

Institut Fourier — Université de Grenoble I

*Actes du séminaire de*  
**Théorie spectrale  
et géométrie**

Claire RENARD

**Gradients de Heegaard sous-logarithmiques d'une variété hyperbolique de dimension trois et fibres virtuelles**

Volume 29 (2010-2011), p. 97-131.

[http://tsg.cedram.org/item?id=TSG\\_2010-2011\\_29\\_97\\_0](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2010-2011_29_97_0)

© Institut Fourier, 2010-2011, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# GRADIENTS DE HEEGAARD SOUS-LOGARITHMIQUES D'UNE VARIÉTÉ HYPERBOLIQUE DE DIMENSION TROIS ET FIBRES VIRTUELLES

Claire Renard

RÉSUMÉ. — J. Maher a montré qu'une variété hyperbolique de dimension 3 compacte sans bord, connexe et orientable fibre virtuellement sur le cercle si et seulement si elle admet une famille infinie de revêtements finis de genre de Heegaard borné. En s'appuyant sur la démonstration de Maher, cet article présente un théorème donnant une condition suffisante pour qu'un revêtement fini d'une variété hyperbolique compacte de dimension 3 contienne une fibre virtuelle, qui s'exprime en fonction du degré  $d$  du revêtement et de son genre de Heegaard. On introduit des versions sous-logarithmiques des gradients de Heegaard de Lackenby. Dans ce contexte, on propose des analogues aux conjectures du gradient de Heegaard et du gradient de Heegaard fort de Lackenby.

ABSTRACT. — J. Maher has proven that a closed, connected and orientable hyperbolic 3-manifold  $M$  virtually fibers over the circle if and only if it admits an infinite family of finite covers with bounded Heegaard genus. Building on Maher's proof, we present in this article a theorem giving a sufficient condition for a finite cover of a closed hyperbolic 3-manifold to contain a virtual fiber in terms of the covering degree  $d$  and the Heegaard genus of the cover. We introduce sub-logarithmic versions of Lackenby's infimal Heegaard gradients. In this setting, we expose the analogues of Lackenby's Heegaard gradient and strong Heegaard gradient conjectures.

## Introduction

La compréhension des variétés de dimension trois, en particulier des variétés hyperboliques, a beaucoup progressé ces dernières années, notamment grâce à Perelman et la démonstration du théorème de géométrisation, mais

---

*Mots-clés* : variété de dimension trois, fibration, revêtement fini, géométrie hyperbolique, corps en anses.

*Classification math.* : 57M27, 57M10, 57M50, 20F67.

aussi à l'étude des groupes kleinien. Dans le cadre des variétés hyperboliques complètes et de volume fini, Thurston a proposé une conjecture frappante qui est toujours ouverte.

CONJECTURE 1 (Thurston). — [26, Question 17 du paragraphe 6]

*Toute variété hyperbolique de dimension trois connexe, orientable, complète et de volume fini possède un revêtement fini qui est fibré sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .*

Si une variété  $M$  de dimension trois possède un revêtement fini fibré sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ , on dit qu'elle est **virtuellement fibrée sur le cercle**. Dans le cas des variétés graphées de Waldhausen (qui ne sont pas hyperboliques), elles sont virtuellement fibrées si leur bord n'est pas vide, mais il existe des exemples de variétés graphées sans bord qui ne fibrent pas virtuellement sur le cercle.

La difficulté de la conjecture 1 de Thurston réside en partie dans le fait qu'il n'existe que des critères suffisants permettant de conclure qu'une variété de dimension trois est fibrée sur le cercle. De plus, ceux-ci sont peu nombreux et délicats à mettre en oeuvre en pratique. En particulier, il est difficile de savoir a priori quel type de revêtement considérer parmi tous les revêtements finis de la variété.

Un autre point de vue concerne l'étude des scindements de Heegaard. Notons  $\chi_-^h(M) = 2g(M) - 2$  la **caractéristique de Heegaard de  $M$** , où  $g(M)$  est le genre de Heegaard de  $M$ . Un scindement de Heegaard est dit **fortement irréductible** s'il n'existe aucun couple de disques méridiens de part et d'autre de la surface de Heegaard et qui ne s'intersectent pas. La **caractéristique de Heegaard forte** de  $M$ , notée  $\chi_-^{sh}(M)$ , est la borne inférieure de  $2g(F) - 2$  pour toute surface  $F$  qui est une surface de Heegaard de  $M$  fortement irréductible, avec la convention que s'il n'existe aucun scindement de Heegaard de  $M$  fortement irréductible,  $\chi_-^{sh}(M) = +\infty$  (voir le paragraphe 1).

Lackenby [13] a proposé un programme pour relier les conjectures précédentes au comportement de la caractéristique de Heegaard dans des revêtements finis d'une variété  $M$ . Pour ce faire, il a introduit deux nouveaux invariants qui contrôlent la croissance de la caractéristique de Heegaard dans des revêtements finis.

Il définit le **gradient de Heegaard** de  $M$ , noté  $\nabla^h(M)$ , comme la borne inférieure sur tous les revêtements finis  $M_i \rightarrow M$  du rapport  $\frac{\chi_-^h(M_i)}{d_i}$ . De même, il définit le **gradient de Heegaard fort** de  $M$ , noté  $\nabla^{sh}(M)$ ,

comme la borne inférieure sur tous les revêtements finis  $M_i \rightarrow M$  du rapport  $\frac{\chi^{sh}(M_i)}{d_i}$ .

La croissance de la caractéristique de Heegaard dans une tour de revêtements finis de  $M$  est au plus linéaire en le degré du revêtement, et le gradient de Heegaard d'une variété compacte, connexe, orientable et virtuellement fibrée est nul. Dans le cas hyperbolique, Lackenby [13, p. 320] conjecture que la réciproque est vraie :

CONJECTURE 2 (du gradient de Heegaard). — *Le gradient de Heegaard d'une variété hyperbolique  $M$  de dimension trois, compacte, connexe et orientable est nul si et seulement si la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle.*

Si la conjecture 1 est vraie, le gradient de Heegaard d'une variété hyperbolique devrait toujours être nul. Par contre, Lackenby conjecture que ce n'est pas le cas pour le gradient de Heegaard fort.

CONJECTURE 3 (du gradient de Heegaard fort). — *Le gradient de Heegaard fort des variétés hyperboliques de dimension trois compactes, sans bord, connexes et orientables n'est jamais nul.*

Un autre théorème de Lackenby constitue une avancée vers la résolution de la conjecture 1 de Thurston.

THÉORÈME. — [12, Théorème 1 (3)]

*Soit  $M$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  une famille de revêtements finis de  $M$  galoisiens de degrés  $d_i$ .*

*Si  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi^h(M_i)}{\sqrt[4]{d_i}} = 0$ , alors pour tout indice  $i$  assez grand, le revêtement  $M_i$  est fibré sur le cercle.*

Un des buts de notre travail de thèse a été de sortir du cadre des revêtements réguliers et de s'intéresser au cas général. Dans ce contexte, Maher [14] montre qu'une variété hyperbolique et sans bord est virtuellement fibrée sur le cercle si et seulement si elle admet une famille infinie de revêtements finis, pas nécessairement galoisiens, mais dont le genre de Heegaard est uniformément borné. Ce résultat et sa méthode de démonstration ont constitué le point de départ de notre travail. Le but de cet article est d'exposer brièvement un des résultats de ce travail doctoral, en lien avec la croissance du genre de Heegaard dans des revêtements finis.

**DÉFINITION 0.1.** — Soit  $N$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord. Une surface  $T$  compacte, sans bord, orientable et plongée dans  $N$  est appelée  **fibre virtuelle**  si il existe un revêtement fini  $N' \rightarrow N$  de  $N$  fibré sur le cercle et dans lequel le relevé de  $T$  est une fibre.

Une difficulté de la conjecture 1 de Thurston est de trouver explicitement un revêtement fini fibré sur le cercle, ou tout au moins contenant une fibre virtuelle. Un des résultats principaux de notre travail de thèse est un théorème qui donne un critère explicite permettant d'établir qu'un revêtement fini d'une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord contient une surface plongée incompressible qui est une fibre virtuelle. Appliqué aux scindements de Heegaard, ce théorème plus général peut se reformuler ainsi.

**THÉORÈME 0.2.** — Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $\epsilon = \text{Inj}(M)/2$ , où  $\text{Inj}(M)$  est le rayon d'injektivité de la variété  $M$ .

Il existe une constante  $k = k(\epsilon, \text{Vol}(M))$  ne dépendant que de  $\epsilon$  et du volume de  $M$  telle que, pour tout revêtement fini  $M' \rightarrow M$  de degré  $d$  vérifiant  $\chi_-^h(M') \ln \chi_-^h(M')$  /  $\ln \ln d \leq k$ , le revêtement  $M'$  est fibré sur le cercle ou est un  $I$ -fibré tordu. De plus, il contient une fibre qui est une surface plongée incompressible de genre au plus  $g(M')$ . En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .

Ce théorème a pour corollaire une version "sous-logarithmique" des conjectures 2 et 3 de Lackenby sur les gradients de Heegaard.

**DÉFINITION 0.3.** — Soit  $\eta \in ]0, 1[$ .

Le  **gradient de Heegaard  $\eta$ -sous-logarithmique**  de la variété  $M$  est défini par :

$$\nabla_{\log, \eta}^h(M) = \inf \left\{ \frac{\chi_-^h(M_i)}{(\ln \ln d_i)^\eta} \right\},$$

où la borne inférieure porte sur l'ensemble (dénombrable) de tous les revêtements finis  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  de  $M$ , de degrés  $d_i$ .

De même, on peut définir le  **gradient de Heegaard fort  $\eta$ -sous-logarithmique**  de la variété  $M$  par

$$\nabla_{\log, \eta}^{sh}(M) = \inf \left\{ \frac{\chi_-^{sh}(M_i)}{(\ln \ln d_i)^\eta} \right\},$$

où la caractéristique de Heegaard du revêtement fini  $M_i \rightarrow M$  est remplacée par sa caractéristique de Heegaard forte.

**THÉORÈME 0.4.** — Soient  $M$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord, et  $\eta \in ]0, 1[$ .

- (1) Le gradient de Heegaard  $\eta$ -sous-logarithmique  $\nabla_{\log, \eta}^h(M)$  de  $M$  est nul si et seulement si  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .
- (2) Le gradient de Heegaard fort  $\eta$ -sous-logarithmique de  $M$  est toujours strictement positif :  $\nabla_{\log, \eta}^{sh}(M) > 0$ .

*Remarque 0.5.* — L'expression explicite de la constante  $k$  apparaissant dans le théorème 0.2 permet d'étudier son comportement. Lorsque le volume  $\text{Vol}(M)$  est fixé et que  $\epsilon$  tend vers zéro, ou que  $\epsilon$  est fixé et que  $\text{Vol}(M)$  tend vers l'infini,  $k$  tend vers zéro. Ainsi, la condition suffisante devient de plus en plus difficile à vérifier à mesure que le rayon d'injectivité diminue (par exemple lors de l'ouverture d'un cusp) ou que le volume augmente (comme lorsque l'on s'intéresse à des revêtements finis de  $M$  de grand degré).

Le but de cet article est d'exposer brièvement le contexte des scindements de Heegaard qu'utilise le théorème 0.2, et de donner une idée de sa démonstration. Il s'agit d'un résumé des chapitres un et trois de la thèse [19].

Après quelques rappels sur la théorie des scindements de Heegaard et des scindements généralisés dans le premier paragraphe, les paragraphes deux et trois sont consacrés à des éléments de preuve du théorème 0.2. Cette démonstration s'effectue en deux étapes principales : la construction dans la variété  $M'$  d'un produit "long et fin", décrite au paragraphe deux. Puis, à partir de ce produit, on peut mettre en évidence une fibre virtuelle : c'est l'objet du paragraphe trois. Enfin, le paragraphe quatre expose brièvement l'idée à la base du théorème 0.4 (2) sur le gradient fort sous-logarithmique.

**Remerciements :** Je voudrais remercier de tout coeur mon directeur de thèse, Michel Boileau, pour ses encouragements, sa gentillesse et sa grande disponibilité. Un grand merci également à Juan Souto, Nicolas Bergeron, Frédéric Paulin, Joan Porti, Jean-Marc Schlenker, Jean-Pierre Otal, Vincent Guirardel, Cyril Lecuire, Steven Boyer, David Gabai, Dick Canary, Thomas Haettel, Anne Berry et Geneviève Simonet pour des discussions fructueuses.

## 1. Surfaces de Heegaard et scindements de Heegaard généralisés.

Nous renvoyons aux ouvrages [11], [10] et [1], ainsi qu'aux notes de Hatcher [9] pour des rappels de topologie de dimension trois. Si non spécifié, toutes les variétés considérées seront supposées orientables.

Une variété  $M$  de dimension trois compacte, orientée, est dite **irréductible** si toute sphère  $\mathbb{S}^2$  proprement plongée dans  $M$  borde une boule  $\mathbb{B}^3$  dans la variété  $M$ . Sinon, on dit que  $M$  est **réductible**. On peut alors trouver une sphère  $S$  proprement plongée dans  $M$  et qui ne borde aucune boule : une telle sphère est dite **essentielle**.

On rappelle également qu'une surface  $F$  compacte, connexe, proprement plongée dans  $M$  et qui n'est pas une sphère est **incompressible** si l'application  $i_* : \pi_1(F, x_0) \rightarrow \pi_1(M, x_0)$  induite par l'inclusion  $i$  entre les groupes fondamentaux est injective (pour un point base  $x_0$  sur la surface  $F$ ). D'après le Théorème du Lacet (voir [10] ou [11]), cela revient à dire que le bord de tout disque  $D$  plongé dans  $M$  intersectant la surface  $F$  transversalement et tel que  $D \cap F = \partial D$  borde un disque dans la surface  $F$ . Une variété de dimension trois connexe, compacte, orientable, irréductible et contenant une surface incompressible est dite **de Haken**. Si une variété  $M$  de dimension trois connexe, compacte, orientable et irréductible possède un revêtement fini qui est de Haken, la variété  $M$  est dite **virtuellement de Haken**.

Dans toute la suite,  $M$  est une variété de dimension trois connexe, orientée, compacte, et avec bord éventuel.

### 1.1. Scindements de Heegaard.

Pour une introduction détaillée aux scindements de Heegaard, nous renvoyons à l'article de Scharlemann [21].

#### 1.1.1. Décomposition en anses.

Soit  $M$  une variété de dimension 3 orientée. Soit un entier  $p$  entre 0 et 3. Notons  $I = [0, 1]$ .

Une  **$p$ -anse sur  $M$**  est la donnée d'un entier  $p$  entre 0 et 3 et d'une **application d'attachement**  $f : \partial\mathbb{B}^p \times \mathbb{B}^{3-p} \rightarrow \partial M$  qui est un homéomorphisme sur son image. Si  $p = 0$ , l'application d'attachement est vide.

Dans tous les cas, on dit alors que la variété  $M' = M \cup_f (\mathbb{B}^p \times \mathbb{B}^{3-p})$  de dimension 3 est obtenue à partir de la variété  $M$  par **attachement d'une  $p$ -anse**. Nous renvoyons à [20] pour plus de détails sur les décompositions en anses.

Ainsi, une 0-anse est une boule  $\mathbb{B}^3$  munie de l'application d'attachement vide. Une 1-anse est un tube plein  $I \times \mathbb{D}^2$  rattaché le long des deux disques  $\{0\} \times \mathbb{D}^2$  et  $\{1\} \times \mathbb{D}^2$ . Son **âme** est l'arc  $I \times \{0\}$  et sa **coâme** est le disque  $\{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{D}^2$ . Une 2-anse est aussi un tube plein  $\mathbb{D}^2 \times I$ , cette fois-ci rattaché le long de l'anneau  $\partial\mathbb{D}^2 \times I$ . Son **âme** est le disque  $\mathbb{D}^2 \times \{\frac{1}{2}\}$  et sa **coâme** l'arc  $\{0\} \times I$ . Une 3-anse est une boule  $\mathbb{B}^3$  rattachée le long de son bord, qui est la sphère  $\mathbb{S}^2$ .

Par dualité, en inversant l'ordre des facteurs, une 1-anse  $I \times \mathbb{D}^2$  peut être vue comme une 2-anse et réciproquement. Il en est de même pour les 0- et 3-anses.

Un **cobordisme**  $(M, N_0, N_1)$  est la donnée d'une variété  $M$  de dimension 3 et de deux sous-variétés  $N_0$  et  $N_1$  de  $M$  disjointes de dimension 2, éventuellement vides, et vérifiant  $\partial M = N_0 \sqcup N_1$ .

Soit  $(M, N_0, N_1)$  un cobordisme. On dit que  $H$  est une  **$p$ -anse sur le cobordisme**  $(M, N_0, N_1)$  si  $H$  est une  $p$ -anse sur  $M$  et si l'application d'attachement de  $H$  est à valeurs dans  $N_1$ , i.e. si  $H \cap M \subseteq N_1$ .

Une **décomposition en anses du cobordisme**  $(M, N_0, N_1)$  est la donnée d'une décomposition de la forme  $M = C_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k \cup C_1$  telle que :

- (1) La variété  $C_0$  (respectivement  $C_1$ ) est homéomorphe à  $N_0 \times I$  (respectivement  $N_1 \times I$ ), et
- (2) pour tout  $i$  entre 1 et  $k$ ,  $H_i$  est une anse du cobordisme  $(C_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_{i-1}, N_0, \partial(C_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_{i-1}) \setminus N_0)$ , où l'on a identifié  $N_0$  à l'image de  $N_0 \times \{0\}$  dans  $C_0 \cong N_0 \times I$ , et  $N_1$  à l'image de  $N_1 \times \{1\}$  dans  $C_1 \cong N_1 \times I$ .

Par dualité, une décomposition en anses du cobordisme  $(M, N_0, N_1)$  peut être vue comme une décomposition en anses du cobordisme  $(M, N_1, N_0)$  simplement en considérant les anses duales attachées "en sens contraire". Cette nouvelle décomposition est appelée **décomposition duale**.

On a le lemme important (voir par exemple [20, "Reordering Lemma" 6.2 p. 76]) :

LEMME 1.1. — *Soit  $M$  une variété de dimension 3 munie d'une décomposition en anses.*

*Après isotopie, on peut toujours attacher une anse d'indice plus petit avant une anse d'indice plus grand.*



Par contre, si une 1-anse puis une 2-anse sont attachées à  $M$ , on peut intervertir l'ordre dans lequel ces anses sont attachées si et seulement si l'on peut disjointer le bord de l'âme de la 2-anse du bord de la coâme de la 1-anse (qui sont toutes les deux homéomorphes à un disque).

□

D'après le lemme 1.1, on peut réarranger toute décomposition en anses du cobordisme  $(M, N_0, N_1)$  afin que les anses soient attachées par indice croissant : d'abord les 0-anses, puis les 1-anses, puis les 2-anses, et pour terminer les 3-anses. Ceci conduit à la notion de scindement de Heegaard, que nous allons décrire à présent.

### 1.1.2. Corps en anses et scindements de Heegaard.

Un **corps en anses**, ou **bretzel**, est le voisinage régulier tri-dimensionnel d'un graphe de genre  $g$ . On peut le voir également comme une surface de genre  $g$  remplie, ou comme une boule de dimension trois à laquelle on a rattaché  $g$  1-anses. Par exemple, si  $g = 1$ , on obtient un tore solide  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, orientée, compacte et sans bord. Un **scindement de Heegaard** de  $M$  est une décomposition de la variété  $M$  en deux corps à  $g$  anses  $H_0$  et  $H_1$  recollés par un homéomorphisme de leur bord (qui est une surface  $S$  compacte, sans bord et de genre  $g$ ). L'entier  $g$  est appelé le **genre** du scindement de Heegaard. La surface  $S$  est une **surface de Heegaard** de  $M$ . On note ce scindement  $M = H_0 \cup_S H_1$ .

Si  $M$  est une variété de dimension trois connexe, orientée, compacte et à bord non vide, on peut encore définir la notion de **scindement de Heegaard** de  $M$ , en utilisant des corps en anses creux.

**DÉFINITION 1.2** (Corps en anses creux). — *Pour obtenir un **corps en anses creux**  $H$ , ou **bretzel creux**, on part d'une surface  $F$  compacte, sans bord, non nécessairement connexe. On construit le corps en anses creux  $H$  en rattachant des 1-anses à  $F \times I$  sur le bord  $F \times \{1\}$ . Les composantes du bord de  $H$  correspondant à  $F \times \{0\}$  sont notées  $\partial_- H$ , appelées le **bord négatif de  $H$** . Les composantes de bord restantes,  $\partial H \setminus \partial_- H$ , sont notées  $\partial_+ H$  et appelées **bord positif de  $H$** . Par convention, un corps en anses comme défini au paragraphe précédent (donc qui n'a qu'une seule composante de bord) est un corps en anses dont le bord négatif est vide.*

On remarque que, comme  $\partial_+H$  est obtenu à partir de  $\partial_-H$  en attachant des anses à cette surface, la caractéristique d'Euler de  $\partial_+H$  est nécessairement inférieure ou égale à celle de  $\partial_-H$ . En particulier, le genre de  $\partial_+H$  est supérieur ou égal au genre de  $\partial_-H$ .

**DÉFINITION 1.3** (Scindement de Heegaard). — Soit  $(M, N_0, N_1)$  un cobordisme. Un **scindement de Heegaard de  $M$  associé au cobordisme**  $(M, N_0, N_1)$  est la donnée de deux corps en anses  $H_0$  et  $H_1$  vérifiant :

- (1)  $\partial_-H_0 = N_0$ ,  $\partial_-H_1 = N_1$ ,
- (2)  $\partial_+H_0 \cong \partial_+H_1 \cong S$  avec  $S$  une surface compacte sans bord, et
- (3)  $M = H_0 \cup_S H_1$  est obtenue en recollant  $H_0$  et  $H_1$  par un homéomorphisme de leur bord positif.

La surface  $S$  est encore appelée **surface de Heegaard** de  $M$  et son genre est appelé le **genre** du scindement de Heegaard  $M = H_0 \cup_S H_1$ . Remarquons que  $N_0$  ou  $N_1$  peuvent être vides.

Si la variété  $M$  n'est pas connexe, un scindement de Heegaard de  $M$  est un scindement de chacune des composantes connexes de  $M$ .

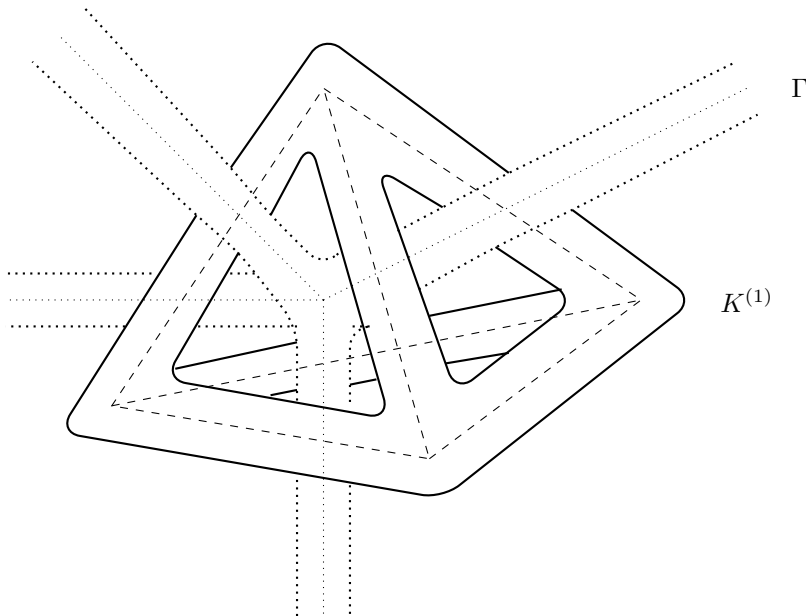
Deux scindements de Heegaard sont **isotopes** si les surfaces de Heegaard correspondantes sont isotopes dans la variété  $M$ . Ils sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme de  $M$  envoyant la première surface de Heegaard sur la seconde.

Soit  $H$  un corps en anses, éventuellement creux. Un **disque méridien** de  $H$  est un disque  $D$  proprement plongé dans  $H$  tel que  $\partial D$  est une courbe essentielle dans  $\partial_+H$ . Un **système complet de disques méridiens pour  $H$**  est une famille  $\mathcal{D}$  de disques méridiens tels que si l'on coupe  $H$  le long des disques de  $\mathcal{D}$ , on obtient une union disjointe de boules et  $\partial_-H \times I$ .

**THÉORÈME 1.4.** — Toute variété  $M$  de dimension trois, orientée et compacte admet un scindement de Heegaard.

#### Preuve du théorème 1.4.

Ce théorème découle immédiatement de l'existence d'une triangulation  $K$  de  $M$  (voir Moise [15]). Dans le cas où le bord de  $M$  est vide, un premier corps en anses s'obtient en prenant un petit voisinage régulier de  $K^{(1)}$ , le 1-squelette de la triangulation. Le complémentaire n'est autre qu'un voisinage régulier de  $\Gamma$ , le 1-squelette dual de  $K$ , et fournit le second corps en anses.  $\square$



**DÉFINITION 1.5 (Genre de Heegaard).** — Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, orientée et compacte. On définit le **genre de Heegaard** de  $M$  comme le minimum des genres des surfaces de Heegaard de  $M$ . C'est un entier positif ou nul, noté  $g(M)$ .

**Exemple :** Les seules variétés compactes, connexes, sans bord, orientables et de genre de Heegaard inférieur ou égal à 1 sont la sphère  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  et les espaces lenticulaires. En particulier, toute variété hyperbolique a un genre de Heegaard au moins égal à 2.

Un scindement de Heegaard de  $M$  associé au cobordisme  $(M, N_0, N_1)$  peut être vu comme une décomposition en anses particulière où les anses sont attachées par ordre croissant d'indice. En effet, les 0- et 1-anses constituent le premier corps en anses, de bord négatif  $N_0$ . Les 2- et 3-anses correspondent par dualité aux 1- et 0-anses du second corps en anses (de bord négatif  $N_1$ ). Considérer la décomposition duale associée au cobordisme  $(M, N_1, N_0)$  revient ainsi à intervertir l'ordre des corps en anses dans la décomposition de Heegaard correspondante.

Avec ce point de vue, les disques méridiens pour le premier corps en anses correspondent aux côames des 1-anses et les disques méridiens du second corps en anses aux âmes des 2-anses.

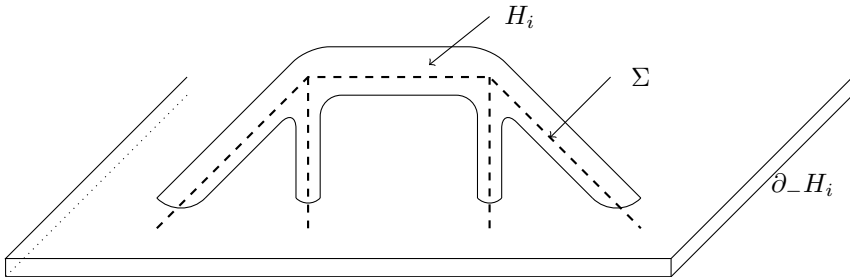
## 1.1.3. Le point de vue des fonctions de Morse.

Voir les décompositions de Heegaard comme des décompositions en anses permet de faire le lien avec les fonctions de Morse. En effet, prenons une fonction de Morse  $f$  associée au cobordisme  $(M, N_0, N_1)$  telle qu'à deux points critiques distincts correspondent des valeurs critiques distinctes, et que les valeurs critiques apparaissent par indice croissant. Autrement dit,  $f$  est une fonction de Morse à valeurs dans  $[0, 1]$  par exemple, vérifiant :

- les valeurs critiques de  $f$  sont  $0 < a_1 < \dots < a_k < b_1 < \dots < b_\ell < 1$ ,
- $N_0 = f^{-1}(0)$  si  $N_0 \neq \emptyset$ , ou 0 est une valeur critique d'indice 0 si  $N_0 = \emptyset$ ,
- $N_1 = f^{-1}(1)$  si  $N_1 \neq \emptyset$ , ou 1 est une valeur critique d'indice 3 si  $N_1 = \emptyset$ ,
- pour tout  $i$  entre 1 et  $k$ ,  $a_i$  est une valeur critique associée à un point critique d'indice 1,
- pour tout  $j$  entre 1 et  $\ell$ ,  $b_j$  est une valeur critique associée à un point critique d'indice 2.

Alors pour tout  $t \in ]a_k, b_1[$ , la surface de niveau  $f^{-1}(t)$  est une surface de Heegaard de  $M$ , et si  $t' \in ]a_k, b_1[$ , les surfaces de niveau  $f^{-1}(t)$  et  $f^{-1}(t')$  sont isotopes. On a donc toute latitude pour placer la surface de Heegaard entre  $a_k$  et  $b_1$ . C'est ce qu'on appelle un **balayage**.

On peut visualiser ce qu'est un balayage en utilisant la notion d'**échine**. Soit  $M = H_0 \cup_S H_1$  un scindement de Heegaard de  $M$ . Pour  $i$  entre 0 et 1, si  $H_i$  est un corps en anses de bord négatif vide, une échine de  $H_i$  est un graphe  $\Sigma$  plongé dans  $H_i$  tel que  $H_i$  soit un voisinage régulier de  $\Sigma$ . Si  $H_i$  est un bretzel creux (i.e.  $\partial_- H_i \neq \emptyset$ ), une échine de  $H_i$  est un graphe  $\Sigma$  proprement plongé dans  $H_i$  (donc tel que  $\Sigma \cap \partial_- H_i$  n'est constitué que de sommets de valence 1), et tel que  $\Sigma \cup \partial_- H_i$  soit un rétracte par déformation de  $H_i$ . Une échine existe toujours. Par exemple, on peut en obtenir une à partir du 1-squelette d'une triangulation. Par définition,  $H_i \setminus \Sigma$  est difféomorphe au produit  $\partial_+ H \times I$ .



Si  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$  sont deux échantons de  $H_0$  et  $H_1$  respectivement pour le scindement de Heegaard considéré, alors  $M \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1)$  est difféomorphe au produit  $S \times I$ . On a ainsi obtenu une famille paramétrée par  $t \in ]0, 1[$  de surfaces de Heegaard  $S \times \{t\}$  de  $M$ , deux à deux isotopes, formant un **balayage** de la variété  $M$ .

## 1.2. Simplifier un scindement de Heegaard : stabilisation, réductibilité et réductibilité faible.

Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, orientée et compacte, et  $H_0 \cup_S H_1$  un scindement de Heegaard de genre  $g$  de  $M$ . Il est assez facile de construire un scindement de Heegaard de  $M$  de genre  $g + 1$  à partir de  $H_0 \cup_S H_1$  comme suit.

Soit  $\alpha$  un arc proprement plongé dans  $H_1$ , avec ses deux extrémités dans  $\partial_+ H_1 \cong S$  et tel qu'il existe un disque  $D$  plongé dans  $H_1$  dont le bord est la réunion de  $\alpha$  et d'un arc de  $\partial_+ H_1$ .

On peut alors rajouter à  $H_0$  un voisinage régulier de  $\alpha$ , ce qui revient à rajouter une 1-anse d'âme  $\alpha$  à  $H_0$ , qu'on enlève à  $H_1$ . Par dualité, c'est comme si l'on avait rajouté la 1-anse de coâme  $D$  à  $H_1$ . On obtient ainsi un nouveau scindement de Heegaard de  $M$ , de genre  $g + 1$ , obtenu à partir du scindement  $H_0 \cup_S H_1$  par **stabilisation**. On remarque que deux scindements obtenus à partir de  $H_0 \cup_S H_1$  par stabilisation sont isotopes.

Par contre, le théorème de Reidemeister et Singer (voir par exemple [24]) montre que deux scindements de Heegaard d'une variété donnée sont isotopes après un certain nombre de stabilisations.

On peut ainsi toujours stabiliser un scindement. La question plus difficile est de savoir dans quel cas un scindement de Heegaard provient d'une stabilisation d'un scindement plus simple, i.e. dans quel cas un scindement de Heegaard peut-il être **déstabilisé** ?

LEMME 1.6. — *Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, compacte et orientable.*

*Un scindement de Heegaard  $H_0 \cup_S H_1$  de  $M$  peut être déstabilisé si et seulement s'il existe deux disques  $D_0$  et  $D_1$  proprement plongés respectivement dans  $H_0$  et  $H_1$  et s'intersectant en un unique point.*

Nous renvoyons au Lemme 3.1 de [21] pour une preuve de ce lemme.  $\square$

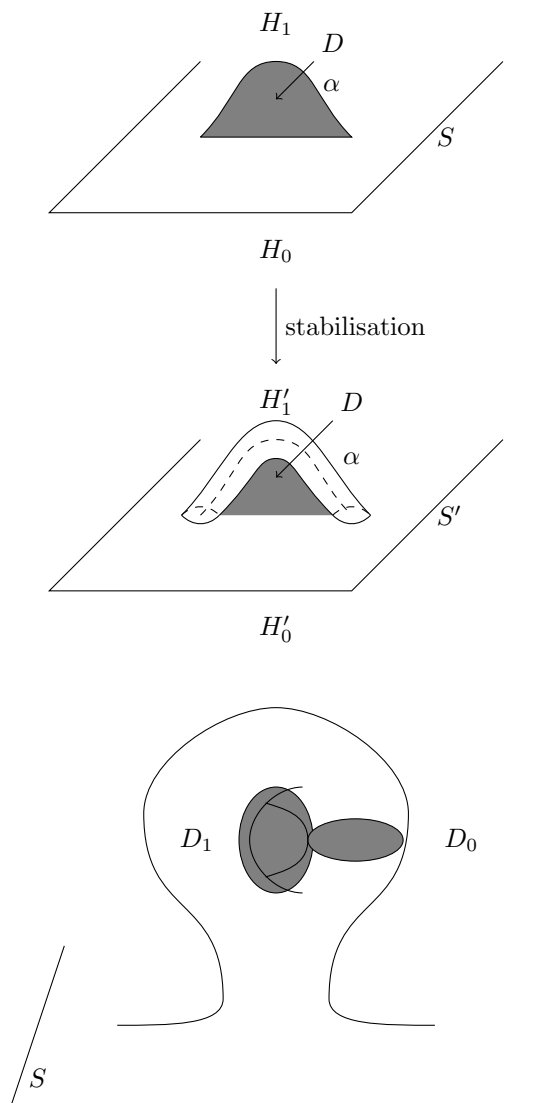


FIGURE 1.1. Scindement de Heegaard pouvant être déstabilisé.

On a la définition suivante :

DÉFINITION 1.7. — Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, orientée et compacte, et un scindement de Heegaard  $H_0 \cup_S H_1$  de  $M$ . Ce scindement est dit **réductible** s'il existe deux disques méridiens  $D_0$  et  $D_1$

proprement plongés dans  $H_0$  et  $H_1$  respectivement et tels que leurs bords coïncident :  $\partial D_0 = \partial D_1 \subset S$ .

Un scindement de Heegaard qui n'est pas réductible est dit **irréductible**.

Cette définition revient à dire que si le scindement de Heegaard est réductible, alors il existe une sphère  $\Sigma$  (qui est l'union des deux disques précédents) intersectant  $S$  en un unique cercle essentiel.

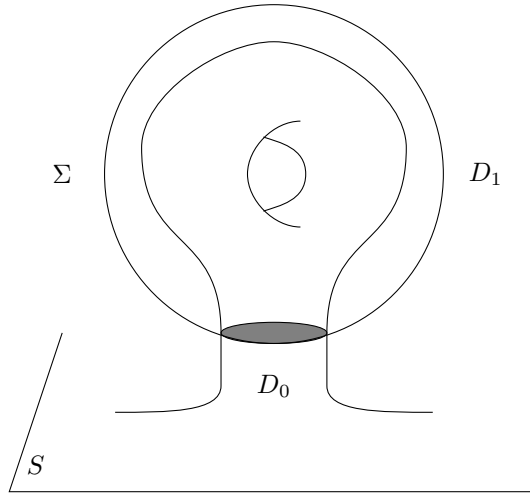


FIGURE 1.2. Scindement de Heegaard réductible.

PROPOSITION 1.8. — Si  $M$  est une variété de dimension trois, connexe, compacte, orientée, irréductible qui n'est ni une sphère  $\mathbb{S}^3$ , ni une sphère trouée, alors un scindement de Heegaard de  $M$  est réductible si et seulement s'il peut être déstabilisé.

Cette proposition utilise le théorème de Waldhausen (voir [27], ainsi que [22] et [16]) : tout scindement de Heegaard de genre  $g > 0$  de la sphère  $\mathbb{S}^3$  provient du scindement de genre 0 que l'on a stabilisé  $g$  fois.  $\square$

DÉFINITION 1.9. — Un scindement de Heegaard  $H_0 \cup_S H_1$  de  $M$  est dit **faiblement réductible** s'il existe deux disques méridiens  $D_0$  dans  $H_0$  et  $D_1$  dans  $H_1$  dont les bords sont disjoints :  $\partial D_0 \cap \partial D_1 = \emptyset$ .

Un scindement de Heegaard qui n'est pas faiblement réductible est dit **fortement irréductible**.

Remarque 1.10. — Tout scindement de Heegaard réductible est faiblement réductible.

En effet, soit un scindement de Heegaard réductible  $M = H_0 \cup_S H_1$  et deux disques méridiens  $D_0$  de  $H_0$ ,  $D_1$  de  $H_1$  dont les bords coïncident :  $\partial D_0 = \partial D_1$ . On peut toujours disjointre dans  $S$  le bord de  $D_0$  du bord de  $D_1$ .

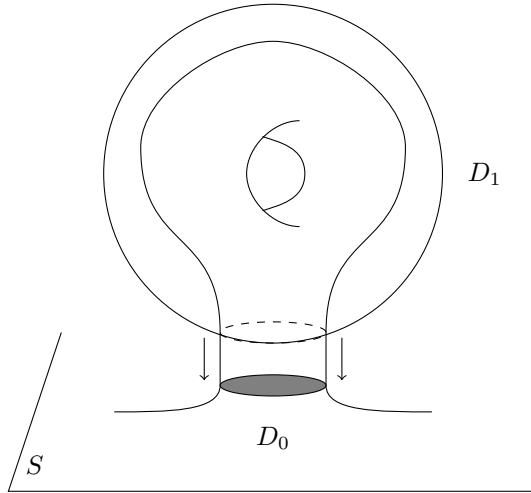


FIGURE 1.3. Scindement de Heegaard réductible, donc faiblement réductible.

**THÉORÈME 1.11 (Haken).** — *Tout scindement de Heegaard d'une variété  $M$  de dimension trois, connexe, compacte, orientée et réductible, est réductible.*

*Tout scindement de Heegaard d'une variété  $M$  de dimension trois, connexe, compacte, orientée et dont le bord est compressible, est faiblement réductible.*

La preuve originelle de ce théorème est bien sûr due à Haken [8]. Jaco propose une preuve plus simple au chapitre 2 de son ouvrage [11, paragraphe II.7 p. 20]. La version à bord est démontrée dans [2] et [3].  $\square$

### 1.3. Scindements de Heegaard généralisés, complexité et scindements minces.

Soit un scindement de Heegaard  $H_0 \cup_S H_1$  de  $M$  faiblement réductible. Il existe deux disques méridiens  $D_0$  dans  $H_0$  et  $D_1$  dans  $H_1$  ne se rencontrant



pas. Soit une décomposition en anses associée au scindement de Heegaard  $M = H_0 \cup_S H_1$  telle que  $D_0$  soit la coâme d'une 1-anse de  $M$  et  $D_1$  l'âme d'une 2-anse de  $M$ . Le premier corps en anses  $H_0$  de  $M$  correspond aux 0- et 1-anses, et le second corps à anses  $H_1$  aux 2- et 3-anses.

D'après le lemme 1.1, on peut réarranger l'ordre d'attachement des anses dans la décomposition en anses de  $M$  en recollant la 2-anse d'âme  $D_1$  avant la 1-anse de coâme  $D_0$ .

Plus généralement, prenons une décomposition en anses d'un cobordisme  $(M, N_0, N_1)$  constituée de 0-anses, puis d'une série de 1-anses et de 2-anses, puis d'une deuxième série de 1-anses et de 2-anses, etc, jusqu'à la  $n$ -ième série de 1-anses et de 2-anses, puis des 3-anses. Notons  $F_1$  le bord de la variété  $M_1$  obtenue lorsque l'on n'a rattaché que les 0-anses et la première série de 1-anses, privé de  $N_0$ ,  $F_2$  le bord de la variété  $M_2$  obtenue en rattachant la première série de 2-anses à  $M_1$  privé de  $N_0$ , et ainsi de suite jusqu'à  $F_{2n-1}$  obtenue après avoir rattaché la dernière série de 1-anses. Après une petite isotopie, on peut disjointer les surfaces  $\{F_1, F_2, \dots, F_{2n-1}\}$ . Enlevons également aux surfaces  $F_k$  les composantes qui sont des sphères bordant les 0- ou 3-anses.

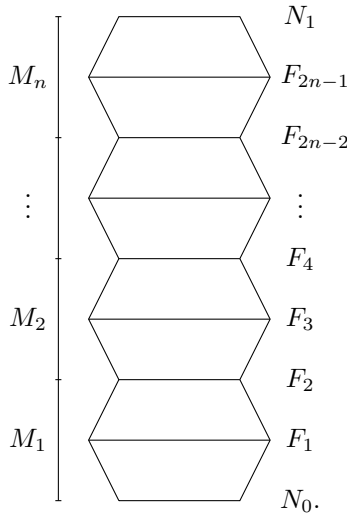
Alors les **surfaces paires**  $F_{2j}$  divisent  $M$  en  $n$  variétés  $M_1, \dots, M_n$ , et pour tout  $j$  entre 1 et  $n$ , la **surface impaire**  $F_{2j-1}$  est une surface de Heegaard pour la variété  $M_j$ . Une telle décomposition  $\mathcal{H} = (F_1, F_2, \dots, F_{2n-1})$  est appelée un **scindement de Heegaard généralisé de  $M$  associé au cobordisme**  $(M, N_0, N_1)$ . L'entier  $n$  est appelé la **longueur du scindement**. Un scindement de Heegaard généralisé de longueur 1 est un scindement de Heegaard de  $M$  usuel.

On peut représenter ce scindement de Heegaard généralisé à l'aide du schéma de la page suivante.

Étant donnée une variété  $M$  de dimension trois compacte, connexe et orientable, il y a beaucoup de latitude pour construire un scindement de Heegaard généralisé de  $M$ . Cependant, il est intéressant de trouver de tels scindements dont les surfaces paires et impaires sont les plus simples possibles. C'est cette idée que formalisent les notions de complexité et de décompositions minces.

**DÉFINITION 1.12** (Complexité d'une surface). — *Soit une surface  $F$  connexe, compacte, orientable et sans bord. La **complexité de  $F$**  est définie par :*

$$c(F) = \begin{cases} 0 & \text{si } F \cong \mathbb{S}^2, \\ 1 - \chi(F) = 2g(F) - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Si la surface  $F$  n'est pas connexe, la complexité de  $F$  est la somme des complexités de ses composantes connexes :

$$c(F) = \sum_{X \in \pi_0(F)} c(X).$$

On remarque que pour toute telle surface  $F$ ,  $-\chi(F) \leq c(F) - 1$ .

La complexité est une alternative à la caractéristique d'Euler. C'est un moyen de mesurer à quel point une surface est "compliquée", en tenant compte à la fois du genre et du nombre de composantes connexes, tout en imposant à la sphère d'avoir une complexité minimale et nulle.

Soit  $M$  une variété de dimension trois compacte, connexe et orientable, et  $\mathcal{H} = (F_1, F_2, \dots, F_{2n-1})$  un scindement de Heegaard généralisé de  $M$ . La **largeur du scindement**  $\mathcal{H}$  est le  $n$ -uplet  $(c(F_1), c(F_3), \dots, c(F_{2n-1}))$ , avec les répétitions éventuelles, ordonné par ordre décroissant. La **complexité du scindement**  $\mathcal{H}$  est  $c_+(\mathcal{H}) = \max\{c(F_{2j-1}), j = 1, \dots, n\} - 1$ .

L'ensemble des largeurs des scindements de Heegaard généralisés de  $M$  peut être muni de l'ordre lexicographique, qui est un bon ordre. En particulier, cet ensemble admet un minimum.

**DÉFINITION 1.13** (Décomposition mince et complexité de  $M$ ). — *Un scindement de Heegaard généralisé dont la largeur réalise le minimum des largeurs des scindements de  $M$  est appelé une **décomposition mince de  $M$** .*

La **complexité de la variété**  $M$  est définie par :

$$c_+(M) := \max\{c(F_{2j-1}), j = 1, \dots, n\} - 1 = c_+(\mathcal{H}),$$

où  $\mathcal{H} = (F_1, F_2, \dots, F_{2n-1})$  une décomposition mince de  $M$ .

Les notions de complexité d'un scindement de Heegaard et de décomposition mince ont été utilisées par Scharlemann et Thompson dans leur article [23]. Le lemme suivant donne une méthode pour obtenir des décompositions minces.

LEMME 1.14. — Soit  $\mathcal{H} = (F_1, \dots, F_{2n-1})$  un scindement de Heegaard généralisé. Supposons qu'il existe un indice  $i$  pour lequel la surface  $F_{2i-1}$  est faiblement réductible.

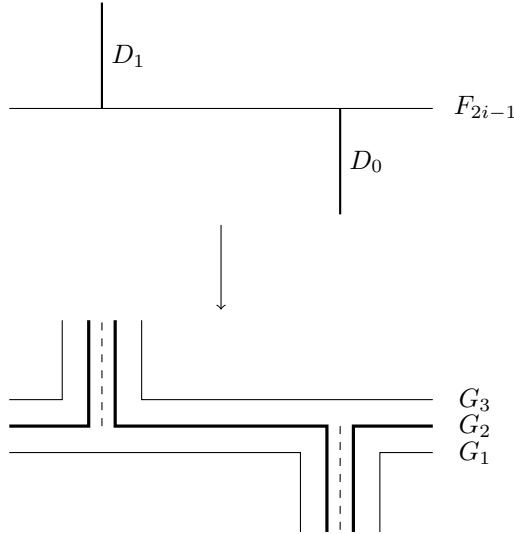
Alors, il existe une opération nommée **chirurgie de scindements de Heegaard généralisés**, permettant d'obtenir, à partir du scindement  $\mathcal{H}$ , un nouveau scindement de Heegaard généralisé  $\mathcal{H}'$  dont la largeur est strictement plus petite que celle de  $\mathcal{H}$ .

Preuve du lemme 1.14.

Supposons qu'il existe une surface  $F_{2i-1}$  faiblement réductible. On peut trouver deux disques méridiens  $D_0$  et  $D_1$  de part et d'autre de la surface de Heegaard  $F_{2i-1}$  qui ne s'intersectent pas. Prenons une décomposition en anses de  $M_i$  associée au cobordisme  $(M_i, F_{2i-2}, F_{2i})$  (avec les conventions  $F_0 = N_0$  et  $F_{2n} = N_1$ ) n'ayant que des 1- et 2-anses, telle que la surface impaire  $F_{2i-1}$  sépare les 1-anses des 2-anses, et que le disque méridien  $D_0$  corresponde à la coâme d'une 1-anse et le disque  $D_1$  à l'âme d'une 2-anse. D'après le lemme 1.1, on peut réarranger la décomposition en anses en rattachant la 2-anse d'âme  $D_1$  avant la 1-anse de coâme  $D_0$ .

En inversant l'ordre d'attachement de la 1-anse de coâme  $D_0$  et de la 2-anse d'âme  $D_1$ , on a créé un nouveau scindement de Heegaard généralisé de  $M$  : on attache sur les 0-anses la première série de 1- puis 2-anses, jusqu'à la  $i$ -ième série de 1-anses à l'exception de la 1-anse de coâme  $D_0$ . Puis on attache la 2-anse d'âme  $D_1$ , puis la 1-anse de coâme  $D_0$ , puis la  $i$ -ième série de 2-anses sauf celle d'âme  $D_1$  qui est déjà attachée. On termine la décomposition en attachant la  $(i+1)$ -ième série de 1- et 2-anses, jusqu'à la  $n$ -ième série de 1- et 2-anses, puis les 3-anses. On a donc introduit une série supplémentaire de 1- et 2-anses, correspondant à la 1-anse de coâme  $D_0$  et à la 2-anse d'âme  $D_1$ . Notons  $G_1$  la surface obtenue après avoir attaché les anses jusqu'à la  $i$ -ième série de 1-anses sauf la 1-anse de coâme  $D_0$ ,  $G_2$  la surface obtenue après avoir rattaché la 2-anse d'âme  $D_1$ , puis  $G_3$  la surface obtenue après avoir rattaché la 1-anse restante, de coâme  $D_0$ . Comme précédemment, on disjoint ces surfaces par une petite isotopie et

on enlève les composantes qui sont des sphères bordant des 0- et 3-anses. Le nouveau scindement de Heegaard généralisé  $\mathcal{H}'$  de  $M$  correspond alors aux surfaces  $(F_1, \dots, F_{2i-2}, G_1, G_2, G_3, F_{2i}, F_{2i+1}, \dots, F_{2n-1})$ .



DÉFINITION 1.15. — L'opération décrite ci-dessus permettant d'obtenir à partir du scindement  $\mathcal{H}$  un nouveau scindement de Heegaard généralisé  $\mathcal{H}' = (F_1, \dots, F_{2i-2}, G_1, G_2, G_3, F_{2i}, F_{2i+1}, \dots, F_{2n-1})$  est appelée une **chirurgie de scindements de Heegaard généralisés**.

La surface  $G_1$  est obtenue à partir de  $F_{2i-1}$  en effectuant une chirurgie de long de  $D_0$ . Ainsi,  $c(G_1) \leq c(F_{2i-1}) - 1$ .

La surface  $G_3$  est obtenue en effectuant une chirurgie de  $F_{2i-1}$  le long du disque  $D_1$ , donc on a aussi

$$c(G_3) \leq c(F_{2i-1}) - 1.$$

Comme la largeur du scindement de Heegaard généralisé  $\mathcal{H}' = (F_1, \dots, F_{2i-2}, G_1, G_2, G_3, F_{2i}, F_{2i+1}, \dots, F_{2n-1})$  est le  $(n + 1)$ -uplet  $(c(F_1), \dots, c(F_{2i-3}), c(G_1), c(G_3), \dots, c(F_{2i+1}), \dots, c(F_{2n-1}))$  ordonné par ordre décroissant, elle est strictement plus petite que la largeur de la décomposition  $\mathcal{H} = (F_1, \dots, F_{2n-1})$ . □

DÉFINITION 1.16. — Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, orientée et compacte, et  $\mathcal{H} = (F_1, \dots, F_{2n-1})$  un scindement de Heegaard généralisé de  $M$ .

Soit  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  l'ensemble des scindements de Heegaard généralisés obtenus à partir de  $\mathcal{H}$  par chirurgies de scindements de Heegaard généralisés. Un élément  $\mathcal{H}' \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  minimisant la largeur est appelée un scindement de Heegaard généralisé  $\mathcal{H}$ -**mince**.

PROPOSITION 1.17. — Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, orientée et compacte, et  $\mathcal{H}$  un scindement de Heegaard généralisé de  $M$ .

Tout scindement de Heegaard généralisé  $\mathcal{H}$ -mince  $\mathcal{H}' = (F_1, \dots, F_{2n-1})$  vérifie les propriétés suivantes.

- (1) Les surfaces impaires  $F_{2i-1}$  correspondent à des surfaces de Heegaard fortement irréductibles.
- (2) Les surfaces paires  $F_{2i}$  sont des surfaces incompressibles de  $M$ .
- (3) De plus, si la variété  $M$  est irréductible, alors aucune composante des surfaces paires n'est une sphère.

□

La preuve de cette proposition est une conséquence du lemme 1.14. Nous renvoyons à [3] et [23].

Le corollaire suivant (voir par exemple [3, Théorème 3.1 p. 280], ou [21, Théorème 3.11 p.932]) se déduit directement de la proposition 1.17.

COROLLAIRE 1.18. — Soit  $M$  une variété de dimension trois compacte, connexe et orientable, et un scindement de Heegaard  $H_0 \cup_S H_1$  de  $M$  faiblement réductible. Alors soit ce scindement est réductible, soit  $M$  contient une surface incompressible.

□

Ce corollaire pourrait permettre d'étudier la conjecture sur les variétés irréductibles virtuellement de Haken : si on arrive à trouver un scindement de Heegaard de  $M$  irréductible mais faiblement réductible, alors  $M$  est de Haken.

## 2. Construire un produit “long et fin”.

Le but des deux paragraphes qui viennent est d'esquisser une démonstration du théorème 0.2.

Soit donc  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $\epsilon = \text{Inj}(M)/2$ , où  $\text{Inj}(M)$  est le rayon d'injectivité de la variété  $M$ . Prenons  $M' \rightarrow M$  un revêtement fini de  $M$  de

degré  $d$ . Le but est de montrer que si le rapport  $\chi_-^h(M') \ln \chi_-^h(M') / \ln \ln d$  est suffisamment petit, on peut construire dans  $M'$  une surface plongée qui est une fibre virtuelle.

La démonstration comporte deux étapes. La première consiste à construire dans le revêtement  $M'$  un produit “long et fin”. Plus précisément, il s’agit d’un produit  $T \times [1, m]$  plongé dans le revêtement  $M'$ , où  $T$  est une surface connexe, compacte, sans bord et orientable. Ce produit est dit long et fin dans la mesure où l’entier  $m$  est grand, la distance entre deux surfaces fibre  $T \times \{i\}$  et  $T \times \{i + 1\}$  est uniformément minorée par une constante ne dépendant que de  $\epsilon$ , et le diamètre de chaque surface fibre  $T \times \{i\}$  est uniformément majoré par une autre constante ne dépendant que de  $\epsilon$  et du genre de  $T$ .

Pour ce faire, partons de  $S$ , une surface de Heegaard pour  $M'$  de genre minimal :  $g(S) = g(M')$ . Soit  $\mathcal{H}_S$  le scindement de Heegaard de  $M'$  de surface  $S$ . A partir de  $\mathcal{H}_S$ , on peut obtenir un scindement de Heegaard généralisé qui est une décomposition mince (voir [23], [13] et les rappels du paragraphe 1). En particulier, la complexité de ce scindement de Heegaard généralisé est égale à  $c_+(S) \leq \chi_-(S) = \chi_-^h(M')$ . L’intérêt d’une décomposition en position mince est que l’union des surfaces qui la constituent a, à isotopie près, une métrique proche de celle de surfaces minimales. C’est ce que rappelle le théorème suivant. Sa partie topologique (1) est une conséquence des travaux de Casson et Gordon, Scharlemann et Thompson ([3] et [23]). La partie métrique (2) provient de résultats de Frohman, Freedman, Hass et Scott concernant les surfaces incompressibles ([5] et [6]). La dernière partie (3) est un résultat de Pitts et Rubinstein ([18], voir aussi [25], [4] et [17]).

**THÉORÈME 2.1.** — *Soient  $N$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord, et  $\mathcal{H}$  un scindement de Heegaard généralisé en position mince. Alors  $\mathcal{H}$  vérifie les propriétés suivantes.*

- (1) *Chacune des surfaces paires est incompressible dans  $N$  et les surfaces impaires forment des surfaces de Heegaard fortement irréductibles pour les composantes connexes de la variété  $N$  découpée le long des surfaces paires.*
- (2) *Chaque surface paire, en tant que surface incompressible, est isotope à une surface minimale ou au bord d’un petit voisinage régulier d’une surface minimale non orientable.*
- (3) *Chaque surface impaire, en tant que surface de Heegaard fortement irréductible, est isotope à une surface minimale ou au bord d’un*

*petit voisinage régulier d'une surface minimale non orientable, avec un petit tube attaché verticalement dans la structure de  $I$ -fibré.*

□

**DÉFINITION 2.2** (Surface pseudo-minimale). — Une surface  $S$  plongée dans une variété riemannienne  $N$  de dimension trois est dite **pseudo-minimale** si elle vérifie les propriétés suivantes. La surface  $S$  est orientable, compacte, sans bord, et  $S$  est une surface minimale ou le bord d'un petit voisinage régulier d'une surface minimale non orientable, avec éventuellement un petit tube attaché verticalement dans la structure de  $I$ -fibré.

**LEMME 2.3.** — Soit  $N$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $S$  une surface de Heegaard pour  $N$  de genre minimal,  $\mathcal{H}_S$  le scindement de Heegaard correspondant, et  $F$  la surface correspondant à un scindement de Heegaard généralisé qui est une décomposition  $\mathcal{H}_S$ -mince. Alors  $F$  est une surface pseudo-minimale, qui divise la variété  $N$  en  $q \leq \chi_-^h(N) + 2$  corps en anses  $C_1, \dots, C_q$  avec  $\chi_-(C_j) \leq c_+(S)$  pour tout  $j$  entre 1 et  $q$ .

Preuve du lemme 2.3.

Sous ces hypothèses, la surface  $F$  est la réunion des surfaces paires et impaires d'une décomposition  $\mathcal{H}_S$ -mince. D'après le théorème 2.1, quitte à isotoper  $F$ , on peut supposer que cette surface est pseudo-minimale.

Un scindement de Heegaard généralisé peut être vu comme une décomposition en anses de la variété  $N$ , où certaines 2-anses sont attachées avant d'autres 1-anses. Partant d'une décomposition en anses associée au scindement de Heegaard de  $N$  de surface  $S$ , le scindement généralisé en position mince de surface  $F$  est obtenu en changeant l'ordre dans lequel les 1-anses et les 2-anses sont attachées. Comme au départ le scindement de Heegaard correspondait à une décomposition avec  $g(S) = g(N)$  1-anses et  $g(N)$  2-anses, le scindement généralisé en position mince comporte également  $g(N)$  1-anses et  $g(N)$  2-anses. Ainsi, la surface  $F$  découpe la variété  $N$  en  $q \leq 2g(N) = \chi_-^h(N) + 2$  corps en anses.

Par définition de la complexité d'un scindement de Heegaard généralisé et comme la surface  $F$  correspond à une position mince, la caractéristique  $\chi_-(C)$  de chacun des corps en anses  $C$  de  $N \setminus F$  est majorée par  $c_+(S)$ . □

Puisque le volume de  $M'$  est égal à  $d \text{Vol}(M)$  et qu'il y a  $q \leq \chi_-^h(M') + 2$  corps en anses  $C_1, \dots, C_q$ , il en existe un, notons-le  $C$ , tel que

$$(2.1) \quad \text{Vol}(C) \geq \text{Vol}(M) \frac{d}{\chi_-^h(M') + 2}.$$

Si  $\delta$  est le diamètre du corps en anses  $C$ , comme le volume de  $C$  est au plus celui d'une boule hyperbolique plongée de rayon  $\delta$ , on a la majoration

$$(2.2) \quad \delta \geq \frac{1}{2} \ln \left( \frac{d}{\chi_-^h(M') + 2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2\text{Vol}(M)}{\pi} \right).$$

En particulier, si le rapport  $\chi_-^h(M')/d$  est très petit, le diamètre  $\delta$  est très grand, et il y a “beaucoup de place” dans  $C$ . Le deuxième logarithme de l'expression  $\ln \ln d$  du théorème 0.2 provient de cette inégalité reliant volume et diamètre en géométrie hyperbolique.

Comme les surfaces considérées ne sont pas nécessairement connexes, on utilise la notion de  $\epsilon$ -diamètre pour laquelle des surfaces non connexes mais dont les composantes connexes ont un petit diamètre sont encore “petites”.

**DÉFINITION 2.4.** — Soit  $\epsilon > 0$ . Le  $\epsilon$ -**diamètre** d'une surface  $F$  (éventuellement non connexe) est le nombre minimal de boules de rayon  $\epsilon$  pour la métrique de  $F$  nécessaires pour recouvrir la surface  $F$ .

D'après le lemme 2.3, le bord de  $C$  est une surface pseudo-minimale, dont on contrôle le  $\epsilon$ -diamètre dans la variété  $M'$  linéairement en fonction son genre. C'est le lemme suivant.

**LEMME 2.5.** — (Maher [14, Lemme 4.2 p. 2249] et [13, Proposition 6.1].)

Soit  $S$  une surface pseudo-minimale plongée dans  $N$ , une variété riemannienne de dimension trois, compacte, sans bord et dont la courbure sectionnelle est inférieure ou égale à  $-1$ . Soit  $\epsilon \leq \text{Inj}(N)/2$  et

$$a' = 6 \left( \frac{21}{4} + \frac{3}{4\pi} + \frac{3}{4\epsilon} + \frac{2}{\sinh^2(\frac{\epsilon}{4})} \right).$$

Alors le  $\epsilon$ -diamètre de la surface  $S$  est majoré par  $a' |\chi(S)|$ , et  $S$  admet une triangulation à un seul sommet pour laquelle toute arête a longueur au plus  $2\epsilon a' |\chi(S)|$ .

□

Comme  $\partial C$  est une surface pseudo-minimale, d'après ce lemme, on sait que son  $\epsilon$ -diamètre est majoré par une fonction linéaire en  $\chi_-^h(M')$ . De plus, comme  $C$  est un corps en anses, il existe un balayage  $S \times [0, 1]$  entre l'union du bord négatif  $\partial_- C$  et d'un certain nombre d'arcs et le bord positif  $\partial_+ C$  de  $C$ . A chaque instant  $t \in ]0, 1[$ , la surface de balayage  $S \times \{t\}$  est une surface plongée homéomorphe à  $\partial_+ C$ . Comme le diamètre  $\delta$  de  $C$  est grand, ces surfaces balayent une grande région. Ce balayage semble donc



constituer un bon point de départ en vue de construire un produit long et fin dans le corps en anses  $C$ , et donc dans  $M'$ .

Cependant, le problème est que l'on ne peut pas a priori contrôler le diamètre des surfaces de balayage  $S \times \{t\}$  : il peut apparaître des tubes de Margulis longs et fins, qui soient le voisinage régulier d'une géodésique  $\gamma$  de  $S \times \{t\}$  de longueur plus petite que le rayon d'injectivité de  $M'$ . Même en transformant ce balayage en un balayage simplicial, le problème subsiste. L'idée est alors d'introduire à la suite de Maher [14] la notion de **balayage généralisé** et d'effectuer des **chirurgies** sur ces balayages généralisés. Il s'agit, chaque fois qu'apparaît un tube de Margulis autour d'une géodésique  $\gamma$  de longueur plus petite ou égale à  $\epsilon$ , de supprimer ce tube en effectuant une chirurgie de la surface de balayage (voir figure 2.1). Si ces chirurgies sont réalisées de manière continue en le paramètre  $t$ , on obtient un balayage généralisé : c'est encore une famille à un paramètre de surfaces immergées, à l'exception d'un nombre fini d'instant  $t \in [0, 1]$ . Ces surfaces ne sont plus nécessairement connexes, mais leur  $\epsilon$ -diamètre est majoré par une constante ne dépendant que de  $\epsilon$  et linéaire en le genre de  $\partial_+ C$ .

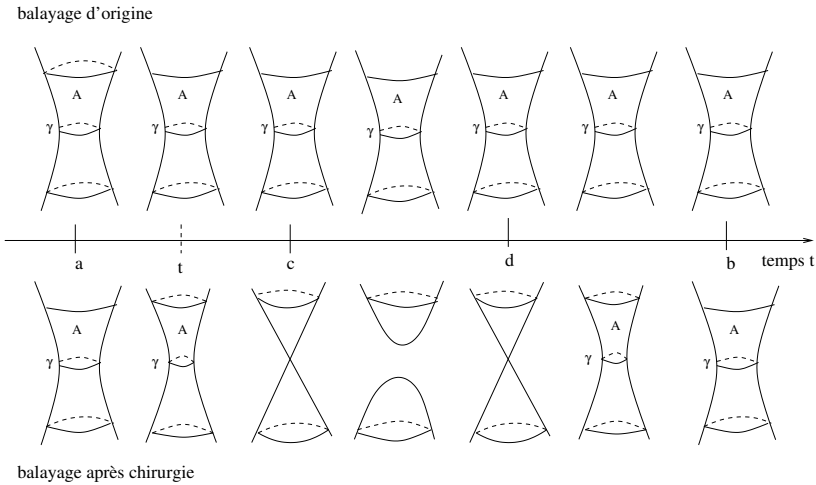


FIGURE 2.1. Chirurgie de balayage généralisé

La construction est assez technique, pour plus de précisions nous renvoyons à l'article de Maher [14] et au premier chapitre de la thèse [19]. En sélectionnant certaines composantes connexes de ces surfaces immergées du balayage généralisé et en les remplaçant par des surfaces plongées dans un

petit voisinage des surfaces immergées grâce à un résultat de Gabai [7], on obtient un produit long et fin. Plus précisément, on a le résultat suivant.

**PROPOSITION 2.6** (des Surfaces Parallèles). — *Il existe deux constantes  $r = r(\epsilon)$  et  $k_0 = k_0(\epsilon, \text{Vol}(M))$ , ainsi que deux fonctions de la caractéristique  $\chi_-^h(M')$  et du degré  $d$  du revêtement, notées*

$$K(\chi_-^h(M')) = K(\epsilon)(\chi_-^h(M')) \quad \text{linéaire en } \chi_-^h(M')$$

et

$$m(\chi_-^h(M'), d) = m(\epsilon, \text{Vol}(M))(\chi_-^h(M'), d),$$

telles que si le rapport

$$\frac{\chi_-^h(M') \ln \chi_-^h(M')}{\ln \ln d}$$

est plus petit que  $k_0$ , alors il existe un produit  $T \times [0, m]$  plongé dans le corps en anses  $C$  et long et fin au sens suivant.

- (1) *La surface fibre  $T$  est une surface connexe, compacte, sans bord et orientable, dont le genre est majoré par le genre de Heegaard du revêtement  $M'$ .*
- (2) *Pour tout  $j$  entre 0 et  $m$ , la surface fibre  $T_j := T \times \{j\}$  peut être recouverte par au plus  $K$  boules plongées dans  $M'$  de rayon  $2\epsilon$ .*
- (3) *Si  $j \neq \ell$ , les surfaces  $T_j$  et  $T_\ell$  sont séparées par une distance d'au moins  $r$ .*

De plus, les expressions des constantes  $r$ ,  $k_0$ , et des fonctions  $K$  et  $m$  sont explicites et ne dépendent que de  $\epsilon$  et du volume de  $M$ .

□

### 3. Trouver une fibration virtuelle.

Une fois ce produit construit, l'idée est de s'en servir pour montrer que si dans le revêtement fini  $M' \rightarrow M$ , le rapport  $\chi_-^h(M') \ln \chi_-^h(M') / \ln \ln d$  est suffisamment petit, il existe un revêtement fini de  $M'$  dans lequel la surface fibre  $T_j$  se relève en la fibre d'une fibration sur le cercle.

C'est ce que permet la proposition suivante, qui constitue une version quantitative du Lemme 4.12 p. 2258 de [14].

**PROPOSITION 3.1** (des Motifs). — *Supposons l'existence d'un produit long et fin  $T \times [0, m]$  dans  $M'$ , un revêtement fini de  $M$ , comme à la proposition 2.6 des Surfaces Parallèles. Les  $(m + 1)$  surfaces  $T_j = T \times$*

$\{j\}$  pour  $j = 0, \dots, m$  sont disjointes, deux à deux parallèles, connexes, orientables, plongées dans le revêtement  $M'$ , et séparées les unes des autres par une distance d'au moins  $r > 0$ . Supposons de plus que chacune de ces surfaces peut être recouverte par au plus  $K$  boules plongées dans  $M'$  de rayon  $2\epsilon \leq \text{Inj}(M)$ .

Il existe une fonction explicite  $f$  de  $r$  et de  $K$ , dont l'expression ne dépend que de  $\epsilon$  et du volume de  $M$ , et telle que si  $m \geq f(r, K)$ , alors la variété de départ  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ , et les  $(m + 1)$  surfaces parallèles dans  $M'$  sont des fibres virtuelles.

Preuve de la proposition 3.1 des Motifs.

Soit  $\mathcal{D}$  un polyèdre fondamental de Dirichlet pour la variété  $M$ , plongé dans le revêtement universel  $\widetilde{M} \simeq \mathbb{H}^3$ . Les translatés de  $\mathcal{D}$  par les transformations de revêtement forment un pavage du revêtement universel  $\mathbb{H}^3$ . En projetant ce pavage par l'application de revêtement  $\mathbb{H}^3 \rightarrow M'$ , on obtient un pavage du revêtement fini  $M' \rightarrow M$  par  $d$  copies de  $\mathcal{D}$ . Chacune des  $(m + 1)$  surfaces plongées et parallèles  $T_0, \dots, T_m$  dans  $M'$  obtenues à la proposition 2.6 intersecte un certain nombre de copies de  $\mathcal{D}$ .

**DÉFINITION 3.2.** — *La réunion dans  $M'$  des copies de  $\mathcal{D}$  que l'une des surfaces  $T_j$  intersecte est appelée un **motif (de domaines fondamentaux) pour  $T_j$** , noté  $P_j$ .*

Comme la surface est connexe, un motif est un 3-complexe connexe. On peut supposer que chacune des surfaces plongées intersecte le 2-squelette du pavage transversalement. Plus précisément, on peut supposer qu'aucune des surfaces ne rencontre un sommet des polyèdres fondamentaux, qu'elles intersectent les arêtes en des points isolés et que leurs intersections avec les faces de dimension 2 des polyèdres sont transverses. Ainsi, un motif est une réunion connexe d'un certain nombre de copies de  $\mathcal{D}$  recollées le long de leurs faces de dimension 2.

**LEMME 3.3.** — *Soit  $\mathcal{D}$  un polyèdre fondamental de Dirichlet pour la variété  $M$  plongé dans le revêtement universel  $\widetilde{M} \simeq \mathbb{H}^3$ . Soit  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$ .*

*Il existe une constante explicite  $D = D(\epsilon, \text{Vol}(M))$  ne dépendant que de  $\epsilon$  et du volume de  $M$  majorant le diamètre de  $\mathcal{D}$ .*

*Si  $T$  est une surface plongée dans  $M'$  un revêtement fini de  $M$ , qui peut être recouverte par au plus  $K$  boules plongées dans  $M'$  de rayon  $2\epsilon$ , alors  $T$  intersecte au plus  $\sigma K$  images de  $\mathcal{D}$  dans  $M'$ , où  $\sigma = \sigma(\epsilon, \text{Vol}(M))$  ne dépend que de  $\epsilon$  et du volume de  $M$ .*

*D'autre part, si  $L \in \mathbb{N}$  est fixé, le nombre de motifs de domaines fondamentaux possibles dans  $M'$  constitués d'au plus  $L$  polyèdres fondamentaux*

est majoré par une fonction  $B(L) = (\alpha\sqrt{2L})^{\alpha L}$ , où  $\alpha = \alpha(\epsilon, \text{Vol}(M))$  est un majorant du nombre de faces de  $\mathcal{D}$  de dimension 2.

□

Ce lemme combinatoire est prouvé dans [19, Lemmes 1.10 et 1.11].

Si la distance  $r$  séparant les surfaces fibres privilégiées  $T_j$  est supérieure ou égale à  $2D + 1 > 2 \text{diam}(\mathcal{D})$ , les motifs de domaines fondamentaux  $P_j$  sont deux à deux disjoints. Sinon, en ne considérant qu'une surface sur  $\frac{2D+1}{r}$ , on obtient  $\lfloor \frac{r}{2D+1} m \rfloor \geq \frac{r}{2D+1} m - 1$  surfaces  $T_j$  dont les motifs de domaines fondamentaux  $P_j$  correspondants ne s'intersectent pas.

Supposons que l'entier  $m$  est suffisamment grand pour que le nombre de surfaces restantes soit dans les deux cas supérieur ou égal à  $4\alpha^2 L^2 B(L)$ .

LEMME 3.4. — *Il existe un motif de domaines fondamentaux "abstrait"  $P$ , et au moins  $4\alpha^2 L^2$  motifs de domaines fondamentaux  $P_j$ , deux à deux disjoints, et homéomorphes à  $P$ . Plus précisément, pour au moins  $4\alpha^2 L^2$  indices  $j$  précédents pour lesquels les motifs de domaines fondamentaux correspondants sont deux à deux disjoints, il existe un homéomorphisme  $\varphi_j : P_j \rightarrow P$  qui préserve la décomposition polyédrale et les isométries de recollements de faces des domaines fondamentaux.*

Preuve du lemme 3.4.

La preuve est immédiate. En effet, comme un motif est composé d'au plus  $L$  domaines fondamentaux, il y a au plus  $B(L)$  motifs possibles. Parmi les  $4\alpha^2 L^2 B(L)$  motifs disjoints précédents, il en existe au moins  $4\alpha^2 L^2$  qui correspondent à un même motif abstrait  $P$ . □

Désormais, nous ne retenons que  $4\alpha^2 L^2$  indices  $j$  vérifiant les conclusions du lemme précédent.

LEMME 3.5. — *Le nombre de composantes connexes du bord du motif  $P$  est compris entre 2 et  $\alpha L$ .*

Preuve du lemme 3.5.

Chaque polyèdre composant le motif  $P$  a  $\alpha$  faces. Comme  $P$  est constitué d'au plus  $L$  polyèdres, il a au plus  $\alpha L$  faces. C'est un majorant du nombre de composantes connexes du bord de  $P$ .

Pour voir qu'il y a au moins deux composantes connexes dans le bord de  $P$ , il suffit de montrer par exemple que  $\partial P_1$  a au moins deux composantes connexes. Mais comme la surface  $T_1$  est contenue dans l'intérieur du motif  $P_1$ ,  $P_1 \cap (T \times [0, 1]) \neq \emptyset$  et  $P_1 \cap (T \times [1, 2]) \neq \emptyset$ . Comme le motif  $P_1$  est disjoint de  $T_0$  et  $T_2$ , les régions produits  $T \times [0, 1]$  et  $T \times [1, 2]$  ne sont

pas contenues dans  $P_1$ . Par connexité de  $T \times [0, 1]$  et  $T \times [1, 2]$ , le bord du motif  $P_1$  a au moins deux composantes connexes, l'une qui est contenue dans  $T \times ]0, 1[$  et l'autre dans  $T \times ]1, 2[$ . Ceci montre le lemme 3.5.  $\square$

Notons  $\partial P = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_s$ , où les surfaces immergées  $E_j$  sont les composantes connexes du bord du motif  $P$ , avec  $2 \leq s \leq \alpha L$ .

**DÉFINITION 3.6.** — *Pour tout indice  $j$  entre 1 et  $4\alpha^2 L^2 - 2$ , le motif  $P_j$  intersecte  $T \times ]j - 1, j[$  et  $T \times ]j, j + 1[$ . Au moins une composante connexe du bord de  $P_j$  est incluse dans le bord de la composante de  $(T \times [j - 1, j]) \setminus (T \times [j - 1, j]) \cap P_j$  contenant la fibre  $T \times \{j - 1\}$ , que nous appellerons une **composante “gauche” du bord du motif  $P_j$** . De même, au moins une composante du bord de  $P_j$  est dans le bord de la composante connexe de  $(T \times [j, j + 1]) \setminus (T \times [j, j + 1]) \cap P_j$  contenant la fibre  $T \times \{j + 1\}$ . Nous appellerons cette composante une **composante “droite” du bord de  $P_j$** .*

**LEMME 3.7.** — *Pour tout indice  $j$  entre 1 et  $4\alpha^2 L^2 - 2$ , choisissons une composante gauche et une composante droite (arbitrairement s'il en existe plusieurs du même type) pour le motif  $P_j$ . Ces deux composantes correspondent à des composantes connexes  $E_j^-$  et  $E_j^+$  du bord du motif abstrait  $P$ . Il y a au moins deux indices  $j$  et  $k$  pour lesquels les couples de composantes gauches et droites correspondant aux motifs  $P_j$  et  $P_k$  coïncident dans  $\partial P$ .*

Preuve du lemme 3.7.

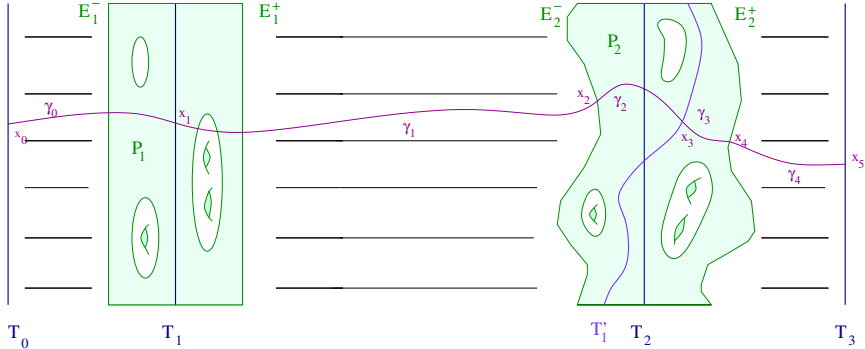
Comme il y a au plus  $s(s - 1) \leq \alpha L(\alpha L - 1) < \alpha^2 L^2$  couples de composantes gauches et droites du bord de  $P$ , il y a au moins  $(4\alpha^2 L^2 - 2)/(\alpha^2 L^2) \geq 2$  surfaces  $T_j$  et  $T_k$  avec  $1 \leq j < k \leq 4\alpha^2 L^2 - 2$ , pour lesquelles les couples de composantes gauches et droites correspondant aux motifs  $P_j$  et  $P_k$  coïncident.  $\square$

Par la suite, afin d'alléger les notations, nous noterons  $T_1$  la surface  $T_j$ ,  $T_2$  la surface  $T_k$  et  $T_3$  la dernière surface  $T_{4\alpha^2 L^2 - 1}$ . Les surfaces  $T_0$  et  $T_3$  bordent un produit  $T \times [0, 3]$  dans  $M'$ , tel que  $T_1 = T \times \{1\}$  et  $T_2 = T \times \{2\}$ . Les deux motifs  $P_1$  et  $P_2$  sont contenus dans l'intérieur du produit  $T \times [0, 3]$ . Notons  $\psi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  l'homéomorphisme composé entre les motifs  $P_1$  et  $P_2$ . Soit  $T'_1$  l'image de la surface  $T_1$  dans l'intérieur du motif  $P_2$  par  $\psi$  :  $T'_1 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(T_1) = \psi(T_1)$ . C'est une surface plongée dans le produit  $T \times [0, 3]$ . Il est clair que les surfaces  $T_1$  et  $T_2$  sont parallèles, mais il est possible qu'elles soient plongées dans leurs motifs de manière différente. Les surfaces  $T_1$  et  $T'_1$  sont en revanche plongées de manière identique dans

les motifs  $P_1$  et  $P_2$ , mais rien ne permet d'affirmer a priori que ces deux surfaces sont parallèles. C'est l'objet du lemme suivant.

LEMME 3.8. — *Les surfaces  $T_1$  et  $T'_1$  sont parallèles dans  $M'$ .*

Preuve du lemme 3.8.



AFFIRMATION. — *La classe d'homologie de  $T'_1$  dans le produit  $T \times [0, 3]$  est égale à la classe d'homologie de la fibre  $[T] = [T_1] = [T_2]$ .*

Preuve de l'affirmation.

Par choix des surfaces  $T_1$  et  $T_2$ , la composante gauche  $E_1^-$  du bord du motif  $P_1$  et la composante gauche  $E_2^-$  du bord du motif  $P_2$  ont la même image dans le motif abstrait  $P$  :  $\varphi_1(E_1^-) = \varphi_2(E_2^-)$ , donc  $E_2^- = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(E_1^-)$ . Par définition,  $E_2^-$  est un bord de la composante connexe de  $(T \times [1, 2]) \setminus (T \times [1, 2]) \cap P_2$  contenant la fibre  $T_1$ , et la composante  $E_1^-$  du bord du motif  $P_1$  est un bord de la composante de  $(T \times [0, 1]) \setminus (T \times [0, 1]) \cap P_1$  contenant la fibre  $T_0$ . Comme  $P_1 \cap (T \times [0, 1])$  est connexe, il existe un chemin  $\gamma'_2$ , proprement plongé dans  $P_1 \cap (T \times [0, 1])$  et reliant la composante  $E_1^-$  à la surface  $T_1$ . L'image par l'homéomorphisme  $\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  entre les motifs  $P_1$  et  $P_2$  du chemin  $\gamma'_2$  est un chemin  $\gamma_2 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(\gamma'_2)$  dans  $P_2$  reliant la composante du bord  $E_2^-$  à la surface  $T'_1$ . L'intérieur de ce chemin  $\gamma_2$  est contenu dans l'intérieur de la composante de  $P_2 \setminus T'_1$  contenant  $E_2^-$ . Soit  $x_2$  l'extrémité de  $\gamma_2$  appartenant à la composante de bord  $E_2^-$ , et  $x_3$  l'autre extrémité, située sur la surface  $T'_1$ .

De même, il existe un chemin  $\gamma_3$  reliant  $x_3$  à un point  $x_4$  appartenant à la composante droite  $E_2^+$  du bord de  $P_2$ , et dont l'intérieur est contenu dans l'intérieur de la composante connexe de  $P_2 \setminus T'_1$  contenant  $E_2^+$ .

Comme  $E_2^-$  appartient au bord de la composante connexe de  $(T \times [1, 2]) \setminus P_2 \cap (T \times [1, 2])$  contenant la fibre  $T_1$ , il existe un chemin  $\gamma_1$  dont l'intérieur est contenu dans l'intérieur de cette composante, et reliant un point  $x_1$  de

la fibre  $T_1$  au point  $x_2$  de  $E_2^-$ . De même, par choix de  $E_2^+$ , il existe un chemin  $\gamma_4$  dont l'intérieur est contenu dans l'intérieur de la composante de  $(T \times [2, 3]) \setminus P_2 \cap (T \times [2, 3])$  contenant la fibre  $T_3$  et reliant le point  $x_4$  de  $E_2^+$  à un point  $x_5$  de  $T_3$ . Pour finir, puisque le produit  $T \times [0, 1]$  est connexe, il existe un chemin  $\gamma_0$  dont l'intérieur est contenu dans  $T \times ]0, 1[$  reliant le point  $x_1$  de  $T_1$  à un point  $x_0$  de  $T_0$ .

Soit  $\gamma$  le chemin obtenu en concaténant les chemins  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  et  $\gamma_4$ . Le chemin  $\gamma$  relie le point  $x_0$  de  $T_0$  au point  $x_5$  de  $T_3$  et intersecte la surface  $T_1'$  en un seul point  $x_3$ . Comme l'orientation des motifs  $P_1$  et  $P_2$  coïncide, le nombre algébrique d'intersection de  $\gamma$  avec la surface  $T_1'$  est égal à  $+1$ . C'est aussi le nombre algébrique d'intersection de  $\gamma$  avec la fibre  $T$ . Par dualité de Poincaré, comme le groupe d'homologie  $H_2(T \times [0, 3], \mathbb{Z})$  est de rang un, engendré par la classe de la fibre  $[T]$ , la classe d'homologie de la surface  $T_1'$  est égale à la classe de la fibre dans l'homologie du produit, ce qui prouve l'affirmation.  $\square$

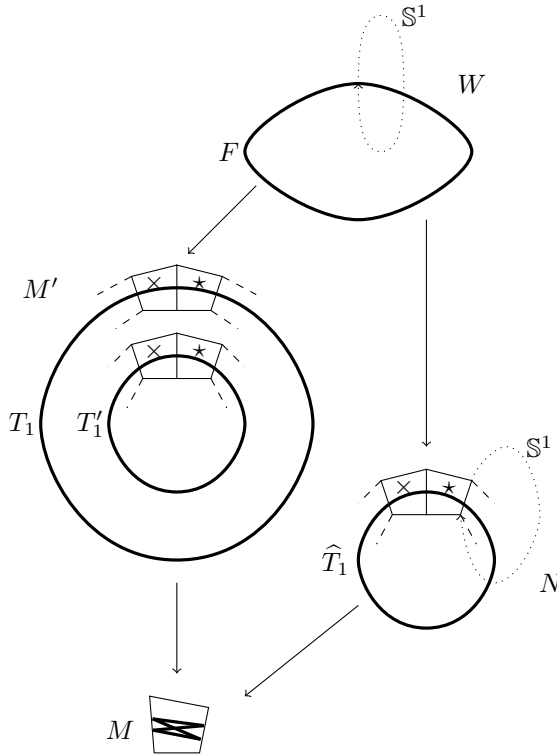
Comme la surface  $T_1'$  est plongée dans le produit  $T \times [0, 3]$ , d'après un résultat de Waldhausen [28], la surface  $T_1'$  est parallèle à la fibre  $T_1$ , éventuellement après avoir réalisé un nombre fini de compressions de  $T_1'$ . Mais comme la surface  $T_1'$  est homéomorphe à  $T_1$ , elle est de même genre que la fibre  $T_1$ . Donc en fait, il n'y a pas de compression, et ces deux surfaces bordent un produit dans  $M'$ .  $\square$

LEMME 3.9. — *La variété  $M$  possède un revêtement fini  $N$  de degré au plus  $d$  fibré sur le cercle, et la surface  $T_1$  plongée dans  $M'$  est une fibre virtuelle (incompressible).*

#### Preuve du lemme 3.9.

On peut couper la variété  $M'$  le long des deux surfaces disjointes  $T_1$  et  $T_1'$ , et ne garder que la composante connexe correspondant à la région produit entre les deux surfaces parallèles. On identifie les deux surfaces via l'homéomorphisme  $\psi = (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)|_{T_1}$  pour obtenir une variété  $N$  fibrée sur le cercle, de fibre  $\widehat{T}_1 = (T_1 \sim T_1')$ . L'homéomorphisme  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  identifiant la partie "gauche" du motif  $P_2$  avec la partie "gauche" du motif  $P_1$ , après recollement, on obtient un motif  $\widehat{P}_1$  correspondant à  $\widehat{T}_1$  dans  $N$  homéomorphe au motif  $P$ . En effet, la partie "gauche" de ce motif correspond à la partie gauche du motif  $P_2$  via l'homéomorphisme  $\varphi_2$ , et la partie "droite" du motif correspond à la partie droite de  $P_1$  via l'homéomorphisme  $\varphi_1$ . Comme ces homéomorphismes préservent les recollements entre les faces de dimension 2 des domaines fondamentaux, les recollements entre les domaines fondamentaux dans le motif  $\widehat{P}_1$  sont les mêmes que les recollements dans le motif modèle  $P$ . On obtient ainsi un pavage de  $N$  par au plus  $d$

copies de domaines fondamentaux homéomorphes à  $\mathcal{D}$  et dont les recollements correspondent. Par conséquent,  $N$  est un revêtement fini de la variété de départ  $M$ , de degré au plus  $d$ , et  $N$  est fibrée sur le cercle, de fibre  $\widehat{T}_1$ .



Les deux revêtements  $M'$  et  $N$  admettent un revêtement fini galoisien commun  $W$ , qui fibre sur le cercle puisque c'est un revêtement fini de  $N$ . Une composante de l'image réciproque de  $\widehat{T}_1$  par l'application de revêtement  $W \rightarrow N$  est une fibre  $F$  pour la fibration de  $W$  sur le cercle. Mais comme le diagramme commute,  $F$  est également une composante connexe de l'image réciproque de la surface  $T_1$  plongée dans  $M'$ , car  $T_1$  et  $\widehat{T}_1$  se projettent sur la même surface immergée dans  $M$ . Ainsi, la surface  $T_1$  est une fibre virtuelle. Comme  $F$  est incompressible dans  $W$ , la surface de départ  $T_1$  plongée dans  $M'$  est également incompressible. (Sinon, l'image réciproque d'un disque de compression  $D$  pour  $T_1$  constituerait une famille de disques de compression pour  $F$ , dont les bords bordent nécessairement des disques dans  $F$ . Comme le bord de ces disques est homotopiquement trivial dans  $\pi_1(F)$ , son image par l'application  $\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(T_1)$  induite par



l'application de revêtement est nulle. Ainsi, le disque  $D$  est homotopiquement trivial dans  $T_1$ , ce qui est une contradiction.) Par suite, la surface plongée  $T_1$  est une fibre virtuelle de  $M'$ , et est incompressible.  $\square$

Par conséquent, les  $m$  surfaces parallèles de départ sont des fibres virtuelles pour la variété  $M'$ , ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1 des motifs.  $\square$

Le théorème 0.2 se déduit des propositions 2.6 et 3.1, en évaluant le comportement des fonctions de  $d$  et  $\chi_-^h(M')$  lorsque le rapport

$$\frac{\chi_-^h(M') \ln \chi_-^h(M')}{\ln \ln d}$$

est suffisamment petit. Un calcul développé aux paragraphes 1.1 et 3.2 de la thèse [19] montre qu'il existe une constante  $k = k(\epsilon, \text{Vol}(M))$  explicite telle que si le rapport  $\chi_-^h(M') \ln \chi_-^h(M') / \ln \ln d$  est plus petit que  $k$ , alors le nombre  $m$  de surfaces parallèles obtenues à la proposition 2.6 est assez grand pour pouvoir appliquer la proposition 3.1.  $\square$

Le théorème 0.4 (1) est un corollaire immédiat du théorème 0.2.  $\square$

#### 4. Gradient fort sous-logarithmique.

L'objet de cette section est d'exposer brièvement l'idée à la base du théorème 0.4 (2) sur le gradient fort sous-logarithmique. Pour plus de détails et de précisions, nous renvoyons à la thèse [19], paragraphe 3.3.

Soit, comme dans les hypothèses du théorème,  $M$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord, et  $\eta \in ]0, 1[$ .

Comme la caractéristique de Heegaard forte d'une variété est toujours supérieure ou égale à sa caractéristique de Heegaard, le gradient de Heegaard fort  $\eta$ -sous-logarithmique de  $M$  est toujours supérieur ou égal au gradient  $\eta$ -sous-logarithmique. Le théorème 0.4 (2) est donc évident lorsque le gradient de Heegaard  $\eta$ -sous-logarithmique est strictement positif.

Supposons à présent le gradient de Heegaard  $\eta$ -sous-logarithmique nul. Il existe une famille  $(M_i \rightarrow M)_{i \in \mathbb{N}}$  de revêtements finis de  $M$  de degrés  $d_i$  tels que  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \chi_-^h(M_i) \ln \chi_-^h(M_i) / \ln \ln d_i = 0$ . Soit  $k$  la constante fournie par le théorème 0.2. Il existe un entier  $i_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout indice  $i \geq i_0$ ,

$\chi_-^h(M_i) \ln \chi_-^h(M_i) / \ln \ln d_i \leq k$ . Ainsi, pour  $i \geq i_0$ , la variété  $M_i$  contient un produit "long et fin" de  $m_i$  surfaces  $T_0, T_1, \dots, T_{m_i}$  plongées, orientables, deux à deux parallèles, et qui sont des fibres virtuelles.

Si  $G_i$  est une surface de Heegaard de  $M_i$  fortement irréductible et telle que  $2g(G_i) - 2 = \chi_-^{sh}(M_i)$ , comme  $M_i$  est hyperbolique et  $G_i$  fortement irréductible, le théorème 2.1 (3) permet d'affirmer qu'à isotopie près,  $G_i$  est une surface pseudo-minimale. En particulier, d'après le lemme 2.5, le diamètre de  $G_i$  est majoré par  $2\epsilon a'(2g(G_i) - 2) = 2\epsilon a' \chi_-^{sh}(M_i)$ .

D'autre part, puisque ce sont des fibres virtuelles, les surfaces  $T_j$  sont incompressibles dans  $M_i$ . S'il existait un indice  $j$  tel que  $T_j$  ne rencontre pas  $G_i$ , la surface  $T_j$  serait une surface incompressible dans une composante connexe du complémentaire de  $G_i$  dans  $M_i$ , qui est un corps en anses, de bord négatif vide. Ceci est une contradiction car un corps en anses de bord négatif vide ne contient aucune surface plongée incompressible. Ainsi, la surface  $G_i$  intersecte nécessairement les  $(m_i + 1)$  surfaces  $T_0, T_1, \dots, T_{m_i}$ .

Mais comme le produit est "long et fin", la distance entre deux surfaces  $T_j$  et  $T_k$  pour  $j < k$  est minorée par la constante  $r > 0$  fournie par la proposition 2.6 des Surfaces Parallèles. Comme la surface  $G_i$  ne peut pas intersecter plus de  $\lceil \frac{\text{diam}(G_i)}{r} \rceil \leq \lceil \frac{2\epsilon a' \chi_-^{sh}(M_i)}{r} \rceil$  surfaces du produit, on a l'inégalité  $m_i + 1 \leq \frac{2\epsilon a'}{r} \chi_-^{sh}(M_i) + 1$ , soit

$$m_i \leq \frac{2\epsilon a'}{r} \chi_-^{sh}(M_i).$$

Comme  $m_i$  est une fonction du degré  $d_i$  et de  $\chi_-^h(M_i)$ , un calcul montre que si  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \chi_-^h(M_i) \ln \chi_-^h(M_i) / \ln \ln d_i = 0$ , pour toute application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $f(n) =_{n \rightarrow +\infty} o(\ln n)$ , on a  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \chi_-^{sh}(M_i) / f(d_i) = +\infty$ .

En distinguant les cas, on montre alors que si le gradient  $\eta$ -sous-logarithmique de  $M$  est nul, le gradient fort  $\eta$ -sous-logarithmique est strictement positif, ce qui prouve la partie (2) du théorème 0.4.  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BOILEAU, S. MAILLOT & J. PORTI, *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*, Panoramas et Synthèses, vol. 15, Société Mathématique de France, Paris, 2003, viii+167 pages.
- [2] F. BONAHOON & J.-P. OTAL, « Scindements de Heegaard des espaces lenticulaires », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **16** (1983), n° 3, p. 451-466 (1984).
- [3] A. J. CASSON & C. M. GORDON, « Reducing Heegaard splittings », *Topology Appl.* **27** (1987), n° 3, p. 275-283.
- [4] T. H. COLDING & C. DE LELLIS, « The min-max construction of minimal surfaces », in *Surveys in differential geometry, Vol. VIII (Boston, MA, 2002)*, Surv. Differ. Geom., VIII, Int. Press, Somerville, MA, 2003, p. 75-107.

- [5] M. FREEDMAN, J. HASS & P. SCOTT, « Least area incompressible surfaces in 3-manifolds », *Invent. Math.* **71** (1983), n° 3, p. 609-642.
- [6] C. FROHMAN & J. HASS, « Unstable minimal surfaces and Heegaard splittings », *Invent. Math.* **95** (1989), n° 3, p. 529-540.
- [7] D. GABAI, « Foliations and the topology of 3-manifolds », *J. Differential Geom.* **18** (1983), n° 3, p. 445-503.
- [8] W. HAKEN, « Some results on surfaces in 3-manifolds », in *Studies in Modern Topology*, Math. Assoc. Amer. (distributed by Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.), 1968, p. 39-98.
- [9] A. HATCHER, *Notes on basic three-manifolds topology*, 2002, Livre en préparation, disponible à l'adresse <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mfds.pdf>, 72 page.
- [10] J. HEMPEL, *3-Manifolds*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1976, Ann. of Math. Studies, No. 86, xii+195 pages.
- [11] W. JACO, *Lectures on three-manifold topology*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 43, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980, xii+251 pages.
- [12] M. LACKENBY, « The asymptotic behaviour of Heegaard genus », *Math. Res. Lett.* **11** (2004), n° 2-3, p. 139-149.
- [13] ———, « Heegaard splittings, the virtually Haken conjecture and property  $(\tau)$  », *Invent. Math.* **164** (2006), n° 2, p. 317-359.
- [14] J. MAHER, « Heegaard gradient and virtual fibers », *Geom. Topol.* **9** (2005), p. 2227-2259 (electronic).
- [15] E. E. MOISE, « Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung », *Ann. of Math. (2)* **56** (1952), p. 96-114.
- [16] J.-P. OTAL, « Sur les scindements de Heegaard de la sphère  $S^3$  », *Topology* **30** (1991), n° 2, p. 249-257.
- [17] J. T. PITTS, *Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds*, Mathematical Notes, vol. 27, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981, iv+330 pages.
- [18] J. T. PITTS & J. H. RUBINSTEIN, « Existence of minimal surfaces of bounded topological type in three-manifolds », in *Miniconference on geometry and partial differential equations (Canberra, 1985)*, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., vol. 10, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1986, p. 163-176.
- [19] C. RENARD, *Revêtements finis d'une variété hyperbolique de dimension trois et fibres virtuelles.*, Thèse de Doctorat de l'Université de Toulouse (PHD Thesis).
- [20] C. P. ROURKE & B. J. SANDERSON, *Introduction to piecewise-linear topology*, Springer Study Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1982, Reprint, viii+123 pages.
- [21] M. SCHARLEMANN, « Heegaard splittings of compact 3-manifolds », in *Handbook of geometric topology*, North-Holland, Amsterdam, 2002, p. 921-953.
- [22] M. SCHARLEMANN & A. THOMPSON, « Heegaard splittings of  $(\text{surface}) \times I$  are standard », *Math. Ann.* **295** (1993), n° 3, p. 549-564.
- [23] ———, « Thin position for 3-manifolds », in *Geometric topology (Haifa, 1992)*, Contemp. Math., vol. 164, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 231-238.
- [24] L. C. SIEBENMANN, « Les bisections expliquent le théorème de Reidemeister-Singer », *Prépublications d'Orsay* **80** (1979), n° 16.
- [25] J. SOUTO, « Geometry, Heegaard splittings and rank of the fundamental group of hyperbolic 3-manifolds », in *Workshop on Heegaard Splittings*, Geom. Topol. Monogr., vol. 12, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2007, p. 351-399.

- [26] W. P. THURSTON, « Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. », *The mathematical heritage of Henri Poincare*, Proc. Symp. Pure Math. 39, Part 1, Bloomington/Indiana 1980, 87-111 (1983)., 1983.
- [27] F. WALDHAUSEN, « Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre », *Topology* **7** (1968), p. 195-203.
- [28] ———, « On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large », *Ann. of Math.* (2) **87** (1968), p. 56-88.

Claire RENARD  
École Normale Supérieure de Cachan,  
Centre de Mathématiques et de Leurs Applications.  
61 avenue du président Wilson  
F-94235 CACHAN CEDEX.  
claire.renard@normalesup.org