

Institut Fourier — Université de Grenoble I

*Actes du séminaire de*  
**Théorie spectrale  
et géométrie**

Virginie CHARETTE & Kevin THOUIN

**Autour de la géométrie du bidisque**

Volume 35 (2017-2019), p. 1-8.

<[http://tsg.centre-mersenne.org/item?id=TSG\\_2017-2019\\_\\_35\\_\\_1\\_0](http://tsg.centre-mersenne.org/item?id=TSG_2017-2019__35__1_0)>

© Institut Fourier, 2017-2019, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.centre-mersenne.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.centre-mersenne.org/legal/>).

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.centre-mersenne.org/>

# AUTOUR DE LA GÉOMÉTRIE DU BIDISQUE

Virginie Charette & Kevin Thouin

*Cet article est dédié à la mémoire de Todd A. Drumm.*

## 1. Introduction

Le bidisque est une variété de dimension quatre proposant une géométrie riche et fascinante. On y retrouve une certaine saveur provenant du plan hyperbolique, à partir duquel il est construit. On sait donc que le bidisque admet des actions propres de groupes qui sont des produits de groupes fuchsien, par exemple. Il serait intéressant de pouvoir mieux comprendre l'action de groupes plus généraux.

De plus, le bidisque est de rang deux [5, 6, 7], ce qui rajoute un niveau de difficulté. Pourtant, on y retrouve des éléments nous rappelant la géométrie hyperbolique complexe, en particulier lorsque'il s'agit d'y définir une notion de bisecteur [1, 9, 11].

Cet article présente quelques résultats dont on retrouvera les détails dans [3, 4]. Le lecteur intéressé est invité à consulter quelques ressources préliminaires, en géométrie hyperbolique [10, 12] et en géométrie hyperbolique complexe [8].

## 2. Préliminaires

Dans cette section, nous introduisons le bidisque et décrivons son groupe d'isométries.

---

*Crédits* : Les auteurs ont bénéficié de l'appui financier du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie (CRSNG, Canada).

Dénotons par  $\mathcal{H}$  le plan hyperbolique. Le bidisque est alors  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ , muni de la topologie produit.

Soient  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les projections sur les première et deuxième composantes. Munissons le bidisque de la métrique  $L^2$  :

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{d_{\mathcal{H}}^2(\pi_1(\mathbf{x}), \pi_1(\mathbf{y})) + d_{\mathcal{H}}^2(\pi_2(\mathbf{x}), \pi_2(\mathbf{y}))}$$

où  $d_{\mathcal{H}}$  est la métrique hyperbolique.

**DÉFINITION 2.1.** — *Soit  $z \in \mathcal{H}$ . Le sous-espace  $\mathcal{H} \times \{z\}$  s'appelle un plan horizontal et  $\{z\} \times \mathcal{H}$ , un plan vertical.*

Le bidisque muni de la métrique  $L^2$  étant une variété riemannienne, on peut y définir la courbure sectionnelle sur une surface. Celle-ci est comprise entre  $-1$  et  $0$ , et vaut  $-1$  seulement sur un plan horizontal ou vertical. De ce fait, le bidisque est une variété de Hadamard.

Soit  $\Gamma = \text{Isom}(\mathcal{H}) \times \text{Isom}(\mathcal{H})$ . Il est clair que  $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathcal{H} \times \mathcal{H})$ . Dénotons par  $\iota$  l'involution échangeant les composantes du bidisque :

$$\iota(\mathbf{x}) = (\pi_2(\mathbf{x}), \pi_1(\mathbf{y})).$$

L'involution  $\iota$  est aussi une isométrie du bidisque.

**PROPOSITION 2.2.** — *Le groupe des isométries du bidisque est*

$$\text{Isom}(\mathcal{H} \times \mathcal{H}) = \Gamma \rtimes \langle \iota \rangle.$$

*Démonstration.* — Soit  $\gamma$  une isométrie du bidisque. Soit  $P$  un plan horizontal. Alors  $\gamma(P)$  doit avoir une courbure sectionnelle de  $-1$  et, ainsi, être soit un plan horizontal, soit un plan vertical.

Supposons, sans perte de généralité, maintenant, que  $\gamma$  envoie des plans horizontaux sur des plans horizontaux. Pour  $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ , écrivons  $\gamma(x, y) = (x', y')$ . Soient  $x_1, x_2$  et  $y \in \mathcal{H}$ . Comme  $(x_1, y)$  et  $(x_2, y)$  font partie du même plan horizontal, leurs images aussi. Ainsi,  $d_{\mathcal{H}}(x_1, x_2) = d_{\mathcal{H}}(x'_1, x'_2)$ . Ainsi, la projection de  $\gamma$  sur la première coordonnée est une isométrie de  $\mathcal{H}$ . En faisant, le même argument avec des plans verticaux, on a que la projection de  $\gamma$  sur la seconde coordonnées est une isométrie de  $\mathcal{H}$  et, ainsi,  $\gamma \in \Gamma$ .  $\square$

### 3. Bisecteurs

Dans cette section, nous introduisons les bisecteurs et nous montrons qu'ils admettent un feuilletage naturel. Nous parlerons aussi des bisecteurs avec une métrique différente sur le bidisque.

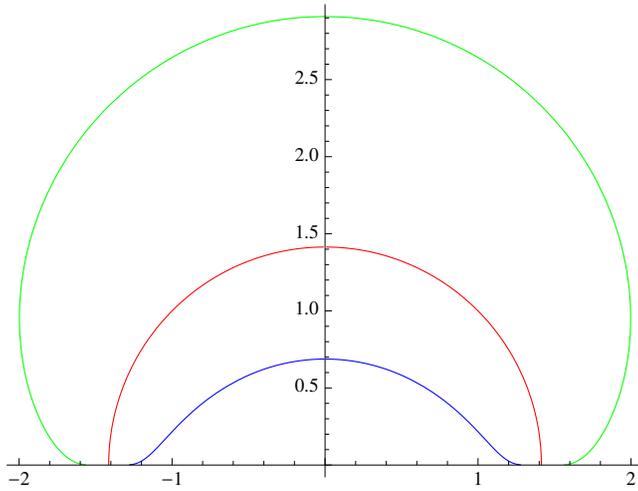


FIGURE 3.1. Quelques hyperboles carrées

DÉFINITION 3.1. — Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ . L’hypersurface équidistante entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  est

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{ \mathbf{z} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mid \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \}.$$

Si  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  et  $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ , l’équation des hypersurfaces équidistantes peut être réécrite sous la forme suivante :

$$d_{\mathcal{H}}^2(x_1, z_1) - d_{\mathcal{H}}^2(y_1, z_1) = d_{\mathcal{H}}^2(y_2, z_2) - d_{\mathcal{H}}^2(x_2, z_2).$$

Nous pouvons ainsi définir la surface suivante sur le plan hyperbolique, ce qui nous permettra de donner un feuilletage des hypersurfaces équidistantes.

DÉFINITION 3.2. — Soient  $x, y \in \mathcal{H}$  et  $k \in \mathbb{R}$  tels que  $x \neq y$ . Nous définissons l’hyperbole carrée  $\text{SH}_k(x, y)$  comme le lieu des points  $z \in \mathcal{H}$  tels que

$$d_{\mathcal{H}}^2(x, z) - d_{\mathcal{H}}^2(y, z) = k.$$

Quelques hyperboles carrées sont illustrées à la Figure 3.1.

On peut facilement voir que  $\text{SH}_k(x, y) = \text{SH}_{-k}(y, x)$  et que  $\text{SH}_0(x, y)$  est la droite équidistante entre  $x$  et  $y$ .

PROPOSITION 3.3. — Soient  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  tels que  $x_1 \neq y_1$  et  $x_2 \neq y_2$ . Alors,

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigcup_{k \in \mathbb{R}} \text{SH}_k(x_1, y_1) \times \text{SH}_k(y_2, x_2)$$

La feuille  $\text{SH}_0(x_1, y_1) \times \text{SH}_0(y_2, x_2)$  est appelée la *colonne* de  $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Étant donné que  $\text{SH}_0(x, y)$  correspond à la géodésique équidistante à  $x$  et  $y$ , la colonne de  $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est uniquement déterminée par  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . Cependant, la colonne ne détermine pas uniquement  $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Lorsque les conditions de la Proposition 3.3 ne sont pas rencontrées, c'est-à-dire lorsque  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  partagent une coordonnée en commun, le bisecteur devient très simple. Il s'agit en effet du produit d'un plan hyperbolique et d'une droite hyperbolique.

**PROPOSITION 3.4.** — *Soient  $x = ai$ ,  $y = bi$  et  $k > 0$ . L'hyperbole carrée  $\text{SH}_k(x, y)$  admet la paramétrisation suivante :*

$$t \mapsto \pm \sqrt{r_1^2(t) - (y(t) - c_1(t))^2} + y(t)i$$

où

$$\begin{aligned} c_1(t) &= a \cosh(\sqrt{k} \cosh(t)) \\ c_2(t) &= b \cosh(\sqrt{k} \sinh(t)) \\ r_1(t) &= a \sinh(\sqrt{k} \cosh(t)) \\ y(t) &= \frac{b^2 - a^2}{2(c_2(t) - c_1(t))} \end{aligned}$$

ayant pour domaine :

$$t \geq \ln \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \left| \ln \frac{a}{b} \right| \right) = \ln \left( \frac{1}{\sqrt{k}} d_{\mathcal{H}}(x, y) \right)$$

*Démonstration.* — Soient  $t > 0$ , et  $C_1(t)$  et  $C_2(t)$  deux cercles hyperboliques centrés en  $x$  et  $y$ , de rayon  $\sqrt{k} \cosh(t)$  et  $\sqrt{k} \sinh(t)$ . Les points recherchés sont les points d'intersection de ces deux cercles hyperboliques.  $\square$

Nous pouvons nous servir de cette paramétrisation pour montrer que les points à l'infini de l'hyperbole carrée  $\text{SH}_k(x, y)$  sont les mêmes que ceux de la droite équidistante entre  $x$  et  $y$ . (Voir [4].)

### 3.1. Métrique $L^1$

La métrique  $L^1$  sur le bidisque est également intéressante :

$$\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{\mathcal{H}}(\pi_1(\mathbf{x}), \pi_1(\mathbf{y})) + d_{\mathcal{H}}(\pi_2(\mathbf{x}), \pi_2(\mathbf{y})).$$

Nous obtenons alors un feuilletage similaire sur les surfaces équidistantes, mais au lieu d'hyperboles carrées, nous obtenons les courbes suivantes

dans  $\mathcal{H}$ . Pour  $k$  fixé, considérons le lieu des points satisfaisant l'équation suivante :

$$d_{\mathcal{H}}(x, z) - d_{\mathcal{H}}(y, z) = k$$

Nous pouvons paramétriser cette courbe comme suit :

$$t \mapsto \pm \sqrt{r_1^2(t) - (y(t) - c_1(t))^2} + y(t)i$$

où

$$\begin{aligned} c_1(t) &= a \cosh\left(t + \frac{k}{2}\right) \\ c_2(t) &= b \cosh\left(t - \frac{k}{2}\right) \\ r_1(t) &= a \sinh\left(t + \frac{k}{2}\right) \\ y(t) &= \frac{b^2 - a^2}{2(c_2(t) - c_1(t))} \end{aligned}$$

et  $t \in [\frac{d_{\mathcal{H}}(x,y)}{2}, \infty)$ . Voir Figure 3.2. Notons que  $k$  prend seulement des valeurs entre  $-d_{\mathcal{H}}(x, z)$  et  $d_{\mathcal{H}}(x, z)$ .

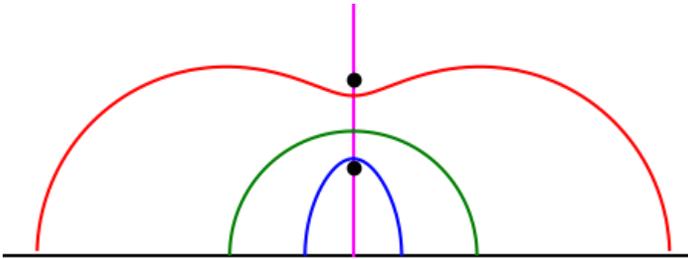


FIGURE 3.2. L'analogue des hyperboles carrées dans la métrique  $L^1$ . La géodésique passant par les points  $z, w$  (dénotés par des points noirs sur la figure) est en magenta. La géodésique équidistante entre  $z$  et  $w$  est en vert.

Aussi, contrairement à la métrique  $L^2$ , les points à l'infini des courbes sont toutes distinctes. Une étude plus approfondie de la métrique  $L^1$  se retrouve dans [2].

#### 4. Unicité des bisecteurs

Cette section donne un aperçu de la preuve que les bisecteurs sont uniquement déterminés par leurs points générateurs dans le cas général. Ainsi, le bidisque est différent de plusieurs autres espaces familiers comme les espaces euclidiens, les espaces hyperboliques, etc. Dans le cas non-général, il n'y a pas d'unicité, car il est facile de voir que c'est équivalent à trouver des bisecteurs dans  $\mathcal{H}$  où les bisecteurs ne sont pas uniquement déterminés.

Nous aurons besoin de la définition suivante pour la prochaine Proposition 4.2.

**DÉFINITION 4.1.** — Soient  $x, y \in \mathcal{H}$ . On définit la fonction de niveau pour  $x$  et  $y$  de la manière suivante :

$$L_{x,y}(z) = d_{\mathcal{H}}^2(x, z) - d_{\mathcal{H}}^2(y, z).$$

**PROPOSITION 4.2.** — Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}$  et  $\mathbf{v} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  tels que  $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  est générique. Alors pour tous  $k \in \mathbb{R}$ , il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que

$$\mathrm{SH}_k(x_1, y_1) \times \mathrm{SH}_k(y_2, x_2) = \mathrm{SH}_m(u_1, v_1) \times \mathrm{SH}_m(v_2, u_2).$$

*Démonstration.* — Soit  $\mathbf{q} \in E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . Il existe alors  $k$  et  $m \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &\in \mathrm{SH}_k(\pi_1(\mathbf{x}), \pi_1(\mathbf{y})) \times \mathrm{SH}_k(\pi_2(\mathbf{y}), \pi_2(\mathbf{x})) \\ \mathbf{q} &\in \mathrm{SH}_m(\pi_1(\mathbf{u}), \pi_1(\mathbf{v})) \times \mathrm{SH}_m(\pi_2(\mathbf{v}), \pi_2(\mathbf{u})) \end{aligned}$$

Observons que pour tout  $p \in \mathrm{SH}_k(\pi_2(\mathbf{y}), \pi_2(\mathbf{x}))$  :

$$(\pi_1(\mathbf{q}), p) \in E(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Ainsi, puisque les bisecteurs sont égaux :

$$(\pi_1(\mathbf{q}), p) \in E(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Il faut alors nécessairement que  $L_{v,u}(p) = m$ . On a alors que :

$$\{\pi_1(\mathbf{q})\} \times \mathrm{SH}_k(\pi_2(\mathbf{y}), \pi_2(\mathbf{x})) \subset \{\pi_1(\mathbf{q})\} \times \mathrm{SH}_m(\pi_2(\mathbf{v}), \pi_2(\mathbf{u})).$$

Par le même argument, avec des points  $q$  de  $\mathrm{SH}_m(\pi_2(\mathbf{v}), \pi_2(\mathbf{u}))$ , on a l'égalité. Finalement, En utilisant le même argument, avec le premier facteur, on obtient :

$$\mathrm{SH}_k(x_1, y_1) \times \mathrm{SH}_k(y_2, x_2) = \mathrm{SH}_m(u_1, v_1) \times \mathrm{SH}_m(v_2, u_2). \quad \square$$

Ceci entraîne le résultat suivant, dont la preuve se retrouve dans [3].

**THÉORÈME 4.3.** — Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}$  et  $\mathbf{v} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  tels que

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}.$$

## 5. Domaine de Dirichlet

Dans cette section, nous introduisons les domaines de Dirichlet pour le bidisque et nous explorons le cas d'un sous-groupe généré par une paire de transformations hyperboliques. Nous exhibons un cas où un groupe cyclique admet un domaine fondamental borné par exactement deux faces. (Voir [4] pour les détails.)

**DÉFINITION 5.1.** — Soit  $G$  un groupe discret avec un nombre fini de générateurs agissant sur un espace riemannien  $X$  muni d'une métrique  $d$ . Un domaine de Dirichlet pour  $G$  avec  $p \in X$  comme point de base est :

$$\Delta_G(p) = \{q \in X \mid d(p, q) \leq d(p, g(q)) \text{ avec } g \in G\}.$$

Un domaine de Dirichlet est l'intersection de demi-espaces et est donc borné par des hypersurfaces équidistantes. Un domaine de Dirichlet est un domaine fondamental pour l'action de  $G$  sur  $X$ .

**THÉORÈME 5.2.** — Soient  $\gamma = (g_1, g_2) \in \Gamma$  tel que  $g_1$  et  $g_2$  soient hyperboliques et  $\mathbf{z} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  sur le produit des droites invariantes de  $g_1$  et  $g_2$ . On a alors que  $E(\mathbf{z}, \gamma(\mathbf{z})) \cap E(\mathbf{z}, \gamma^{-1}(\mathbf{z})) = \emptyset$ .

*Démonstration.* — Soit  $\mathbf{x} \in E(\mathbf{x}, \gamma(\mathbf{x})) \cap E(\mathbf{x}, \gamma^{-1}(\mathbf{x}))$ . Alors la droite passant par  $\gamma^{-1}(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z}$  et  $\gamma(\mathbf{z})$  intersecte une sphère passant par  $\mathbf{x}$  en trois points. Il suffit de prendre  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  comme rayon. Toutefois, puisque le bidisque est une variété de Hadamard, les sphères sont strictement convexes et il est, alors, impossible qu'une droite intersecte une sphère en trois points.  $\square$

**COROLLAIRE 5.3.** — Soient  $\gamma = (g_1, g_2) \in \Gamma$  tel que  $g_1$  et  $g_2$  soient hyperboliques,  $\mathbf{z} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  et  $G = \langle \gamma \rangle$ . Alors,  $\Delta_G(\mathbf{z})$  a deux faces.

*Démonstration.* — Il suit du théorème précédent que

$$E(\mathbf{z}, \gamma^i(\mathbf{z})) \cap E(\mathbf{z}, \gamma^j(\mathbf{z})) = \emptyset$$

pour tout  $i \neq j$ . Il suffit de conjuguer par  $\gamma^{i+j}$  et de considérer  $\gamma^{i-j}$ .  $\square$

## Remerciements

Les auteurs aimeraient remercier Youngju Kim et Pierre Will pour plusieurs discussions stimulantes autour du contenu de cet article.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. AEBISCHER & R. MINER, « Deformation of Schottky groups in complex hyperbolic space », *Conform. Geom. Dyn.* **3** (1999), n° 2, p. 24-36.
- [2] A. ALBURAIKHAN, Thèse en préparation, Howard University, USA.
- [3] V. CHARETTE, T. A. DRUMM & Y. KIM, « Bisectors determining unique pairs of points in the bidisk », *Int. J. Math.* **29** (2018), n° 3, article no. 1850018.
- [4] V. CHARETTE, T. A. DRUMM & R. LAREAU-DUSSAULT, « Equidistant hypersurfaces of the bidisk », *Geom. Dedicata* **163** (2013), p. 275-284.
- [5] A. ESKIN & B. FARB, « Quasi-flats and rigidity in higher rank symmetric spaces », *J. Am. Math. Soc.* **10** (1997), n° 3, p. 653-692.
- [6] ———, « Quasi-flats in  $H^2 \times H^2$  », in *Lie groups and ergodic theory (Mumbai, 1996)*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, vol. 14, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1998, p. 75-103.
- [7] B. FARB & R. SCHWARTZ, « The large-scale geometry of Hilbert modular groups », *J. Differ. Geom.* **44** (1996), n° 3, p. 435-478.
- [8] W. M. GOLDMAN, *Complex hyperbolic geometry*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications; Clarendon Press, 1999.
- [9] W. M. GOLDMAN & J. R. PARKER, « Complex hyperbolic ideal triangle groups », *J. Reine Angew. Math.* **425** (1992), p. 71-86.
- [10] M. J. GREENBERG, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries : Development and History*, 4th éd., William H. Freeman and Company, 2008.
- [11] G. D. MOSTOW, « On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space », *Pac. J. Math.* **86** (1980), p. 171-276.
- [12] J. G. RATCLIFFE, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, 2nd éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 149, Springer, 2006.

Virginie CHARETTE  
 Département de Mathématiques,  
 Université de Sherbrooke, Sherbrooke,  
 Québec J1K 2R1 CANADA  
 virginie.charette@usherbrooke.ca

Kevin THOUIN  
 Département de Mathématiques,  
 Université de Sherbrooke, Sherbrooke,  
 Québec J1K 2R1 (Canada)  
 kevin.thouin@usherbrooke.ca