

Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de
**Théorie spectrale
et géométrie**

Emmanuel PHILIPPE

Le spectre des longueurs des surfaces hyperboliques: un exemple de rigidité.

Volume 28 (2009-2010), p. 109-120.

[<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2009-2010__28__109_0>](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2009-2010__28__109_0)

© Institut Fourier, 2009-2010, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

LE SPECTRE DES LONGUEURS DES SURFACES HYPERBOLIQUES : UN EXEMPLE DE RIGIDITÉ.

Emmanuel Philippe

RÉSUMÉ. — Après avoir présenté quelques résultats récents portant sur l'étude du spectre des longueurs des surfaces hyperboliques avec ou sans singularités, on démontre que les sphères possédant trois points coniques sont, dans leur classe, spectralement rigides.

ABSTRACT. — Having presented some recent results concerning the length spectra of hyperbolic surfaces, we give a proof of the fact that spheres with three conical points are, in their class, spectrally rigid.

Dans cet article, on fait agir un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ par homographies sur le demi-plan de Poincaré \mathbf{H} et on étudie les géodésiques fermées du quotient $S = \Gamma \backslash \mathbf{H}$. On renvoie à [3] pour toutes considérations élémentaires sur le plan hyperbolique et ses isométries.

Le **spectre des longueurs** de Γ est l'ensemble des longueurs des éléments hyperboliques de Γ quand on parcourt l'ensemble des classes de conjugaison de tels éléments dans Γ . On ordonne ensuite cet ensemble dans l'ordre croissant en tenant compte des multiplicités.

Si le quotient est compact le spectre est un ensemble discret dont le plus petit élément est appelé la **systole**. Deux problèmes se posent alors naturellement

P1 : Déterminer, le groupe Γ étant donné, les premières valeurs du spectre.

P2 : Le spectre $\mathrm{Lsp} \Gamma$ caractérise-t-il S à isométrie près ?

Nous proposons tout d'abord dans ce papier un panorama des principaux résultats obtenus sur ces questions avant d'exposer un des rares exemples de rigidité spectrale connu.

Concernant la première question, nous pouvons doré et déjà signaler que la détermination d'une formule simple pour la systole est un problème

Mots-clés : spectre des longueurs, surfaces hyperboliques, groupe de triangle.

Classification math. : 20H10, 32G15, 53C22.

resté en général sans réponse : la plupart des (rares) valeurs déterminées l'ont été de manière numérique (on renvoie par exemple aux travaux de U. Hamenstädt, R. Koch [18] et de R. Vogeler [34]). Nous présenterons dans la seconde partie de cet article une résolution complète de cette question dans le cas particulier des sphères possédant trois points coniques.

La seconde question posée a, quant à elle, été presque entièrement résolue dans le cas des surfaces fermées comme nous allons le rappeler un peu plus loin. Notons que l'on peut situer l'origine historique du problème à un fameux article de M. Kac [19, 1966], dans lequel celui-ci pose la question sous une forme analytique : “Can one hear the shape of a drum?”. Nous savons depuis H. Huber (voir [9] et références) que dans le cas des surfaces hyperboliques fermées la connaissance du spectre du Laplacien (celui agissant sur les fonctions) est équivalente à celle du spectre des longueurs ce qui explique le changement de langage.

Remarque. — Il convient de remarquer que le spectre des longueurs n'est qu'une liste de valeurs numériques et que la difficulté consiste précisément à identifier les longueurs aux classes de conjugaison correspondantes. Cet objet est donc essentiellement différent du spectre marqué des longueurs dont on sait depuis J-P. Otal [22, 1990] qu'il caractérise la classe d'isométrie de S . Notons que ce résultat a été établi pour toute surface fermée de courbure strictement négative et s'étend donc bien au delà du cadre de courbure constante -1 présenté ici.

1. Généralités

Nous présentons dans cette partie un certain nombre de résultats représentatifs obtenus depuis une trentaine d'année concernant les problèmes énoncés en introduction. Pour un panorama antérieur à 1990, on pourra également consulter avec profit l'exposé de P. Bérard au séminaire Bourbaki [8].

1.1. Le cas où S fermée

Tout d'abord on sait que dans ce cas le spectre des longueurs (ou du Laplacien) détermine le genre de S et donc sa topologie (on renvoie à [9] pour une présentation élégante de ce résultat et des suivants). Nous pouvons donc raisonner à l'intérieur d'un espace de Teichmüller donné et

S. Wolpert a alors montré que, génériquement, une surface de genre g est déterminée à isométrie près par son spectre des longueurs ([35, 1979]) très peu de surfaces admettent des jumelles spectrales. Nous savons également que les familles isospectrales sont finies.

Les travaux de M-F. Vignéras ont alors mis à jour les premiers exemples de surfaces isospectrales non isométriques [32, 1980] avant que P. Buser ne fournisse à l'aide d'une méthode générale une gamme d'exemples pour tout genre $g \geq 4$ (voir [9]). L'existence de tels exemples en genre 2 ou 3 reste une question ouverte.

Rappelons pour conclure qu'il n'a jamais été établi une formule explicite pour la systole de ces surfaces, même pour les petits genres. On peut néanmoins signaler l'approche algorithmique due à H. Akrouf [1, 2006].

1.2. Objets rigides

Après avoir contribué très largement à apporter une réponse négative à la question de rigidité dans le cas des surfaces fermées, P. Buser s'est intéressé à l'existence d'objets géométriquement déterminés par leur spectre des longueurs. L'intuition première est que ces objets doivent vivre dans un espace de Teichmüller de "petite" dimension pour éviter les déformations isospectrales, ces dimensions étant alors complètement déterminées par le début du spectre. On lui doit donc naturellement (avec K-D. Semmler) un des premiers exemples de rigidité spectrale (cas des tores à une composante de bord [10, 1988]). Quelques années plus tard, R. Dianu, sous la direction de P. Buser, fournira un nouvel exemple (cas des tores avec un point conique, [13, 2000]) et récemment les deux premiers auteurs ont récidivés (cas des sphères ayant 4 points coniques d'ordres $(2, 2, 3, 3)$, 2005). Signalons également dans ce sens le travail remarquable de A. Hass qui résoud par exemple le cas des pantalons [17, 1985]. Ces travaux reposent tous sur une détermination géométrique des courbes fermées les plus courtes et la plupart du temps les deux premières longueurs suffisent à déterminer la surface.

Finalement, l'auteur du présent article a démontré la rigidité spectrale des sphères possédant trois points coniques ([24, 2008] et [27, 2009]), dernier résultat chronologiquement obtenu dans ce sens dont nous présentons les grands traits de la preuve dans la seconde partie de ce papier. La méthode exposée, très intuitive, diffère essentiellement des techniques jusqu'alors mises en oeuvre par son aspect combinatoire inspiré de l'article de C. Bavard sur les groupes cristallographiques du plan [2, 1993].

1.3. Variantes

Nous concluons cette première partie avec quelques questions connexes.

Le cas où S n'est pas fermée. — En ce qui concerne les surfaces hyperboliques non compactes ou possédant des points coniques de genre $g \geq 4$, il a été démontré peu de résultats même s'il semble que les exemples de P. Buser s'adaptent à ces différents cas.

En ce qui concerne le rapport entre le spectre du Laplacien et le spectre des longueurs on renvoie aux travaux de W. Müller [21, 1992] pour le cas non compact et à ceux de E. Dryden et A. Strohmaier [14, 2004], [15] pour le cas des orbifolds.

Isospectrales vs commensurables. — D'un point de vue de l'information algébrique donnée par le spectre, on peut légitimement se demander si deux surfaces isospectrales ont des groupes fondamentaux commensurables : c'est en effet le cas de tous les exemples construits jusqu'ici car ils reposent sur la construction d'un revêtement fini commun (méthode de Sunada [31, 1985]). A.W. Reid et C. Maclachlan [28], [29, 1992] ont apporté une réponse affirmative à cette question dans le cas des surfaces fermées arithmétiques mais le cas général reste en suspens.

La condition de Sunada traduisant l'équivalence de deux représentations on pourra consulter à bon escient les articles de P. Bérart ou H. Pesce [6, 7, 23] qui étudient les questions d'isospectralité sous cet angle.

Le cas de la courbure variable. — Depuis R. Brooks et R. Tse [5, 1987] on sait qu'il existe des surfaces fermées de genre 3 de courbures strictement négatives (variables) isospectrales et non isométriques. B. Osgood, R. Phillips et P. Sarnak ont montré que les familles isospectrales étaient compactes [30, 1988] après que D. Kazhdan et V. Guillemin aient constaté qu'elles ne contenaient pas d'arcs formés de surfaces non isométriques [16, 1980] : leur finitude est conjecturée. Pour un analogue du théorème de Huber dans le cas de la courbure strictement négative, on renvoie aux travaux de Y. Colin De Verdière [11, 1973].

2. Le bas du spectre des groupes de triangles

Si $r \leq p \leq q$ sont des entiers naturels dont la somme des inverses est strictement inférieure à 1 et T un triangle du demi-plan de Poincaré d'angles

$\pi/r, \pi/p, \pi/q$, on appelle **groupe de triangle** $\Gamma(r, p, q)$ l'ensemble des isométries directes contenues dans le groupe engendré par les réflexions par rapport aux côtés de T .

Nous décrivons dans cette section le bas du spectre (précisément jusqu'aux trois premières longueurs avec multiplicités) de ces groupes de triangles. On donne des formules explicites, notamment pour la systole, et on détermine les multiplicités exactes (fait assez rare).

La méthode utilisée consiste assez simplement à discrétiser l'action du groupe en le faisant agir sur un graphe plutôt que sur le demi-plan tout entier et à relier ces deux actions. Afin de mettre en évidence et d'expliquer la "scission" de la démonstration en l'étude de deux cas disjoints correspondant à deux graphes différents nous suivons la chronologie des travaux initiaux qui ont consisté tout d'abord à déterminer le bas du spectre dans le cas des groupes $\Gamma(2, p, q)$ avant d'adapter la preuve au cas général.

2.1. Le spectre des longueurs pour $r = 2$

Le résultat suivant fait l'objet de la référence [25].

THÉORÈME 2.1. — *Le début du spectre des longueurs des groupes $\Gamma(2, p, q)$ avec $p \leq q$ est donné par l'alternative suivante :*

- Lsp $\Gamma(2, 3, q) = \{l'_1 < \dots\}$ pour tout $q \geq 7$
- Lsp $\Gamma(2, p, q) = \{l_1 = l_1 < \dots\}$ pour $4 \leq p \leq 10$
- Lsp $\Gamma(2, p, q) = \{l_1 = l_1 < l_2 \dots\}$ pour tout $p \geq 11$

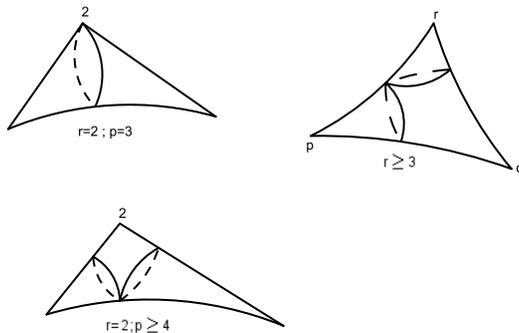


FIGURE 2.1. Les différentes systoles

où on a noté

$$\begin{aligned}
 l_1 &= 2 \operatorname{Argch} \left[2 \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} \right] \\
 l_2 &= 2 \operatorname{Argch} \left[\cos \frac{\pi}{q} (4 (\cos \frac{\pi}{p})^2 - 1) \right] \\
 l'_1 &= 2 \operatorname{Argch} \left[2 (\cos \frac{\pi}{p})^2 + 2 (\cos \frac{\pi}{q})^2 - 1 \right]
 \end{aligned}$$

Démonstration heuristique. — Fixons un groupe $\Gamma(2, p, q)$ et expliquons comment décrire le bas de son spectre.

Le graphe sur lequel nous allons faire agir le groupe de triangle considéré est construit à partir du pavage du demi-plan de Poincaré constitué des translatsés de T par les éléments du groupe engendré par les réflexions associées aux côtés du triangle. Dans ce pavage nous retenons comme sommets les points de valence q et nous prenons comme arêtes les segments géodésiques du pavage reliant deux sommets de valence q consécutifs (*cf.* figure). Cela revient à étudier l'action sur le pavage constitué par des p -gones réguliers d'angle $2\pi/q$ aux sommets. En cas d'ambiguïté (par exemple si $p = q$) on choisit arbitrairement un point de la valence voulue et on étudie les sommets du graphe obtenus par les réflexions successives.

On dispose alors d'une distance combinatoire naturelle qui permet de définir le déplacement combinatoire minimal d'un hyperbolique laissant stable ce graphe (ce qui est le cas des éléments hyperboliques de $\Gamma(2, p, q)$). Pour relier les actions d'un tel élément sur le demi-plan et sur le graphe, nous introduisons également $\rho(n)$ le rayon hyperbolique minimal de la sphère combinatoire de rayon n : il s'agit de la plus petite distance hyperbolique entre le centre et un point de la sphère. La fonction ρ est croissante et tend vers l'infini.

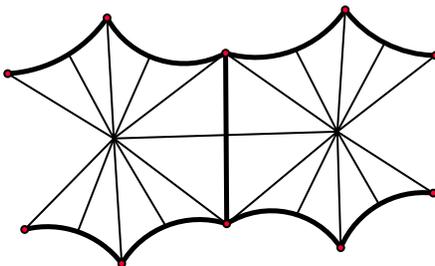


FIGURE 2.2. Combinatoire utilisée si $r = 2$

La stratégie peut alors se présenter en trois étapes.

En premier lieu il s'agit de fixer une valeur $l_0 > 0$ qui correspond à la portion de spectre que l'on veut déterminer (dans la pratique, deux choix de l_0 seront fait suivant les valeurs de p , ces valeurs correspondant à des longueurs trouvées manuellement et que l'on conjecture être la systole ou la seconde longueur).

Ensuite on constate (en utilisant la croissance de ρ) que pour n'importe quel groupe de triangle $\Gamma(2, p, q)$ les éléments hyperboliques de ce groupe possédant une longueur inférieure à l_0 ont nécessairement un déplacement combinatoire minimal inférieur ou égal à $n_0 = 2$. Ceci constitue la partie centrale de l'étude et également la partie la plus calculatoire (qui se traduit par $\rho(3) > C(l_0)$ où $C(l_0)$ est une constante dépendant de l_0 et de la longueur de l'arête du graphe). La constante $C(l_0)$ dépend à première vue du pavage mais elle croît à la même vitesse que $\rho(3)$ ce qui permet la description simultanée de tous les (début de) spectres.

La dernière étape consiste à décrire tous les hyperboliques de longueur inférieure à l_0 parmi ceux qui possèdent un déplacement combinatoire minimal 1 ou 2, à déterminer le nombre de classes de conjugaison pour chaque longueur rencontrée et à ranger ces longueurs dans l'ordre croissant. \square

2.2. Le spectre des longueurs pour $r \geq 3$

On présente ici les résultats figurant dans [24].

THÉORÈME 2.2. — *Le début du spectre des longueurs des groupes $\Gamma(r, p, q)$ avec $3 \leq r \leq p \leq q$ est donné par l'alternative suivante :*

$$\text{Lsp } \Gamma(3, 3, q) = \{l_1 = l_1 \dots\} \text{ pour tout } q \geq 4$$

$$\text{Lsp } \Gamma(3, 4, 4) = \{l_1 = l_1 \dots < l_3\}$$

$$\text{Lsp } \Gamma(3, p, q) = \{l_1 = l_1 < l_3 \dots\} \text{ pour tout } p \geq 4, q \geq 5$$

$$\text{Lsp } \Gamma(r, p, q) = \{l_1 = l_1 \leq l_2 = l_2 \leq l_3 \dots\} \text{ pour tout } r \geq 4$$

où on a posé

$$l_1 = 2 \operatorname{Argch} \left[2 \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{r} + \cos \frac{\pi}{q} \right]$$

$$l_2 = 2 \operatorname{Argch} \left[2 \cos \frac{\pi}{r} \cos \frac{\pi}{q} + \cos \frac{\pi}{p} \right]$$

$$l_3 = 2 \operatorname{Argch} \left[2 \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} + \cos \frac{\pi}{r} \right]$$

Remarque. — Cette description permet de visualiser directement sur les multiplicités du bas du spectre la symétrie de la surface : on constate, pour $r \geq 4$, que $(l_1 = l_2$ si et seulement si $p = q)$ et que $(l_2 = l_3$ si et seulement si $r = p)$. On peut donc facilement identifier avec la multiplicité de la systole ou de la deuxième longueur si l'on est en présence d'un triangle isocèle ou équilatéral.

Démonstration heuristique. — Nous devons changer le graphe sur lequel faire agir le groupe de triangle étudié car la croissance (très rapide en r) de la constante $C(l_0)$ ne permet pas l'existence d'un n_0 qui soit simultanément le même pour tous les groupes considérés. L'objectif devient donc de construire un graphe stable sous l'action du groupe de triangle et dont la longueur des arêtes est bornée indépendamment du groupe.

Nous choisissons le graphe dont les sommets sont les points de contacts (disons avec les côtés de type rp , sommets notés q^*) des cercles inscrits aux triangles du pavage de \mathbf{H} par des exemplaires de T (cf. figure). Les arêtes (de deux types différents) sont alors les arcs de cercle centrés en un point de valence p (resp. r) et de rayon pq^* (resp. rq^*).

La méthode précédente peut alors s'adapter *ad litteram* en choisissant pour l_0 le candidat à la troisième longueur. Nous montrons alors que les éléments hyperboliques recherchés doivent posséder un déplacement combinatoire minimal inférieur à 4 (ce qui se traduit par $\rho^*(5) > C^*(l_0)$ avec les notations du nouveau graphe) et il reste à décrire les longueurs (avec multiplicités) présentes parmi ces éléments pour terminer la preuve du théorème. \square

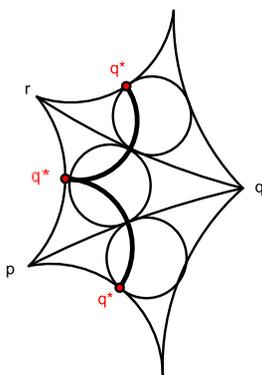


FIGURE 2.3. Combinatoire utilisée pour $r \geq 3$

3. Rigidité des groupes de triangles

Nous terminons avec le résultat principal annoncé en introduction ([27]).

THÉORÈME 3.1. — *Si deux groupes $\Gamma(r, p, q)$ et $\Gamma(r', p', q')$ ont le même spectre des longueurs, alors $r = r', p = p'$ et $q = q'$.*

Démonstration. — La preuve de ce résultat se fera en trois étapes.

Étape 1 : $r = r' = 2$. — Il s'agit donc d'expliquer comment le spectre d'un groupe du type $\Gamma(2, p, q)$ permet d'identifier le triangle associé. Tout d'abord si $p \geq 11$ nous disposons des deux premières longueurs et la résolution élémentaire d'un système d'équations permet de conclure. Reste à savoir si un tel groupe peut posséder un spectre identique à un groupe vérifiant $p < 11$: la réponse est négative et résulte d'une étude fine de la valeur de la systole. Notons en particulier que la systole d'un groupe $\Gamma(2, 3, q)$ est simple et la systole d'un groupe $\Gamma(2, p, q)$ avec $p \geq 4$ est de multiplicité exactement deux. Les groupes suivants possèdent des systoles de longueur identique :

- $\Gamma(2, 3, 10)$ et $\Gamma(2, 5, 5)$
- $\Gamma(2, 3, 12)$ et $\Gamma(2, 4, 12)$

Étape 2 : $r, r' \neq 3$. — Nous expliquons maintenant pourquoi un $\Gamma(r, p, q)$ et un $\Gamma(r', p', q')$ vérifiant $r, r' \neq 3$ ne peuvent partager le même spectre. Dans un premier temps on constate facilement par une étude de cas qu'un $\Gamma(2, p', q')$ et un groupe $\Gamma(r, p, q)$, $r \geq 4$ ne peuvent pas avoir les deux premières longueurs (avec multiplicités) identiques.

Il nous reste ensuite à montrer que des groupes distincts vérifiant $r \geq 4$ et $r' \geq 4$ ne peuvent pas avoir les trois premières longueurs (avec multiplicités)

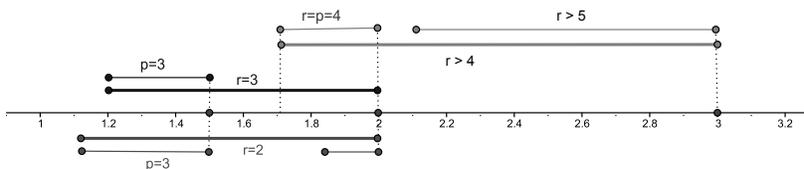


FIGURE 3.1. Répartition des valeurs numériques $\cosh(\text{Syst}/2)$

identiques, ce qui résulte là encore d'un système d'équations après avoir écarté le cas particulier des triangles isocèles et équilatéraux. Les "jumeaux" systoliques rencontrés à ce stade sont :

- $\Gamma(2, 10, 10)$ et $\Gamma(4, 4, 5)$

Étape 3 : le cas général. — Il reste donc à différencier le cas $r = 3$. Une observation élémentaire permet d'affirmer qu'un tel groupe ne peut partager la systole que d'un $\Gamma(r', p', q')$ avec $r' = 2, 3, 4$. Un examen approfondi des deux premières longueurs nous amène à ne retenir qu'un nombre restreint de cas d'égalité de systoles :

- $\Gamma(4, 4, q)$ et $\Gamma(3, q, \infty)$ pour $q = 4, 5, 6$
- $\Gamma(3, p, p)$ et $\Gamma(2, p, \infty)$ pour $p \geq 4$
- $\Gamma(2, 5, 5)$ et $\Gamma(3, 3, 5)$
- $\Gamma(2, 4, 12)$ et $\Gamma(3, 3, 6)$

Là encore les deux premières longueurs (avec multiplicités) ne coïncident jamais, ce qui conclut la preuve du théorème.

□

Remarque. — Pour différencier les derniers cas d'égalités systoliques, il est nécessaire d'expliciter un peu plus le bas du spectre de certains groupes : nous renvoyons à [27] pour les détails.

Signalons enfin que la preuve de la rigidité établit un véritable algorithme permettant de retrouver les entiers r, p et q .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Akrouf. *Un processus effectif de détermination des systoles pour les surfaces hyperboliques*, *Geom. Dedicata*, **121**, (2006), p.1-8.
- [2] C. Bavard. *L'aire systolique conforme des groupes cristallographiques du plan*, *Ann. Inst. Fourier*, **43** n° 3, (1993), p.815-842.
- [3] A.F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*, *Graduate Texts in Mathematics*, **91**, Springer-Verlag, 1983.
- [4] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet. *Le spectre d'une variété riemannienne*, *Lectures Notes in Math.*, **194**, Springer, 1971.
- [5] R. Brooks, R. Tse. *Isospectral surfaces of small genus*, *Nagoya Math. J.*, **107**, (1987), p.13-24.
- [6] P. Bérard. *Transplantation et Isospectralité I*, *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, **9**, (1990-1991), p.153-175.
- [7] P. Bérard. *Transplantation et Isospectralité II*, *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, **9**, (1990-1991), p.177-188.
- [8] P. Bérard. *Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques*, *Sémin. N. Bourbaki*, **705**, (1988-1989), p.127-154.

- [9] P. Buser. *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*, Progress in Mathematics, **106**, Birkhäuser, 1992.
- [10] P. Buser, K.-D. Semmler. *The geometry and spectrum of the one holed torus*, Comment. Math. Helv., **63**, (1988), p.259-274.
- [11] Y. Colin de Verdière, *Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques fermées*, Compositio Math., **27**, (1973), p. 83-106, p. 159-184.
- [12] F. Dal'Bo. *Trajectoires géodésiques et horocycliques*, Savoirs Actuels, CNRS Editions, 2007.
- [13] R. Dianu. *Sur le spectre des tores pointés*, Thèse, EPFL, Lausanne, 2000.
- [14] E. Dryden. *Geometric and Spectral Properties of Compact Riemann Orbisurfaces*, Ph.D. Thesis, Dartmouth College, 2004.
- [15] E. Dryden, A. Strohmaier. *Huber's theorem for hyperbolic orbisurfaces*, Canad. Math. Bull., **52**, (2009), p.66-71.
- [16] V. Guillemin, D. Kazhdan, *Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds*, Topology, **19**, (1980), p.301-312.
- [17] A. Haas. *Length spectra as moduli for hyperbolic surfaces*, Duke Math. J., **5**, (1985), p.922-935.
- [18] U. Hamenstädt, R. Koch. *Systoles of a family of triangles surfaces*, Experimental Math., **11** n° 2, (2002), p.249-270.
- [19] M. Kac. *Can One Hear the Shape of a Drum?*, The American Mathematical Monthly, **73** n° 4, Part 2 : Papers in Analysis (Apr. 1966), p.1-23.
- [20] H. Iwaniec. *Spectral Methods of Automorphic Forms*, Graduate Studies in Mathematics, **53**, AMS, 2002.
- [21] W. Müller. *Spectral geometry and scattering theory for certain complete surfaces of finite volume*, Inventiones Math., **109**, (1992), p.265-305.
- [22] J-P. Otal, *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative*, Ann. of Math., **131**, (1990), p.151-162.
- [23] H. Pesce, *Une réciproque générique du théorème de Sunada*, Compositio Math., **109**, (1997), p.357-365.
- [24] E. Philippe. *Géométrie des surfaces hyperboliques*, Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2008. [<http://thesesups.ups-tlse.fr/270/>]
- [25] E. Philippe. *Les groupes de triangles $(2, p, q)$ sont déterminés par leur spectre des longueurs*, Ann. Inst. Fourier, **58** n° 7, (2008), p.2659-2693. [<http://arxiv.org/abs/0807.4746>]
- [26] E. Philippe. *Sur le spectre des longueurs des groupes de triangles (r, p, q)* . [<http://arxiv.org/abs/0901.4630>]
- [27] E. Philippe. *Sur la rigidité des groupes de triangles (r, p, q)* , Geom. Dedicat., **149**, (2010), p. 155-160. [<http://simplementconnexe.free.fr/>]
- [28] A.W. Reid, C. Maclachlan. *The Arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, **219**, Springer-Verlag, 2003.
- [29] A.W. Reid. *Isospectrality and commensurability of arithmetic hyperbolic 2- and 3-manifolds*, Duke Math. J., **65**, (1992), p.215-228.
- [30] B. Osgood, R. Phillips, P. Sarnak, *Compact Isospectral Sets of Surfaces*, J. Funct. Anal., **80**, (1988), p.212-234.
- [31] T. Sunada. *Riemannian coverings and isospectral manifolds*, Ann. of Math., **121**, (1985), p.169-186.
- [32] M-F. Vignéras. *Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques*, Ann. of Math., **112**, (1980), p.21-32.

- [33] M-F. Vignéras. *Arithmétique des algèbres de quaternions*, Lecture notes in Math., **800**, Springer, 1980.
- [34] R. Vogeler. *On the geometry of Hurwitz surfaces*, Thesis, Univ. Florida, 2003.
- [35] S.A. Wolpert. *The length spectra as moduli for compact Riemann surfaces*, Ann. of Math., **109**, (1979), p.323-351.

Emmanuel PHILIPPE
IHES
35 route de Chartres
91440 Bures sur Yvette (France)