SUR L'EMPLOI

DE CERTAINES FORMES QUADRATIQUES EN GÉOMÉTRIE,

PAR M. G. KOENIGS.

1. Le produit de la plus courte distance de deux droites par le sinus de leur angle représente ce que l'on appelle *leur moment.* Si les droites sont infiniment voisines et font partie d'un système p fois indéterminé ($p = 1, 2, 3$ ou 4), le moment est égal à une forme quadratique des p différentielles des variables indépendantes. Par exemple, s'il s'agit de toutes les droites de l'espace, et que l'on ait adopté les coordonnées a, b, p, q de la droite, telles qu'en coordonnées ponctuelles rectangulaires la droite soit représentée par les équations

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q,$$

le moment élémentaire aura pour expression

$$\frac{da\,dq - db\,dp}{1 + a^2 + b^2}.$$

Dans le cas des droites d'un complexe, a, b, p, q deviennent des fonctions de trois paramètres u_1, u_2, u_3 et le moment élémentaire est alors une certaine forme quadratique *ternaire* des différentielles du_1, du_2, du_3. On aura

$$M(du) = A_{11}\,du_1^2 + 2A_{12}\,du_1\,du_2 + \ldots.$$

Le discriminant de cette forme quadratique joue un rôle important, désignons-le par Δ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Les droites singulières du complexe sont celles pour lesquelles a lieu l'équation

$$\Delta = 0.$$

M. Klein (¹) a montré que la condition nécessaire et suffisante pour que les droites d'un complexe soient toutes tangentes à une même surface, c'est que *toutes les droites* de ce complexe aient les caractères de droites singulières. Il suit de là qu'il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$\Delta = 0$$

pour que le complexe soit formé de tangentes à une surface.

Avant M. Klein, M. Cayley (²) avait rencontré cette condition dans l'étude du système des sécantes d'une courbe; mais c'est M. Klein qui a, le premier, reconnu toute la généralité de cette condition.

Dans deux Notes présentées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* en 1885, je me suis occupé de cette même question, en me proposant surtout de rechercher ce qu'il faut ajouter à la condition Cayley-Klein pour que le complexe soit formé des sécantes d'une courbe. L'objet de ce travail est de donner avec plus de développements que je ne pouvais le faire aux *Comptes rendus* la solution de ce problème, et d'indiquer en même temps le parti que l'on peut tirer de ces résultats pour quelques recherches générales (³).

I. — *Les formes quadratiques ternaires de discriminant nul.*

2. D'éminents géomètres se sont occupés des formes quadratiques, mais tous inscrivent en tête de leurs recherches que le discriminant de la forme n'est pas identiquement nul. Il y a tout lieu de croire cependant que ce cas est loin d'être dépourvu d'intérêt, et j'espère en fournir un exemple dans le cas le plus simple.

Si le complexe de droites que l'on considère est formé des tangentes à une surface, Δ est nul, et réciproquement. J'admets ici ce théorème fré-

(¹) *Mathematische Annalen*, t. V. — *Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen.*

(²) *Quarterly Journal*, t. III.

(³) On trouvera encore une démonstration du théorème de M. Klein dans mon Mémoire : *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2ᵉ série, t. XI).

quemment démontré et pour lequel j'ai déjà indiqué plusieurs citations. Le moment élémentaire est donc une forme quadratique ternaire de discriminant nul. Pour éclaircir la question, je crois donc utile d'esquisser rapidement un essai de théorie de ces formes, pour indiquer ensuite la place qu'occupe parmi elles le moment élémentaire d'un complexe singulier.

3. Dire que le discriminant de $M(du)$ est nul, c'est dire que cette forme est le produit de deux facteurs linéaires

$$M(du) = \omega\omega',$$

où l'on a

$$\omega = U_1\, du_1 + U_2\, du_2 + U_3\, du_3,$$
$$\omega' = U'_1\, du_1 + U'_2\, du_2 + U'_3\, du_3.$$

Je ferai successivement les deux hypothèses suivantes :

1° Les formes ω et ω' admettent toutes deux un facteur intégrant;

2° L'une, au moins, de ces deux formes n'admet pas de facteur d'intégrabilité.

Dans le *premier cas,* on peut poser, en appelant λ, μ, ξ, η quatre fonctions convenables de u_1, u_2, u_3,

$$\omega = \lambda\, d\xi,$$
$$\omega' = \mu\, d\eta;$$

d'où

$$M(du) = \lambda\mu\, d\xi\, d\eta.$$

Si η est une simple fonction de ξ, on a donc

$$(\alpha) \qquad M(du) = g\, d\xi^2,$$

où g et ξ sont deux fonctions convenables de u_1, u_2, u_3.

Si η ne se réduit pas à une simple fonction de ξ, on a

$$(\beta) \qquad M(du) = g\, d\xi\, d\eta,$$

où g, ξ, η sont trois fonctions convenables des u.

Cette première hypothèse conduit donc, par un changement de variables indépendantes, à deux types canoniques irréductibles et distincts (α) et (β).

4. Le *second cas* exige une discussion plus approfondie.

Puisque ω et ω' ne sont pas tous les deux intégrables par multiplication, supposons, pour fixer les idées, que ω' ne le soit pas, et formons l'expression

$$\omega + \rho\omega'.$$

Il est toujours possible de déterminer ρ, de sorte que cette expression admette un facteur intégrant, c'est-à-dire de telle sorte qu'il existe deux fonctions convenables λ et ξ donnant lieu à l'identité

$$\omega + \rho\omega' = \lambda\, d\xi. \tag{1}$$

La condition bien connue d'intégrabilité nous fournit immédiatement l'équation en ρ

$$V_1 \frac{\partial\rho}{\partial u_1} + V_2 \frac{\partial\rho}{\partial u_2} + V_3 \frac{\partial\rho}{\partial u_3} = \Theta(\omega) + 2\Theta(\omega, \omega')\rho + \Theta(\omega')\rho^2, \tag{2}$$

en faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned} V_1 &= U_3 U'_2 - U_2 U'_3, \\ V_2 &= U_1 U_3 - U_3 U'_1, \\ V_3 &= U_2 U'_1 - U_1 U'_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta(\omega) &= \left(\frac{\partial U_1}{\partial u_2} - \frac{\partial U_2}{\partial u_1}\right) U_3 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial u_3} - \frac{\partial U_3}{\partial u_2}\right) U_1 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial u_1} - \frac{\partial U_1}{\partial u_3}\right) U_2, \\ 2\Theta(\omega, \omega') &= \left(\frac{\partial U_1}{\partial u_2} - \frac{\partial U_2}{\partial u_1}\right) U'_3 + \left(\frac{\partial U'_1}{\partial u_2} - \frac{\partial U'_2}{\partial u_1}\right) U_3 + \ldots, \\ \Theta(\omega') &= \left(\frac{\partial U'_1}{\partial u_2} - \frac{\partial U'_2}{\partial u_1}\right) U'_3 + \ldots. \end{aligned}$$

On vérifie aussi que ξ doit satisfaire l'équation

$$V_1 \frac{\partial\xi}{\partial u_1} + V_2 \frac{\partial\xi}{\partial u_2} + V_3 \frac{\partial\xi}{\partial u_3} = 0, \tag{3}$$

qui n'est autre que l'équation (2) privée de second membre.

Cela posé, soient ρ et σ deux solutions différentes de l'équation (2); on aura les deux identités

$$\begin{aligned} \omega + \rho\omega' &= \lambda\, d\xi, \\ \omega + \sigma\omega' &= \mu\, d\eta, \end{aligned}$$

où λ, μ, ξ, η sont quatre fonctions convenables.

J'ajoute que ξ *et* η *ne peuvent être fonctions l'une de l'autre, et que le quotient* $\frac{\lambda}{\mu}$ *ne peut être une simple fonction de* ξ *et* η.

En effet, des deux identités ci-dessus on déduit

$$(\rho-\sigma)\omega' = \lambda\, d\xi - \mu\, d\eta;$$

si l'on avait $\eta = f(\xi)$, on aurait

$$(\rho-\sigma)\omega' = [\lambda - \mu f'(\xi)]\, d\xi,$$

et, comme $(\rho-\sigma)$ n'est pas nul, ω' admettrait un facteur intégrant, ce qui est contre l'hypothèse.

Supposons de même que l'on eût

$$\frac{\lambda}{\mu} = \varphi(\xi, \eta),$$

on en déduirait

$$(\rho-\sigma)\omega' = \mu[\varphi(\xi,\eta)\, d\xi - d\eta];$$

et, comme l'expression $\varphi(\xi,\eta)\, d\xi - d\eta$ admet toujours un facteur intégrant, il en serait de même pour ω'.

Ainsi, *pourvu que ρ et σ soient des solutions distinctes de l'équation* (2), *les trois fonctions suivantes de u_1, u_2, u_3, à savoir : ξ, η, $\frac{\lambda}{\mu}$, sont indépendantes entre elles.*

Nous poserons

$$\zeta = \frac{\lambda}{\mu},$$

et nous prendrons pour nouvelles variables indépendantes ξ, η, ζ.

Des relations

$$\omega + \rho\omega' = \mu\zeta\, d\xi,$$
$$\omega + \sigma\omega' = \mu\, d\eta$$

on tirera ω et ω' :

$$\omega = \frac{\mu}{\rho-\sigma}(\rho\, d\eta - \sigma\zeta\, d\xi),$$

$$\omega' = \frac{\mu}{\rho-\sigma}(\zeta\, d\xi - d\eta);$$

d'où

$$\mathrm{M}(du) = \omega\omega' = \left(\frac{\mu}{\rho-\sigma}\right)^2(\rho\, d\eta - \sigma\zeta\, d\xi)(\zeta\, d\xi - d\eta).$$

5. Ici encore je distinguerai deux cas, selon que ω est intégrable par multiplication ou non.

1° Si ω admet un facteur intégrant, la quantité $\Theta(\omega)$ est nulle, et l'équation (2) admet la solution $\rho = 0$. En adoptant alors cette solution, on obtient le type réduit

$$(\gamma) \qquad \mathrm{M}(du) = g(\zeta\, d\xi - d\eta)\, d\xi,$$

où g est une fonction convenable des variables indépendantes ξ, η, ζ.

2° Si ω n'admet pas de facteur intégrant, ρ ne pourra jamais être nul, et, en posant

$$\tau = \frac{\sigma\zeta}{\rho},$$

on aura le type réduit

$$(\delta) \qquad \mathrm{M}(du) = g(\tau\, d\xi - d\eta)(\zeta\, d\xi - d\eta),$$

où g et τ sont deux fonctions convenables des variables indépendantes ξ, η, ζ; de plus, τ dépend effectivement de ξ et ne se réduit pas à une simple fonction de ξ, η. Au fond, il importe peu que l'on prenne ξ, η, ζ ou ξ, η, τ pour variables indépendantes; nous verrons plus loin que ce qui caractérise surtout le type général (δ), c'est la forme de la relation qui lie ξ, η, ζ, τ

$$\mathrm{F}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0,$$

relation qui contient *nécessairement* ζ et τ.

6. Avant d'aller plus loin, je m'arrêterai un instant sur l'équation (2) dont la forme rappelle un type bien connu d'équations aux dérivées ordinaires du premier ordre.

Considérons d'une façon générale l'équation aux dérivées partielles

$$(e) \qquad \mathrm{V}_1 \frac{\partial\rho}{\partial u_1} + \mathrm{V}_2 \frac{\partial\rho}{\partial u_2} + \ldots + \mathrm{V}_n \frac{\partial\rho}{\partial u_n} = \mathrm{A}\rho^2 + 2\mathrm{B}\rho + \mathrm{C},$$

où $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots, \mathrm{V}_n$, A, B, C sont des fonctions données de n variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Je dis que *le rapport anharmonique de quatre solutions de l'équation* (e) *est une solution de l'équation sans second membre*

$$(e') \qquad \mathrm{V}_1 \frac{\partial\xi}{\partial u_1} + \ldots + \mathrm{V}_n \frac{\partial\xi}{\partial u_n} = 0.$$

En effet, on a, en appelant λ, μ, ν, ρ quatre fonctions distinctes quelconques,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial u_i} & \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \frac{\partial\mu}{\partial u_i} & \mu^2 & \mu & 1 \\ \frac{\partial\nu}{\partial u_i} & \nu^2 & \nu & 1 \\ \frac{\partial\rho}{\partial u_i} & \rho^2 & \rho & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-\rho)^2(\nu-\mu)^2 \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\rho}\,\frac{\nu-\rho}{\nu-\mu}\right).$$

Posons, pour abréger,

$$V(\rho) = V_1 \frac{\partial\rho}{\partial u_1} + \ldots + V_n \frac{\partial\rho}{\partial u_n};$$

on trouve, après multiplication par V_i et sommation,

$$\begin{vmatrix} V(\lambda) & \lambda^2 & \lambda & 1 \\ V(\mu) & \mu^2 & \mu & 1 \\ V(\nu) & \nu^2 & \nu & 1 \\ V(\rho) & \rho^2 & \rho & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-\rho)^2(\nu-\mu)^2\, V\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\rho}\,\frac{\nu-\rho}{\nu-\mu}\right).$$

Maintenant, si λ, μ, ν, ρ sont quatre solutions de l'équation (e), on a

$$\begin{gathered} V(\lambda) = A\lambda^2 + 2B\lambda + C, \\ V(\mu) = A\mu^2 + 2B\mu + C, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{gathered}$$

le déterminant est nul et, par suite,

$$0 = V\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\rho}\,\frac{\nu-\rho}{\nu-\mu}\right)(\lambda-\rho)^2(\nu-\mu)^2,$$

ce qui démontre le théorème.

Si, en particulier, on suppose $n = 1$, on a l'équation de Riccati ordinaire

$$\frac{d\rho}{du} = A\rho^2 + 2B\rho + C;$$

l'équation sans second membre est

$$\frac{d\rho}{du} = 0,$$

et l'on retrouve ce théorème bien connu, que le rapport anharmonique de quatre solutions de l'équation de Riccati est une solution de l'équation $\frac{d\rho}{du} = 0$, c'est-à-dire une constante.

On sait l'usage que l'on fait de ce théorème pour l'intégration de l'équation de Riccati. Une utilité toute pareille se retrouve dans le cas plus général que j'ai considéré.

Soient, en effet, λ, μ, ν trois solutions de l'équation (e) et P la solution générale; la fonction

$$\frac{P-\lambda}{P-\mu}\,\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda} = \Xi$$

sera la solution générale de l'équation sans second membre. On aura donc P sous la forme

$$P = \frac{a\Xi + b}{c\Xi + e},$$

où Ξ est la solution générale de l'équation sans second membre. Or, si ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{n-1} sont $(n-1)$ solutions particulières indépendantes de l'équation (e'), on aura

$$\Xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}),$$

où f représente une fonction arbitraire; ainsi, finalement P sera de la forme

$$P = \frac{af(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) + b}{cf(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) + e},$$

où a, b, c, e sont quatre fonctions déterminées, et f une fonction arbitraire de $(n-1)$ fonctions connues. On connaît ainsi la forme sous laquelle la fonction arbitraire entre dans l'expression de P.

Remarquons que, si, outre les trois solutions λ, μ, ν, on en connaissait encore $(n-1)$, ρ_1, ρ_2, ..., ρ_{n-1}, fournissant $(n-1)$ fonctions ξ indépendantes

$$\xi_i = \frac{\rho_i - \lambda}{\rho_i - \mu}\,\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda},$$

on pourrait écrire immédiatement l'intégrale.

L'intégrale générale de l'équation (e) se déduit donc de $(n+2)$ solutions particulières, convenables de cette équation, ou bien de trois solutions particulières et de $(n-1)$ solutions particulières indépendantes de l'équation sans second membre.

Mais notre objet n'est pas d'insister sur cette question qui donne lieu encore à plusieurs extensions des propriétés de l'équation de Riccati, et je reviens au sujet qui nous occupe, la classification des formes quadratiques ternaires de discriminant nul.

7. J'ai déjà dit que la forme de la relation qui lie ξ, η, ζ, τ joue un rôle essentiel dans cette classification.

Pour s'en rendre compte, il suffit d'étudier la transformation qui permet de passer d'un type réduit à une autre expression du même type.

Supposons que, par un choix convenable de ξ, η, ζ, τ, on ait trouvé d'abord

$$\mathrm{M}(du) = g(\tau\, d\xi - d\eta)(\zeta\, d\xi - d\eta),$$

puis, d'une autre façon,

$$\mathrm{M}(du) = g'(\tau'\, d\xi' - d\eta')(\zeta'\, d\xi' - d\eta').$$

D'abord, comme ξ, η, ξ', η' vérifient, toutes les quatre, l'équation

$$\mathrm{V}_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \mathrm{V}_2 \frac{\partial \xi}{\partial u_2} + \mathrm{V}_3 \frac{\partial \xi}{\partial u_3} = 0,$$

et que ξ, η sont indépendantes, aussi bien que ξ' et η', il faut que ξ' et η' soient de simples fonctions de ξ, η

$$(f) \qquad \begin{cases} \xi' = \varphi(\xi, \eta), \\ \eta' = \psi(\xi, \eta), \end{cases}$$

et, de plus, le déterminant fonctionnel

$$\frac{\mathrm{D}(\varphi, \psi)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)}$$

doit être différent de zéro.

Reste à savoir comment ζ', τ' dépendent de ξ, η, ζ, τ et, enfin, comment se trouve transformée la relation existant entre ξ, η, ζ, τ.

On a identiquement, en remplaçant $d\xi'$, $d\eta'$ par leur expression en fonction de $d\xi$ et $d\eta$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(du) &= g'\left[\left(\tau'\frac{\partial\xi'}{\partial\xi}-\frac{\partial\eta'}{\partial\xi}\right)d\xi+\left(\tau'\frac{\partial\xi'}{\partial\eta}-\frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right)d\eta\right]\\
&\quad\times\left[\left(\zeta'\frac{\partial\xi'}{\partial\xi}-\frac{\partial\eta'}{\partial\xi}\right)d\xi+\left(\zeta'\frac{\partial\xi'}{\partial\eta}-\frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right)d\eta\right]\\
&= g'\left(\tau'\frac{\partial\xi'}{\partial\eta}-\frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right)\left(\zeta'\frac{\partial\xi'}{\partial\eta}-\frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right)\\
&\quad\times\left(\frac{\tau'\dfrac{\partial\xi'}{\partial\xi}-\dfrac{\partial\eta'}{\partial\xi}}{\dfrac{\partial\eta'}{\partial\eta}-\tau'\dfrac{\partial\xi'}{\partial\eta}}\,d\xi-d\eta\right)\left(\frac{\zeta'\dfrac{\partial\xi'}{\partial\xi}-\dfrac{\partial\eta'}{\partial\xi}}{\dfrac{\partial\eta'}{\partial\eta}-\xi'\dfrac{\partial\xi'}{\partial\eta}}\,d\xi-d\eta\right).
\end{aligned}$$

En comparant avec la première forme, on a donc

$$(f_0')\qquad \zeta=\frac{\zeta'\dfrac{\partial\xi'}{\partial\xi}-\dfrac{\partial\eta'}{\partial\xi}}{\dfrac{\partial\eta'}{\partial\eta}-\zeta'\dfrac{\partial\xi'}{\partial\eta}},\qquad \tau=\frac{\tau'\dfrac{\partial\xi'}{\partial\xi}-\dfrac{\partial\eta'}{\partial\xi}}{\dfrac{\partial\eta'}{\partial\eta}-\tau'\dfrac{\partial\xi'}{\partial\eta}}$$

ou, autrement,

$$(f')\qquad \zeta'=\frac{\dfrac{\partial\eta'}{\partial\xi}+\zeta\dfrac{\partial\eta'}{\partial\eta}}{\dfrac{\partial\xi'}{\partial\xi}+\zeta\dfrac{\partial\xi'}{\partial\eta}},\qquad \tau'=\frac{\dfrac{\partial\eta'}{\partial\xi}+\zeta\dfrac{\partial\eta'}{\partial\eta}}{\dfrac{\partial\xi'}{\partial\xi}+\zeta\dfrac{\partial\xi'}{\partial\eta}}.$$

On doit remarquer, d'autre part, que l'on a aussi identiquement, en adoptant le signe δ des variations,

$$\frac{\delta\eta'}{\delta\xi'}=\frac{\dfrac{\partial\eta'}{\partial\xi}+\dfrac{\partial\eta'}{\partial\eta}\dfrac{\delta\eta}{\delta\xi}}{\dfrac{\partial\xi'}{\partial\xi}+\dfrac{\partial\eta'}{\partial\eta}\dfrac{\delta\eta}{\delta\xi}}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

La quantité ζ' se déduit de ζ, et la quantité τ' se déduit de τ par la même formule qui fournit $\frac{\delta\eta'}{\delta\xi'}$ en fonction de $\frac{\delta\eta}{\delta\xi}$.

On peut dire que les trois quantités ζ, τ et $\frac{\delta\eta}{\delta\xi}$ sont *cogrédientes,* car elles sont transformées par la même substitution

$$u' = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi} + u\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi} + u\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}};$$

cette substitution est entièrement définie dès que l'on connaît l'expression de ξ', η' à l'aide de ξ, η.

8. Reportons-nous maintenant à la relation qui lie ξ, η, ζ, τ. On aperçoit tout de suite que, si cette relation est algébrique et du degré n, par exemple, par rapport à ζ et τ pris séparément, le passage d'un type normal à un autre n'altérera pas ce caractère. En effet, les formules (f') sont linéaires en ζ et τ. Mais il y a plus, elles sont *les mêmes* pour ces deux quantités, et, par conséquent, si la relation qui lie ξ, η, ζ, τ est symétrique en ζ et τ, ce caractère subsistera encore à travers le passage d'un type normal à l'autre.

Un cas simple et important, c'est celui où la relation affecte la forme d'une homographie involutive et est, par conséquent,

$$L\tau\zeta + M(\zeta+\tau) + N = 0.$$

Je me suis permis, dans ma Note à l'Académie, d'attribuer à ces formes spéciales le nom de formes *linéo-involutives*.

9. Une forme sera donc linéo-involutive lorsqu'on pourra la ramener au type

$$M(du) = g(\tau\, d\xi - d\eta)(\zeta\, d\xi - d\eta),$$

où ξ, η, ζ, τ sont liés par l'équation

$$\text{(F)} \qquad L\tau\zeta + M(\zeta+\tau) + N = 0,$$

L, M, N étant trois fonctions quelconques de ξ, η.

Je vais montrer tout d'abord que les formes *linéo-involutives* sont susceptibles d'une réduction à un type plus simple. Quel que soit le système des variables normales adopté, le type de l'équation (F) subsiste toujours, mais *on peut toujours s'arranger de sorte que* L *et* N *soient nuls.*

Posons, en effet,

$$\xi' = \varphi(\xi, \eta), \qquad \eta' = \psi(\xi, \eta);$$

l'équation (F) devient, en appliquant les formules f_0'

$$L'\tau'\zeta' + M'(\zeta' + \tau') + N' = 0,$$

où l'on a

$$L' = L\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 - 2M\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + N\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2,$$
$$-M' = L\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} - M\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) + N\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta},$$
$$N' = L\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2 - 2M\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + N\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2.$$

Il est impossible d'avoir à la fois

$$L' = 0, \qquad M' = 0, \qquad N' = 0,$$

car le déterminant des trois équations linéaires homogènes en L, M, N que l'on obtiendrait ainsi est le carré du déterminant fonctionnel

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\xi, \eta)},$$

qui est essentiellement différent de zéro. Mais on peut déterminer φ et ψ, de sorte que l'on ait

$$L' = 0, \qquad M' = 0.$$

En effet, l'équation

$$L\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2 - 2M\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\eta} + N\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)^2 = 0$$

se décompose dans les deux équations

$$L\frac{\partial\theta}{\partial\xi} - (M + \sqrt{M^2 - LN})\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = 0,$$
$$L\frac{\partial\theta}{\partial\xi} - (M - \sqrt{M^2 - LN})\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = 0;$$

chacune d'elles admet une intégrale; soient φ et ψ les deux intégrales que l'on obtient ainsi, il suffira de prendre

$$\xi' = \varphi, \qquad \eta' = \psi.$$

Les fonctions φ et ψ sont indépendantes entre elles tant que l'expression

$$M^2 - LN$$

n'est pas identiquement nulle. Mais, dans ce cas, l'équation (F) se décompose en deux facteurs, car on a identiquement

$$(L\tau + M)(L\zeta + M) = L[L\tau\zeta + M(\zeta + \tau) + N] \qquad \text{si} \qquad M^2 = LN.$$

Ce cas limite, qui donne $\tau =$ fonction de ξ et de η, revient au cas déjà étudié, où l'un des facteurs de la forme est intégrable.

En excluant donc ce cas qui est relatif à un autre type réduit, nous voyons que l'on peut toujours faire en sorte, *et d'une seule façon*, que L et N soient nuls, tandis que M reste essentiellement différent de zéro. La relation (F) prend alors la forme très simple

$$\zeta + \tau = 0,$$

en sorte que le type réduit des formes *linéo-involutives* est définitivement le suivant :

$$(\varepsilon) \qquad M(du) = g(\zeta^2\, d\xi^2 - d\eta^2),$$

où g est une fonction quelconque des variables indépendantes ξ, η, ζ.

10. Les formes *linéo-involutives* vont se représenter dans la suite. On vient de voir que certains cas limites de ces formes étaient rangés dans un type réduit précédemment défini. Il convient de ne pas séparer trop absolument ces cas limites du cas général. Et nous admettrons trois types de formes *linéo-involutives*, ainsi définis :

Premier type (type général),

$$M(du) = g(\zeta^2\, d\xi^2 - d\eta^2);$$

Deuxième type (type limite),

$$M(du) = g(\zeta\, d\xi - d\eta)\, d\xi;$$

Troisième type (autre type limite),

$$M(du) = g\, d\xi\, d\eta.$$

Le deuxième type n'est autre que le type général des formes ayant un facteur intégrable; le troisième, le type général des formes dont les deux facteurs sont intégrables.

On remarquera que, dans cette classification, la forme du multiplicateur g est indifférente, et que ce multiplicateur n'intervient aucunement.

II. — *Étude du moment élémentaire d'un complexe singulier.*

11. Supposons qu'un complexe soit formé des tangentes d'une surface, et cherchons l'expression du moment élémentaire relatif à ce complexe.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface, exprimées en fonction de deux paramètres ξ, η, et posons

$$x_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi}, \qquad x_2 = \frac{\partial x}{\partial \eta}, \qquad x_{11} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}, \qquad x_{12} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi\, \partial \eta}, \qquad x_{22} = \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2},$$

et de même pour y, z. Une tangente quelconque à la surface pourra être représentée par les équations

$$\frac{X - x}{x_1 + \lambda x_2} = \frac{Y - y}{y_1 + \lambda y_2} = \frac{Z - z}{z_1 + \lambda z_2}.$$

Les variables (ξ, η) fixent le point où la tangente touche la surface, et λ détermine son orientation dans le plan tangent.

Si l'on adopte les équations d'une droite sous la forme

$$\begin{aligned} cy - bz &= p, \\ az - cx &= q, \\ bx - ay &= r, \end{aligned}$$

le moment élémentaire affecte la forme

$$M = \frac{da\, dp + db\, dq + dc\, dr}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

On a ici

$$\begin{aligned} a &= x_1 + \lambda x_2, \\ b &= y_1 + \lambda y_2, \\ c &= z_1 + \lambda z_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= cy - bz, \\ q &= az - cx, \\ r &= bx - ay; \end{aligned}$$

d'où, en posant

$$\begin{vmatrix} x_{11} & y_{11} & z_{11} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \mathrm{D}_{11},$$

$$\begin{vmatrix} x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \mathrm{D}_{12},$$

$$\begin{vmatrix} x_{22} & y_{22} & z_{22} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \mathrm{D}_{22},$$

$$\mathrm{M} = -\frac{[(\mathrm{D}_{11} + \lambda \mathrm{D}_{12})\, d\xi + (\mathrm{D}_{12} + \lambda \mathrm{D}_{22})\, d\eta](\lambda\, d\xi - d\eta)}{a^2 + b^2 + c^2};$$

on peut donc prendre

$$\zeta = \lambda, \qquad \tau = -\frac{\mathrm{D}_{11} + \lambda \mathrm{D}_{12}}{\mathrm{D}_{12} + \lambda \mathrm{D}_{22}},$$

d'où résultera

$$\mathrm{M} = g(\tau\, d\xi - d\eta)(\zeta\, d\xi - d\eta),$$

avec la relation

$$\mathrm{D}_{22}\zeta\tau + \mathrm{D}_{12}(\zeta + \tau) + \mathrm{D}_{11} = 0.$$

Le moment élémentaire d'un complexe singulier appartient donc au type des formes linéo-involutives.

Supposons, en particulier, que l'on ait choisi ξ, η, de façon à avoir

$$\mathrm{D}_{11} = 0, \qquad \mathrm{D}_{22} = 0;$$

alors les courbes $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ sont les lignes asymptotiques. Avec ce choix de variables, le moment M prend la forme réduite

$$\mathrm{M} = g(\zeta^2\, d\xi^2 - d\eta^2);$$

car on a, dans ce cas,

$$\tau + \zeta = 0.$$

Donc :

En général, le moment élémentaire d'un complexe singulier est une forme linéo-involutive, et la réduction au type normal

$$g(\zeta^2\, d\xi^2 - d\eta^2)$$

coïncide avec la détermination des lignes asymptotiques de la surface enveloppe des droites du complexe.

Les tangentes à ces lignes sont représentées dans le complexe par les équations

$$\eta = \text{const.}, \qquad \zeta = 0$$

et

$$\xi = \text{const.}, \qquad \frac{1}{\zeta} = 0,$$

respectivement pour chacune des deux séries.

12. Ce résultat a une explication géométrique très simple. Nous avons trouvé, en effet,

$$M = g(\zeta\, d\xi + d\eta)(\zeta\, d\xi - d\eta).$$

Or, si l'on veut engendrer une développable dans le complexe, il faut établir entre ξ, η, ζ deux équations, en vertu desquelles M soit nul. Cela peut avoir lieu de deux manières, selon que $\zeta\, d\xi - d\eta$ est nul ou que c'est, au contraire, $\zeta\, d\xi + d\eta$ qui s'évanouit.

Supposons d'abord que l'on ait

$$\zeta\, d\xi - d\eta = 0;$$

cette équation exprime que le point de contact se déplace dans la direction de la tangente elle-même, et l'on a, par conséquent, une développable dont l'arête de rebroussement est tracée sur la surface.

Supposons, au contraire, que l'autre facteur soit nul,

$$\zeta\, d\xi + d\eta = 0;$$

si l'on a égard à ce que $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ sont les lignes asymptotiques, cette équation exprime que le point de contact se déplace suivant la direction conjuguée de la tangente considérée. On a donc, dans ce cas, une développable circonscrite à la surface.

Ainsi, dans le moment élémentaire d'un complexe singulier, chacun des facteurs linéaires de la forme a sa signification propre. Il y a deux sortes de développables formées des tangentes de la surface, et chacun de ces facteurs s'annule pour les développables de l'une de ces deux séries.

Mais il est des développables qui font partie à la fois de ces deux séries de développables : ce sont les développables dont les arêtes sont les lignes asymptotiques de la surface. Suivant ces développables, les deux facteurs de la forme doivent s'évanouir à la fois, et c'est ce que l'on réalise, soit en prenant

$$d\eta = 0, \qquad \zeta = 0;$$

soit en prenant

$$d\xi = 0, \qquad \frac{1}{\zeta} = 0.$$

La solution $d\xi = 0$, $d\eta = 0$ fournirait seulement le système des tangentes à la surface en l'un de ses points.

13. Tout ce qui précède est légitime tant que les lignes asymptotiques de la surface enveloppe sont distinctes; si elles coïncident, les résultats précédents sont notablement modifiés. La surface enveloppe est alors développable. Supposons que $\xi =$ const. représente les génératrices rectilignes; alors on aura, comme on sait,

$$D_{12} = 0, \qquad D_{22} = 0,$$

et le moment élémentaire prendra la forme

$$M = g(\zeta\, d\xi - d\eta)\, d\xi.$$

On reconnaît là le second type des formes linéo-involutives.

L'équation $\xi =$ const. représente toutes les droites situées dans l'un des plans tangents de la développable. L'équation

$$\zeta\, d\xi - d\eta = 0$$

représente, au contraire, le système des développables dont les arêtes sont des courbes tracées sur la surface. Les développables du second système, c'est-à-dire circonscrites à la surface, n'existent plus dans ce cas, ou plutôt elles dégénèrent en des systèmes plans de lignes droites.

14. Une singularité ne peut se présenter dans la géométrie de la ligne droite, sans que la singularité réciproque se montre aussitôt. Nous allons, en effet, trouver des systèmes réglés réciproques des précédents, et offrant les particularités qui correspondent dualistiquement à celles que nous venons de rencontrer.

Supposons qu'un complexe soit formé des droites qui rencontrent une courbe fixe; on pourra représenter une droite quelconque de ce complexe par les équations

$$X = aZ + x - az,$$
$$Y = bZ + y - bz,$$

où x, y, z sont les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe, fonctions d'un paramètre ξ, et a, b deux paramètres qui fixent l'orientation de la droite.

On aura, pour le moment élémentaire,

$$M = \frac{da(dy - b\,dz) - db(dx - a\,dz)}{1 + a^2 + b^2},$$

ce qui s'écrit encore, en faisant

$$x' = \frac{dx}{d\xi}, \qquad y' = \frac{dy}{d\xi}, \qquad z' = \frac{dz}{d\xi};$$
$$M = \frac{[da(y' - bz') - db(x' - az')]\,d\xi}{1 + a^2 + b^2}.$$

Ici encore l'un des deux facteurs est intégrable.

L'équation $\xi = \text{const.}$ représente, dans le complexe, les droites qui passent par un même point de la courbe. Au contraire, l'équation

$$da(y' - bz') - db(x' - az') = 0$$

représentera le système des développables circonscrites à la courbe considérée. Dans ce cas, le premier système des développables n'existe plus, ou plutôt dégénère en des gerbes de droites dont les sommets sont les points de la courbe directrice.

En résumé, le moment affecte le second type dans deux cas : si l'enveloppe du complexe est une développable, ou bien si cette enveloppe est une courbe. Le moment est alors de la forme

$$M = g(\zeta\,d\xi - d\eta)\,d\xi,$$

ou peut être ramené à cette forme. Dans le premier cas, l'équation $\xi = \text{const.}$ convient à toutes les droites d'un plan, et la développable est l'enveloppe de ce plan. Dans le second cas, l'équation $\xi = \text{const.}$ convient à toutes les droites issues d'un point, et le lieu de ce point est la courbe directrice. Pour distinguer les deux cas, une fois que l'on aura ramené le moment au type

$$g(\zeta\, d\xi - d\eta)\, d\xi;$$

il suffira donc d'interpréter l'équation $\xi = \text{const.}$

15. Signalons enfin un dernier cas, qui est une limite commune à tous les cas précédemment considérés. En effet, une enveloppe de plans, tout aussi bien qu'un lieu de points, peut se réduire à une ligne droite; on obtient donc comme cas limite le système des droites qui en coupent une autre. Il nous suffit évidemment d'étudier ce cas limite comme une dégénérescence de celui où toutes les droites du complexe coupent une courbe fixe.

Dans cette hypothèse, nous avons trouvé pour le moment la forme

$$\mathrm{M} = \frac{[da(y'-bz') - db(x'-az')]\, d\xi}{1+a^2+b^2}.$$

Il peut arriver que le facteur

$$da(y'-bz') - db(x'-az')$$

soit intégrable. Il faut et il suffit, pour cela, que le quotient

$$\frac{y'-bz'}{x'-az'} = \frac{\dfrac{y'}{z'} - b}{\dfrac{x'}{z'} - a}$$

ne dépende pas de ξ, ce qui exige que $\frac{y'}{z'}$ et $\frac{x'}{z'}$ soient des constantes. Si l'on pose

$$\frac{x'}{z'} = \alpha = \text{const.}, \qquad \frac{y'}{z'} = \beta = \text{const.},$$

on trouve, par intégration,

$$x = \alpha z + \pi,$$
$$y = \beta z + \chi,$$

où π et χ sont deux nouvelles constantes, et la courbe directrice est une ligne droite. Le moment élémentaire devient, dans cette hypothèse, en prenant pour ξ le z du point de rencontre avec la directrice

$$\mathrm{M} = \frac{(a-\alpha)^2}{1+a^2+b^2}\, d\left(\frac{b-\beta}{a-\alpha}\right) dz.$$

Les deux facteurs, dans lesquels le moment se décompose, sont, comme on l'a dit, intégrables. L'équation

$$dz = 0$$

représente les droites qui ont un même point commun avec la droite directrice; au contraire, l'équation

$$d\left(\frac{b-\beta}{a-\alpha}\right) = 0$$

représente celles qui ont, avec cette droite, un *même plan* en commun.

16. En énumérant tous les cas possibles que nous avons rencontrés, nous pouvons donc former le Tableau suivant :

1° Les droites du complexe singulier touchent une surface quelconque (c'est-à-dire non développable, ni dégénérée en une courbe); alors le moment appartient au type général des formes linéo-involutives, et la réduction de ce moment au type canonique réduit

$$A\,d\xi^2 + B\,d\eta^2$$

coïncide avec la détermination des lignes asymptotiques de la surface enveloppe. Le quotient $\frac{A}{B}$ ne saurait, dans ce cas, se réduire à une simple fonction de ξ, η.

Les lignes asymptotiques sont définies dans le complexe par les équations

$$\xi = \text{const.}, \qquad \frac{B}{A} = 0 \qquad \text{pour une série;}$$

$$\eta = \text{const.}, \qquad \frac{A}{B} = 0 \qquad \text{pour l'autre série.}$$

2° Les droites du complexe touchent toutes une même surface développable ou rencontrent toutes une courbe directrice (qui n'est pas une ligne droite).

Le moment appartient alors au second type des formes linéo-involutives. Un de ses facteurs est intégrable, et la forme peut être ramenée au type réduit

$$(A\,d\xi + B\,d\eta)\,d\xi,$$

où le quotient $\frac{A}{B}$ ne peut être une simple fonction de ξ, η.

L'équation $\xi = \text{const.}$ convient, dans un cas, à toutes les droites d'un même plan, et, lorsque ξ varie, ce plan enveloppe la développable directrice des droites du complexe.

Dans l'autre cas, l'équation $\xi = \text{const.}$ convient à toutes les droites qui passent par un point fixe, et, lorsque ξ varie, ce point décrit la courbe directrice des droites du complexe.

3° Enfin, le complexe peut être formé des droites qui rencontrent une droite fixe. Dans ce cas, le moment a ses deux facteurs intégrables; il appartient donc au troisième type des formes linéo-involutives.

Il peut être mis sous la forme

$$\mathrm{A}\, d\xi\, d\eta.$$

L'équation $\xi = \text{const.}$ convient à toutes les droites qui passent par un même point de la droite, et ce point lui-même se meut sur cette droite lorsque ξ varie.

Au contraire, l'équation $\eta = \text{const.}$ convient à toutes les droites situées dans un même plan mené par la droite directrice, et, lorsque η varie, le plan tourne autour de cette droite.

17. Telle est donc la réponse au problème que je m'étais proposé. Que faut-il ajouter à la condition Cayley-Klein pour qu'un complexe soit formé des sécantes d'une courbe ?

Il faut et il suffit que l'un, au moins, des facteurs, dans lesquels le moment élémentaire est décomposable, admette un facteur d'intégrabilité.

Je dis il suffit, bien que la même condition implique aussi le cas où l'enveloppe du complexe est une surface développable; mais pour qui connaît la loi de dualité, il est clair que ces deux cas ne peuvent être séparés l'un de l'autre, et, pour les discerner, on n'aura d'autre ressource, comme je l'ai dit, que d'interpréter géométriquement l'équation

$$\xi = \text{const.}$$

III. — *Application aux surfaces de singularités des complexes quadratiques.*

18. L'application des résultats que l'on vient d'obtenir conduit immédiatement à la détermination des lignes asymptotiques de la surface de Kummer du quatrième ordre à seize points doubles. M. Klein [1] a déjà obtenu ces lignes par l'emploi des coordonnées elliptiques de la ligne droite. C'est donc surtout comme vérification que je présente ici cette application.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_6$ sont les six coordonnées orthogonales de M. Klein liées, comme on sait, par l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=6} x_i^2 = 0, \tag{1}$$

les complexes du second degré compris dans l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=6} \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 0, \tag{2}$$

où λ est un paramètre arbitraire, ont même surface de singularités.

Cette surface est du quatrième ordre et a seize points doubles.

Lorsque, dans l'équation (2), on regarde les x comme donnés, on est en présence d'une équation en λ qui se réduit au quatrième degré, en vertu de la relation (1). Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les racines de cette équation. Ces quatre quantités sont les coordonnées elliptiques de la ligne droite introduites par M. Klein.

Le moment élémentaire, qui est de la forme

$$\mathrm{M} = g \Sigma\, dx_i^2$$

avec les six coordonnées primitives, devient, avec les nouvelles coordonnées,

$$\mathrm{M} = \mathrm{G} \sum_{i=1}^{i=4} \frac{\theta'(\lambda_i)}{\varphi(\lambda_i)} d\lambda_i^2,$$

---

(1) *Math. Annalen,* t. V, *loco citato.*

où G est une fonction qui importe peu, et

$$\theta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4),$$
$$\varphi(\lambda) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\ldots(\lambda - a_6).$$

Supposons que l'on fasse $\lambda_3 = \lambda_4$. On définit ainsi un complexe; et il est aisé de voir que ce complexe est singulier. En appelant, en effet, G_0 ce que G devient pour $\lambda_3 = \lambda_4$, on a, pour le moment,

$$(e) \qquad M = G_0(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \left[\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)^2}{\varphi(\lambda_1)} d\lambda_1^2 + \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)^2}{-\varphi(\lambda_2)} d\lambda_2^2\right].$$

Le complexe est donc singulier, et, comme le quotient

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)^2}{\varphi(\lambda_1)} : \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)^2}{\varphi(\lambda_2)}$$

ne se réduit pas à une simple fonction de λ_1, λ_2, l'enveloppe ne peut être qu'une surface effective, et nullement une développable ou une courbe. Cette surface est, du reste, la surface de singularité des complexes représentés par l'équation (2) pour chaque valeur constante de λ. En effet, ce qui caractérise les droites singulières (tangentes à la surface de singularités), c'est que l'on ait, en même temps que (2), l'équation

$$(3) \qquad \sum \left(\frac{x_i}{a_i - \lambda}\right)^2 = 0 \quad [1].$$

Or l'équation (3) exprime que, si l'on se donne une telle droite, l'équation (2), considérée comme une équation en λ, admet deux racines égales, et réciproquement.

Si l'on se reporte alors à l'équation (e) et aux résultats ci-dessus obtenus, on voit que les équations

$$\lambda_1 = \lambda_3, \qquad \lambda_2 = \text{const.},$$

d'une part, et, d'autre part,

$$\lambda_2 = \lambda_3, \qquad \lambda_1 = \text{const.}$$

---

[1] En effet, si $f(x_1, x_2, \ldots, x_6) = 0$ est l'équation d'un complexe, les droites singulières sont définies par l'équation

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 0.$$

représenteront respectivement les deux séries de tangentes asymptotiques de la surface de singularités.

C'est bien là le résultat élégant obtenu pour la première fois par M. Klein.

IV. — *Application à la transformation des lignes asymptotiques en lignes de courbure.*

19. Dans mon Mémoire, déjà cité et inséré au Tome XI de la deuxième Série des *Annales de l'École Normale*, j'ai montré qu'il existe toujours un système de coordonnées de la ligne droite qui fait prendre au moment élémentaire dans l'espace la forme

$$G(du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2),$$

où G est un certain facteur dont la forme importe peu.

Supposons que l'on soit parvenu à résoudre l'identité

$$du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2 = A\,d\xi^2 + B\,d\eta^2, \tag{I}$$

c'est-à-dire à exprimer u_1, u_2, u_3, u_4, A et B en fonction de *trois* variables indépendantes ξ, η, ζ, de sorte que l'identité (I) ait lieu.

Puisque (u_1, u_2, u_3, u_4) dépendent de trois variables seulement, la droite dont elles représentent les coordonnées se meut dans un complexe, et la forme que prend le moment de ce complexe, en vertu de l'identité (I), fait voir que ce complexe est singulier.

De plus, en vertu des résultats obtenus dans le cours de ce travail, les lignes asymptotiques de la surface enveloppe seront immédiatement connues.

Ainsi, chaque fois qu'on aura rencontré une solution (entendue, comme il a été dit) *de l'identité* (I), *on aura, par cela seul, une surface sur laquelle les lignes asymptotiques seront connues.*

Mais l'identité (I) peut être interprétée différemment. Écrivons-la ainsi

$$du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 = (i\,du_4)^2 + A\,d\xi^2 + B\,d\eta^2. \tag{I}$$

Rien n'empêche de supposer que l'on a pris pour variables

$$\xi, \quad \eta \quad \text{et} \quad \zeta = iu_4.$$

Résoudre l'identité (I) revient alors à trouver u_1, u_2, u_3 en fonction de ξ,

η, ζ, de façon à avoir

$$(\mathrm{I}) \qquad du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 = d\zeta^2 + \mathrm{A}\, d\xi^2 + \mathrm{B}\, d\eta^2.$$

Si l'on regarde alors u_1, u_2, u_3 comme des coordonnées rectilignes rectangulaires dans l'espace, on reconnaît l'équivalence de la résolution de l'identité (I) avec la recherche d'un certain système de coordonnées curvilignes faisant prendre au carré ds^2 de l'élément linéaire la forme

$$ds^2 = d\zeta^2 + \mathrm{A}\, d\xi^2 + \mathrm{B}\, d\eta^2.$$

On aperçoit tout de suite que les courbes $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ sont des géodésiques sur les surfaces $\xi = \text{const.}$ et sur les surfaces $\eta = \text{const.}$ Comme les normales de ces deux surfaces sont à angle droit, cela exige que la normale principale de chaque ligne $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ soit indéterminée en chaque point, ou que ces lignes soient des droites. Le système triplement orthogonal dans l'espace est alors formé d'un système de surfaces parallèles et de leurs deux systèmes de normalies développables. On peut donc dire aussi que, dès que l'on aura trouvé une solution de l'identité (I), *on aura immédiatement un système de surfaces parallèles dans lequel on connaîtra les lignes de courbure.*

Une double interprétation de l'identité (I) nous conduit donc à la remarquable relation que M. Sophus Lie a découverte entre les lignes asymptotiques et les lignes de courbure. Il n'est pas difficile, en effet, de se rendre compte que la relation que nous venons de rencontrer revient dans la forme aussi bien que dans le fond à la transformation de contact par laquelle M. Lie effectue le passage d'une théorie à l'autre.

V. — *Sur les complexes singuliers de sphères.*

20. Ainsi que je l'ai indiqué dans une Note à l'Académie, cette transformation de contact permet d'étendre tous les résultats précédents aux complexes de sphères. Il est, du reste, facile de traiter la question directement.

Adoptons pour coordonnées d'une sphère les coordonnées rectangulaires X, Y, Z de son centre et la longueur H de son rayon. La forme

$$\mathrm{F} = d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2 + d\mathrm{Z}^2 - d\mathrm{H}^2,$$

dont l'évanouissement exprime le contact de deux sphères infiniment voisines, joue, dans la théorie des sphères, un rôle analogue à celui du moment dans l'espace réglé.

Pour un complexe de sphères, la forme F devient une forme ternaire, et l'évanouissement identique du discriminant de cette forme indique que le complexe est singulier, c'est-à-dire que toutes les sphères du complexe ont une enveloppe.

Supposons d'abord que cette enveloppe soit une surface quelconque sur laquelle les lignes de courbure seront distinctes et représentées par les équations $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ Les coordonnées x, y, z d'un point de la surface seront des fonctions de ξ, η; je désignerai par λ, μ, ν les cosinus directeurs d'un sens de parcours choisi sur la normale.

Les coordonnées de l'une quelconque des sphères du système peuvent être représentées par les formules

$$\begin{aligned} X &= x - H\lambda, \\ Y &= y - H\mu, \\ Z &= z - H\nu, \end{aligned}$$

en adoptant ξ, η, H pour variables indépendantes.

La différentiation donnera

$$dX = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} - H\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\right) d\xi + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} - H\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}\right) d\eta - \lambda\, dH;$$

mais, comme $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ sont les lignes de courbure, en représentant par R_1, R_2 les rayons de courbure principaux, on aura

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \xi} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial x}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = \frac{1}{R_2}\frac{\partial x}{\partial \eta};$$

d'où, par conséquent,

$$dX = \frac{\partial x}{\partial \xi}\left(1 - \frac{H}{R_1}\right) d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\left(1 - \frac{H}{R_2}\right) d\eta - \lambda\, dH;$$

d'où l'on conclut

$$F = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dH^2 = \left(1 - \frac{H}{R_1}\right)^2 E\, d\xi^2 + \left(1 - \frac{H}{R_2}\right)^2 G\, d\eta^2;$$

en posant avec Gauss

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 \end{aligned}$$

et se rappelant que

$$\lambda\frac{\partial x}{\partial\xi}+\mu\frac{\partial y}{\partial\xi}+\nu\frac{\partial z}{\partial\xi}=0,$$

$$\lambda\frac{\partial x}{\partial\eta}+\mu\frac{\partial y}{\partial\eta}+\nu\frac{\partial z}{\partial\eta}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}+\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}=0.$$

La forme F étant ramenée au type

$$F=\left(1-\frac{H}{R_1}\right)^2 E\,d\xi^2+\left(1-\frac{H}{R_2}\right)^2 G\,d\eta^2,$$

on reconnaît immédiatement qu'elle appartient au groupe des formes linéo-involutives.

On voit en même temps que les deux groupes d'équations

$$1-\frac{H}{R_1}=0,\qquad \eta=\text{const.}$$

et

$$1-\frac{H}{R_2}=0,\qquad \xi=\text{const.}$$

définissent chacun une famille de sphères principales et, par conséquent, de lignes de courbure.

21. Le seul cas particulier qui puisse se présenter, c'est celui où les deux facteurs de la forme F seraient tous deux intégrables; il faudrait, pour cela, que le quotient

$$\left(\frac{1-\dfrac{H}{R_1}}{1-\dfrac{H}{R_2}}\right)^2$$

fût indépendant de H, ce qui exige que $R_1=R_2$.

Donc :

C'est lorsque le complexe sera formé des sphères tangentes à une sphère fixe, que la forme F *sera réductible au troisième type des formes* *linéo-involutives*

$$F = g\, d\xi\, d\eta.$$

22. Lorsque le complexe est formé des sphères tangentes à une courbe, la forme appartient encore au type *linéo-involutif*, comme il est aisé de le montrer ([1]).

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la courbe directrice, exprimées en fonction de l'arc, a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale, enfin $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{T}$ et s la courbure, la torsion et l'arc.

Les coordonnées du centre de l'une quelconque des sphères de rayon H du système peuvent être représentées par les formules

$$\begin{aligned} X &= x - (b \cos\theta + c \sin\theta)H, \\ Y &= y - (b' \cos\theta + c' \sin\theta)H, \\ Z &= z - (b'' \cos\theta + c'' \sin\theta)H, \end{aligned}$$

en adoptant pour variables s, θ et H. La signification de θ est évidente, c'est l'angle que fait, avec la normale principale, le rayon de la sphère qui va au point de contact.

On tire de ces formules

$$F = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dH^2 = H^2\left[\left(\frac{ds}{T} - d\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{H} - \frac{\cos\theta}{R}\right)^2 ds^2\right]$$

ou, en posant $\theta - \int \frac{ds}{T} = u$,

$$F = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dH^2 = H^2\, du^2 + \left(1 - \frac{H}{R}\cos\theta\right)^2 ds^2.$$

Cette dernière forme appartient essentiellement au type linéo-involutif général, quelque hypothèse que l'on fasse sur la courbe enveloppe.

Dans ce cas, les sphères principales sont définies, d'une part, par les équations

$$u = \theta - \int \frac{ds}{T} = \text{const.}, \qquad \frac{1}{H} = \frac{\cos\theta}{R};$$

[1]) C'est à tort que, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, j'ai rattaché ce cas à celui où l'un des deux facteurs de la forme est intégrable.

le lieu des centres de ces sphères est la surface polaire, et l'on retrouve ainsi la théorie ordinaire des développées.

Le second système de sphères principales est donnée par les équations

$$s = \text{const.}, \qquad H = 0;$$

on obtient ainsi les sphères de rayon nul dont les centres sont sur la courbe considérée.

23. Il reste, enfin, un dernier cas que j'ai laissé de côté. Dans l'étude des sphères tangentes à une surface, j'ai supposé distinctes les lignes de courbure. Or Monge a trouvé des surfaces imaginaires dont les lignes de courbure des deux séries coïncident.

Les tangentes aux lignes de courbure divisent harmoniquement les tangentes isotropes de la surface; la coïncidence des lignes de courbure entraîne donc leur coïncidence avec l'un des systèmes de lignes de longueur nulle tracées sur la surface. Les tangentes aux lignes de courbure divisant aussi harmoniquement les tangentes asymptotiques, leur coïncidence ne peut s'effectuer qu'autant qu'elles viennent coïncider avec un système de lignes asymptotiques. Sur les surfaces considérées, il faudra donc qu'un système de lignes asymptotiques soit formé de lignes de longueur nulle. Comme le plan osculateur d'une ligne de longueur nulle touche toujours le cercle de l'infini, à moins que cette ligne ne soit droite, et que, par conséquent, tout plan tangent à la surface considérée devrait être tangent au cercle de l'infini, il faut ou bien que la surface soit une développable circonscrite au cercle de l'infini, ou bien qu'elle soit engendrée par une droite qui rencontre constamment ce cercle. Du reste, il est bien clair que le premier cas rentre dans le dernier. Donc, en résumé :

Toute surface à lignes de courbure coïncidentes est réglée, et ses droites coupent toutes le cercle de l'infini.

D'après cela, les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point d'une telle surface pourront être représentées par les formules

$$\begin{aligned} x &= \cos\xi.\eta + p, \\ y &= \sin\xi.\eta + q, \\ z &= \eta\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

où p et q sont deux fonctions de la variable indépendante ξ.

Comme précédemment, une sphère quelconque tangente à la surface pourra se représenter par les formules

$$\begin{aligned} X &= x - \lambda H, \\ Y &= y - \mu H, \\ Z &= z - \nu H, \end{aligned}$$

où λ, μ, ν sont encore les cosinus directeurs de la normale.

On tire de ces formules

$$\begin{aligned} dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dH^2 = & \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} - H\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\right)^2 d\xi^2 \\ & + 2\sum \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} - H\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} - H\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta \\ & + \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} - H\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}\right)^2 d\eta^2. \end{aligned}$$

Mais, si l'on a égard aux expressions de x, y, z en fonction de ξ, η, on trouve que le coefficient de $d\eta^2$ disparaît, et il reste

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dH^2 = (g\, d\xi + h\, d\eta)\, d\xi,$$

ce qui prouve bien que la forme appartient alors au *second type* des formes *linéo-involutives*.

Le cas où l'enveloppe des sphères est une surface de Monge correspond donc *à lui seul* au cas de l'espace réglé, où l'enveloppe d'un complexe singulier est une surface développable ou bien une courbe ([1]).

24. Les sphères sont des surfaces de Monge et même de deux façons différentes, puisqu'elles sont engendrées de deux manières par le déplacement d'une droite isotrope.

Nous avons déjà rencontré ce cas au n° 21, et l'on constate facilement que ce cas est le seul où le facteur

$$g\, d\xi + h\, d\eta$$

admette un facteur intégrant ([2]).

([1]) Cela résulte aussi de l'application de la transformation de M. S. Lie.

([2]) Si l'on cherche à déterminer p et q en fonction de ξ de sorte que $g\, d\xi + h\, d\eta$ soit

En résumé :

1° Dans un complexe singulier de sphères tangentes à une surface quelconque, ou à une courbe quelconque, la forme quadratique fondamentale appartient au type général linéo-involutif, et la réduction de cette forme au type canonique coïncide avec la détermination des sphères principales.

2° Si l'enveloppe des sphères du complexe est une surface de Monge (et seulement dans ce cas), la forme appartient au second type linéo-involutif; l'un de ses facteurs est intégrable.

3° Enfin, lorsque l'enveloppe est une sphère (et seulement dans ce cas), la forme appartient au troisième type, et ses deux facteurs sont intégrables.

---

intégrable, on trouve qu'il faut prendre

$$p = a\sin\xi + b, \qquad q = -a\cos\xi + c,$$

où a, b, c sont trois constantes. Si on élimine alors ξ, η entre les trois équations du bas de la page 41, on trouve la sphère $(x-b)^2+(y-c)^2+z^2=a^2$.