NOTE SUR LES COURBES

DONT

LES TANGENTES FONT PARTIE D'UN COMPLEXE LINÉAIRE,

PAR M. G. KŒNIGS,

Dans un Mémoire inséré au Tome XI de la deuxième série des *Annales de l'École Normale supérieure*, j'ai défini des courbes ayant ce que j'ai appelé un *axe anharmonique*, c'est-à-dire telles qu'il existe une droite jouissant de la propriété suivante : Les points où cette droite est rencontrée par les quatre plans osculateurs à la courbe considérée, en quatre points quelconques A, B, C, D, ont le même rapport anharmonique que les plans menés par cette droite et ces quatre mêmes points A, B, C, D.

J'ai aussi introduit la notion des surfaces dont les lignes asymptotiques d'une même série ont un même axe anharmonique. Un peu avant la publication de mon travail, M. Sophus Lie avait publié une Note du plus haut intérêt sur les surfaces dont les lignes asymptotiques d'une série appartiennent, par leurs tangentes, à un complexe linéaire. Il me suffira de quelques lignes pour montrer comment les courbes à axe anharmonique et les surfaces dont elles sont les asymptotiques se rattachent aux résultats de M. Sophus Lie. Tel est l'objet de cette courte Note.

Je remarque d'abord ceci. Soient M un point d'une courbe Γ ayant un axe anharmonique Ξ, P le point où le plan osculateur en M coupe cet axe, et appelons α le plan qui contient l'axe Ξ et le point M. Par hypothèse, le couple (α, P), formé de ce plan et du point P, constitue un élément d'une correspondance homographique déterminée, que l'on suppose exister sur la droite Ξ, entre les points de cette droite et les plans qui la contiennent.

Or une congruence linéaire singulière, c'est-à-dire dont les deux directrices coïncident avec une droite unique Ξ, est caractérisée, définie, de la façon suivante :

Pour qu'une droite G fasse partie d'une telle congruence, il faut :

1° Qu'elle coupe la directrice double Ξ;

2° Que, si l'on appelle P le point de rencontre et α le plan commun à ces deux droites, le système point et plan (P, α) constitue un élément d'une correspondance homographique déterminée existant entre les points de la droite Ξ et les plans menés par cette droite.

On voit donc qu'une congruence singulière est définie :

1° Par sa directrice Ξ;

2° Par une correspondance homographique H existant entre les points de Ξ et les plans menés par cette droite.

Ceci posé, reprenons les notations précédentes.

Sur l'axe anharmonique Ξ, nous avons une homographie H de l'espèce ci-dessus mentionnée, à savoir, celle qui lie tout plan α (mené par Ξ et par un point M de la courbe Γ) au point P (trace sur Ξ du plan osculateur au point M). Une congruence linéaire singulière (Ξ, H) est donc définie, comme il a été dit, par cet axe Ξ et cette homographie H existant sur cet axe. Il est clair que la droite MP appartient à cette congruence, et la surface réglée Σ engendrée par MP est contenue dès lors dans cette congruence. La courbe Γ est évidemment contenue par la surface Σ; de plus, le plan tangent en M à la surface Σ n'est autre que le plan mené par MP et la tangente à la courbe Γ, c'est-à-dire le plan osculateur de la courbe Γ. Donc :

La courbe Γ est une ligne asymptotique sur la surface Σ.

J'invoquerai maintenant la proposition suivante qui est bien connue :

Soient Ξ et Ξ' deux droites et Σ une surface réglée dont toutes les droites rencontrent Ξ et Ξ', c'est-à-dire dont toutes les droites font partie de la congruence linéaire qui admet Ξ, Ξ' pour directrices, *les lignes asymptotiques non rectilignes de la surface Σ appartiennent, par leurs tangentes, chacune à un complexe linéaire dans lequel les droites Ξ et Ξ' sont deux droites conjuguées,* et qui, par conséquent, contient la congruence (Ξ, Ξ').

Lorsque les droites Ξ et Ξ' coïncident en une seule Ξ, tous les complexes linéaires, qui contiennent la congruence linéaire singulière (Ξ, H) correspondante, contiennent la droite Ξ, et le théorème précédent prend alors l'énoncé que voici :

Lorsque les droites d'une surface réglée Σ font partie d'une con-

gruence linéaire singulière, les lignes asymptotiques non rectilignes de Σ *appartiennent, par leurs tangentes, chacune à l'un des complexes linéaires contenant la congruence, et la directrice double* Ξ *est une droite commune à tous ces complexes linéaires.*

En nous reportant alors à la proposition établie plus haut relativement à la courbe Γ, nous voyons que, puisque Γ est une ligne asymptotique sur la surface Σ et puisque la surface Σ appartient à une congruence singulière d'axe Ξ, les tangentes de la courbe Γ font partie d'un complexe linéaire qui contient aussi l'axe Ξ.

Lors donc qu'une courbe Γ *admettra un axe anharmonique* Ξ, *ses tangentes feront partie d'un complexe linéaire, qui contiendra aussi l'axe* Ξ.

Réciproquement, *soit une courbe* Γ *dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire, et soit* Ξ *une droite de ce complexe; je dis que* Ξ *est un axe anharmonique de la courbe* Γ.

En effet, lorsque les tangentes d'une courbe Γ font partie d'un complexe linéaire, le plan focal d'un point M de la courbe est précisément le plan osculateur en ce point. Cela étant, appelons P le point où le plan osculateur en M vient couper la droite Ξ; la droite MP fait partie du complexe, puisqu'elle est dans le plan osculateur et qu'elle passe par le point M, foyer de ce plan. Maintenant, appelons α le plan mené par Ξ et par la droite PM (ou par le point M); nous connaissons deux droites du complexe situées dans ce plan, Ξ et PM, donc leur point commun P est le foyer du plan α; il en résulte que le point P et le plan α constituent un élément (P, α) de l'homographie H, qui existe sur la droite Ξ entre les points de cette droite et les plans focaux de ces points, plans qui passent par la droite, puisqu'elle appartient au complexe. Cela démontre donc bien que Ξ est un axe anharmonique de la courbe Γ.

Le problème des courbes à axe anharmonique est donc entièrement résolu [1] et rendu identique à celui de la détermination des courbes qui font partie, par leurs tangentes, d'un complexe linéaire.

On voit en même temps que la recherche des surfaces, dont les lignes asymptotiques d'une série appartiennent, par leurs tangentes, chacune à un

---

[1] Dans mon travail précité, j'ai donné l'équation finie de ces courbes, mais sans chercher à en donner une interprétation géométrique.

complexe linéaire, problème traité par M. Lie, comprend celui de la recherche des surfaces dont les lignes asymptotiques d'une série ont un même axe anharmonique.

Il suffit de supposer que, dans le problème traité par M. Lie, les complexes linéaires, dont font partie les tangentes aux lignes asymptotiques, aient une droite commune qui sera, dès lors, l'axe anharmonique commun à toutes ces courbes.

Comme une série de complexes linéaires peuvent avoir en commun une, deux, trois ou même quatre droites, on en conclut qu'il y a des surfaces dont les lignes asymptotiques d'une série ont en commun un, deux, trois ou quatre axes anharmoniques.

Dans le cas, où il existe trois axes anharmoniques, il en existera une infinité d'autres formant un hyperboloïde. Dans le cas où il y en aura quatre, non situés sur une même surface du second degré, il y en aura une double infinité d'autres formant une congruence linéaire. Mais, dans ce cas, la surface sera engendrée par des droites de cette congruence, et nous retrouvons ainsi la proposition qui a été énoncée à la page (E.10).