SUR UNE

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE

QUI JOUE UN RÔLE IMPORTANT

DANS LA MÉCANIQUE CÉLESTE;

PAR M. F. TISSERAND.

PREMIÈRE PARTIE.

I. Il s'agit de l'équation

$$(a) \qquad \frac{d^2 z}{dv^2} + z[n^2 + 2\alpha \cos(lv + b)] = \mathrm{U},$$

où l'on a

$$(b) \qquad \mathrm{U} = \sum_i \mathrm{A}_i \cos \mathrm{V}_i, \qquad \mathrm{V}_i = l_i v + b_i;$$

n, α, l, b, A_i, l_i et b_i sont des constantes données : c'est donc une équation différentielle linéaire, à coefficients variables, avec second membre; elle a été rencontrée il y a longtemps par d'Alembert, à propos de la théorie de la Lune (*Opuscules*, t. V, p. 336), et par Lagrange (*Œuvres*, t. I, p. 586). La même équation a été étudiée à divers points de vue, dans ces dernières années, par MM. Bruns, Callandreau, Gyldén, Heine, Hill, Lindemann, Lindstedt, Mathieu, Poincaré, Stieltjes, etc.

M. Hill a fait des travaux très remarquables sur l'équation plus générale

$$\frac{d^2 z}{dv^2} + z[n^2 + 2\alpha \cos(lv + b) + 2\beta \cos(2lv + 2b) + \ldots] = \mathrm{U}.$$

Mais, dans ce Mémoire, nous ne nous occuperons que des recherches de MM. Gyldén et Lindstedt.

La méthode de M. Lindstedt est très simple et donne le développement de l'intégrale générale de l'équation (a) à l'aide des séries trigonométriques.

Celle de M. Gyldén est plus savante ; elle utilise en effet les beaux travaux de M. Hermite sur l'intégration de l'équation de Lamé au moyen des fonctions elliptiques. L'éminent directeur de l'observatoire de Stockholm a fait une application importante de ses formules à la détermination de l'orbite intermédiaire de la Lune ; les principes de son analyse, dans ce dernier problème, ont été clairement exposés dans ce Recueil même (t. I) par M. Andoyer. En dernier lieu, on est bien obligé de remplacer les fonctions elliptiques par leurs développements trigonométriques. On doit évidemment retomber sur les formules auxquelles conduit la méthode élémentaire de M. Lindstedt. C'est à la comparaison de ces deux théories que je vais m'appliquer, et je m'occuperai surtout de l'application à la théorie de la Lune, en suivant les calculs sous la forme employée par M. Andoyer. Pour être bien compris, je devrai forcément reprendre, mais aussi brièvement que possible, l'exposition des deux méthodes, en y ajoutant quelques compléments qui ne me semblent pas inutiles.

II. Négligeons d'abord le second membre de l'équation (a); par un changement de variable très simple, nous aurons l'équation

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2 z}{dv^2} + z(a_0^2 + 2a_1 \cos 2v) = 0;$$

nous admettrons que a_1 est un coefficient numérique petit dont on pourra négliger les puissances à partir d'un rang peu élevé : c'est là la circonstance qui facilite les approximations.

En adoptant l'exposition de la méthode de M. Lindstedt, telle qu'elle a été présentée par M. Poincaré, nous allons prouver qu'en posant

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} z = z_0 + a_1 z_1 + a_1^2 z_2 + \ldots + a_1^p z_p, \\ \mu = a_0 + a_1 \mu_1 + a_1^2 \mu_2 + \ldots + a_1^p \mu_p \quad (\text{on a pris } \mu_0 = a_0), \\ w = \mu v + \psi \quad (\psi \text{ désigne une constante arbitraire}), \end{array} \right.$$

on peut déterminer les quantités $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$, et les $p+1$ fonctions z_0, $z_1, \ldots, z_p$ des arguments v et w, de telle sorte qu'en substituant la valeur ci-dessus de z dans l'équation (A), elle y laisse un résidu de l'ordre de a_1^{p+1} ; les quantités μ_i dépendront uniquement de a_0. On prendra pour les fonctions z_i des expressions de cette forme

$$(2)\qquad z_i = \sum_{h=-i}^{h=+i} B_i^{(h)} \cos(w + 2hv) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p),$$

où les coefficients B seront des fonctions de a_0 qu'il s'agira de déterminer.

z_i contiendra v explicitement et implicitement par w, dont la définition est donnée par la dernière des formules (1).

On aura donc

$$\frac{d^2 z_i}{dv^2} = \frac{\partial^2 z_i}{\partial v^2} + 2\mu \frac{\partial^2 z_i}{\partial v\, \partial w} + \mu^2 \frac{\partial^2 z_i}{\partial w^2},$$

$$\frac{d^2 z}{dw^2} = \sum_{i=0}^{i=p} a_1^i \frac{d^2 z_i}{dw^2}.$$

Si l'on pose

$$(3)\qquad \mu^2 = a_0^2 + C_1 a_1 + C_2 a_1^2 + C_3 a_1^3 + \ldots,$$

les coefficients C_1, C_2, ... seront des polynômes en μ_1, μ_2, ... que l'on calculera aisément en partant de la seconde des formules (1).

Cela posé, si l'on substitue dans (A) les valeurs de z, $\frac{d^2 z}{dv^2}$, μ et μ^2 déterminées comme on vient de le dire, on trouvera un résultat de la forme

$$R_0 + R_1 a_1 + R_2 a_1^2 + \ldots + R_p a_1^p + \ldots = 0;$$

on écrira les équations

$$R_0 = R_2 = R_1 = \ldots = R_p = 0,$$

de telle sorte que le résidu de la substitution sera

$$R_{p+1}\, a_1^{p+1} + R_{p+2}\, a_1^{p+2} + \ldots,$$

et contiendra en facteur a_1^{p+1}, quantité de l'ordre $p+1$.

On trouve sans peine que l'équation générale $R_i = 0$ peut s'écrire

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial^2 z_i}{\partial v^2} + 2 a_0 \frac{\partial^2 z_i}{\partial v\, \partial w} + \mathfrak{R}_i = 0,$$

en faisant

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{R}_i = 2\left(\mu_1 \frac{\partial^2 z_{i-1}}{\partial v\,\partial w} + \mu_2 \frac{\partial^2 z_{i-2}}{\partial v\,\partial w} + \ldots + \mu_{i-1} \frac{\partial^2 z_1}{\partial v\,\partial w} + \mu_i \frac{\partial^2 z_0}{\partial v\,\partial w}\right) \\ + C_1 \frac{\partial^2 z_{i-1}}{\partial w^2} + C_2 \frac{\partial^2 z_{i-2}}{\partial w^2} + \ldots + C_{i-1} \frac{\partial^2 z_1}{\partial w^2} + C_i \frac{\partial^2 z_0}{\partial w^2} \\ + 2 z_{i-1} \cos 2v. \end{aligned}\right.$$

On remarquera que la quantité $\mathfrak{R}_i$ ne dépend que de $z_{i-1}, z_{i-2}, \ldots, z_0$; on pourra donc déterminer de proche en proche les fonctions z_i en partant de leurs expressions générales (2) et de l'équation de condition (α).

Supposons que, par ce calcul, on soit arrivé à une expression de cette forme

$$(4)\quad \mathfrak{R}_i = \sum_{h=-i}^{h=+i} D_i^{(h)} \cos(w + 2hv).$$

Si l'on substitue dans (α) les valeurs (2) et (4) de z_i et $\mathfrak{R}_i$, on trouvera

$$\sum_{h=-}^{h=+i} [4h(h + a_0) B_i^{(h)} - D_i^{(h)}] \cos(w + 2hv) = 0.$$

Nous vérifierons donc l'équation (α) en prenant

$$(c)\quad B_i^{(h)} = \frac{D_i^{(h)}}{4h(h + a_0)},$$

et cette valeur de $B_i^{(h)}$ sera admissible, sauf le cas de $h = 0$. En se reportant à la formule (4), on voit que $\mathfrak{R}_i$ ne doit pas contenir de terme où l'argument soit égal à w seul. On devra donc avoir les équations

$$(5)\quad D_1^{(0)} = 0, \qquad D_2^{(0)} = 0, \qquad \ldots, \qquad D_p^{(0)} = 0,$$

et ce sont ces équations qui détermineront $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$; après quoi, les formules (2) et (c) détermineront les quantités z_i.

Nous prendrons

$$(6)\quad z_0 = \cos w,$$

expression qui vérifie bien l'équation (A) lorsque a_1 est nul;

(3) nous donnera, à cause de $C_1 = a_0 \mu_1$,

$$\mathfrak{R}_1 = -2 a_0 \mu_1 \cos w + \cos(w + 2v) + \cos(w - 2v).$$

On devra donc avoir $\mu_1 = 0$; on aura ensuite

$$D_1^{(1)} = +1, \qquad D_1^{(-1)} = +1,$$

d'où, par (c),

$$B_1^{(1)} = \frac{1}{4(1+a_0)}, \qquad B_1^{(-1)} = \frac{1}{4(1-a_0)};$$

$$z_1 = \frac{\cos(w+2v)}{4(1+a_0)} + \frac{\cos(w-2v)}{4(1-a_0)}. \tag{7}$$

Avec les valeurs (6) et (7) de z_0 et z_1, $\mu_1 = 0$, on tire de (β)

$$\mathfrak{R}_2 = C_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial w^2} + C_2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial w^2} + 2 z_1 \cos 2v = 2\mu_2 a_0 \frac{\partial^2 z_0}{\partial w^2} + 2 z_1 \cos 2v,$$

d'où

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{\cos(w+4v)}{4(1+a_0)} + \frac{\cos(w-4v)}{4(1-a_0)} + \left[\frac{1}{4(1+a_0)} + \frac{1}{4(1-a_0)} - 2\mu_2 a_0\right] \cos w;$$

le coefficient de w doit disparaître : on en conclut

$$\mu_2 = \frac{1}{4a_0(1-a_0^2)}.$$

On trouve ensuite, en opérant de même,

$$\mu_3 = 0, \qquad \mu_4 = \frac{-15a_0^4 + 35a_0^2 - 8}{64a_0^3(1-a_0^2)^3(4-a_0^2)};$$

et l'on a cette solution, dans laquelle nous introduisons un facteur constant η_0, qui, avec ψ, donnera les deux constantes voulues,

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu &= a_0 \left[1 + \frac{a_1^2}{4a_0^2(1-a_0^2)} + a_1^3 \times 0\right], \\ w &= \psi + \mu v, \\ z &= \eta_0 \cos w + \frac{a_1}{4(1+a_0)} \eta_0 \cos(w+2v) + \frac{a_1}{4(1-a_0)} \eta_0 \cos(w-2v) \\ &\quad + \frac{a_1^2}{32(1+a_0)(2+a_0)} \eta_0 \cos(w+4v) + \frac{a_1^2}{32(1-a_0)(2-a_0)} \eta_0 \cos(w-4v) \\ &\quad + \frac{a_1^3}{384(1+a_0)(2+a_0)(3+a_0)} \eta_0 \cos(w+6v) \\ &\quad - a_1^3 \frac{a_0^3 + 4a_0^2 + 15a_0 + 16}{128a_0(1-a_0^2)(1+a_0)^2(2+a_0)} \eta_0 \cos(w+2v) \\ &\quad - a_1^3 \frac{a_0^3 - 4a_0^2 + 15a_0 - 16}{128a_0(1-a_0^2)(1-a_0)^2(2-a_0)} \eta_0 \cos(w-2v) \\ &\quad + \frac{a_1^3}{384(1-a_0)(2-a_0)(3-a_0)} \eta_0 \cos(w-6v). \end{aligned} \right.$$

Cette solution, transportée dans l'équation (A), y laissera un résidu du quatrième ordre.

On démontre aisément, de proche en proche, que z_i ne contiendra que les arguments $w \pm 2iv$, $w \pm (2i-4)v$, ..., l'argument w étant excepté lorsque i est pair.

Il importe de voir qu'on ne rencontrera jamais d'impossibilité dans le calcul des quantités μ_i d'après les équations (5). Supposons, en effet, que l'on ait trouvé

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \ldots, \quad \mu_{2i-1} = 0;$$

il en résulte

$$C_1 = 0, \quad C_3 = 0, \quad \ldots, \quad C_{2i-1} = 0;$$

les équations $D_{2i}^{(0)} = 0$ et $D_{2i+1}^{(0)} = 0$ donneront, comme on le voit aisément,

$$C_{2i} = B_{2i-1}^{(1)} + B_{2i-1}^{(-1)},$$

$$C_{2i+1} = B_{2i}^{(1)} + B_{2i}^{(-1)} = 0.$$

Or on a

$$C_{2i} = 2a_0\mu_{2i} + 2\mu_2\mu_{2i-2} + \ldots$$

(le coefficient 2 du dernier terme devant être remplacé par 1 si i est pair) et

$$C_{2i+1} = 2a_0\mu_{2i+1};$$

on aura donc

$$\mu_{2i+1} = 0,$$

$$2a_0\mu_{2i} = B_{2i-1}^{(1)} + B_{2i-1}^{(-1)} - 2\mu_2\mu_{2i-2} - 2\mu_4\mu_{2i-4} - \ldots.$$

La valeur trouvée pour μ_{2i} sera toujours admissible.

On voit en même temps que μ est une fonction paire de a_1.

III. Il faut maintenant rétablir le second membre dans l'équation (A). On trouvera l'intégrale générale de la nouvelle équation en conservant pour z l'expression analytique (B), et faisant varier les constantes η_0 et ψ suivant la méthode bien connue. Je vais donner la formule à laquelle on arrive ainsi, mais je le ferai en prenant l'équation sous la forme (a), ce qui sera plus commode pour les applications.

Soient

$$(d) \qquad \begin{cases} w = \mu v + \psi, \\ \mu = n\left[1 + \dfrac{\alpha^2}{n^2(l^2-4n^2)} + \alpha^4\dfrac{-2l^4 + 35l^2n^2 - 60n^4}{4n^4(l^2-n^2)(l^2-4n^2)^3} + \ldots\right]; \end{cases}$$

l'intégrale générale de l'équation (a) sera, en négligeant α^3,

$$
(e)\left\{
\begin{aligned}
z = {}& \eta_0 \cos w + \frac{\alpha}{l}\left[\frac{1}{l+2n}\eta_0\cos(w+lv+b) + \frac{1}{l-2n}\eta_0\cos(w-lv-b)\right] \\
&+ \frac{\alpha^2}{4l^2}\left[\frac{1}{(l+n)(l+2n)}\eta_0\cos(w+2lv+2b) + \frac{1}{(l-n)(l-2n)}\eta_0\cos(w-2lv-2b)\right] \\
&+ \frac{1}{2n}\sum A_i\cos V_i\left\{\left(\frac{1}{\mu+l_i}+\frac{1}{\mu-l_i}\right)\left[1-\alpha^2\frac{l^4-10l^2n^2+8n^4}{l^2n^2(l^2-4n^2)^2}\right]\right. \\
&\qquad + \frac{\alpha^2}{l^2(l+2n)^2}\left(\frac{1}{\mu+l+l_i}+\frac{1}{\mu+l-l_i}\right) \\
&\qquad \left. + \frac{\alpha^2}{l^2(l-2n)^2}\left(\frac{1}{\mu-l+l_i}+\frac{1}{\mu-l-l_i}\right)\right\} \\
&+ \frac{\alpha}{2nl}\sum A_i\cos(V_i+lv+b)\left[\frac{1}{l+2n}\left(\frac{1}{\mu+l+l_i}+\frac{1}{\mu-l_i}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{l-2n}\left(\frac{1}{\mu-l-l_i}+\frac{1}{\mu+l_i}\right)\right] \\
&+ \frac{\alpha}{2nl}\sum A_i\cos(V_i-lv-b)\left[\frac{1}{l+2n}\left(\frac{1}{\mu+l-l_i}+\frac{1}{\mu+l_i}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{l-2n}\left(\frac{1}{\mu-l+l_i}+\frac{1}{\mu-l_i}\right)\right] \\
&+ \frac{\alpha^2}{8nl^2}\sum A_i\cos(V_i+2lv+2b)\left[\frac{1}{(l+n)(l+2n)}\left(\frac{1}{\mu+2l+l_i}+\frac{1}{\mu-l_i}\right)\right. \\
&\qquad + \frac{1}{(l-n)(l-2n)}\left(\frac{1}{\mu-2l-l_i}+\frac{1}{\mu+l_i}\right) \\
&\qquad \left. + \frac{4}{l^2-4n^2}\left(\frac{1}{\mu+l+l_i}+\frac{1}{\mu-l-l_i}\right)\right] \\
&+ \frac{\alpha^2}{8nl^2}\sum A_i\cos(V_i-2lv-2b)\left[\frac{1}{(l+n)(l+2n)}\left(\frac{1}{\mu+2l-l_i}+\frac{1}{\mu+l_i}\right)\right. \\
&\qquad + \frac{1}{(l-n)(l-2n)}\left(\frac{1}{\mu-2l+l_i}+\frac{1}{\mu-l_i}\right) \\
&\qquad \left. + \frac{4}{l^2-4n^2}\left(\frac{1}{\mu+l-l_i}+\frac{1}{\mu-l+l_i}\right)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

IV. *Calcul approché de la latitude de la Lune.* — Soient

v la longitude de la Lune, comptée sur le plan de l'écliptique supposé fixe:
s la tangente de sa latitude;
m le rapport des moyens mouvements du Soleil et de la Lune;
σ une constante.

On a (Andoyer, *loc. cit.*), en négligeant les petites quantités du quatrième ordre,

$$\text{(C)}\quad \frac{d^2s}{dv^2}-\tfrac{3}{2}m^2\sin[(2-2m)v-2\sigma]\frac{ds}{dv}+s\left\{1+\tfrac{3}{2}m^2+\tfrac{3}{2}m^2\cos[(2-2m)v-2\sigma]\right\}=0.$$

On peut se convaincre aisément, en se reportant à la manière dont cette équation a été établie, que la portion $1+\frac{3}{2}m^2$ du coefficient de s est exacte au troisième ordre près inclusivement, relativement à m.

L'équation (C) est une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques et sans second membre; nous la ramènerons au type (a) en changeant de variable et posant

$$\text{(8)}\qquad s=z\,\mathrm{E}^{\frac{3}{4}m^2\int\sin[(2-2m)v-2\sigma]\,dv};$$

on trouve, avec la même précision,

$$\text{(9)}\qquad \frac{d^2z}{dv^2}+z\left\{1+\tfrac{3}{2}m^2+3m^2\cos[(2-2m)v-2\sigma]\right\}=0.$$

La remarque faite ci-dessus s'applique à la portion $1+\frac{3}{2}m^2$ du coefficient de z, qui est la même que dans le coefficient de s.

Pour faire coïncider l'équation (9) avec (a), il suffit de poser

$$n^2=1+\tfrac{3}{2}m^2,\qquad \alpha=\tfrac{3}{2}m^2,\qquad l=2(1-m),\qquad b=-\sigma;$$

d'où

$$n=1+\tfrac{3}{4}m^2+\text{des termes en } m^4, m^5, \ldots,$$
$$l-2n=-2m(1+\ldots),\qquad l^2-4n^2=-8m(1+\ldots).$$

Les diviseurs $l-2n$ et l^2-4n^2 sont petits et, par suite, importants à considérer; la formule (d), réduite à

$$z=\eta_0\cos w+\frac{\alpha}{l(l+2n)}\eta_0\cos(w+lv+b)+\frac{\alpha}{l(l-2n)}\eta_0\cos(w-lv-b),$$
$$w=\mu v+\psi,$$
$$\mu=n\left[1+\frac{\alpha^2}{n^2(l^2-4n^2)}\right],$$

nous donnera

$$\mu=n(1-\tfrac{9}{32}m^3+\ldots)=1+\tfrac{3}{4}m^2-\tfrac{9}{32}m^3+\ldots,$$
$$z=\eta_0\cos w+\tfrac{3}{16}m^2\eta_0\cos[w+(2-2m)v-2\sigma]-\tfrac{3}{8}m\eta_0\cos[w-(2-2m)v+2\sigma].$$

Le coefficient du dernier terme du second membre étant du second ordre par les facteurs m et η_0, il convient de supprimer le terme précédent, qui est du troisième ordre, à cause de $m^2\eta_0$; nous ferons en même temps

$$\eta_0 = \varkappa, \qquad \psi = -90^\circ - \gamma, \qquad \mu = g,$$

et nous aurons

$$z = \varkappa \sin(gv - \gamma) + \tfrac{3}{8} m\varkappa \sin[(2 - g - 2m)v - 2\sigma + \gamma].$$

La formule (8) donne, avec la même approximation, $s = z$.

Voici donc le résultat auquel nous arrivons :

$$g = 1 + \tfrac{3}{4}m^2 - \tfrac{9}{32}m^3, \tag{D}$$

$$s = \varkappa \sin(gv - \gamma) + \tfrac{3}{8} m\varkappa \sin[(2 - g - 2m)v - 2\sigma + \gamma]. \tag{E}$$

Les coefficients de m^2 et m^3 dans (D) sont exacts, comme on le voit en comparant avec les valeurs trouvées pour g dans les diverses théories de la Lune; on connaît ainsi le mouvement moyen du nœud à $\frac{1}{50}$ environ de sa valeur près.

L'expression (E) de s contient tous les termes du second ordre.

V. *Calcul approché de la projection du rayon vecteur de la Lune sur le plan de l'écliptique.* — Soient $\frac{1}{\upsilon}$ cette projection et

$$\upsilon = \mathrm{a}(1 + \rho),$$

a désignant une constante et ρ une quantité variable du premier ordre. On trouve aisément (Andoyer, *loc. cit.*) cette équation différentielle

$$(\mathrm{C}') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{dv^2} + \left(\frac{12m^2}{l^2 - 1} - \tfrac{3}{2}m^2\right)\sin[(2 - 2m)v - 2\sigma]\frac{d\rho}{dv} \\ &\quad + \rho\left\{1 - \tfrac{3}{2}m^2 - \left(\tfrac{9}{2}m^2 + \frac{12m^2 l}{l^2 - 1}\right)\cos[(2 - 2m)v - 2\sigma]\right\} = \mathrm{U}, \end{aligned}\right.$$

avec

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} l &= 2(1 - m), \\ \mathrm{U} &= -\tfrac{1}{2}m^2 - \tfrac{3}{4}\varkappa^2 - 3m^2\cos[(2 - 2m)v - 2\sigma] \\ &\qquad + \tfrac{3}{4}\varkappa^2\cos(2gv - 2\gamma) + \text{troisième ordre}. \end{aligned}\right.$$

Dans le premier membre de (C′), on a négligé les petites quantités du quatrième ordre; toutefois on peut s'assurer que la portion $1-\frac{3}{2}m^2$ du coefficient de ρ ne contiendrait pas de terme en m^3, mais seulement des termes en m^4, m^5, ..., si l'on poussait plus loin les calculs.

Pour ramener l'équation (C') au type (A), nous ferons

$$(11)\qquad \rho = z\,E^{\left(\frac{3}{4}m^2 - \frac{6m^2}{l^2-1}\right)\int \sin\frac{1}{2}[(2-2m)v-2\sigma]\,dv},$$

ce qui nous donnera, avec la même approximation,

$$(12)\qquad \frac{d^2z}{dv^2} + z\left\{1 - \frac{2}{3}m^2 - \frac{3}{2}m^2\left(3 - \frac{1}{2}l + \frac{12\,l}{l^2-1}\right)\cos[(2-2m)v-2\sigma]\right\} = U.$$

On aurait dû mettre, dans le second membre, au lieu de U,

$$U\,E^{-\left(\frac{3}{4}m^2 - \frac{6m^2}{l^2-1}\right)\int \sin[(2-2m)v-2\sigma]\,dv};$$

mais, en réduisant l'exponentielle à l'unité, cela revient à négliger dans U les quantités du quatrième ordre, ce que nous avons déjà fait.

Nous ferons coïncider (12) avec (a) si nous prenons

$$(13)\qquad \begin{cases} n^2 = 1 - \frac{3}{2}m^2, \qquad l = 2(1-m), \\ \alpha = -\frac{3}{4}m^2\left(3 - \frac{1}{2}l + \frac{12\,l}{l^2-1}\right). \end{cases}$$

Nous aurons d'abord, d'après (d),

$$w = \mu v + \psi,$$

$$\mu = n\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2(l^2-4n^2)} + \alpha^4\,\frac{-2l^4+35\,l^2n^2-60\,n^4}{4n^4(l^2-n^2)(l^2-4n^2)^3} + \ldots\right].$$

La formule (e) pourra être réduite à

$$\begin{aligned} z = \eta_0\cos w &+ \frac{\alpha}{l(l+2n)}\,\eta_0\cos[w+(2-2m)v-2\sigma] \\ &+ \frac{\alpha}{l(l-2n)}\,\eta_0\cos[w-(2-2m)v+2\sigma] \\ &+ \frac{1}{2n}\sum A_i\cos V_i\left(\frac{1}{\mu+l_i}+\frac{1}{\mu-l_i}\right); \end{aligned}$$

V_i désignera successivement les trois arguments 0, $(2-2m)v-2\sigma$, $2gv-2\gamma$, de U, formule (10):

A_i désignera successivement les coefficients des cosinus de ces trois arguments;

λ_i désignera successivement les coefficients de v dans les trois arguments.

Comme pour s, on devra prêter une attention particulière aux petits diviseurs $l - 2n$ et $l^2 - 4n^2$; on trouve, en se bornant au second ordre,

$$\begin{aligned} z = {} & \eta_0 \cos w + \tfrac{15}{8} m \eta_0 \cos[w - (2-2m)v + 2\sigma] \\ & - \tfrac{1}{2} m^2 - \tfrac{3}{4}\varkappa^2 + m^2 \cos[(2-2m)v - 2\sigma] - \tfrac{1}{4}\varkappa^2 \cos(2gv - 2\gamma). \end{aligned}$$

On a laissé de côté le terme en $\cos[w + (2-2m)v - 2\sigma]$, parce que son coefficient contient le facteur $m^2\eta_0$, qui est du troisième ordre. Il faut maintenant porter cette valeur de z dans (11), qui donnera, avec la précision cherchée, $\rho = z$; nous ferons en même temps $\eta_0 = e$, $\psi = -\varpi$, $\mu = c$, et nous aurons

$$(\mathrm{D}') \qquad c = n\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2(l^2 - 4n^2)} + \alpha^4 \frac{-2l^4 + 35 l^2 n^2 - 60 n^4}{4n^4(l^2 - n^2)(l^2 - 4n^2)^3}\right],$$

$$(\mathrm{E}') \quad \left\{ \begin{aligned} \upsilon = \mathrm{a}\Big\{ & 1 - \tfrac{1}{2}m^2 - \tfrac{3}{4}\varkappa^2 + e\cos(cv - \varpi) + m^2\cos[(2-2m)v - 2\sigma] \\ & - \tfrac{1}{4}\varkappa^2 \cos(2gv - 2\gamma) + \tfrac{15}{8} me \cos[(2 - c - 2m)v - 2\sigma + \varpi]\Big\}. \end{aligned} \right.$$

Nous allons maintenant procéder à la mise en nombres de la valeur (D′) de c; nous prendrons avec Laplace $m = 0{,}074\,8013$; les formules (13) nous donneront

$$l = 1{,}850\,3974; \qquad \log n = \bar{1}{,}998\,1698; \qquad \log \alpha^2 = \bar{3}{,}346\,9278;$$

$$\frac{\alpha^2}{n^2(l^2 - 4n^2)} = -0{,}004\,1326;$$

$$\alpha^4 \frac{-2l^4 + 35l^2n^2 - 60n^4}{4n^4(l^2 - n^2)(l^2 - 4n^2)^3} = -0{,}000\,1178;$$

d'où

$$c = 0{,}991\,562; \qquad 1 - c = 0{,}008\,438.$$

La valeur exacte de $1 - c$ est $0{,}008\,452\ldots$; on a donc le moyen mouvement du périgée avec une grande approximation, à $\frac{1}{600}$ de sa valeur environ.

VI. Il est bon d'approfondir le résultat ci-dessus, dont la précision inespérée est un peu fortuite.

En effet, les théories plus complètes de la Lune donnent pour expression analytique de $1-c$ une série ordonnée suivant les puissances de m et de e, e', $\varkappa$ et $\frac{a}{a'}$ $\left(e' = \text{excentricité de l'orbite solaire, } \frac{a}{a'} = \text{rapport des grands axes}\right)$; or, notre expression de $1-c$ laisse entièrement de côté e, e', $\varkappa$, et $\frac{a}{a'}$; on ne doit donc la comparer qu'à la portion de $1-c$ qui ne dépend que de m, et qui est fournie par une théorie certaine. M. Hill donne pour cette portion

$$1-c = 0{,}008572\ldots;$$

nous avons donc cette portion de $1-c$ à $\frac{1}{64}$ près.

Pour pénétrer encore plus avant dans le sujet, je vais développer suivant les puissances de m la valeur (D′) de c, en y remplaçant, bien entendu, α, l, n par leurs valeurs (13).

Je trouve successivement

$$\alpha = -\tfrac{3}{4} m^2 \left(2 + m + 24\,\frac{1-m}{3-8m+4m^2}\right), \tag{14}$$

$$\alpha = -\tfrac{3}{4} m^2 \left[2 + m + (8-8m)\left(1 + \tfrac{8}{3} m + \tfrac{52}{9} m^2 + \tfrac{320}{27} m^3 + \ldots\right)\right], \tag{15}$$

$$\alpha = -\tfrac{3}{4} m^2 \left(10 + \tfrac{43}{3} m + \tfrac{224}{9} m^2 + \ldots\right),$$

$$\alpha^2 = \tfrac{225}{4} m^4 \left(1 + \tfrac{43}{15} m + \tfrac{6329}{900} m^2 + \ldots\right),$$

$$n^2(l^2 - 4n^2) = -8\left(1 - \tfrac{5}{4} m - \tfrac{2}{3} m^2 + \ldots\right),$$

$$\frac{\alpha^2}{n^2(l^2-4n^2)} = -\tfrac{225}{32} m^3 \left(1 + \tfrac{247}{60} m + \tfrac{49241}{3600} m^2 + \ldots\right),$$

$$\alpha^4\,\frac{-2l^4 + 35 l^2 n^2 - 60 n^4}{4n^4(l^2-n^2)(l^2-4n^2)^3} = -\tfrac{810000}{32768} m^5 + \ldots;$$

$$c = 1 - \tfrac{3}{4} m^2 - \tfrac{225}{32} m^3 - \tfrac{3741}{128} m^4 - \tfrac{236789}{2048} m^5. \tag{16}$$

Voici la valeur exacte des cinq premiers termes de la série, d'après Delaunay,

$$c = 1 - \tfrac{3}{4} m^2 - \tfrac{225}{32} m^3 - \tfrac{4071}{128} m^4 - \tfrac{265493}{2048} m^5. \tag{17}$$

On voit que les coefficients de m^2 et de m^3 dans (16) sont corrects; et l'on pouvait répondre *a priori* que cela devait arriver; mais, en comparant les coefficients de m^4 et m^5 dans (16) et 17, on remarque que, si ces coefficients ne sont pas les mêmes, ils ne diffèrent pas beaucoup; ainsi, l'erreur relative du coefficient de m^4 est de $\frac{1}{12}$, et celle du coefficient de m^5 est de $\frac{1}{10}$. C'est à cette circonstance que l'on doit d'avoir trouvé plus haut la précision déjà très grande de $\frac{1}{64}$.

Si l'on ne gardait dans la formule (16) que les termes en m^2 et m^3, qui sont seuls exacts, on n'aurait $1-c$ qu'à $\frac{1}{6}$ près.

Il est important de remarquer qu'il est impossible de trouver, en opérant comme nous l'avons fait, les valeurs complètes des coefficients de m^4 et m^5 dans (16); car, dans l'équation (C'), la portion $1-\frac{3}{2}m^2$ du coefficient de ρ demande à être complétée par des termes en m^4, m^5, ..., et de même pour le reste de l'équation. Toutefois, la comparaison des deux valeurs de $1-c$ montre que les termes ainsi négligés sont relativement peu importants, de telle sorte que l'équation (12) réalise, sous une forme simple, une approximation déjà assez grande.

L'une des grosses difficultés de la théorie de la Lune provient du peu de convergence des séries développées suivant les puissances de m; cet inconvénient se manifeste surtout dans l'expression de c, formule (17); la convergence est extrêmement lente, parce que les coefficients des puissances successives de m vont en augmentant et en se compliquant rapidement. Ces grands coefficients apparaissent quand on passe de la formule (14) à la formule (15); ils proviennent du développement de la fraction $\frac{1-m}{3-8m+4m^2}$, lequel est peu convergent. Il semble qu'il y ait lieu d'éviter ce développement, ou de l'améliorer, comme l'ont proposé MM. Hill et Adams, en posant $m=\frac{m'}{1+m'}$. On trouve, en effet, dans cette hypothèse, au lieu de (17), l'expression suivante pour c,

$$c=1-\tfrac{3}{4}m'^2+\tfrac{57}{32}m'^3-\tfrac{123}{128}m'^4+\tfrac{1925}{2048}m'^5-\ldots,$$

série beaucoup plus convergente.

On voit que tous les résultats précédents ont pu être obtenus sans qu'on ait eu besoin de recourir à la théorie des fonctions elliptiques.

Il nous semble que le mérite principal des travaux récents de M. Gyldén est d'avoir montré que l'on peut obtenir une solution déjà très approchée du mouvement de la Lune, ce qu'on appelle l'*orbite intermédiaire*, à l'aide d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques. On peut faire ainsi bénéficier l'Astronomie des progrès importants qu'a faits dans ces derniers temps cette branche de l'Analyse mathématique. Il est bien remarquable que, dans le Mémoire déjà cité, Lagrange ait été amené, il y a longtemps, à propos des perturbations de Jupiter et de Saturne, à une équation,

$$\frac{d^2 z}{dv^2} + 2A\sin(lv+b)\frac{dz}{dv} + z[n^2 + B\cos(lv+b)] = U,$$

de même forme que celles que M. Gyldén a retrouvées depuis, par une voie différente, dans ses travaux sur l'orbite intermédiaire de la Lune.

SECONDE PARTIE.

MÉTHODE DE M. GYLDÉN.

VIII. Reprenons l'équation différentielle (a) sous la forme

$$(a_1) \qquad \frac{d^2 z}{dv^2} + z(a_0^2 + 2a_1\cos 2v) = U,$$

où U est supposé être une fonction connue de v.

M. Gyldén introduit des fonctions elliptiques de module k ; soit posé, suivant l'usage,

$$k' = \sqrt{1-k^2}, \qquad K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

$$E_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}};$$

La théorie des fonctions elliptiques donne

$$(18) \qquad \operatorname{sn}^2 u = \frac{8}{k^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left(\frac{q}{1-q^2}\gamma - \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} - \ldots\right),$$

γ étant une constante que l'on détermine par l'une des formules

$$(19) \qquad \frac{8q}{1-q^2}\gamma = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi}\,\frac{2E_1}{\pi},$$

$$(20) \qquad \gamma = 1 + (1-2q^2)\left(\frac{2q}{1-q^4} + \frac{3q^2}{1-q^6} + \ldots\right).$$

Posons

$$v = \frac{\pi}{2K} u; \tag{21}$$

l'équation (a_1) deviendra

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{d^2 z}{du^2} + z\left(a_0^2 + 2a_1 \cos\frac{\pi u}{K}\right) = U,$$

et si l'on porte dans cette formule la valeur de $\cos\frac{\pi u}{K}$ tirée de (18), on trouvera aisément

$$\frac{d^2 z}{du^2} - z\left[k^2 \frac{1-q^2}{4q} a_1 \operatorname{sn}^2 u - (a_0^2 + 2a_1\gamma)\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\right] = \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 U_1, \tag{a_2}$$

en posant

$$(\gamma)\quad \begin{cases} U_1 = U + U_2, \\ U_2 = 2a_1 z(1-q^2)\left(\dfrac{2q}{1-q^4}\cos\dfrac{2\pi u}{K} + \dfrac{3q^2}{1-q^6}\cos\dfrac{3\pi u}{K} + \ldots\right). \end{cases}$$

On voit qu'on a modifié le second membre de l'équation différentielle en y introduisant, à côté de U, des termes qui contiennent en facteur la fonction inconnue z; ces termes sont, il est vrai, des ordres de q, q^2, ..., c'est-à-dire, comme on le verra dans un moment, des ordres de a_1, a_1^2, ..., donc petits. En supprimant d'abord le second membre de (a_2), on a une équation qui se ramène à l'une des formes de l'équation de Lamé considérées par M. Hermite

$$\frac{d^2 z}{du^2} - z(2k^2 \operatorname{sn}^2 u - h) = 0. \tag{a'}$$

Il suffit, en effet, de poser

$$h = (a_0^2 + 2a_1\gamma)\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2, \tag{21}$$

$$(22)\quad \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^2}{4q} = 2, \qquad \text{d'où} \qquad q = \dfrac{\sqrt{16 + a_1^2} - 4}{a_1}, \\ q = \frac{1}{8} a_1 - \frac{1}{512} a_1^3 + \ldots. \end{cases}$$

En introduisant les fonctions de Jacobi, et désignant par C_1 et C_2 deux constantes arbitraires, l'intégrale générale de l'équation (a') est, d'après

M. Hermite (*Sur quelques applications des fonctions elliptiques*).

$$(\delta)\qquad \left\{\begin{array}{l} z = C_1 z_1 + C_2 z_2,\\ \text{où l'on a, en faisant } i = \sqrt{-1},\\ z_1 = \dfrac{H(u+i\omega)}{\Theta(u)}\, e^{-u\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}}, \qquad z_2 = \dfrac{H(u-i\omega)}{\Theta(u)}\, e^{u\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}}, \end{array}\right.$$

$$(\varepsilon)\qquad dn\, i\omega = \sqrt{h-k^2}.$$

VIII. Pour développer z_1, z_2 et, par suite, z en séries trigonométriques, nous partirons d'une formule importante donnée pour la première fois par Jacobi, à propos de la rotation des corps solides, en adoptant la forme sous laquelle l'a présentée M. Hermite (*loc. cit.*, p. 19),

$$\frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)}{\Theta(i\omega)}\,\frac{H(u+i\omega)}{\Theta(u)} = e^{\frac{i\pi u}{2K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{\frac{ni\pi u}{K}}}{\sin\left(\dfrac{i\pi\omega}{2K} + \dfrac{2n+1}{2}\,\dfrac{i\pi K'}{K}\right)}.$$

Introduisons dans le second membre v au lieu de u, formule (21); remplaçons $\frac{K'}{K}$ par sa valeur en fonction de q, et posons

$$(23)\qquad \frac{\pi\omega}{2K} = \lambda;$$

nous trouverons

$$(24)\qquad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)}{\Theta(i\omega)}\,\frac{H(u+i\omega)}{\Theta(u)} = 2i \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{(2n+1)iv}}{q^{\frac{2n+1}{2}} e^{-\lambda} - q^{-\frac{2n+1}{2}} e^{\lambda}}.$$

Faisons encore

$$(\eta)\qquad \mu = 1 + \frac{2K}{\pi}\,\frac{\Theta'(i\omega)}{i\,\Theta(i\omega)},$$

et nous tirerons sans peine des formules (δ), (24) et (η)

$$z_1 = i\,\frac{\pi}{K}\,\frac{\Theta(i\omega)}{H'(0)} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{(2n+2-\mu)iv}}{q^{\frac{2n+1}{2}} e^{-\lambda} - q^{-\frac{2n+1}{2}} e^{\lambda}};$$

d'où, en mettant à part le terme du signe $\sum$ qui correspond à $n = -1$, et faisant des transformations très simples,

$$z_1 = \frac{i\pi}{\mathbf{K}} \frac{\Theta(i\omega)}{\mathrm{H}'(0)\left(q^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda} - q^{\frac{1}{2}}e^{\lambda}\right)} \left(e^{-i\mu v} + \sum_{n=0}^{n=+\infty} q^n \frac{q - e^{-2\lambda}}{1 - q^{2n+1}e^{-2\lambda}} e^{(2n+2-\mu)iv} \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{n=+\infty} q^{n-1} \frac{e^{-2\lambda} - q}{e^{-2\lambda} - q^{2n-1}} e^{(-2n+2-\mu)iv} \right).$$

Posons maintenant

$$(\zeta) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{q}{a_1}\right)^{n+1} \dfrac{q - e^{-2\lambda}}{q - q^{2n+2}e^{-2\lambda}} = \mathfrak{A}_{-n-1} & (n \geqq 0), \\[2ex] \left(\dfrac{q}{a_1}\right)^{n-1} \dfrac{e^{-2\lambda} - q}{e^{-2\lambda} - q^{2n-1}} = \mathfrak{A}_{n-1} & (n \geqq 2), \end{cases}$$

et il viendra

$$z_1 = \frac{i\pi}{\mathbf{K}} \frac{\Theta(i\omega)}{\mathrm{H}'(0)\left(q^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda} - q^{\frac{1}{2}}e^{\lambda}\right)} \left(e^{-i\mu v} + \sum_{n=0}^{n=+\infty} \mathfrak{A}_{-n-1} a_1^{n+1} e^{(2n+2-\mu)iv} \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{n=+\infty} \mathfrak{A}_{n-1} a_1^{n-1} e^{(-2n+2-\mu)iv} \right),$$

$$z_2 = -\frac{i\pi}{\mathbf{K}} \frac{\Theta(i\omega)}{\mathrm{H}'(0)\left(q^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda} - q^{\frac{1}{2}}e^{\lambda}\right)} \left(e^{i\mu v} + \sum_{n=0}^{n=+\infty} \mathfrak{A}_{-n-1} a_1^{n+1} e^{-(2n+2-\mu)iv} \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{n=+\infty} \mathfrak{A}_{n-1} a_1^{n-1} e^{-(-2n+2-\mu)iv} \right).$$

Si l'on fait encore

$$\mathrm{C}_1 = \frac{\mathbf{K}}{\pi} \frac{\mathrm{H}'(0)\left(q^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda} - q^{\frac{1}{2}}e^{\lambda}\right)}{2i\Theta(i\omega)} \eta_0 e^{-i\psi},$$

$$\mathrm{C}_2 = -\frac{\mathbf{K}}{\pi} \frac{\mathrm{H}'(0)\left(q^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda} - q^{\frac{1}{2}}e^{\lambda}\right)}{2i\Theta(i\omega)} \eta_0 e^{i\psi},$$

on trouvera finalement, pour l'intégrale générale de l'équation (a'),

$$(\mathrm{F})\qquad \left\{\begin{aligned} z = \eta_0 \cos(\mu v + \psi) &+ \eta_0 \sum_{n=1}^{n=+\infty} \mathfrak{B}_n\, a_1^n \cos(\mu v + \psi + 2nv) \\ &+ \eta_0 \sum_{n=1}^{n=+\infty} \mathfrak{B}_{-n} a_1^n \cos(\mu v + \psi - 2nv). \end{aligned}\right.$$

On retrouve bien pour z une expression de la même forme que celle à laquelle nous sommes arrivés dans la première Partie de ce Mémoire; les formules (ζ) donnent les expressions générales des coefficients $\mathfrak{B}_n$, et c'est un avantage de l'emploi des fonctions elliptiques.

IX. Il faut maintenant intégrer l'équation (a_2) avec second membre.

On part de la solution (F) de l'équation sans second membre, et l'on fait varier les constantes arbitraires η_0 et ψ. Soit Z l'intégrale générale de (a_2); on trouve aisément, par la méthode connue,

$$(d)\qquad Z = z + \zeta,$$

z ayant l'expression (F), et ζ étant exprimé au moyen de cet ensemble de formules

$$(e)\qquad \left\{\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{c}\left(z''\int U_1 z'\,dv - z'\int U_1 z''\,dv\right), \\ z' &= \cos\mu v + \sum_1^{\infty} \mathfrak{B}_n a_1^n \cos(\mu + 2n)v + \sum_1^{\infty} \mathfrak{B}_{-n} a_1^n \cos(\mu - 2n)v, \\ z'' &= \sin\mu v + \sum_1^{\infty} \mathfrak{B}_n a_1^n \sin(\mu + 2n)v + \sum_1^{\infty} \mathfrak{B}_{-n} a_1^n \sin(\mu - 2n)v, \\ c &= z'\frac{dz''}{dv} - z''\frac{dz'}{dv}. \end{aligned}\right.$$

On trouvera sans peine

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} c = \mu &+ 2a_1[\mu(\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_{-1}) + (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_{-1})] \\ &+ a_1^2[2\mu(\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_{-2}) + 4(\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_{-2}) \\ &\qquad + \mu(\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_{-1})^2 + 2(\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_{-1})(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_{-1})] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et, en faisant

$$U_1 = \sum A_i \cos V_i = \sum A_i \cos(l_i v + b_i) : \tag{26}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
2c\zeta = {} & \sum A_i \cos V_i \Big[\frac{1}{\mu + l_i} + \frac{1}{\mu - l_i} + \mathcal{M}_1^2 a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu + 2 + l_i} + \frac{1}{\mu + 2 - l_i} \Big) \\
& \qquad + \mathcal{M}_{-1}^2 a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu - 2 + l_i} + \frac{1}{\mu - 2 - l_i} \Big) + \ldots \Big] \\
& + \sum A_i \cos(V_i + 2v) \Big[\mathcal{M}_1 a_1 \Big(\frac{1}{\mu + 2 + l_i} + \frac{1}{\mu - l_i} \Big) \\
& \qquad + \mathcal{M}_{-1} a_1 \Big(\frac{1}{\mu - 2 - l_i} + \frac{1}{\mu + l_i} \Big) + \ldots \Big] \\
& + \sum A_i \cos(V_i - 2v) \Big[\mathcal{M}_1 a_1 \Big(\frac{1}{\mu + 2 - l_i} + \frac{1}{\mu + l_i} \Big) \\
& \qquad + \mathcal{M}_{-1} a_1 \Big(\frac{1}{\mu - 2 + l_i} + \frac{1}{\mu - l_i} \Big) + \ldots \Big] \\
& + \sum A_i \cos(V_i + 4v) \Big[\mathcal{M}_2 a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu + 4 + l_i} + \frac{1}{\mu - l_i} \Big) \\
& \qquad + \mathcal{M}_{-2} a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu - 4 - l_i} + \frac{1}{\mu + l_i} \Big) \\
& \qquad + \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_{-1} a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu + 2 + l_i} + \frac{1}{\mu - 2 - l_i} \Big) + \ldots \Big] \\
& + \sum A_i \cos(V_i - 4v) \Big[\mathcal{M}_2 a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu + 4 - l_i} + \frac{1}{\mu + l_i} \Big) \\
& \qquad + \mathcal{M}_{-2} a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu - 4 + l_i} + \frac{1}{\mu - l_i} \Big) \\
& \qquad + \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_{-1} a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu + 2 - l_i} + \frac{1}{\mu - 2 + l_i} \Big) + \ldots \Big] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right. \tag{f}
$$

Pour les termes $A_i \cos V_i$ de U_1 qui proviennent de U même, il n'y a pas de difficultés dans l'application des formules ci-dessus. Considérons ceux qui proviennent de U_2; il faut d'abord se reporter à l'expression (γ) de U_2, que l'on peut écrire ainsi

$$U_2 = 2a_1 z(1 - q^2)\Big(\frac{2q}{1 - q^4} \cos 4v + \frac{3q^2}{1 - q^6} \cos 6v + \ldots \Big),$$

et y remplacer z par sa valeur (F),

$$z = \eta_0 \cos(\mu v + \psi) + \ldots;$$

nous trouverons, en nous bornant aux termes en a_1^2 et remplaçant q par $\frac{1}{8}a_1$,

$$U_2 = \tfrac{1}{4}a_1^2\eta_0\cos(\mu v + \psi + 4v) + \tfrac{1}{4}a_1^2\eta_0\cos(\mu v + \psi - 4v).$$

On pourra maintenant appliquer la formule (f), en la réduisant à

$$2c\zeta = \sum A_i \cos V_i\left(\frac{1}{\mu + l_i} + \frac{1}{\mu - l_i}\right),$$

et prenant successivement

$$A_i = \tfrac{1}{4}a_1^2\eta_0,\qquad V_i = \mu v + \psi + 4v,\qquad l_i = \mu + 4,$$
$$A_i = \tfrac{1}{4}a_1^2\eta_0,\qquad V_i = \mu v + \psi - 4v,\qquad l_i = \mu - 4.$$

On pourra aussi faire $c = \mu = a_0$; on trouvera de cette manière

$$\zeta = \frac{1}{8a_0}a_1^2\eta_0\left(\frac{1}{2a_0+4} - \tfrac{1}{4}\right)\cos(\mu v + \psi + 4v) + \tfrac{1}{8}a_1^2\eta_0\left(\frac{1}{2a_0-4} + \tfrac{1}{4}\right)\cos(\mu v + \psi - 4v),$$

$$\zeta = -\frac{1}{32}\,\frac{a_1^2\eta_0}{2+a_0}\cos(\mu v + \psi + 4v) - \frac{1}{32}\,\frac{a_1^2\eta_0}{2-a_0}\cos(\mu v + \psi - 4v).$$

Ces termes étant de même forme que certains termes de la formule (F), il convient de les réunir; on trouve ainsi

$$(\mathrm{G})\quad \left\{\begin{aligned} z &= \eta_0\cos(\mu v + \psi)\\ &+ \mathfrak{B}_1 a_1\ \eta_0\cos(\mu v + \psi + 2v) + \left[\mathfrak{B}_2 - \frac{1}{32(2+a_0)}\right]a_1^2\eta_0\cos(\mu v + \psi + 4v)\\ &+ \mathfrak{B}_{-1} a_1\eta_0\cos(\mu v + \psi - 2v) + \left[\mathfrak{B}_{-2} - \frac{1}{32(2-a_0)}\right]a_1^2\eta_0\cos(\mu v + \psi - 4v)\\ &+ \text{des termes en } a_1^2,\ a_1^4,\ \dots\end{aligned}\right.$$

On tire d'ailleurs des formules (ζ), en remplaçant $\frac{q}{a_1}$ par $\frac{1}{8}$, avec la même précision que ci-dessus,

$$(\mathrm{H})\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= \frac{1}{8}\,\frac{e^{-2\lambda} - q}{e^{-2\lambda} - q^3}, &\qquad \mathfrak{B}_{-1} &= \frac{1}{8}\,\frac{q - e^{-2\lambda}}{q - q^2e^{-2\lambda}},\\ \mathfrak{B}_2 &= \frac{1}{64}\,\frac{e^{-2\lambda} - q}{e^{-2\lambda} - q^5}, &\qquad \mathfrak{B}_{-2} &= \frac{1}{64}\,\frac{q - e^{-2\lambda}}{q - q^4e^{-2\lambda}}.\end{aligned}\right.$$

On calculera ensuite Z par les formules (d) et (f), en ne prenant pour $A_i\cos V_i$ que les divers termes périodiques qui figurent dans U même.

Quant à la quantité μ, sa détermination résultera des formules (ε) et (η).

X. Pour retrouver jusqu'au bout les formules de la première Partie, il ne nous reste donc plus qu'à calculer $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_{-1}$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_{-2}$ et μ en fonction explicite de a_0 et a_1; nous développerons nos calculs suivant les puissances de a_1.

Nous supposerons $a_0 > 1$.

En remplaçant dans (ε) et (η) les fonctions $\Theta(i\omega)$ et $\operatorname{dn} i\omega$ par leurs développements connus et tenant compte de la formule (23), il vient

$$i\frac{\mu-1}{2} = \frac{2q\sin 2i\lambda - 4q^4\sin 4i\lambda + \ldots}{1-2q\cos 2i\lambda + 2q^4\cos 4i\lambda - \ldots}, \tag{27}$$

$$\frac{\sqrt{h-k^2}}{\sqrt{k'}} = \frac{1+2q\cos 2i\lambda + 2q^4\cos 4i\lambda + \ldots}{1-2q\cos 2i\lambda + 2q^4\cos 4i\lambda - \ldots}; \tag{28}$$

les termes écrits nous suffiront.

Soit posé

$$\frac{\sqrt{h-k^2}-\sqrt{k'}}{\sqrt{h-k^2}+\sqrt{k'}} = \tau; \tag{29}$$

on tirera aisément de (19), (21) et (22)

$$\tau = \frac{\sqrt{a_0^2\left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}}\right)^2 + 1 + k'^2 - \frac{2\mathbf{E}_1}{\mathbf{K}}} - \sqrt{k'}}{\sqrt{a_0^2\left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}}\right)^2 + 1 + k'^2 - \frac{2\mathbf{E}_1}{\mathbf{K}}} + \sqrt{k'}}. \tag{30}$$

J'ai développé cette expression suivant les puissances de q, et j'ai trouvé

$$\tau = \frac{a_0-1}{a_0+1} + 8\frac{a_0^2+4}{a_0(a_0+1)^2}q^2 + \ldots. \tag{31}$$

Le terme en q ne figure pas dans ce développement, qui ne contiendra, plus généralement, que des puissances paires de q; on le démontre en changeant, dans l'expression (30) de τ, q en $-q$. On sait, d'après la théorie des fonctions elliptiques, que

$$k, \quad k', \quad \mathbf{K}, \quad \mathbf{E}_1$$

se changent respectivement en

$$\frac{ik}{k'}, \quad \frac{1}{k'}, \quad k'\mathbf{K}, \quad \frac{\mathbf{E}_1}{k'};$$

on en conclut aisément que τ ne change pas.

M. Hermite, auquel nous avions communiqué ce résultat, a bien voulu nous en donner une démonstration très simple et élégante, que nous reproduisons dans une Note placée à la fin du Mémoire.

La formule (28) donne, en introduisant τ,

$$\tau = \frac{2q\cos 2i\lambda}{1 + 2q^4\cos 4i\lambda}; \tag{32}$$

on en conclut, par la résolution d'une équation du second degré,

$$\cos 2i\lambda = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\tau^2 q^2(1 - 2q^4)}}{4\tau q^3},$$

$$2q\cos 2i\lambda = \tau(1 + \tau^2 q^2 + \ldots), \tag{33}$$

d'où

$$2q\sin 2i\lambda = i\tau\left[1 + \left(\tau^2 - \frac{2}{\tau^2}\right)q^2 + \ldots\right]. \tag{34}$$

En portant ces valeurs de $\cos 2i\lambda$ et de $\sin 2i\lambda$ dans la formule (27), préalablement écrite ainsi

$$i\,\frac{\mu - 1}{2} = 2q\sin 2i\lambda\,\frac{1 - 4q^3\cos 2i\lambda}{1 - 2q\cos 2i\lambda + 4q^4\cos^2 2i\lambda},$$

il vient

$$\mu = \frac{1 + \tau}{1 - \tau} - 4\,\frac{1 + \tau^3}{\tau(1 - \tau)}\,q^2 + \ldots.$$

En remplaçant τ par sa valeur (31), on trouve, après réduction,

$$\mu = a_0 + \frac{16}{a_0(1 - a_0^2)}\,q^2 + \ldots,$$

ou, avec la même précision,

$$\mu = a_0\left[1 + \frac{a_1^2}{4a_0^2(1 - a_0^2)} + \ldots\right].$$

La formule

$$e^{-2\lambda} = \cos 2i\lambda + i\sin 2i\lambda$$

donne, en ayant égard aux expressions (33) et (34) de $\cos 2i\lambda$ et $\sin 2i\lambda$,

$$2q\,e^{-2\lambda} = \tau + \tau^3 q^2 + \ldots - \tau + \left(\frac{q}{\tau} - \tau^3\right)q^2 + \ldots,$$

$$e^{-2\lambda} = \frac{q}{\tau} + \ldots,$$

ou bien, en remplaçant τ par sa valeur (31),

$$e^{-2\lambda} = \frac{a_0 + 1}{a_0 - 1} q + \ldots.$$

Portons cette valeur de $e^{-2\lambda}$ dans les formules (H), et nous trouverons, en négligeant q^2,

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{4(1 + a_0)}, \qquad \mathfrak{B}_{-1} = \frac{1}{4(1 - a_0)}, \qquad \mathfrak{B}_2 = \frac{1}{32(1 + a_0)}, \qquad \mathfrak{B}_{-2} = \frac{1}{32(1 - a_0)}.$$

Nous aurons ensuite, en transportant dans (G),

$$(\mathrm{K}) \left\{ \begin{aligned} z = {} & \eta_0 \cos(\mu v + \psi) \\ & + \frac{a_1}{4(1 + a_0)} \eta_0 \cos(\mu v + \psi + 2v) + \frac{a_1^2}{32(1 + a_0)(2 + a_0)} \eta_0 \cos(\mu v + \psi + 4v) \\ & + \frac{a_1}{4(1 - a_0)} \eta_0 \cos(\mu v + \psi - 2v) + \frac{a_1^2}{32(1 - a_0)(2 - a_0)} \eta_0 \cos(\mu v + \psi - 4v), \\ \mu = {} & a_0 \left[1 + \frac{a_1^2}{4 a_0^2 (1 - a_0^2)} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ces formules sont bien identiques, au degré de précision dont nous nous contentons, à celles que nous avons rencontrées dans la première Partie.

Les deux méthodes conduisent au même résultat, ce qui devait être. Nous sommes loin de vouloir dire par là que les fonctions elliptiques en général, et la théorie de M. Gyldén en particulier, ne soient pas appelées à jouer bientôt un rôle important dans le calcul des perturbations.

Note relative à l'expression de la quantité désignée par τ dans la formule (30) *de la page* D.21.

Nous allons reproduire ici la belle démonstration que M. Hermite a bien voulu nous communiquer pour prouver que l'expression

$$\tau = \frac{\sqrt{a_0^2 \left(\frac{\pi}{2\mathrm{K}} \right)^2 + 1 + k'^2 - \frac{2\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}}} - \sqrt{k'}}{\sqrt{a_0^2 \left(\frac{\pi}{2\mathrm{K}} \right)^2 + 1 + k'^2 - \frac{2\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}}} + \sqrt{k'}}$$

est une fonction paire de q.

Si l'on introduit la fonction de M. Weierstrass,

$$\mathbf{J} = \mathbf{K} - \mathbf{E}_1,$$

on peut écrire

$$\text{(I)} \qquad \tau = \frac{\sqrt{a_0^2 - \left(\dfrac{2\mathbf{K}k}{\pi}\right)^2 + \dfrac{8\mathbf{KJ}}{\pi^2}} - \dfrac{2\mathbf{K}\sqrt{k'}}{\pi}}{\sqrt{a_0^2 - \left(\dfrac{2\mathbf{K}k}{\mathbf{K}}\right)^2 + \dfrac{8\mathbf{KJ}}{\pi^2}} + \dfrac{2\mathbf{K}\sqrt{k'}}{\pi}}.$$

Or on a, d'après Jacobi (*Fundamenta*, § 40),

$$\text{(II)} \qquad \frac{2\mathbf{K}\sqrt{k'}}{\pi} = 1 - \frac{4q^2}{1+q^4} + \frac{4q^4}{1+q^8} - \frac{4q^6}{1+q^{12}} + \ldots,$$

ce qui est une fonction paire de q; il suffit donc de démontrer qu'il en est de même de

$$\frac{8\mathbf{KJ}}{\pi^2} - \left(\frac{2\mathbf{K}k}{\pi}\right)^2.$$

Or l'équation de Jacobi

$$\int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x\, dx = \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{K}}x - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$$

donne, quand on la différentie, et que l'on fait ensuite $x = 0$,

$$\text{(III)} \qquad \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{K}} = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}.$$

Mais de la série

$$\Theta\left(\frac{2\mathbf{K}x}{\pi}\right) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots$$

on conclut

$$\left(\frac{2\mathbf{K}}{\pi}\right)^2 \Theta''(0) = 8(q - 4q^4 + 9q^9 - \ldots) = -4q\,\mathrm{D}_q\Theta(0).$$

En portant cette valeur de $\Theta''(0)$ dans (III), il vient

$$\frac{\mathbf{KJ}}{\pi^2} = -q\,\mathrm{D}_q \log\Theta(0);$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{KJ}}{\pi^2} &= 2\left(\frac{q}{1-q}+\frac{3q^3}{1-q^3}+\frac{5q^5}{1-q^5}+\ldots\right)+\frac{2q^2}{1-q^2}+\frac{4q^4}{1-q^4}+\frac{6q^6}{1-q^6}+\ldots\\ &= 2\left(\frac{q}{1-q}+\frac{2q^2}{1-q^2}+\frac{3q^3}{1-q^3}+\frac{4q^4}{1-q^4}+\ldots\right)\\ &\quad -2\left(\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{2q^4}{1-q^4}+\frac{3q^6}{1-q^6}+\frac{4q^8}{1-q^8}+\ldots\right),\end{aligned}$$

en remplaçant $\Theta(0)$ par

$$\Theta(0)=[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^2(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots:$$

ou bien

$$\frac{\mathrm{KJ}}{\pi^2}=2\sum\frac{nq^n}{1-q^n}-2\sum\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}},\qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

En remarquant que l'on a

$$\frac{q^n}{1-q^n}=\frac{q^n}{1-q^{2n}}+\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}},$$

on peut écrire

$$\text{(IV)}\qquad \frac{\mathrm{KJ}}{\pi^2}=2\sum\frac{nq^n}{1-q^{2n}},\qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Or on a la formule connue

$$\text{(V)}\qquad \left(\frac{2\mathrm{K}k}{\pi}\right)^2=16\sum\frac{mq^m}{1-q^{2m}},\qquad (m=1,3,5,\ldots).$$

On conclut de (IV) et (V)

$$\frac{8\mathrm{KJ}}{\pi^2}-\left(\frac{2\mathrm{K}k}{\pi}\right)^2=32\sum\frac{nq^{2n}}{1-q^{4n}},\qquad (n=1,2,3,\ldots);$$

c'est bien une fonction paire de q, et l'on a finalement, sous une forme simple et élégante,

$$\tau=\frac{\sqrt{a_0^2+32\sum\frac{nq^{2n}}{1-q^{4n}}}-\left[1+4\sum\frac{(-1)^n q^{2n}}{1+q^{4n}}\right]}{\sqrt{a_0^2+32\sum\frac{nq^{2n}}{1-q^{4n}}}+\left[1+4\sum\frac{(-1)^n q^{2n}}{1+q^{4n}}\right]},\qquad (n=1,2,3,\ldots).$$