REMARQUES

SUR LA

DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES;

PAR M. HERMITE.

En désignant par $F(x)$ une fonction uniforme aux périodes $2K$ et $2iK'$, et par $a, b, \ldots, l$ ses pôles situés à l'intérieur du rectangle des périodes, on a l'expression suivante

$$\begin{aligned} F(x) = C &+ A\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + B\frac{H'(x-b)}{H(x-b)} + \ldots + L\frac{H'(x-l)}{H(x-l)} \\ &+ D_x\left[A'\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + B'\frac{H'(x-b)}{H(x-b)} + \ldots + L'\frac{H'(x-l)}{H(x-l)}\right] \\ &+ D_x^2\left[A''\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + B''\frac{H'(x-b)}{H(x-b)} + \ldots + L''\frac{H'(x-l)}{H(x-l)}\right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ou bien, pour abréger,

$$\begin{aligned} F(x) = C + \sum A\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \sum D_x A'\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \sum D_x^2 A''\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La quantité $\frac{H'(x)}{H(x)}$, qui joue le rôle d'élément simple dans cette formule, n'est pas doublement périodique, mais ses dérivées le sont, comme le montre la relation

$$D_x\frac{H'(x)}{H(x)} = \frac{J}{K} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}.$$

Il en résulte que les termes de la première somme sont d'une autre nature que les autres, mais la condition $A + B + \ldots + L = 0$ permet de la mettre aussi sous la forme doublement périodique; c'est le premier point dont je vais m'occuper.

I. J'emploierai, dans ce but, la relation suivante

$$\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)},$$

qui est une conséquence de l'égalité fondamentale

$$-k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x+a) = \frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Changeons, en effet, a en $a + i\mathrm{K}'$: on aura d'abord

$$-\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x+a)} = \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)};$$

prenons ensuite la dérivée logarithmique des deux membres de l'équation

$$\operatorname{sn} a = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(a)}{\Theta(a)},$$

ce qui donne

$$\frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} = \frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)},$$

et ajoutons membre à membre. Au moyen de la formule

$$\frac{1}{\operatorname{sn}(x+a)} = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{sn} a \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a},$$

on trouvera, après une réduction facile, la relation à établir.

D'une autre manière, en partant de la décomposition en éléments simples de la quantité $\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a}$ qui a pour périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, nous opérerons comme il suit. Les pôles étant $x = a$, $x = 2\mathrm{K} - a$, et les résidus correspondants $\frac{1}{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}$, $-\frac{1}{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}$, nous avons d'abord

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} = \mathrm{C} + \frac{1}{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}\left[\frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} - \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)}\right]$$

ou plutôt

$$\frac{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} = \mathrm{C}' + \frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} - \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)}.$$

Pour déterminer la constante, je fais $x = 0$, ce qui donne

$$-\frac{2 \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} = C' - \frac{2 \mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)}$$

et, par conséquent,

$$C' = 2\left[\frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} - \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a}\right] = 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Nous avons ainsi l'égalité

$$\frac{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} - \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)};$$

permutant x et a, on en conclut

$$\frac{2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 x} = \frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} + \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$$

et enfin, en retranchant membre à membre,

$$\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Cela posé, l'élément simple $\frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)}$ s'obtient en changeant a en $-a$, sous la forme suivante

$$\frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)},$$

et voici la nouvelle expression des fonctions doublement périodiques qui en résulte. En premier lieu et dans la somme $\sum \mathrm{A}\frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)}$, le terme $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$ disparaît en vertu de la condition $\sum \mathrm{A} = 0$; on a donc simplement

$$\sum \mathrm{A}\frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} = \sum \mathrm{A}\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} + \text{const.}$$

Soient ensuite, pour simplifier l'écriture,

$$S' = \sum \mathrm{A}', \qquad S'' = \sum \mathrm{A}'', \qquad \ldots;$$

en faisant usage de l'égalité de Jacobi

$$D_x \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \frac{J}{K} - k^2 \operatorname{sn}^2 x,$$

nous trouvons successivement

$$\sum A' \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} = \sum A' D_x \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S' k^2 \operatorname{sn}^2 x + \text{const.},$$

$$\sum A'' \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} = \sum A'' D_x^2 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S'' D_x k^2 \operatorname{sn}^2 x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La nouvelle expression des fonctions doublement périodiques, où n'entrent plus que des éléments doublement périodiques, à savoir $\operatorname{sn}^2 x$ et sa dérivée, est donc

$$\begin{aligned} F(x) = C &+ \sum A \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} \\ &+ \sum A' D_x \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S' k^2 \operatorname{sn}^2 x \\ &+ \sum A'' D_x^2 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S'' D_x k^2 \operatorname{sn}^2 x \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

et l'on en conclut facilement qu'on a

$$F(x) = \varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \psi(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

en désignant par $\varphi(\operatorname{sn}^2 x)$ et $\psi(\operatorname{sn}^2 x)$ des fonctions rationnelles en $\operatorname{sn}^2 x$.

Une remarque à laquelle elle donne lieu immédiatement, c'est que le second membre contient un point singulier apparent, $x = iK'$, qui se trouve dans la formule

$$\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

C'est, sous ce rapport, une imperfection qui est évitée avec les éléments simples $\frac{H'(x-a)}{H(x-a)}$; nous observerons toutefois qu'il n'y a point de pôle apparent dans le cas particulier où, la fonction doublement périodique étant paire, tous les pôles sont simples, puisque alors on obtient

$$F(x) = C + \sum \frac{A \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a}.$$

Ce cas n'est pas le seul : il en est encore de même dans d'autres circonstances où l'expression des fonctions doublement périodiques s'offre sous des formes nouvelles que nous allons indiquer.

II. A cet effet, je distingue parmi les fonctions aux périodes $2K$ et $2iK'$ celles qui se reproduisent au signe près lorsqu'on ajoute à la variable l'une des demi-périodes iK, $K + iK'$, K; je les désignerai par $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, de sorte qu'on aura ces conditions caractéristiques

$$\begin{aligned} F_1(x + iK') &= -F_1(x), \\ F_2(x + K + iK') &= -F_2(x), \\ F_3(x + K) &= -F_3(x). \end{aligned}$$

Considérons d'abord la première; nous pourrons écrire

$$2F_1(x) = F_1(x) - F_1(x + iK'),$$

et, en observant que l'on a

$$\frac{H'(x + iK')}{H(x + iK')} = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{i\pi}{2K},$$

la première formule de décomposition en éléments simples donne immédiatement

$$\begin{aligned} 2F_1(x) = {} & \sum A \left[\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} - \frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)}\right] \\ & + \sum A' D_x \left[\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} - \frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)}\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$2F_1(x) = \sum AD_x \log \operatorname{sn}(x-a) + \sum A' D_x^2 \log \operatorname{sn}(x-a) + \ldots$$

ou, plus simplement,

$$F_1(x) = \sum AD_x \log \operatorname{sn}(x-a) + \sum A' D_x^2 \log \operatorname{sn}(x-a) + \ldots.$$

si l'on n'emploie que les pôles contenus dans le rectangle ayant pour côtés $2K$ et K'.

De la même manière, en faisant usage des équations,

$$\frac{H'(x+K+iK')}{H(x+K+iK')} = \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} - \frac{i\pi}{2K},$$

$$\frac{H'(x+K)}{H(x+K)} = \frac{H'_1(x)}{H_1(x)},$$

nous trouverons ensuite

$$2F_2(x) = \sum A_1 D_x \log \frac{\operatorname{sn}(x-a')}{\operatorname{dn}(x-a')} + \sum A'_1 D_x^2 \log \frac{\operatorname{sn}(x-a')}{\operatorname{dn}(x-a')} + \ldots,$$

$$2F_3(x) = \sum A_2 D_x \log \frac{\operatorname{sn}(x-a'')}{\operatorname{cn}(x-a'')} + \sum A'_1 D_x^2 \log \frac{\operatorname{sn}(x-a'')}{\operatorname{cn}(x-a'')} + \ldots.$$

Ces quantités prennent une forme plus simple, si l'on change dans la première x en $x+K$, et dans la seconde x en $x+K+iK'$. Nous avons, en effet,

$$\frac{\operatorname{sn}(x+K)}{\operatorname{dn}(x+K)} = \frac{1}{k'} \operatorname{cn} x,$$

$$\frac{\operatorname{sn}(x+K+iK')}{\operatorname{cn}(x+K+iK')} = \frac{i}{k'} \operatorname{dn} x;$$

en écrivant donc

$$F_2(x) \quad \text{et} \quad F_3(x),$$

au lieu de

$$2F_2(x+K) \quad \text{et} \quad 2F_3(x+K+iK'),$$

on obtient ainsi les formules

$$F_2(x) = \sum A_1 D_x \log \operatorname{cn}(x-a') + \sum A'_1 D_x^2 \log \operatorname{cn}(x-a') + \ldots,$$

$$F_3(x) = \sum A_2 D_x \log \operatorname{dn}(x-a'') + \sum A'_2 D_x^2 \log \operatorname{dn}(x-a'') + \ldots.$$

Les expressions des fonctions $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, auxquelles nous venons de parvenir, ont pour éléments simples les fonctions doublement périodiques

$$D_x \log \operatorname{sn} x = \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x},$$

$$D_x \log \operatorname{cn} x = -\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x},$$

$$D_x \log \operatorname{dn} x = -k^2 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x},$$

et ne présentent pas de pôle apparent; voici quelques remarques auxquelles elles donnent lieu ([1]).

III. L'expression, par une somme d'éléments simples, des fonctions rationnelles et des fonctions doublement périodiques, donne immédiatement leurs intégrales; on obtient ainsi pour les fonctions doublement périodiques les plus générales, désignées précédemment par $F(x)$,

$$\int F(x)\,dx = Cx + \sum A \log H(x-a) + \sum A' \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \ldots,$$

puis les formules, auxquelles je m'arrêterai un instant,

$$\int F_1(x)\,dx = \sum A \log \operatorname{sn}(x-a) + \sum A' D_x \log \operatorname{sn}(x-a) + \ldots.$$

$$\int F_2(x)\,dx = \sum A_1 \log \operatorname{cn}(x-a') + \sum A'_1 D_x \log \operatorname{cn}(x-a') + \ldots.$$

$$\int F_3(x)\,dx = \sum A_2 \log \operatorname{dn}(x-a'') + \sum A'_2 D_x \log \operatorname{dn}(x-a'') + \ldots.$$

Soit pour un instant $\operatorname{sn} x = \xi$ et $R(\xi) = (1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)$, on aura

$$F_1(x) = f_1[\xi, \sqrt{R(\xi)}],$$
$$F_2(x) = f_2[\xi, \sqrt{R(\xi)}],$$
$$F_3(x) = f_3[\xi, \sqrt{R(\xi)}],$$

en représentant par f_1, f_2, f_3 des expressions rationnelles en ξ et $\sqrt{R(\xi)}$; cela étant, on voit que les intégrales

$$\int \frac{f_1[\xi, \sqrt{R(\xi)}]}{\sqrt{R(\xi)}}\,d\xi, \qquad \int \frac{f_2[\xi, \sqrt{R(\xi)}]}{\sqrt{R(\xi)}}\,d\xi, \qquad \int \frac{f_3[\xi, \sqrt{R(\xi)}]}{\sqrt{R(\xi)}}\,d\xi$$

s'expriment sous forme finie explicite, par les fonctions élementaires. Soit, de plus,

$$f[\xi, \sqrt{R(\xi)}] = f_1[\xi, \sqrt{R(\xi)}] + f_2[\xi, \sqrt{R(\xi)}] + f_3[\xi, \sqrt{R(\xi)}],$$

([1]) Dans une Note du *Journal de Liouville*, sur une formule d'Euler, année 1879, je suis arrivé, par une autre méthode, à ces mêmes formules.

il en sera de même de la quantité

$$J = \int \frac{f[\xi, \sqrt{R(\xi)}]}{\sqrt{R(\xi)}} d\xi,$$

de sorte qu'on a ainsi un type des intégrales qui ont été nommées *pseudo-elliptiques*. Revenons maintenant à la variable x, et posons, pour abréger,

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x),$$

ce qui permet d'écrire

$$J = \int F(x)\, dx,$$

il est facile d'établir la relation

$$F(x) + F(x + iK') + F(x + K + iK') + F(x + K) = 0.$$

Considérons, en effet, les quatre termes qui dépendent de la même fonction, par exemple $F_1(x)$: ils donnent la somme

$$F_1(x) + F_1(x + iK') + F_1(x + K + iK') + F_1(x + K);$$

or on voit immédiatement qu'elle est nulle en vertu de l'égalité

$$F_1(x) + F_1(x + iK') = 0,$$

et il est clair qu'on a de même

$$F_2(x) + F_2(x + iK') + F_2(x + K + iK') + F_2(x + K) = 0,$$
$$F_3(x) + F_3(x + iK') + F_3(x + K + iK') + F_3(x + K) = 0.$$

J'ajoute maintenant que toute fonction doublement périodique $F(x)$ qui satisfait à cette condition, pouvant s'écrire de la manière suivante,

$$\begin{aligned} 4F(x) = {} & F(x) - F(x + iK') \\ & + F(x) - F(x + K + iK') \\ & + F(x) - F(x + K), \end{aligned}$$

on en conclut cette expression

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x).$$

Effectivement les différences

$$F(x) - F(x + iK'), \quad F(x) - F(x + K + iK') \quad \text{et} \quad F(x) - F(x + K)$$

offrent les propriétés caractéristiques de $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$; elles se reproduisent changées de signe, en y remplaçant successivement x par $x+iK'$, $x+K+iK'$ et $x+K$. Il en résulte que la transformée par la substitution $\operatorname{sn} x = \xi$ de l'intégrale $\int F(x)\,dx$, c'est-à-dire $J = \int \frac{f[\xi, \sqrt{R(\xi)}]}{\sqrt{R(\xi)}}\,d\xi$, s'obtient sous une forme finie explicite au moyen des fonctions élémentaires, et représente une intégrale pseudo-elliptique. Je remarque encore qu'ayant pour la fonction doublement périodique $F(x)$ cette expression

$$F(x) = \varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \psi(\operatorname{sn}^2 x)\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

où φ et ψ désignent des fonctions rationnelles, on en conclut

$$f[\xi, \sqrt{R(\xi)}] = \varphi(\xi^2) + \psi(\xi^2)\xi\sqrt{R(\xi)},$$

de sorte que l'intégrale J se décompose en deux parties, dont la première $\int \frac{\varphi(\xi^2)\,d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$ est seule à considérer. Cela étant, je dis que la fonction $\varphi(\xi^2)$ vérifie la relation

$$\varphi(\xi^2) + \varphi\left(\frac{1}{k^2\xi^2}\right) + \varphi\left(\frac{1-k^2\xi^2}{k^2-k^2\xi^2}\right) + \varphi\left(\frac{1-\xi^2}{1-k^2\xi^2}\right) = 0.$$

Changeons, en effet, x en $-x$, dans l'égalité

$$F(x) + F(x+iK') + F(x+K+iK') + F(x+K) = 0,$$

on obtiendra, eu égard à la périodicité, l'équation

$$F(-x) + F(-x-iK') + F(-x-K-iK') + F(-x-K) = 0,$$

et, en ajoutant membre à membre, on conclut que la partie paire de $F(x)$, c'est-à-dire $\varphi(\operatorname{sn}^2 x)$, satisfait à la même condition que la fonction elle-même. Cela étant, la proposition énoncée est la conséquence des relations élémentaires

$$\operatorname{sn}^2(x+iK') = \frac{1}{k^2\operatorname{sn}^2 x}, \qquad \operatorname{sn}^2(x+K+iK') = \frac{\operatorname{dn}^2 x}{k^2\operatorname{cn}^2 x}, \qquad \operatorname{sn}^2(x+K) = \frac{\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}.$$

C'est M. Goursat qui a donné ce résultat, dans un beau travail intitulé *Note sur quelques intégrales pseudo-elliptiques*, dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV, 1887. Je renvoie aussi sur la même question à d'excellentes recherches qu'a publiées M. Raffy dans le même Recueil, t. XII, p. 51; la méthode des deux auteurs, qui n'empruntent rien à la théorie des fonctions doublement périodiques, étant entièrement différente de celle que j'ai suivie.

IV. Je considérerai maintenant les fonctions $\Phi(x)$ aux périodes $4K$ et $4iK'$, pour montrer succinctement comment elles se décomposent en éléments simples, qui sont encore formés au moyen des quantités $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$; voici, dans ce but, une première remarque.

Soient, pour un moment,

$$2\Pi(x) = \Phi(x) + \Phi(x + 2iK'),$$
$$2\Pi_1(x) = \Phi(x) - \Phi(x + 2iK'),$$

on aura les égalités

$$\Pi(x + 2iK') = +\Pi(x),$$
$$\Pi_1(x + 2iK') = -\Pi(x),$$

et l'on en conclut que la fonction proposée $\Phi(x)$ s'exprime par la somme de deux autres dont la première se reproduit et la seconde change de signe quand on ajoute $2iK'$ à la variable.

Posons ensuite

$$2\Phi_0(x) = \Pi(x) + \Pi(x + 2K),$$
$$2\Phi_1(x) = \Pi(x) - \Pi(x + 2K)$$

et semblablement

$$2\Phi_2(x) = \Pi_1(x) - \Pi_1(x + 2K),$$
$$2\Phi_3(x) = \Pi_1(x) + \Pi_1(x + 2K);$$

nous en déduirons cette expression

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x),$$

où les termes du second membre satisfont aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
\Phi_0(x + 2K) &= +\Phi_0(x), & \Phi_0(x + 2iK') &= +\Phi_0(x),\\
\Phi_1(x + 2K) &= -\Phi_1(x), & \Phi_1(x + 2iK') &= +\Phi_1(x),\\
\Phi_2(x + 2K) &= -\Phi_2(x), & \Phi_2(x + 2iK') &= -\Phi_2(x),\\
\Phi_3(x + 2K) &= +\Phi_3(x), & \Phi_3(x + 2iK') &= -\Phi_3(x).
\end{aligned}$$

Elles montrent que $\Phi_0(x)$ revient à $F(x)$; on voit aussi que $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$ peuvent être considérées comme des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, ayant respectivement les mêmes multiplicateurs que $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$, qui leur serviront d'éléments simples. Nous avons donc, en premier lieu,

$$\begin{aligned}\Phi_0(x) = C &+ \sum A \frac{\operatorname{sn}x \operatorname{cn}x \operatorname{dn}x + \operatorname{sn}a \operatorname{cn}a \operatorname{dn}a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} \\ &+ \sum A' D_x \frac{\operatorname{sn}x \operatorname{cn}x \operatorname{dn}x + \operatorname{sn}a \operatorname{cn}a \operatorname{dn}a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S' k^2 \operatorname{sn}^2 x \\ &+ \sum A'' D_x^2 \frac{\operatorname{sn}x \operatorname{cn}x \operatorname{dn}x + \operatorname{sn}a \operatorname{cn}a \operatorname{dn}a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S'' D_x k^2 \operatorname{sn}^2 x \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;\end{aligned}$$

puis, en représentant les pôles par $a' + iK'$, $a'' + iK'$, $a''' + iK'$, ...,

$$\Phi_1(x) = \sum A_1 \operatorname{sn}(x - a') + \sum A'_1 D_x \operatorname{sn}(x - a') + \ldots,$$

$$\Phi_2(x) = \sum A_2 \operatorname{cn}(x - a'') + \sum A'_2 D_x \operatorname{cn}(x - a'') + \ldots,$$

$$\Phi_3(x) = \sum A_3 \operatorname{dn}(x - a''') + \sum A'_3 D_x \operatorname{dn}(x - a''') + \ldots.$$

Cela posé, à la formule précédemment donnée pour $\Phi_0(x)$, à savoir

$$\Phi_0(x) = \varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \psi(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn}x \operatorname{cn}x \operatorname{dn}x,$$

nous ajouterons les suivantes, dans lesquelles les lettres φ et ψ désignent des fonctions rationnelles :

$$\Phi_1(x) = \varphi_1(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn}x + \psi_1(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{cn}x \operatorname{dn}x,$$

$$\Phi_2(x) = \varphi_2(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{cn}x + \psi_2(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn}x \operatorname{dn}x,$$

$$\Phi_3(x) = \varphi_3(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{dn}x + \psi_3(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn}x \operatorname{cn}x.$$

On les obtient au moyen des relations élémentaires pour l'addition des arguments dans les éléments simples $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$, ou encore en remarquant que les produits $\Phi_1(x)\operatorname{sn}x$, $\Phi_2(x)\operatorname{cn}x$, $\Phi_3(x)\operatorname{dn}x$ ont pour périodes $2K$ et $2iK'$, et rentrent, par conséquent, dans le type analytique de $\Phi_0(x)$.

Ces résultats montrent que $\Phi(x)$, c'est-à-dire toute fonction uniforme dont les périodes sont $4K$ et $4iK'$, s'exprime en fonction rationnelle de

$\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ et $\operatorname{dn} x$. J'indiquerai comme exemple les formules suivantes :

$$\operatorname{sn}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \operatorname{cn} x}{1 + \operatorname{dn} x}, \qquad \operatorname{sn}^2\left(\frac{x}{2} + K\right) = \frac{1 + \operatorname{cn} x}{1 + \operatorname{dn} x},$$

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{x}{2} + iK'\right) = \frac{1 + \operatorname{cn} x}{1 - \operatorname{dn} x}, \qquad \operatorname{sn}^2\left(\frac{x}{2} + K + iK'\right) = \frac{1 - \operatorname{cn} x}{1 - \operatorname{dn} x}.$$

Je remarquerai aussi que, en posant

$$\Psi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x),$$

ce qui donne

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \Psi(x),$$

on a la relation

$$\Psi(x) + \Psi(x + 2iK') + \Psi(x + 2K + 2iK') + \Psi(x + 2K) = 0,$$

et qu'on peut en conclure l'expression de la fonction $\Psi(x)$.

Soient, en effet, pour un moment,

$$2\Psi_1(x) = \Psi(x) + \Psi(x + 2iK'),$$
$$2\Psi_2(x) = \Psi(x) + \Psi(x + 2K + 2iK'),$$
$$2\Psi_3(x) = \Psi(x) + \Psi(x + 2K);$$

nous obtenons d'abord, d'après l'égalité admise,

$$\Psi(x) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x) + \Psi_3(x).$$

Cela étant, on trouve ensuite, en ayant égard à cette même relation ainsi qu'à la périodicité de $\Psi(x)$,

$$\Psi_1(x + 2K) = -\Psi_1(x),$$
$$\Psi_2(x + 2K) = -\Psi_2(x),$$
$$\Psi_3(x + 2K) = +\Psi_3(x),$$

et pareillement

$$\Psi_1(x + 2iK') = +\Psi_1(x),$$
$$\Psi^2(x + 2iK') = +\Psi_2(x),$$
$$\Psi_3(x + 2iK') = -\Psi_3(x).$$

On voit donc que les fonctions $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, $\Psi_3(x)$ possèdent les propriétés caractéristiques de $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$, ce qui démontre le résultat annoncé.