

Institut Fourier — Université de Grenoble I

*Actes du séminaire de*  
**Théorie spectrale  
et géométrie**

Thomas RICHARD

**Suites de flots de Ricci en dimension 3 et applications**

Volume 28 (2009-2010), p. 121-145.

[http://tsg.cedram.org/item?id=TSG\\_2009-2010\\_\\_28\\_\\_121\\_0](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2009-2010__28__121_0)

© Institut Fourier, 2009-2010, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## SUITES DE FLOTS DE RICCI EN DIMENSION 3 ET APPLICATIONS

Thomas Richard

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on passe en revue certains résultats dus à Miles Simon sur le flot de Ricci de certains espaces métriques de dimension 3 exposés dans [28] et [26].

On commence par voir le lien entre théorèmes de rigidité et convergence des variétés sur un exemple dû à Berger et Durumeric. On remarque ensuite que pour obtenir de tels théorèmes de rigidité en utilisant le flot de Ricci, il faut être capable de construire le flot pour des espaces peu lisses.

Les deux dernières parties sont consacrées à une explication de la construction de tels flots (en suivant [28] et [26]) et à des applications géométriques de cette construction.

ABSTRACT. — In this article, we review some results of Miles Simon about the Ricci flow of some 3-dimensional metric spaces. These results are from [26] and [28]. We first explain the link between rigidity theorems and convergence of manifolds on an example from Berger and Durumeric. Then, we notice that in order to obtain such rigidity theorems using Ricci flow, one needs to build a Ricci flow for potentially non-smooth spaces. The last two sections expose how to construct such flows (following [26] and [28]) and give some geometric applications of this construction.

Depuis les travaux fondateurs d'Hamilton ([17]), l'étude du flot de Ricci s'est révélée être un outil précieux pour l'étude de la géométrie des variétés de dimension 3. Le flot de Ricci a en particulier permis la résolution par Perelman de la conjecture de Poincaré en introduisant des chirurgies dans le flot ([22], [21] et [20]). Une étape cruciale dans cette étude est l'analyse des singularités du flot. Cette analyse se fait en construisant, à partir d'une solution maximale  $(M, g(t))_{t \in [0, T]}$  qui développe une singularité en  $T$ , une suite de flots de Ricci  $(M, g_i(t))_{t \in (-T_i, 0)}$  obtenus par zooms successifs autour de la singularité (voir [11]). Il est ensuite possible de trouver

---

*Mots-clés* : courbure de Ricci minorée, flot de Ricci, convergence au sens de Gromov-Hausdorff, dimension 3.

*Classification math.* : 53C44, 53C20, 53C23.

*Crédits* : L'auteur a bénéficié du soutien financier des programmes *ARCUS Brésil* (Région Rhône Alpes et MAEE) et *Math-AmSud*.

un flot de Ricci limite  $(M_\infty, g_\infty(t))_{t \in (-\infty, 0)}$  qui jouit de propriétés géométriques particulières qui aident à comprendre la structure de la singularité de départ.

On s'intéresse ici à une autre utilisation possible des suites de flots de Ricci en dimension 3, initiée par Miles Simon dans [28] et [26]. Le but est ici de construire des flots de Ricci pour des espaces qui ne sont pas lisses par approximation par des flots lisses.

Dans la première partie, on rappelle quelques faits importants au sujet de la convergence des suites de variétés riemanniennes. On décrit aussi une utilisation de ces méthodes pour obtenir des théorèmes de sphères sous des hypothèses plus faibles.

On introduit dans la deuxième partie les travaux d'Hamilton sur les variétés à courbures de Ricci positive et on verra comment, pour affaiblir certaines hypothèses, il est nécessaire de considérer un flot sur des variétés qui ne sont pas lisses, mais qui admettent seulement une métrique  $C^{1,\alpha}$ .

La troisième partie montre comment certaines estimations de Miles Simon lui ont permis de définir un flot de Ricci pour certains espaces métriques « de dimension 3, non effondrés et à courbure de Ricci minorée ». Ces espaces métriques sont construits comme limite au sens de Gromov-Hausdorff de variétés de dimension 3, on commence par quelques rappels sur la convergence au sens de Gromov-Hausdorff.

La quatrième partie donne des exemples d'applications de cette construction. On commence par décrire les applications données par Miles Simon dans [28] et [26] :

**THÉORÈME 0.1.** — *Si  $(X, d)$  est un espace métrique qui est limite au sens de Gromov-Hausdorff d'une suite de variétés de dimension 3  $(M_i, g_i)$  à courbure bornée vérifiant :*

- $\text{Ric}_{g_i} \geq kg$ ,
- $\forall x \in M_i \quad \text{vol}_{g_i}(B_{g_i}(x, 1)) \geq v_0$ .

*où  $k \in \mathbb{R}$  et  $v_0 > 0$  sont indépendant de  $i$ , alors il existe une variété lisse de dimension 3 qui est homéomorphe à  $X$ .*

**THÉORÈME 0.2.** — *Étant donnés deux réels  $v_0, D > 0$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que : si  $(M^3, g)$  vérifie  $\text{Ric}_g \geq -\varepsilon g$ ,  $\text{vol}(g) \geq v_0$  et  $\text{diam}(g) \leq D$  alors  $M$  est difféomorphe à un quotient de  $S^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^3$  par un sous-groupe d'isométries sans point fixe pour leurs métriques standards respectives.*

On présente ensuite deux nouvelles applications. On montre d'abord un théorème de finitude en dimension 3 :

**THÉORÈME 0.3.** — *Soient  $V, D > 0$  et  $k \in \mathbb{R}$ . L'ensemble des variétés compactes de dimension 3 admettant une métrique riemannienne  $g$  telle que  $\text{vol}(g) > V$ ,  $\text{diam}(g) < D$  et  $\text{Ric}_g > -kg$  ne contient qu'un nombre fini de variétés à difféomorphisme près.*

On donne ensuite une démonstration alternative d'un théorème de Cheeger et Colding [9] :

**THÉORÈME 0.4.** — *Soit  $(M_i, g_i)$  une suite de variétés compactes lisses de dimension 3 vérifiant  $\text{Ric}_{g_i} \geq -kg$  et qui converge au sens Gromov-Hausdorff vers une variété compacte lisse de dimension 3  $(M, g)$ , alors les  $M_i$  sont difféomorphes à  $M$  pour  $i$  assez grand.*

## Remerciements

L'auteur remercie Miles Simon et Gérard Besson pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, ainsi que Benoît Kloeckner pour ses commentaires utiles sur une version préliminaire de ce texte.

## 1. Convergence des variétés et théorème de la sphère

### 1.1. Convergence à la Cheeger-Gromov

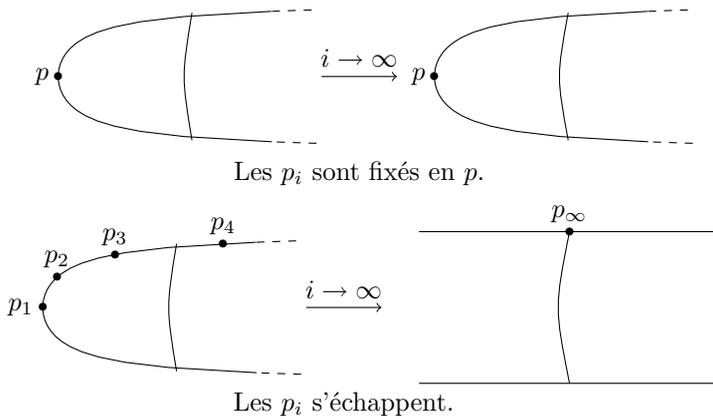
Commençons par définir la convergence au sens de Cheeger-Gromov :

**DÉFINITION 1.1.** — *Une suite de variétés pointées  $(M_i, g_i, p_i)$  converge au sens de Cheeger-Gromov- $C^{k,\alpha}$  vers  $(M, g, p)$  si on peut trouver une exhaustion  $U_i$  de  $M$  par des ouverts relativement compacts et difféomorphismes locaux  $\varphi_i : U_i \rightarrow M_i$  tels que  $\varphi_i^* g_i$  converge en norme  $C^{k,\alpha}$  sur tout compact de  $M_\infty$  vers  $g_\infty$ .*

Par définition, la limite n'est connue qu'à difféomorphisme près. Elle est en fait unique à difféomorphisme près.

On dira que la convergence est  $C^\infty$  si elle est  $C^{k,\alpha}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $\alpha \in (0, 1)$ .

Si la convergence est en norme  $C^{1,\alpha}$ , il est difficile de parler de courbure pour  $(M, g)$  car  $g$  n'est pas  $C^2$  a priori. Cependant, les propriétés ne faisant intervenir que les dérivées de la métrique à l'ordre 1 passent à la limite (diamètre, volume, rayon d'injectivité).

FIGURE 1.1. La limite dépend des  $p_i$ .

Remarquons que dans le cas où le diamètre des  $(M_i, g_i, p_i)$  est majoré indépendamment de  $i$ , le diamètre de la variété limite  $(M, g)$  est aussi majoré et les applications  $\varphi_i$  sont des difféomorphismes globaux pour  $i$  assez grand. En particulier  $M$  est difféomorphe aux  $M_i$  pour  $i$  assez grand.

*Remarque 1.2.* — L'exemple suivant (figure 1.1) montre que la limite dépend des points  $p_i$  choisis. La variété considérée est  $\mathbb{R}^2$  muni d'une métrique que l'on pourrait écrire en coordonnées polaire  $dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$  où  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction lisse croissante égale à  $\sin(r)$  au voisinage de 0 et tendant vers 1 quand  $r$  tend vers l'infini. De façon plus imagée, c'est un cylindre qu'on a fermé avec un capuchon sphérique.

Quand les  $p_i$  sont fixés, la suite est stationnaire. Quand les  $p_i$  s'échappent, la suite converge vers un cylindre plat (qui reflète la géométrie asymptotique de cette variété).

*Exemple 1.3.* — Soit  $(S^n, i^2 g_{can}, N)$  la sphère munie d'une métrique ronde de rayon  $i$  et  $N$  un point de  $S^n$ . La suite  $(S^n, i^2 g_{can}, N)$  converge au sens de Cheeger-Gromov- $C^\infty$  vers  $(\mathbb{R}^n, g_0, 0)$  où  $g_0$  est la métrique plate sur  $\mathbb{R}^n$ .

Les difféomorphismes  $\varphi_i$  sont donnés par les projections stéréographiques de la sphère de rayon  $i$  sur  $\mathbb{R}^n$ , on a alors  $\varphi_i^* g_i = \frac{1}{1+1/4(ir)^2} g_0$  où  $r$  est la distance à l'origine. Quand  $i$  tend vers  $+\infty$ , on a bien convergence vers la métrique plate. L'image à avoir en tête est celle d'une sphère dont le rayon tend vers l'infini et qui devient de plus en plus plate.

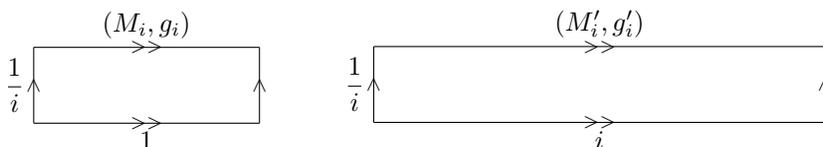


FIGURE 1.2. Deux suites de tores plats qui ne convergent pas au sens de Cheeger-Gromov.

Donnons maintenant l'énoncé du théorème de compacité de Cheeger-Gromov. Ce théorème apparaît pour la première fois en 1981 sous une forme un peu plus faible dans la première édition de l'ouvrage [16] de Gromov. Cette version du théorème est démontré dans l'article [15].

THÉORÈME 1.4. — Soit  $(M_i, g_i, p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variétés riemanniennes pointées de même dimension  $n$  vérifiant :

- (1)  $\sup_{M_i} \| \text{Rm}_{g_i} \|$  est majoré indépendamment de  $i$ .
- (2)  $\text{inj}_{g_i}(p_i)$  est minoré indépendamment de  $i$ .

Alors, à une sous suite près,  $(M_i, g_i, p_i)$  converge vers une variété de dimension  $n$  muni d'une métrique  $C^{1,\alpha}$   $(M_\infty, g_\infty, p_\infty)$  au sens de Cheeger-Gromov- $C^{1,\alpha}$ .

Exemple 1.5. — Donnons quelques exemples de suites qui ne vérifient pas les hypothèses du théorème.

Dans la figure 1.2, l'estimation sur le rayon d'injectivité n'est pas vérifiée. On verra dans la suite que les seules limites raisonnables sont le cercle  $S^1$  pour la première suite et la droite  $\mathbb{R}$  pour la deuxième. Or une limite au sens de Cheeger-Gromov d'une suite de variétés est une variété de même dimension.

Dans la figure 1.3, c'est l'estimation sur la courbure qui n'est pas satisfaite. Moralement, la limite est un cône, mais une métrique conique sur  $\mathbb{R}^2$  est seulement  $C^0$ , pas  $C^{1,\alpha}$ .

On verra dans la partie 3.1 que la convergence au sens de Gromov-Hausdorff permet de donner un sens précis à ces limites.

### 1.2. Le théorème de la sphère et ses prolongements

Considérons un des résultats les plus connus reliant la courbure d'une variété et sa topologie, du à Berger et Klingenberg au début des années 60 :

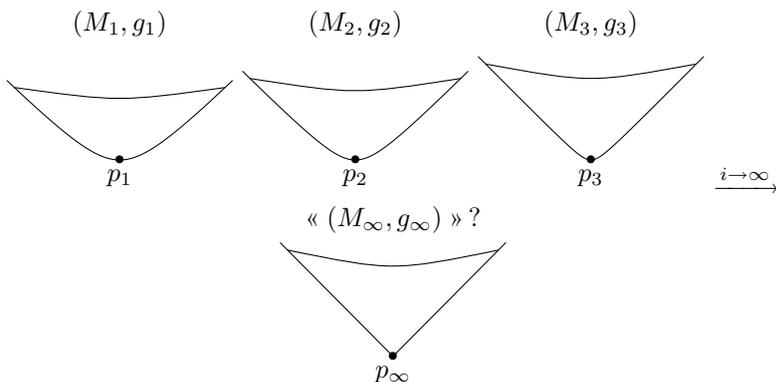


FIGURE 1.3. Sans borne sur la courbure, il n'y a pas convergence au sens de Cheeger-Gromov.

THÉORÈME 1.6 ([4],[19]). — Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne compacte simplement connexe dont les courbures satisfont  $\frac{1}{4} < K \leq 1$ , alors  $M^n$  est homéomorphe à la sphère de dimension  $n$   $S^n$ .

Le cas limite est aussi connu et est lui aussi dû à Berger :

THÉORÈME 1.7 ([4]). — Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne compacte simplement connexe dont les courbures sectionnelles satisfont  $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$ , alors  $M^n$  est homéomorphe à la sphère  $S^n$  ou isométrique à  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n/2}$ ,  $\mathbb{H}\mathbb{P}^{n/4}$ , ou  $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ .

Une question naturelle se pose alors, que peut-il se passer si  $\frac{1}{4} - \varepsilon \leq K \leq 1$ ? Un résultat dans ce sens est le suivant, prouvé par Berger en dimension paire et par Durumeric en dimension impaire dans les années 80 :

THÉORÈME 1.8 ([5],[14]). — Pour tout entier  $n$ , il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que toute variété  $(M^n, g)$  dont les courbures sectionnelles vérifient  $\frac{1}{4} - \varepsilon \leq K \leq 1$  est homéomorphe à la sphère  $S^n$  ou difféomorphe à  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n/2}$ ,  $\mathbb{H}\mathbb{P}^{n/4}$ , ou  $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ .

L'idée générale de la preuve est assez standard depuis les travaux de Cheeger et Weinstein : si le théorème est faux, on a une suite  $(M_i, g_i)$  de variétés vérifiant  $\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{n} \leq K \leq 1$  dont aucune n'est homéomorphe à  $S^n$  ou difféomorphe à  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n/2}$ ,  $\mathbb{H}\mathbb{P}^{n/4}$ , ou  $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ . La borne inférieure sur la courbure permet de majorer le diamètre des  $(M_i, g_i)$  indépendamment de  $i$  grâce au théorème de Bonnet-Myers. En utilisant le fait que le pincement des  $(M_i, g_i)$  tends vers  $\frac{1}{4}$ , on obtient une borne inférieure sur le rayon d'injectivité. En

dimension paire, cela résulte du théorème de Klingenberg.[19] En dimension impaire, c'est un théorème d'Abresch et Meyer.[1]

Toutes les hypothèses du théorème de compacité de Cheeger-Gromov sont donc vérifiées. À extraction près, la suite  $(M_i, g_i)$  converge donc au sens de Cheeger-Gromov vers une variété compacte  $(M, g)$  où  $g$  est une métrique riemannienne  $C^{1,\alpha}$ . En particulier, les  $M_i$  sont toutes diffeomorphe à  $M$  pour  $i$  assez grand. Si la convergence était  $C^\infty$  et pas seulement  $C^{1,\alpha}$ , on pourrait conclure car alors les courbures de  $(M, g)$  seraient dans l'intervalle  $[\frac{1}{4}, 1]$  et par le Théorème 1.7,  $M$  serait homéomorphe à  $S^n$  ou diffeomorphe à  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n/2}$ ,  $\mathbb{H}\mathbb{P}^{n/4}$ , ou  $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ .

Pour contourner cet obstacle, une possibilité est de trouver une preuve du Théorème 1.7 qui fonctionne pour la variété limite  $(M, g)$  obtenue précédemment. C'est la voie suivie par Berger dans [5]. La convergence  $C^{1,\alpha}$  des métriques permet de voir que toutes les propriétés de géométrie métrique d'un variété  $\frac{1}{4}$ -pincée sont vérifiées par  $(M, g)$ , en particulier les théorèmes de Toponogov pour  $K \geq \frac{1}{4}$  et  $K \leq 1$ . Une autre approche serait d'essayer de régulariser cette limite en une variété lisse qui satisfait les hypothèses désirées. À la connaissance de l'auteur, cette méthode n'a pas été fructueuse dans le cas que nous venons d'évoquer mais le sera sur des problèmes analogues que nous rencontrerons dans la suite.

## 2. Flot de Ricci et théorèmes de « presque » pincement

### 2.1. Flot de Ricci et courbure de Ricci positive en dimension 3

Rappelons qu'un flot de Ricci est, étant donné une variété une variété Riemannienne lisse  $(M, g_0)$ , une famille lisse  $g(t)_{t \in [0, T]}$  de métriques sur  $M$  solution du problème de Cauchy suivant :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = -2 \operatorname{Ric}_g \\ g(0) = g_0. \end{cases}$$

Le flot de Ricci a été introduit par Hamilton en 1982. Dans [17], Hamilton commence par montrer l'existence et l'unicité en temps court du flot si la condition initiale  $(M, g_0)$  est compacte et lisse. Pour les variétés non-compactes, l'existence a été prouvée par Shi pour les variétés lisses complètes à courbure bornée ([25]), l'unicité dans ce même cadre est due à Chen et Zhu ([10]). Hamilton et Shi ont aussi fourni un critère simple de maximalité des solutions. Nous résumons ces faits dans le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.1** ([17],[25]). — *Soit  $(M^n, g_0)$  une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle bornée, alors le problème (2.1) admet une unique solution complète à courbure bornée  $(M, g(t))_{t \in [0, T]}$ , où  $T > 0$  dépend de  $(M, g_0)$ . De plus la solution est maximale si et seulement si l'une des deux assertions suivantes est vérifiées :*

- $T = +\infty$ ,
- $T < +\infty$  et  $\sup_{M \times [0, T]} |\text{Rm}| = +\infty$ .

Autrement dit, une solution  $g(t)_{t \in [0, T]}$  dont la courbure n'explose pas quand  $t$  tends vers  $T$  peut être prolongé sur un intervalle de la forme  $[0, T + \varepsilon)$ . Remarquons aussi que dans le cas complet, l'unicité n'est valable que pour les solutions complètes à courbures bornée.

Le premier article d'Hamilton sur le flot de Ricci est resté célèbre pour le résultat suivant :

**THÉORÈME 2.2** ([17]). — *Soit  $(M^3, g)$  une variété riemannienne compacte vérifiant  $\text{Ric}_g > 0$ , alors le flot de Ricci convenablement normalisé converge vers une métrique à courbure constante positive. En particulier,  $M^3$  est difféomorphe à un quotient de  $S^3$  par un sous groupe fini de  $SO(4)$  agissant proprement et librement.*

Le cas des variétés à courbure de Ricci négative ou nulle a été traité par Shi :

**THÉORÈME 2.3** ([24]). — *Soit  $(M^3, g)$  une variété riemannienne compacte vérifiant  $\text{Ric}_g \geq 0$ , alors  $M^3$  est difféomorphe à un quotient de  $S^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^3$  par un sous-groupe d'isométries sans point fixe pour leurs métriques standards respectives.*

## 2.2. Courbure de Ricci presque positive

Comme pour le théorème de la sphère, on peut s'intéresser au cas des variétés vérifiant  $\text{Ric} \geq -\varepsilon g$ . Cependant, il est nécessaire de supposer certaines normalisations pour espérer obtenir un résultat. En effet, si  $(M^3, g)$  est une variété compacte hyperbolique,  $(M^3, Cg)$  vérifiera  $\text{Ric}_{Cg} \geq -\varepsilon Cg$  dès que  $C$  est une constante assez grande. En faisant des hypothèses supplémentaires, on peut obtenir ce résultat, dû à Miles Simon :

**THÉORÈME 2.4** ([27]). — *Étant donnés  $d_0 > 0$  et  $v_0 > 0$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que toute variété  $(M^3, g)$  vérifiant :*

- $\sup_{M^3} \|\text{Rm}\| \leq 1$ ,

- $\text{vol}(M^3, g) \geq v_0,$
- $\text{diam}(M^3, g) \leq d_0,$
- $\text{Ric}_g \geq -\varepsilon g.$

est difféomorphe à un quotient de  $S^3, S^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^3$  par un sous-groupe d'isométries sans point fixe pour leurs métriques standards respectives.

Nous exposons ici une preuve un peu différente de celle de [27]. Fixons  $d_0$  et  $v_0$  strictement positifs. Si le théorème est faux, on peut construire une suite de variétés  $(M_i, g_i)$  vérifiant  $\sup_M \|\text{Rm}\| \leq 1, \text{vol}(M, g) \geq v_0, \text{diam}(M^3, g) \leq d_0$  et  $\text{Ric}_{g_i} \geq -\varepsilon_i g$  et qui ne sont pas difféomorphes à un quotient de  $S^3, S^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^3$  avec  $\varepsilon_i$  tendant vers 0.

Les bornes sur les courbures sectionnelles, le diamètre et le volume permettent d'obtenir une minoration du rayon d'injectivité (voir par exemple [12], p199). À extraction près, on peut donc considérer que la suite  $(M_i, g_i)$  converge au sens de Cheeger-Gromov vers une variété  $(M, g)$  où  $g$  est une métrique riemannienne  $C^{1,\alpha}$ , dont moralement la courbure de Ricci est supérieure ou égale à zéro en un sens faible. Cependant, contrairement à la preuve du Théorème 1.8, il est difficile de démontrer le Théorème 2.3 en utilisant uniquement les outils métriques que nous donne la convergence  $C^{1,\alpha}$ . On va donc essayer de régulariser  $g$ .

Pour cela, on va utiliser le flot de Ricci. Les théorèmes d'existence pour le flot de Ricci ne fonctionnent a priori que pour une métrique  $C^\infty$ , si l'on veut utiliser le flot pour régulariser  $g$ , il faut donc le construire. Pour cela, on va utiliser le théorème de compacité pour les solutions du flot de Ricci d'Hamilton :

**THÉORÈME 2.5** ([18]). — *Soit  $(M_i, g_i(t), p_i)_{t \in (\alpha, \omega)}$  une suite de flots de Ricci, on suppose que  $0 \in (\alpha, \omega)$ . Sous les hypothèses suivantes :*

- $\sup_{M_i \times (\alpha, \omega)} \|\text{Rm}(x, t)\| \leq C,$
- $\text{inj}_{g_i(0)}(p_i) \geq \delta.$

*La suite  $(M_i, g_i(t), p_i)$  admet une sous-suite qui converge de façon  $C^\infty$  au sens de Cheeger-Gromov vers un flot de Ricci  $(M, g(t), p)_{t \in (\alpha, \omega)}$ .*

**Remarque 2.6.** — Une suite de flots  $(M_i, g_i(t))_{t \in (\alpha, \omega)}$  converge de façon  $C^\infty$  vers  $(M, g(t))_{t \in (\alpha, \omega)}$  au sens de Cheeger-Gromov s'il existe une exhaustion  $U_i$  de  $M$  par des ouverts relativement compacts et des difféomorphismes locaux  $\varphi_i : U_i \rightarrow M_i$  tels que  $\varphi_i^* g_i(t)$  converge en norme  $C^\infty$  vers  $g(t)$  sur tout compact de  $M \times (\alpha, \omega)$ .

**Remarque 2.7.** — La convergence étant cette fois  $C^\infty$ , les bornes sur la courbures passent à la limite. Ce sont les propriétés régularisantes du flot de Ricci qui permettent de se passer d'un contrôle sur les dérivées

covariantes de la courbures pour obtenir une convergence lisse. De plus, par extraction diagonale, on peut remplacer la première estimation par celle-ci  $\sup_{M_i} \|\text{Rm}_{g_i(t)}\| \leq C(t)$  où  $C(t)$  est une fonction bornée sur les compacts de  $(\alpha, \omega)$ .

Dans le but d'appliquer ce théorème, remarquons d'abord que, comme par hypothèse  $\sup_{M_i} \|\text{Rm}\|$  est majoré indépendamment de  $i$ , il existe  $T$  strictement positif tel que le flot de Ricci  $(M_i, g_i(t))$  de chacune des variétés  $(M_i, g_i)$  existe sur  $[0, T]$  et vérifie que  $\sup_{M_i \times [0, T]} \|\text{Rm}\|$  est borné indépendamment de  $i$ . Cette estimation, appelée *doubling time estimate* s'obtient en appliquant le principe du maximum parabolique à  $|\text{Rm}|^2$  (voir [11], p.225).

Ensuite, la courbure étant bornée, on peut contrôler l'évolution de volume et du diamètre de chaque  $(M_i, g_i(t))$  sur  $[0, T]$ . Ceci permet de minorer le rayon d'injectivité des  $(M_i, g_i(t))$  et donc d'appliquer le théorème d'Hamilton.

On obtient donc que la suite de flots de Ricci  $(M_i, g_i(t), p_i)$  converge de façon  $C^\infty$  vers un flot de Ricci  $(\widetilde{M}, \widetilde{g}(t), p)$  (à extraction près). De plus le diamètre des  $(M_i, g_i(t))$  étant contrôlé, il en est de même pour celui de  $(\widetilde{M}, g(t))$  qui est donc compacte. On en déduit donc que les  $M_i$  sont toutes difféomorphes à  $\widetilde{M}$  pour  $i$  assez grand.

Il suffit donc de montrer que la variété  $\widetilde{M}$  admet une métrique à courbure de ricci positive ou nulle. Pour cela, on utilise le lemme suivant, dû à Miles Simon :

LEMME 2.8 ([28], Lemme 4.1). — *Il existe trois réels strictement positifs  $\varepsilon_0$ ,  $c_0$  et  $T_0$  tels que si  $(M, g(t))_{t \in [0, T]}$  est un flot de Ricci sur un variété compacte de dimension 3 vérifiant  $\text{Ric}_{g(0)} \geq -\varepsilon g(0)$  pour un  $\varepsilon$  inférieur à  $\varepsilon_0$  et  $\sup_M \|\text{Rm}_{g(0)}\| \leq 1$ , alors  $\text{Ric}_{g(t)} \geq -c_0 \varepsilon g(t)$  pour tout  $t$  dans  $[0, T] \cap [0, T_0]$ .*

*Ébauche de preuve.* — Considérons le 2-tenseur symétrique suivant :

$$L(t) = \text{Ric}_{g(t)} + t\delta(t) \text{Scal}_{g(t)} g(t) + \delta(t)g(t)$$

où  $\delta(t) = \varepsilon(1 + \beta t)$  avec  $\beta$  un constante positive assez grande. On dérive par rapport au temps, on obtient une équation de la forme :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \Delta L + Q$$

où  $Q$  est un 2-tenseur dépendant des valeurs propres de Ric. On raisonne comme dans la preuve du principe du maximum pour les 2-tenseurs d'Hamilton (voir [17]). À  $t = 0$ , on a  $L \geq 0$ . Supposons qu'à un temps  $t_0$ , on ait

$L \geq 0$  sur  $[0, t_0]$  et que l'on puisse trouver un vecteur  $v$  dans le noyau de  $L$  en  $t = t_0$ . Quelques calculs élémentaires mais un peu longs pour lesquels on renvoie [28] montrent que  $Q(v, v) \geq 0$  si  $t_0 \leq T_0$  où  $T_0$  est explicite, et donc en particulier,  $\frac{\partial L}{\partial t} \geq 0$ . Ce qui montre que la condition  $L \geq 0$  est préservée par le flot pour  $t \in [0, T_0]$ .

Ensuite, le fait que  $\sup_M \|\text{Rm}\| \leq 1$  nous permet de majorer explicitement la norme de  $\text{Rm}$  sur un petit intervalle de temps. On peut donc majorer  $\text{Scal}$  sur ce même intervalle de temps. Ceci donne la minoration de  $\text{Ric}$  requise.  $\square$

En restreignant nos flots  $(M_i, g_i(t))$  à  $[0, T] \cap [0, T_0]$ , et en ne considérant que des  $i$  assez grands, on obtient que :  $\text{Ric}_{g_i(t)} \geq -\varepsilon_i c_0 g_i(t)$ . La convergence étant  $C^\infty$ , on obtient donc que  $\text{Ric}_{\tilde{g}(t)} \geq 0$ . Ce qui conclut donc la démonstration du Théorème 2.4.

### 3. Flot de Ricci de certains espaces métriques

Dans la partie précédente, on a vu comment on peut être amené à construire un flot de Ricci pour une variété qui n'est munie que d'une métrique  $C^{1,\alpha}$ , ceci nous a permis de montrer le Théorème 2.4. On va s'intéresser ici à une construction qui permet d'obtenir un flot de Ricci pour certains espaces métriques qui ne sont pas riemanniens a priori. Cette construction est apparue dans [28] et [26].

#### 3.1. Distance de Gromov-Hausdorff

Les espaces métriques pour lesquels nous allons construire un flot de Ricci apparaissent comme limite au sens de Gromov-Hausdorff de variétés de dimension 3 satisfaisant certaines contraintes géométriques. On commence donc cette troisième partie par quelques considérations au sujet de la distance de Gromov-Hausdorff. Pour plus de détails, on renvoie à [7] et [16].

Dans toute la suite du texte, si  $(X, d)$  est un espace métrique,  $B_d(x, r)$  désigne la boule ouverte pour  $d$  de centre  $x \in X$  de rayon  $r \geq 0$ , de même,  $\bar{B}_d(x, r)$  désigne la boule fermée de centre  $x$  et de rayon  $r$ .

**DÉFINITION 3.1.** — Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques compacts. On dit  $f : X \rightarrow Y$  est une  $\varepsilon$ -approximation quand pour tout  $x$  et  $x'$  dans  $X$ , on a :

$$|d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x'))| < \varepsilon$$

et  $\max_{y \in Y} d_Y(y, f(X)) < \varepsilon$ .

**DÉFINITION 3.2.** — Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques compacts. La distance de Gromov-Hausdorff  $d_{GH}(X, Y)$  entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  est l'infimum des  $\varepsilon$  tels qu'il existe une  $\varepsilon$ -approximation de  $X$  dans  $Y$  et une  $\varepsilon$ -approximation de  $Y$  dans  $X$ .

La distance de Gromov-Hausdorff est une distance sur l'ensemble des classes d'isométrie d'espaces métriques compacts.

*Remarque 3.3.* — L'hypothèse de compacité est essentielle pour que  $d_{GH}$  soit une distance, on peut par exemple montrer que  $d_{GH}([0, 1], \mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$ .

On dira qu'une suite d'espaces métriques compacts  $(X_i, d_i)$  tends vers un espace métrique compact  $(X, d_X)$  quand  $d_{GH}(X_i, X)$  tends vers 0 quand  $i$  tends vers l'infini.

Cette convergence est beaucoup moins restrictive que la convergence au sens de Cheeger-Gromov. Par exemple, même si tous les éléments de la suite sont des variétés de même dimension  $n$ , il est tout à fait possible que la limite soit une variété de dimension différente ou n'admette aucune structure de variété.

Dans certains cas, il sera utile de généraliser la notion de convergence au sens de Gromov-Hausdorff quand les éléments de la suite ne sont pas compacts :

**DÉFINITION 3.4.** — Soient  $(X_i, d_i, p_i)$  une suite d'espaces métriques pointés et  $(X, d, p)$  un espace métrique pointé. On suppose que les boules fermées de  $X$  et des  $X_i$  sont compactes. On dira que  $X_i$  tend vers  $X$  si, pour tout  $R > 0$ ,  $d_{GH}(\overline{B_{d_i}}(p_i, R), \overline{B_d}(p, R))$  tends vers 0 quand  $i$  tends vers l'infini.

*Exemple 3.5.* — On considère les réseaux  $X_i = \frac{1}{i}\mathbb{Z}^2$  munis de la distance  $d_i$  induite par  $\mathbb{R}^2$ , quand  $i$  tend vers  $+\infty$ ,  $(X_i, d_i, 0)$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers  $\mathbb{R}^2$  muni de sa métrique euclidienne.

*Exemple 3.6.* — Les exemples rencontrés dans la partie 1.1 qui ne convergent pas au sens de Cheeger-Gromov convergent au sens de Gromov-Hausdorff vers les limites que l'intuition suggérait. Les deux suites de la figure 1.2 convergent respectivement vers un cercle de longueur 1 et  $\mathbb{R}$  muni de sa métrique usuelle.

La suite définie dans la figure 1.3 converge vers un cône de  $\mathbb{R}^3$  muni de sa métrique intrinsèque.

*Exemple 3.7.* — Soit  $X$  un ensemble muni d'une famille de distance  $d_i : X^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui converge uniformément vers une distance  $d$  sur  $X$ . Alors,  $(X, d_i)$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers  $(X, d)$ .

Un des avantages de cette convergence sur la convergence au sens de Cheeger-Gromov est qu'il est beaucoup plus facile d'obtenir des théorèmes de compacité. Par exemple :

**THÉORÈME 3.8.** — *Si une suite  $(M_i, g_i, p_i)$  de variétés riemanniennes pointées de dimension  $n$  vérifie  $\text{Ric}_{g_i} \geq -k$ , alors on peut en extraire une sous suite convergente au sens de Gromov-Hausdorff.*

Nous avons maintenant mis en place les outils nous permettant de définir les espaces métriques que l'on considérera ici :

**DÉFINITION 3.9.** — *On dira qu'un espace métrique  $(X, d_X)$  appartient à  $\mathcal{M}(k, v_0)$  s'il est limite au sens de Gromov-Hausdorff d'une suite  $(M_i, g_i, p_i)$  de variétés riemanniennes complètes pointées de dimension 3 à courbure bornée satisfaisant :*

- (a)  $\text{Ric}_{g_i} \geq -kg_i$ .
- (b) Pour tout  $x \in M_i$ ,  $\text{vol}_{g_i}(x, 1) \geq v_0$ .

### 3.2. Bornes sur le flot pour les variétés lisses dans $\mathcal{M}(k, v_0)$

*Les énoncés qui suivent sont uniquement valides en dimension 3.*

Les démonstrations de cette section seront parfois un peu sommaires, on renvoie pour plus de détails à l'article original de Miles Simon [26].

Pour construire un flot de Ricci des espaces métriques appartenant à  $\mathcal{M}(k, v_0)$ , on va utiliser la même méthode que dans la preuve du Théorème 2.4. On considère donc une suite de variétés lisses  $(M_i, g_i, p_i)$  complètes à courbure bornée et satisfaisant les hypothèses (a) et (b) qui approche au sens de Gromov-Hausdorff l'espace métrique  $(X, d)$  pour lequel on veut construire un flot de Ricci.

Dans cette partie, on aura souvent besoin de considérer des flots de Ricci sur des variétés complètes non compactes à courbure bornée. Les travaux de Shi donnent l'existence et l'unicité en temps court de solutions à courbure bornée pour de telles conditions initiales. On ne considérera que ces solutions à courbure bornée.

On va voir ici une étape cruciale de cette construction, due à Miles Simon. L'objectif est d'obtenir des bornes assez fines sur le flot de Ricci des variétés

$(M_i, g_i)$  pour pouvoir en extraire un flot de Ricci limite qui sera, en un sens à préciser, le flot de l'espace métrique  $(X, d)$ . Voici le théorème principal qui rassemble ces estimations :

**THÉORÈME 3.10** ([26], Théorème 1.9). — *Soit  $(M^3, g_0)$  une variété riemannienne complète à courbure bornée. On suppose que :*

(a)  $\text{Ric}_{g_0} \geq -kg_0$ .

(b) *Pour tout  $x$  dans  $M$ ,  $\text{vol}_{g_0}(B(x, 1)) \geq v_0$ .*

Alors le flot de Ricci  $(M, g(t))$  avec pour conditions initiale  $g(0) = g_0$  existe au moins sur  $[0, T]$  (où  $T$  ne dépend que de  $k$  et  $v_0$ ) et vérifie, pour tout  $t$  dans  $[0, T]$  :

(i)  $\sup_M \|\text{Rm}_{g(t)}\| \leq \frac{K}{t}$ ,

(ii)  $\text{Ric}_{g(t)} \geq -Kg(t)$ .

(iii) *Pour tout  $x$  dans  $M$ ,  $\text{vol}_{g(t)}(B(x, 1)) \geq \frac{v_0}{2}$ .*

où  $K$  est un réel positif ne dépendant que de  $k$  et  $v_0$ .

Le reste de cette partie est consacré à la preuve de ce théorème.

### 3.2.1. Lemmes sur la courbure, la distance, le volume et le temps d'existence.

**LEMME 3.11** ([26], Lemme 4.3). — *Soit  $(M^3, g(t))_{t \in [0, T]}$  un solution complète du flot de Ricci avec  $T \leq 1$ . On suppose que, pour tout  $t \in [0, T]$  :*

(i)  $\text{Ric}_{g(t)} \geq -kg(t)$ .

(ii) *Pour tout  $x$  dans  $M$ ,  $\text{vol}_{g(t)}(B(x, 1)) \geq v_0 > 0$*

Alors, il existe  $c_0$  ne dépendant que de  $k$  et  $v_0$  tel que, pour tout  $t \in (0, T)$  :

$$\sup_M \|\text{Rm}_{g(t)}\| \leq \frac{c_0}{t}$$

En particulier, la solution n'est pas maximale.

Rappelons qu'une solution complète du flot de Ricci  $(M, g(t))_{t \in [0, T]}$  n'est pas maximale si  $T < +\infty$  et  $\sup_{M \times [0, T]} \|\text{Rm}\| < \infty$ . Une telle solution peut toujours se prolonger sur un intervalle de temps  $[0, T + \varepsilon)$  pour  $\varepsilon$  assez petit.

*Démonstration.* — On raisonne par l'absurde. On suppose qu'on peut trouver une suite de flots de Ricci  $(M_i, g_i(t))_{t \in [0, T_i]}$  vérifiant les hypothèses du lemme et tels que :

$$\sup_{(x, t) \in M_i \times (0, T_i)} \|\text{Rm}_{g_i(t)}(x)\| t \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On peut alors trouver des points  $(p_i, t_i) \in M_i \times (0, T_i)$  et une suite  $\varepsilon_i$  tendant vers 0 tels que :

$$\| \text{Rm}_{g_i(t_i)}(x_i) \| t_i = -\varepsilon_i + \sup_{(x,t) \in M_i \times (0,t_i)} \| \text{Rm}_{g_i(t)}(x) \| t \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Remarquons que comme  $t_i \leq 1$ , on a que  $c_i = \| \text{Rm}_{g_i(t_i)}(x_i) \|$  tends vers l'infini quand  $i$  tend vers l'infini.

On effectue maintenant un « zoom parabolique » autour des points  $(p_i, t_i)$ . Posons :

$$\tilde{g}_i(\tilde{t}) = c_i g_i(t_i + \frac{\tilde{t}}{c_i}).$$

C'est une suite de flot de Ricci dont chacun est défini au moins sur  $(-t_i c_i, 0]$ . Par définition des  $(p_i, t_i)$ ,  $-t_i c_i$  tends vers  $-\infty$ .

En utilisant encore la définition des  $(p_i, t_i)$ , on voit que  $\| \text{Rm}_{\tilde{g}_i(\tilde{t})} \|$  est majoré sur tout intervalle compact de  $(-\infty, 0]$  dès que  $i$  est assez grand. De plus, l'hypothèse de minoration de la courbure de Ricci et le théorème de Bishop-Gromov permettent d'affirmer que, pour tout  $p$  dans  $M_i$ , tout  $\tilde{t}$  dans  $(-t_i c_i, 0]$  et tout  $r$  dans  $(0, \sqrt{c_i})$  :

$$(3.1) \quad \tilde{v}_0 r^3 \leq \text{vol}_{\tilde{g}_i(\tilde{t})}(B(p, r)) \leq l r^3.$$

où  $l$  et  $\tilde{v}_0$  ne dépendent que de  $v_0$ . Cette estimation permet, avec la majoration obtenue précédemment sur la courbure, par un théorème dû à Cheeger Gromov et Taylor, de minorer le rayon d'injectivité des  $\tilde{g}_i$ .

On peut alors, grâce au théorème de compacité d'Hamilton, extraire un flot limite  $(M_\infty, \tilde{g}_\infty(\tilde{t}), p_\infty)_{\tilde{t} \in (-\infty, 0)}$ . C'est une solution ancienne (son temps d'existence n'est pas borné à gauche) à courbure de Ricci positive ou nulle. De plus, on a  $\| \text{Rm}_{\tilde{g}_\infty(0)}(p_\infty) \| = 1$ , la solution n'est donc pas plate. L'estimation (3.1) permet de voir que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \text{vol}_{\tilde{g}_\infty(0)}(B(p_\infty, r)) r^{-3} > 0$  ce qui contredit un théorème de Perelman qui assure qu'en dimension 3, pour toute solution ancienne non plate, la limite considérée est nulle.  $\square$

LEMME 3.12 ([26], Lemme 6.1). — Soit  $(M^3, g(t))_{t \in [0, T]}$  un solution complète du flot de Ricci. On suppose que, pour tout  $t \in [0, T]$  :

- (i)  $\text{Ric}_{g(t)} \geq -k g(t)$ ,
- (ii)  $\| \text{Rm}_{g(t)} \| \leq \frac{c_0}{t}$ .

Alors, si on note  $d_t : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  la distance riemannienne associée à  $g(t)$ , on a, pour tout  $0 \leq s \leq t \leq T$  :

$$d_s - c_2(\sqrt{t} - \sqrt{s}) \leq d_t \leq e^{c_1(t-s)} d_s$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes ne dépendant que de  $c_0$  et  $k$ .

*Démonstration.* — La démonstration est assez classique. On renvoie à par exemple à [12].  $\square$

LEMME 3.13 ([26], Corollaire 6.2). — Soit  $(M^3, g(t))_{t \in [0, T]}$  une solution complète du flot de Ricci satisfaisant les hypothèses du Lemme 3.12. On suppose qu'à  $t = 0$ , on a :

$$\text{Pour tout } x \text{ dans } M \quad \text{vol}_{g(0)}(B_{g(0)}(x, 1)) \geq v_0$$

Alors, pour tout  $t$  dans  $[0, T'']$  où  $T''$  ne dépend que de  $c_0$ ,  $k$  et  $v_0$  :

$$\text{Pour tout } x \text{ dans } M \quad \text{vol}_{g(t)}(B_{g(t)}(x, 1)) \geq \frac{2}{3}v_0.$$

*Démonstration.* — On raisonne par l'absurde. Si on trouve une suite de flots  $(M_i, g_i(t))$  vérifiant les hypothèses et tels que l'on a une suite  $t_i$  tendant vers 0 et des points  $p_i \in M_i$  vérifiant :

$$\text{vol}_{g_i(t_i)}(B_{g_i(t_i)}(p_i, 1)) < \frac{2}{3}v_0.$$

Une sous suite des  $(M_i, g_i(0), p_i)$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique  $(X, d, p)$ . De plus, un théorème de Colding ([13]) donne la continuité du volume (comme mesure de Hausdorff tridimensionnelle) pour la convergence au sens de Gromov-Hausdorff à courbure de Ricci minorée. On a donc

$$\text{vol}_d(B_d(p, 1)) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \text{vol}_{g_i(0)}(B_{g_i(0)}(p_i, 1)) \geq v_0.$$

De plus, par le Lemme 3.12, comme  $t_i$  tends vers 0,  $(M_i, g_i(t_i), p_i)$  converge aussi vers  $(X, d, p)$ . On en déduit que  $\text{vol}_d(B_d(p, 1)) < \frac{2}{3}v_0$ , c'est une contradiction.  $\square$

Le dernier lemme de cette partie est une version non-compacte et sans borne a priori sur la courbure du Lemme 2.8.

LEMME 3.14 ([26], Lemme 5.1). — Soit  $(M^3, g(t))_{t \in [0, T]}$  une solution complète du flot de Ricci satisfaisant  $\text{Ric}_{g(0)} \geq -\varepsilon g(0)$  où  $\varepsilon$  est assez petit. Alors, sur  $[0, T] \cap [0, T']$  (où  $T'$  est une constante positive universelle), on a :

$$\text{Ric}_{g(t)} \geq -\varepsilon(1 + \beta t)g(t) - \varepsilon(1 + \beta t)t \text{Scal}_{g(t)} g(t),$$

où  $\beta$  est une constante positive explicite assez grande et indépendante de  $\varepsilon$ .

*Démonstration.* — Comme pour la preuve du Lemme 2.8, on pose :

$$L(t) = \text{Ric}_{g(t)} + t\delta(t) \text{Scal}_{g(t)} g(t) + \delta(t)g(t)$$

avec  $\delta(t)$  défini par  $\delta(t) = \varepsilon(1 + \beta t)$ . Si  $M$  est compacte, le début de la preuve du Lemme 2.8 nous donne que la condition  $L \geq 0$  est préservée par le

flot sur un intervalle de temps court. Si  $M$  n'est pas compacte, on adapte la preuve en remplaçant  $L$  par  $\tilde{L} = L + afg$  où  $f(x, t)$  est une fonction tendant vite vers  $+\infty$ . Ceci assure que le minimum de  $\tilde{L}$  est atteint sur  $M$ .

Un choix judicieux de  $f$  permet au calcul du Lemme 2.8 de rester valable sans trop de modifications. On peut alors montrer que la condition  $\tilde{L} \geq 0$  est préservée par le flot sur un petit intervalle de temps, on peut même choisir cet intervalle indépendamment de  $a$ . En faisant tendre  $a$  vers 0, on obtient le résultat désiré.  $\square$

### 3.2.2. Preuve du Théorème 3.10

Les lemmes établis dans la section précédente nous permettent de montrer le Théorème 3.10.

*Démonstration (du Théorème 3.10).* — Remarquons tout d'abord que les estimations que nous voulons montrer se comportent bien par changement d'échelle, on se permet donc de supposer que  $(M^3, g_0)$  vérifie  $\text{Ric}_{g_0} \geq -\varepsilon$  où  $\varepsilon$  sera précisé dans la suite.

On note  $g(t)_{t \in [0, T]}$  la solution maximale du flot de Ricci à courbure bornée donnée par le théorème de Shi. On définit  $T_M$  comme étant le plus grand  $\tau$  tel que, pour tout  $t$  dans  $[0, \tau)$  :

$$\inf_{x \in M} \text{vol}_{g(t)}(B_{g(t)}(x, 1)) > \frac{v_0}{2} \quad \text{et} \quad \inf_M \text{Ric} > -1.$$

Il faut montrer que  $T_M$  est minoré par une constante positive ne dépendant que de  $\varepsilon$  et  $v_0$ . Tout d'abord,  $T_M$  est strictement positif en utilisant le principe du maximum et des estimations assez standard. Ensuite  $T_M < T$  par le Lemme 3.11. On peut aussi supposer que  $T_M \leq 1$ . Alors, par le Lemme 3.11, on a sur  $[0, T_M]$  :

$$\| \text{Rm} \| \leq \frac{c_0}{t}$$

où  $c_0$  ne dépend que de  $v_0$ . Le Lemme 3.14 montre que, pour

$$t \in [0, \min(T', 1/\beta, T_M)] : \quad \text{Ric}_{g(t)} \geq (-2\varepsilon(\text{Scal}_{g(t)} t + 1)g(t).$$

Supposons maintenant que  $\varepsilon < 1/8c_0$ , on a alors, sur  $[0, \min(T', 1/\beta, T_M)]$ ,  $\text{Ric}_{g(t)} \geq -\frac{1}{2}g(0)$ .

Ensuite, le Lemme 3.13 que, pour  $t \in [0, \min(T'', T', 1/\beta, T_M)]$ ,

$$\inf_{x \in M} \text{vol}_{g(t)} B_{g(t)}(x, 1) \geq 2v_0/3.$$

En particulier, vu la définition de  $T_M$  :

$$T_M \geq \min(T'', T', 1/\beta) = S.$$

Les estimations (ii) et (iii) du Théorème 3.10 sont donc vérifiées, l'estimation (i) en découle par le Lemme 3.11.  $\square$

### 3.3. Flot de Ricci d'espaces métriques dans $\mathcal{M}(k, v_0)$

Les outils que nous avons mis en place permettent de construire un flot de Ricci pour les espaces métriques dans  $\mathcal{M}(k, v_0)$ .

**THÉORÈME 3.15** ([26], Théorème 9.2). — Soit  $(X, d) \in \mathcal{M}(k, v_0)$ , alors il existe un flot de Ricci  $(M_X, g_X(t))$  défini au moins sur  $(0, T)$  (où  $T = T(k, v_0)$  est la constante obtenue dans le Théorème 3.10), tel que :

- (i)  $\sup_M \|\text{Rm}_{g_X(t)}\| \leq \frac{K}{t}$ .
- (ii)  $\text{Ric}_{g_X(t)} \geq -K g_X(t)$ .
- (iii) Pour tout  $x$  dans  $M_X$ ,  $\text{vol}_{g_X(t)} B_{g_X(t)}(x, 1) \geq \frac{v_0}{2}$ .
- (iv) Quand  $t$  tends vers 0,  $d_{g_X(t)}$  converge uniformément sur tout compact de  $M \times M$  vers une distance  $\bar{d}$  sur  $M$  isométrique à  $(X, d)$ .

La constante  $K = K(k, v_0)$  est celle obtenue dans le Théorème 3.10.

*Démonstration.* — Soit  $(X, d) \in \mathcal{M}(k, v_0)$ . Par définition, il existe une suite  $(M_i, g_i, p_i)$  de variétés riemanniennes de dimension 3 à courbure de Ricci minorée par  $-k$  et dont le volume des petites boules est minoré par  $v_0$  et qui converge au sens de Gromov-Hausdorff vers  $(X, d, x)$ .

Par le Théorème 3.10, on a pour chaque  $i$  un flot de Ricci  $(M_i, g_i(t))_{t \in [0, T]}$  qui satisfait les estimations montrées précédemment. L'estimation (i) montre en particulier que la courbure est bornée indépendamment de  $i$  sur tout compact de  $(0, T)$ . De plus, l'estimation (iii) donne une minoration du volume des petites boules pour  $t \in [0, T)$ . Un théorème de Cheeger Gromov et Taylor permet alors d'obtenir une minoration indépendante de  $i$  du rayon d'injectivité en  $t = T/2$ .

On peut alors appliquer le Théorème 2.5 pour obtenir après extraction un flot limite  $(M_X, g_X(t), p)_{t \in (0, T)}$  qui vérifie (i), (ii) et (iii). Reste à montrer qu'il vérifie (iv).

$(M_X, g_X(t))$  vérifie les hypothèses du Lemme 3.12, on a donc, pour  $0 < s < t < T$  :

$$d_{X,s} - c_2(\sqrt{t} - \sqrt{s}) \leq d_{X,t} \leq e^{c_1(t-s)} d_{X,s}$$

Ceci montre que les fonctions  $d_{X,t}$  vérifient le critère de Cauchy quand  $t$  tend vers 0. On a donc existence d'une limite qui est une fonction  $\bar{d}$  sur  $M \times M$ .

$\bar{d}$  satisfait l'inégalité triangulaire et la symétrie. Pour montrer que c'est une distance sur  $M$  il suffit de voir que si  $\bar{d}(x, y) = 0$  alors  $x = y$ . Pour cela, on fait tendre  $s$  vers 0 dans l'estimation ci-dessus et on obtient :  $\bar{d} \geq e^{-c_1 t} d_{X,t}$ .

Il suffit maintenant de montrer que  $(M, \bar{d})$  est isométrique à  $(X, d)$ , pour cela on montre que, pour tout  $r > 0$ ,  $d_{GH}((B_d(x, r), d), (B_{\bar{d}}(p, r), \bar{d})) = 0$ .

Comme tous les  $g_i(t)$  vérifient les hypothèses du Lemme 3.12, on a, dès que  $0 < s < t < T$  :

$$d_{i,s} - c_2(\sqrt{t} - \sqrt{s}) \leq d_{i,t} \leq e^{c_1(t-s)} d_{i,s}$$

où  $c_1$  et  $c_2$  ne dépendent pas de  $i$ . Ceci nous donne, en faisant tendre  $s$  vers 0 :

$$d_{GH}((B_{d_{i,t}}(p_i, r), d_{i,t}), (B_{d_{i,0}}(p_i, r), d_{i,0})) \leq \eta(t)$$

où  $\eta(t)$  tends vers 0 quand  $t$  tends vers 0. Soit  $t_\varepsilon > 0$  tel que  $\eta(t) \leq \varepsilon$  dès que  $t \leq t_\varepsilon$ . Comme  $(M_i, g_i(0), p_i)$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers  $(X, d, x)$ , on a un  $i_\varepsilon$  tel que, dès que  $i \geq i_\varepsilon$  :

$$d_{GH}((B_d(x, r), d), (B_{d_{i,0}}(p_i, r), d_{i,0})) \leq \varepsilon.$$

En particulier, en utilisant l'inégalité triangulaire, pour  $i \geq i_\varepsilon$  et  $t \leq t_\varepsilon$  :

$$d_{GH}((B_d(x, r), d), (B_{d_{i,t}}(p_i, r), d_{i,t})) \leq 2\varepsilon.$$

De plus,  $(M_X, g_X(t), p)$  tends vers  $(M_X, \bar{d}, p)$  quand  $t$  tends vers 0, on peut donc trouver un  $t'_\varepsilon \in (0, t_\varepsilon]$  tel que, quand  $t \leq t'_\varepsilon$  :

$$d_{GH}((B_{\bar{d}}(p, r), \bar{d}), (B_{d_{X,t}}(p, r), d_{X,t})) \leq \varepsilon.$$

Ensuite, les  $(M_i, g_i(t'_\varepsilon), p_i)$  converge au sens de Cheeger-Gromov vers  $(M_X, g_X(t'_\varepsilon), p)$ , la convergence a donc aussi lieu au sens de Gromov-Hausdorff, on a donc un  $i'_\varepsilon \geq i_\varepsilon$  tel que :

$$d_{GH}((B_{d_{i,t}}(p_i, r), d_{i,t}), (B_{d_{X,t}}(p, r), d_{X,t})) \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour  $i \geq i'_\varepsilon$  et  $t \leq t'_\varepsilon$  :

$$d_{GH}((B_{d_{i,t}}(p_i, r), d_{i,t}), (B_{\bar{d}}(p, r), \bar{d})) \leq 2\varepsilon.$$

Et donc :

$$d_{GH}((B_d(x, r), d), (B_{\bar{d}}(p, r), \bar{d})) \leq 4\varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon$  est arbitraire dans le raisonnement précédent,  $(M_X, \bar{d})$  et  $(X, d)$  sont isométriques, ce qui conclut la preuve du théorème.  $\square$

## 4. Applications.

Cette dernière partie montre quelques exemples d'applications des méthodes décrites précédemment. Les deux premiers exemples sont apparus dans les articles [28] et [26] de Miles Simon au même temps que la construction décrite dans la section précédente. Les deux suivants sont originaux.

### 4.1. Les espaces métriques dans $\mathcal{M}(k, v_0)$ sont des variétés.

Le théorème qui suit montre que les singularités des espaces métriques dans  $\mathcal{M}(k, v_0)$  sont de nature métrique et non topologique, autrement dit, la topologie de l'espace métrique  $(X, d)$  est celle d'une variété lisse de dimension 3. Ce résultat répond en partie à une question formulée par Cheeger et Colding dans [9].

**THÉORÈME 4.1** ([26], Proposition 9.3). — *Si  $(X, d)$  est un espace métrique dans  $\mathcal{M}(k, v_0)$ , alors il existe une variété lisse de dimension 3 qui est homéomorphe à  $X$ .*

*Démonstration.* — On a construit dans la section précédente une variété  $M_X$  de dimension 3 et un flot de Ricci lisse  $(M_X, g_X(t))_{t \in (0, T)}$  de  $(X, d)$ . De plus,  $d_{X, t}$  converge uniformément vers une distance  $\bar{d}$  sur  $M_X$  qui est isométrique à  $d$ . Les distances riemanniennes associées  $d_{X, t}$  à chaque  $g_{X, t}$  définissent sur  $M_X$  sa topologie usuelle de variété lisse  $\mathcal{T}$ . Il suffit donc de montrer que  $\bar{d}$  définit sur  $M_X$  sa topologie de variété. Grâce au Lemme 3.12, on a l'estimation pour tout  $t \in (0, T)$  :

$$\bar{d} - c_2\sqrt{t} \leq d_{X, t} \leq e^{c_1 t} \bar{d}.$$

Montrons d'abord que  $\mathcal{T}$  est plus fine que la topologie définie par  $\bar{d}$ . Soit  $\Omega \subset M_X$  un ouvert pour  $\mathcal{T}$ , fixons  $t_0 \in (0, T)$ , pour tout  $x \in \Omega$  on a un  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_{d_{X, t_0}}(x, \varepsilon) \subset \Omega$ . L'estimation précédente montre que  $B_{\bar{d}}(x, e^{-c_1 t_0} \varepsilon) \subset B_{d_{X, t_0}}(x, \varepsilon)$ , donc  $\Omega$  est ouvert pour  $\bar{d}$ .

On montre maintenant que la topologie définie par  $\bar{d}$  est plus fine que  $\mathcal{T}$ . Soit  $\Omega$  un ouvert pour  $\bar{d}$ . Pour tout  $x$  dans  $\Omega$ , on a un  $\varepsilon_x > 0$  tel que  $B_{\bar{d}}(x, \varepsilon_x) \subset \Omega$ . Pour chaque  $x$ , on choisit un  $t_x$  assez petit pour que  $\varepsilon_x - c_2\sqrt{t_x} > 0$ . On a alors :  $B_{d_{X, t_x}}(x, \varepsilon_x - c_2\sqrt{t_x}) \subset B_{\bar{d}}(x, \varepsilon_x)$ . Donc :

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} B_{d_{X, t_x}}(x, \varepsilon_x - c_2\sqrt{t_x}).$$

Donc  $\Omega$  est ouvert pour  $\mathcal{T}$ . □

**4.2. Courbure de Ricci presque positive, version forte.**

On va voir comment utiliser les outils qui ont été mis en place dans la partie précédente pour affaiblir les hypothèses du Théorème 2.4. On obtient alors :

THÉORÈME 4.2 ([28], Théorème 1.7). — *Étant donnés deux réels  $v_0$ ,  $D > 0$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que : si  $(M^3, g)$  vérifie  $\text{Ric}_g \geq -\varepsilon g$ ,  $\text{vol}(g) \geq v_0$  et  $\text{diam}(g) \leq D$  alors  $M$  est difféomorphe à un quotient de  $S^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^3$  par un sous-groupe d'isométries sans point fixe pour leurs métriques standards respectives.*

Par rapport au Théorème 2.4, on a réussi à se passer d'une borne a priori sur les courbures sectionnelles.

*Démonstration.* — Comme pour le Théorème 2.4, on raisonne par l'absurde. On suppose qu'on peut trouver une suite  $(M_i, g_i)$  de variétés de dimensions 3 ne vérifiant pas les conclusions du théorème et telles que :

- (1)  $\text{vol}(g_i) \geq v_0$ ,
- (2)  $\text{diam}(g_i) \leq D$ ,
- (3)  $\text{Ric}_{g_i} \geq -\varepsilon_i$ ,

où  $\varepsilon_i$  est une suite tendant vers 0. À extraction près, la suite  $(M_i, g_i)$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique  $(X, d) \in \mathcal{M}(-1, v_0)$ . Comme dans la preuve du Théorème 3.15, on construit un flot de Ricci  $(M, g(t))_{t \in (0, T)}$  de  $(X, d)$  par approximation par les flots  $(M_i, g_i(t))_{t \in [0, T]}$  avec condition initiale  $g_i(0) = g_i$ . En utilisant les Lemmes 3.12 et 3.14 et le Théorème 3.10, on montre que pour tout  $i$  et tout  $t \in (0, T)$  :

- $|\text{Rm}| \leq \frac{K}{t}$ ,
- $\text{diam}(M, g_i(t)) \leq De^{c_1 t}$ ,
- $\text{Ric}_{g_i(t)} \geq -\varepsilon_i(1 + \beta t)g_i(t) - \varepsilon_i(1 + \beta t)t \text{Scal}_{g_i(t)} g_i(t)$ .

En particulier, la deuxième estimation montre que  $M$  est compact. Les  $M_i$  sont donc toutes difféomorphe à  $M$  pour  $i$  assez grand.

On a donc :

$$\text{Ric}_{g_i(t)} \geq -\varepsilon_i(1 + Kt)g_i(t)$$

En faisant tendre  $i$  vers  $+\infty$ , on a donc que  $(M, g(t))_{t \in (0, T)}$  vérifie

$$\text{Ric}_{g(t)} \geq 0,$$

donc  $M$  est difféomorphe à un quotient de  $S^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^3$  par un sous-groupe d'isométries sans point fixe pour leurs métriques standards respectives. Or les  $M_i$  sont toutes difféomorphes à  $M$  pour  $i$  assez grand, c'est une contradiction. □

*Remarque 4.3.* — En utilisant le Théorème 4.1, on montre en fait que l'espace métrique  $(X, d)$  construit dans la définition est homéomorphe à une variété lisse admettant une métrique à courbure de Ricci positive.

### 4.3. Un théorème de finitude.

Les premiers théorèmes de finitude ont été obtenus indépendamment par Weinstein [29] et Cheeger [8] à la fin des années 60. Le résultat de Cheeger est le suivant :

**THÉORÈME 4.4.** — [8] *Soient  $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$  et  $V, D > 0$ , et  $n \in \mathbb{N}$ . Il n'existe, à difféomorphisme près, qu'un nombre fini de variétés de dimension  $n$  admettant une métrique Riemannienne  $g$  telle que :*

- $K_1 \leq \sec_g \leq K_2$ ,
- $\text{diam}(g) \leq D$ ,
- $\text{vol}(g) \geq V$ .

Une question naturelle se pose ensuite : peut-on obtenir des théorèmes de finitude sous des hypothèses plus faibles ? Les travaux dans cette direction sont trop nombreux pour être cités, on renvoie au chapitre 12 de l'encyclopédique [6]. Les outils mis en place nous permettent de montrer un nouveau théorème de finitude en dimension 3.

**THÉORÈME 4.5.** — *Soient  $V, D > 0$  et  $k \in \mathbb{R}$ . L'ensemble des variétés compactes de dimension 3 admettant une métrique riemannienne  $g$  telle que  $\text{vol}(g) > V$ ,  $\text{diam}(g) < D$  et  $\text{Ric}_g > -kg$  ne contient qu'un nombre fini de variétés à difféomorphisme près.*

*Remarque 4.6.* — En dimension 4, Perelman a construit en 1994 des variétés à courbure de Ricci positive, diamètre 1 et volume minoré dont les nombres de Betti sont arbitrairement grands. (voir [23])

Des résultats dans cette direction ont été obtenus dans cette direction par Anderson et Cheeger au début de années 90. Ces résultats sont valables en toutes dimension mais requièrent des hypothèses plus forte. [2] demande, en plus des hypothèses du Théorème 4.5, une borne supérieure sur la courbure de Ricci et sur la norme  $L^{d/2}$  de l'opérateur de courbure, où  $d$  est la dimension. [3] remplace la borne sur le volume par une borne inférieure sur le rayon d'injectivité.

*Démonstration.* — Fixons  $V, D$  et  $k$  et supposons que le théorème soit faux. On peut alors trouver une suite de variétés de dimension 3  $M_i$  munies de métriques riemanniennes  $g_i$  vérifiant :

- $\text{vol}(g_i) > V$ ,
- $\text{diam}(g_i) < D$ ,
- $\text{Ric}_{g_i} > -kg$ .

et où les  $M_i$  ne sont pas difféomorphes deux à deux.

En remplaçant  $g_i$  par  $\frac{1}{D^2}g_i$ , on peut supposer que  $\text{diam}(g_i) < 1$ . On est donc dans les hypothèses du Théorème 3.10, et on a une suite de flots de Ricci  $(M_i, g_i)$  dont on peut extraire un flot limite  $(M, g(t))$  où  $M$  est compacte grâce à l'estimation établie dans la preuve du Théorème 4.2. Les  $M_i$  sont donc difféomorphes à  $M$  pour  $i$  assez grand, ce qui est absurde.  $\square$

### 4.4. Un résultat de Cheeger et Colding en dimension 3.

Cette dernière application présente une preuve d'un théorème de Cheeger et Colding ([9], Théorème A.1.12) en dimension 3.

**THÉORÈME 4.7.** — *Soit  $(M_i, g_i)$  une suite de variétés compactes lisses de dimension 3 vérifiant  $\text{Ric}_{g_i} \geq -kg$  et qui converge au sens Gromov-Hausdorff vers une variété compacte lisse de dimension 3  $(M, g)$ , alors les  $M_i$  sont difféomorphes à  $M$  pour  $i$  assez grand.*

*Démonstration.* — Par l'absurde, si le théorème est faux, on peut supposer à extraction près que toutes les  $M_i$  ne sont pas difféomorphes à  $M$ . Les  $(M_i, g_i)$  convergent au sens de Gromov-Hausdorff vers  $(M, g)$ . De plus,  $0 < D = \text{diam}(g) < +\infty$  car  $M$  est compacte. Comme le diamètre est continu pour la distance de Gromov-Hausdorff, on a :

$$\text{diam}(g_i) < 2D$$

pour  $i$  assez grand.

De plus, par un théorème de Colding, le volume est continu pour la distance de Gromov-Hausdorff, donc, pour  $i$  assez grand :

$$\text{vol}(g_i) > \frac{\text{vol}(g)}{2} = \frac{v_0}{2}.$$

Les hypothèses du Théorème 3.15 sont donc vérifiées. Si on note

$$(M', g'(t))_{t \in (0, T)}$$

le flot construit dans le Théorème 3.15, on a, par la preuve du Théorème 4.5, qu'à extraction près les  $M_i$  sont toutes difféomorphes à  $M'$  pour  $i$  assez grand. De plus, la preuve du Théorème 4.1 montre que  $M'$  et  $M$  sont homéomorphes. Comme en dimension 3 deux variétés lisses homéomorphes

sont difféomorphes, on a montré qu'à extraction près les  $M_i$  sont difféomorphes à  $M$  pour  $i$  assez grand, ce qui est absurde.  $\square$

*Remarque 4.8.* — On a en fait montré que si une suite de variétés  $(M_i, g_i)$  compactes à courbure de Ricci minorée converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique compact  $(X, d)$  qui appartient à  $\mathcal{M}(k, v_0)$  alors les  $M_i$  sont toutes « difféomorphes à  $X$  » pour  $i$  assez grand.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] U. ABRESCH & W. T. MEYER, « A sphere theorem with a pinching constant below  $\frac{1}{4}$  », *J. Differential Geom.* **44** (1996), n° 2, p. 214-261.
- [2] M. T. ANDERSON & J. CHEEGER, « Diffeomorphism finiteness for manifolds with Ricci curvature and  $L^{n/2}$ -norm of curvature bounded », *Geom. Funct. Anal.* **1** (1991), n° 3, p. 231-252.
- [3] ———, «  $C^\alpha$ -compactness for manifolds with Ricci curvature and injectivity radius bounded below », *J. Differential Geom.* **35** (1992), n° 2, p. 265-281.
- [4] M. BERGER, « Les variétés Riemanniennes  $(1/4)$ -pincées », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)* **14** (1960), p. 161-170.
- [5] M. BERGER, « Sur les variétés riemanniennes pincées juste au-dessous de  $1/4$  », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **33** (1983), n° 2, p. 135-150 (loose errata).
- [6] ———, *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2003, xxiv+824 pages.
- [7] D. BURAGO, Y. BURAGO & S. IVANOV, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, xiv+415 pages.
- [8] J. CHEEGER, « Finiteness theorems for Riemannian manifolds », *Amer. J. Math.* **92** (1970), p. 61-74.
- [9] J. CHEEGER & T. H. COLDING, « On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I », *J. Differential Geom.* **46** (1997), n° 3, p. 406-480.
- [10] B.-L. CHEN & X.-P. ZHU, « Uniqueness of the Ricci flow on complete noncompact manifolds », *J. Differential Geom.* **74** (2006), n° 1, p. 119-154.
- [11] B. CHOW & D. KNOPF, *The Ricci flow : an introduction*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 110, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004, xii+325 pages.
- [12] B. CHOW, P. LU & L. NI, *Hamilton's Ricci flow*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 77, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006, xxxvi+608 pages.
- [13] T. H. COLDING, « Ricci curvature and volume convergence », *Ann. of Math. (2)* **145** (1997), n° 3, p. 477-501.
- [14] O. DURUMERIC, « A generalization of Berger's theorem on almost  $\frac{1}{4}$ -pinched manifolds. II », *J. Differential Geom.* **26** (1987), n° 1, p. 101-139.
- [15] R. E. GREENE & H. WU, « Lipschitz convergence of Riemannian manifolds », *Pacific J. Math.* **131** (1988), n° 1, p. 119-141.
- [16] M. GROMOV, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Mathematics, vol. 152, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999, Based on the 1981 French original [ MR0682063 (85e :53051)], With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates, xx+585 pages.

- [17] R. S. HAMILTON, « Three-manifolds with positive Ricci curvature », *J. Differential Geom.* **17** (1982), n° 2, p. 255-306.
- [18] ———, « A compactness property for solutions of the Ricci flow », *Amer. J. Math.* **117** (1995), n° 3, p. 545-572.
- [19] W. KLINGENBERG, « Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung », *Comment. Math. Helv.* **35** (1961), p. 47-54.
- [20] G. PERELMAN, « Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds », ArXiv Mathematics e-prints arXiv :math/0307245, 2003.
- [21] ———, « Ricci flow with surgery on three-manifolds », ArXiv Mathematics e-prints arXiv :math/0303109, 2003.
- [22] ———, « The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications », ArXiv Mathematics e-prints arXiv :math/0211159, 2002.
- [23] G. PERELMAN, « Construction of manifolds of positive Ricci curvature with big volume and large Betti numbers », in *Comparison geometry (Berkeley, CA, 1993–94)*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, p. 157-163.
- [24] W.-X. SHI, « Complete noncompact three-manifolds with nonnegative Ricci curvature », *J. Differential Geom.* **29** (1989), n° 2, p. 353-360.
- [25] ———, « Deforming the metric on complete Riemannian manifolds », *J. Differential Geom.* **30** (1989), n° 1, p. 223-301.
- [26] M. SIMON, « Ricci flow of non-collapsed 3-manifolds whose Ricci curvature is bounded from below », ArXiv e-prints arXiv :math/0903.2142, 2009.
- [27] M. SIMON, « Deformation of  $C^0$  Riemannian metrics in the direction of their Ricci curvature », *Comm. Anal. Geom.* **10** (2002), n° 5, p. 1033-1074.
- [28] ———, « Ricci flow of almost non-negatively curved three manifolds », *J. Reine Angew. Math.* **630** (2009), p. 177-217.
- [29] A. WEINSTEIN, « On the homotopy type of positively-pinched manifolds », *Arch. Math. (Basel)* **18** (1967), p. 523-524.

Thomas RICHARD  
 Université Grenoble 1  
 Institut Fourier  
 100 rue des Maths  
 BP 74  
 8402 St Martin d'Hères cedex (France)  
 Thomas.Richard@ujf-grenoble.fr