty) - \sum_m \mathfrak{J}_m(\delta, h) = \sum_m \mathfrak{J}_m(0,\delta) + \sum_m \mathfrak{J}_m(h,\infty)$$

est moindre qu'une quantité ε donnée arbitrairement, si l'on prend $\delta \leqq \delta_0$, $h \geqq h_0$, δ_0 et h_0 désignant deux quantités positives dépendantes de c.

En effet, les intégrales $\mathfrak{J}_m(0,\delta)$, $\mathfrak{J}_m(h,\infty)$ étant positives et moindres que $\mathfrak{J}_m(0,\infty)$ et la série (c) étant convergente, on peut déterminer un nombre entier r, tel que l'inégalité

$$(e) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\sum_m{}' \mathfrak{J}_m(0,\delta) < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \sum_m{}' \mathfrak{J}_m(h,\infty) < \frac{\varepsilon}{4} \\ (m = r+1, r+2, r+3, \ldots, -r-1, -r-2, -r-3, \ldots) \end{array} \right.$$

subsiste, quelles que soient les quantités positives δ, h. D'autre part, on peut déterminer deux quantités δ_0, h_0, telles que, pour chaque valeur de $\delta \leqq \delta_0$ et de $h \geqq h_0$, chacune des intégrales

$$\mathfrak{J}_n(0,\delta), \quad \mathfrak{J}_n(h,\infty) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm r)$$

soit moindre que $\frac{\varepsilon}{4(2r+1)}$, de sorte qu'on aura

$$(f) \qquad \sum_{n=-r}^{r} \mathfrak{J}_n(0,\delta) < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \sum_{n=-r}^{r} \mathfrak{J}_n(h,\infty) < \frac{\varepsilon}{4},$$

et, puisque

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \mathfrak{J}_\mu(0,\delta) = \sum_{n=-r}^{r} \mathfrak{J}_n(0,\delta) + \sum_m{}' \mathfrak{J}_m(0,\delta),$$

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \mathfrak{J}_\mu(h,\infty) = \sum_{n=-r}^{r} \mathfrak{J}_n(h,\infty) + \sum_m{}' \mathfrak{J}_m(h,\infty)$$

$$(m = r+1, r+2, \ldots, -r-1, -r-2, \ldots),$$

on en conclut, au moyen des inégalités (e), (f), que ces quantités sont moindres que $\frac{\varepsilon}{2}$, d'où il suit que la quantité (d) est inférieure à ε pour chaque valeur de $\delta \leqq \delta_0$, $h \geqq h_0$. C. Q. F. D.

Cette propriété de la différence (d) s'exprime par la formule

$$\lim_{\delta=0,\,h=\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathfrak{z}_m(\delta, h) = \sum_m \mathfrak{z}_m(0, \infty),$$

dont le premier membre coïncide, d'après la formule (a), avec la quantité

$$\lim_{\delta=0,\,h=\infty} \int_\delta^h \varphi(z)\,dz = \int_0^\infty \varphi(z)\,dz,$$

et il s'ensuit que *l'équation* (4) *est exacte*.

Quant à l'équation (9), celle-ci ne peut subsister que si u est positif, comme on le voit immédiatement. C'est en supposant cette condition remplie que je vais la démontrer.

D'après l'équation (8), on a

$$\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,\mathfrak{F}(x,s,u) = \int_0^\infty e^{-uz} z^{\frac{s-3}{2}}\,dz + 2\int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} e^{-uz-\frac{\pi^2 n^2}{z}} z^{\frac{s-3}{2}} \cos 2n\pi x\,dz,$$

et il suffit donc de considérer l'intégrale

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{z} = \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} e^{-uz-\frac{\pi^2 n^2}{z}} z^{\frac{s-3}{2}} \cos 2n\pi x\,dz.$$

La fonction à intégrer étant donnée par une série uniformément convergente dans chaque intervalle $(0, \ldots, h)$, où h désigne une quantité positive quelconque, on a, d'après un théorème connu,

$$(\beta) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{z}(h) &= \int_0^h \sum_{n=1}^{\infty} e^{-uz-\frac{\pi^2 n^2}{z}} z^{\frac{s-3}{2}} \cos 2n\pi x\,dz \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\pi x \int_0^h e^{-uz-\frac{\pi^2 n^2}{z}} z^{\frac{s-3}{2}}\,dz, \end{aligned} \right.$$

et je vais démontrer l'égalité

$$(\gamma) \qquad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\pi x \int_0^\infty e^{-uz-\frac{\pi^2 n^2}{z}} z^{\frac{s-3}{2}}\,dz.$$

J'applique, à cet effet, la substitution $z = \frac{\pi n}{\sqrt{u}}\,t$, dont vous avez fait usage pour donner aux coefficients d'une certaine série trigonométrique la même forme sous laquelle on les rencontre chez *Riemann*. A l'aide de cette substitution, il vient

$$(\delta)\qquad \mathcal{A}_n=\int_0^\infty e^{-uz-\frac{\pi^2n^2}{z}} z^{\frac{s-3}{2}}\,dz=\left(\frac{\pi n}{\sqrt{u}}\right)^{\frac{s-1}{2}}\int_0^\infty e^{-\pi n\sqrt{u}\left(t+\frac{1}{t}\right)} t^{\frac{s-3}{2}}\,dt.$$

En décomposant cette dernière intégrale en deux autres prises entre les limites $(0,\ldots,1)$ et $(1,\ldots,\infty)$ et en changeant, dans la seconde, t en $\frac{1}{t}$, il vient

$$(\varepsilon)\qquad \mathcal{A}_n=\left(\frac{\pi n}{\sqrt{u}}\right)^{\frac{s-1}{2}}\int_0^1 e^{-\pi n\sqrt{u}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\left(t^{\frac{s-1}{2}}+t^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{dt}{t}.$$

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{\sqrt{u}}\right)^{\frac{s-1}{2}} e^{-\pi n\sqrt{u}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\left(t^{\frac{s-1}{2}}+t^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{1}{t}$$

étant uniformément convergente dans l'intervalle $(0,\ldots,1)$, quelle que soit la quantité s, la série composée des intégrales de ses termes prises entre les limites $(0,\ldots,1)$ sera convergente; or cette série coïncide avec la suivante

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n,$$

dont la convergence est donc démontrée.

En se rappelant l'inégalité

$$\int_0^h e^{-uz-\frac{\pi^2n^2}{z}} z^{\frac{s-3}{2}}\,dz<\mathcal{A}_n,$$

on démontre facilement que l'équation (γ) subsiste, d'où il suit que *l'équation* (9) *est exacte* quand on suppose u positif.

L'intégrale $\mathcal{A}_n$ définie par la formule (10) est une fonction transcendante entière de la variable complexe s, et, la série dans le second membre de l'équation (9) étant absolument convergente pour chaque valeur réelle ou imaginaire de s, on voit que la différence

$$(9^a)\qquad \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}s\right)\mathfrak{F}(x,s,u)-\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)u^{-\frac{s-1}{2}}$$

est une *fonction transcendante entière* de la variable s, résultat remarquable, puisque la fonction $\mathfrak{F}$ n'était définie que pour les valeurs de s dont la partie réelle est supérieure à l'unité.

Je me borne maintenant au cas particulier où la quantité u est zéro. En remplaçant, dans l'intégrale (10), z par $\frac{1}{z}$, il vient

$$\mathcal{A}_n = \int_0^\infty e^{-\frac{u}{z} - \pi^2 n^2 z} z^{-\frac{s+1}{2}} dz. \tag{10^a}$$

Si la quantité s est inférieure à l'unité ou si elle est négative, cette intégrale ne cessera pas d'exister même quand on y suppose $u = 0$; elle deviendra

$$\mathcal{A}'_n = \int_0^\infty e^{-\pi^2 n^2 z} z^{-\frac{s+1}{2}} dz = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)(\pi n)^{s-1}.$$

Je vais montrer qu'on a

$$\lim_{u=0} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}'_n. \tag{a'}$$

Nous avons, en effet,

$$\mathcal{A}_n - \mathcal{A}'_n = \int_0^\delta \left(e^{-\frac{u}{z}} - 1\right) e^{-\pi^2 n^2 z} z^{-\frac{s+1}{2}} dz + \int_\delta^\infty \left(e^{-\frac{u}{z}} - 1\right) e^{-\pi^2 n^2 z} z^{-\frac{s+1}{2}} dz,$$

δ étant une quantité positive. Quand u devient infiniment petit, la seconde intégrale, dans le second membre, le devient aussi; en prenant δ suffisamment petit, la première intégrale sera moindre qu'une quantité donnée, quelle que soit la valeur de $u > 0$; donc la différence $|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}'_n|$ sera moindre qu'une quantité donnée arbitrairement pour chaque valeur positive de u moindre qu'une limite convenablement choisie. C'est ce qu'exprime la formule (a').

Quand on suppose la quantité s négative, la série

$$\sum_{n=1}^\infty \mathcal{A}'_n = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{s-1} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1-s}}$$

est évidemment convergente, et je dis que l'on a

$$\lim_{u=0} \sum_{n=1}^\infty \mathcal{A}_n = \sum_{n=1}^\infty \mathcal{A}'_n.$$

En effet, les quantités $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{A}'_n$ sont positives, et la seconde est la plus grande, de sorte que $\mathcal{A}'_n - \mathcal{A}_n = d_n$ est positif et moindre que $\mathcal{A}'_n$.

Étant donnée une quantité ε aussi petite qu'on veut, on peut déterminer un nombre entier r, tel que l'inégalité

$$\sum_{n=r+1}^{\infty} \mathcal{A}'_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

subsiste, et l'on aura donc *a fortiori*

$$(b') \qquad \sum_{n=r+1}^{\infty} d_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après la formule (a'), on peut déterminer une limite u_0, telle que, pour chaque valeur de u moindre que u_0, subsistent les inégalités

$$d_n < \frac{\varepsilon}{2r} \qquad (n = 1, 2, \ldots, r),$$

de manière que

$$(b'') \qquad \sum_{n=1}^{r} d_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or il résulte des inégalités (b'), (b'') que l'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \varepsilon$$

pour chaque valeur de $u < u_0$, et c'est ce que montre la formule en question.

Maintenant, puisque

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos 2n\pi x \right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} d_n,$$

on a de même

$$\lim_{u=0} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \cos 2n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}'_n \cos 2n\pi x.$$

Posant donc

$$(11) \qquad \mathfrak{L}(x, \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^{\sigma}},$$

nous aurons la formule

$$(9^b)\qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}s)\lim_{u=0}\mathfrak{F}(x,s,u)=2\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}}\mathfrak{T}(x,1-s),$$

en supposant la partie réelle de la variable s négative.

Pour les valeurs positives de s supérieures à l'unité et pour les valeurs réelles de x qui ne sont pas des nombres entiers, on a évidemment

$$(1^a)\qquad \lim_{u=0}\mathfrak{F}(x,s,u)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x+m|^s}=\Phi(x,s).$$

Cette série définit une fonction analytique de la variable complexe s, que je désigne par $\Phi(x,s)$; mais ce qui précède ne prouve pas encore que cette fonction coïncide avec celle qui est donnée par l'expression

$$\lim_{u=0}\mathfrak{F}(x,s,u)\quad (s \text{ négatif}),$$

qui figure dans la formule (9^b). Si l'on pouvait démontrer l'identité de ces deux fonctions, l'équation (9^b) nous donnerait

$$(12)\qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,\Phi(x,s)=2\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}}\mathfrak{T}(x,1-s),$$

formule exacte et que vous pourrez, Monsieur, vérifier en appliquant la méthode dont s'est servi Riemann dans son Mémoire sur la totalité des nombres premiers moindres qu'une limite donnée (*Œuvres*, p. 136) [1].

Pour trouver la dérivée de la série (1^a), je considère son terme général. Quand $x+m$ est positif (négatif), la différence

$$\frac{1}{|x+\delta+m|^s}-\frac{1}{|x+m|^s}\qquad (\delta>0)$$

---

(1) La formule (12) est un cas particulier d'une relation donnée par M. Lipschitz dans un excellent Mémoire inséré au tome 54 du *Journal de Borchardt*. J'ai établi la même formule en m'appuyant sur les résultats de Riemann et de M. Hurwitz, qui en sont des cas limites, et, n'ayant pas eu connaissance du Mémoire cité, je l'avais publiée au tome XI des *Acta mathematica*. Les développements précédents font voir que c'est le Mémoire de M. Appell qui m'a fait retrouver la formule de M. Lipschitz, de même qu'il m'a conduit à d'autres questions sur lesquelles je me réserve de revenir bientôt. (Mars 1889.)

sera négative (positive); d'où il suit que l'on a

$$\mathrm{D}_x \frac{1}{|x+m|^s} = -s \frac{\operatorname{sgn}(x+m)}{|x+m|^{s+1}},$$

en représentant, avec mon illustre maître, M. Kronecker, par $\operatorname{sgn} a$ (signe de a) l'unité affectée du même signe que la quantité a.

Donc nous avons

$$(1^b) \qquad \mathrm{D}_x \Phi(x,s) = -s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x+m)}{|x+m|^{s+1}};$$

d'où il suit, au moyen de l'équation (1^a),

$$s\Phi(x,s+1) - \mathrm{D}_x \Phi(x,s) = s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1+\operatorname{sgn}(x+m)}{|x+m|^{s+1}}$$

ou, en désignant par $\mathrm{E}(x)$ un entier, tel que la différence $x - \mathrm{E}(x)$ soit positive et moindre que l'unité,

$$s\Phi(x,s+1) - \mathrm{D}_x \Phi(x,s) = 2s \sum_{m=-\mathrm{E}(x)}^{\infty} \frac{1}{|x+m|^{s+1}}.$$

Posant donc

$$(13) \qquad \mathfrak{R}(x,s) = \sum_{m=-\mathrm{E}(x)}^{\infty} \frac{1}{|x+m|^{s}},$$

nous aurons

$$s\Phi(x,s+1) - \mathrm{D}_x \Phi(x,s) = 2s\,\mathfrak{R}(x,s+1).$$

En substituant, dans cette équation, les valeurs

$$\Phi(x,s+1) = \frac{2\Gamma\left(\frac{-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \pi^{s+\frac{1}{2}} \mathfrak{L}(x,-s),$$

$$\mathrm{D}_x \Phi(x,s) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \pi^{s-\frac{1}{2}} \mathrm{D}_x \mathfrak{L}(x,1-s)$$

tirées de la formule (12) et en se rappelant la relation

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{2^s\sqrt{\pi}}{2\cos\frac{\pi s}{2}} \frac{1}{\Gamma(s)}$$

et celle qui s'en déduit par le changement de s en $s+1$, on trouve

$$2s\,\mathfrak{A}(x, s+1) = -\frac{(2\pi)^{s+1}}{\Gamma(s)}\left[\frac{\mathfrak{L}(x, -s)}{\sin\frac{\pi s}{2}} + \frac{1}{2\pi}\,\frac{D_x\mathfrak{L}(x, 1-s)}{\cos\frac{\pi s}{2}}\right]$$

En changeant s en $-s$ et en faisant usage des théorèmes connus

$$-s\,\Gamma(-s) = \Gamma(1-s), \qquad \Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin\pi s},$$

on trouve, en employant la formule (11),

$$\mathfrak{A}(x, 1-s) = \frac{2\,\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2n\pi x - \frac{\pi s}{2}\right)}{n^s}. \tag{14}$$

Si l'on prend $x = \frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha < \beta$ étant deux nombres entiers positifs, la formule (14) nous donne les relations remarquables dues à M. Hurwitz (*Zeitschrift* de M. Schlömilch, t. XXVII, p. 86), c'est-à-dire les relations contenues dans la formule

$$\beta^{1-s} f(1-s \mid \alpha, \beta) = \frac{2\,\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\sum_{r=1}^{\beta}\cos\left(\frac{2r\alpha\pi}{\beta} - \frac{\pi s}{2}\right) f(s \mid r, \beta),$$

en posant

$$f(s \mid r, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(r+m\beta)^s}.$$

Vinohrady (Bohême), le 23 février 1887.