

Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de
**Théorie spectrale
et géométrie**

Benoît DANIEL

Sphères à courbure moyenne constante et problème isopérimétrique dans les variétés homogènes

Volume 28 (2009-2010), p. 13-27.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2009-2010__28__13_0>

© Institut Fourier, 2009-2010, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

SPHÈRES À COURBURE MOYENNE CONSTANTE ET PROBLÈME ISOPÉRIMÉTRIQUE DANS LES VARIÉTÉS HOMOGENÈS

Benoît Daniel

RÉSUMÉ. — Nous passons en revue certains résultats récents sur l'existence et l'unicité des sphères à courbure moyenne constante dans les variétés riemanniennes homogènes simplement connexes de dimension 3 et leurs liens avec le problème isopérimétrique dans ces variétés.

ABSTRACT. — This is a survey on some recent results about the existence and the uniqueness of constant mean curvature spheres in simply connected homogeneous Riemannian 3-manifolds and their relation to the isoperimetric problem in these manifolds.

1. Introduction

Soit M une variété riemannienne complète de dimension n (de volume fini ou infini). Le *problème isopérimétrique* consiste à étudier, pour une constante $v \in]0, \text{Vol}(M)[$ donnée, parmi les domaines compacts Ω de volume v , ceux tels que l'aire de $\partial\Omega$ soit minimale (s'ils existent). Un tel domaine Ω est alors appelé *domaine isopérimétrique*. Sans perte de généralité on pourra se limiter aux domaines qui sont l'adhérence d'un ouvert de M . Pour tout $v \in]0, \text{Vol}(M)[$ on pose

$$I(v) := \inf \{ \text{Aire}(\partial\Omega) \mid \Omega \subset M \text{ compact, } \text{Vol}(\Omega) = v \}.$$

La fonction I est appelée *profil isopérimétrique* de M .

Si le quotient de M par son groupe d'isométries est compact, alors le problème isopérimétrique admet des solutions pour tout v [20]. Si $n \leq 7$,

Mots-clés : Courbure moyenne, variété riemannienne homogène, problème isopérimétrique, théorème de Hopf, théorème d'Alexandrov.

Classification math. : 53A10, 53C42, 53A35.

alors le bord d'un domaine isopérimétrique est une union d'hypersurfaces lisses plongées à courbure moyenne constante (CMC) deux à deux disjointes et de même courbure moyenne [12] (voir également [19]). Nous supposerons désormais que ces deux conditions sont vérifiées. Le profil isopérimétrique admet alors des dérivées à gauche et à droite $I'_-(v)$ et $I'_+(v)$ en chaque $v \in]0, +\infty[$, et il existe des domaines isopérimétriques délimités par des hypersurfaces à courbure moyenne $I'_-(v)/2$ et $I'_+(v)/2$ respectivement (voir [26]). Ici la courbure moyenne est calculée pour le vecteur unitaire rentrant dans le domaine isopérimétrique. La résolution du problème isopérimétrique est donc liée à la classification des hypersurfaces CMC compactes plongées.

Le problème isopérimétrique est souvent encore ouvert, même dans des variétés « simples ». Le lecteur pourra consulter [26] pour une vue d'ensemble sur le problème isopérimétrique.

Dans cet article nous allons nous intéresser au cas où $n = 3$ et où M est simplement connexe et homogène (on rappelle qu'une variété est homogène si son groupe d'isométries agit transitivement dessus). Le problème isopérimétrique admet donc une solution (à bord lisse) pour tout volume. Un domaine isopérimétrique est alors nécessairement connexe (sinon on peut déplacer une composante connexe par des isométries ambiantes pour obtenir un domaine délimité par des surfaces dont deux au moins sont tangentes, or un tel domaine ne peut pas être isopérimétrique). Si de plus M est difféomorphe à \mathbb{R}^3 ou \mathbb{S}^3 , alors le bord d'un domaine isopérimétrique est connexe (par un argument semblable).

Dans \mathbb{R}^3 , il est bien connu que les domaines isopérimétriques sont les boules géodésiques.

THÉORÈME 1.1. — *Tout domaine isopérimétrique dans \mathbb{R}^3 est délimité par une sphère ronde.*

Une méthode de démonstration consiste à utiliser la *symétrisation de Schwarz*. On se donne un domaine compact connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. On considère un axe Δ dans \mathbb{R}^3 , par exemple vertical, et pour chaque plan horizontal P tel que $\Omega \cap P \neq \emptyset$ on considère le disque D_P dans P centré en $\Delta \cap P$ et dont l'aire est égale à l'aire de $\Omega \cap P$. On peut alors montrer que l'union Ω^* des D_P est un domaine de même volume que Ω mais dont le bord a une aire strictement inférieure à celle de $\partial\Omega$, sauf si Ω^* est l'image de Ω par une isométrie, auquel cas Ω est un domaine de révolution autour d'un axe parallèle à Δ . Ceci montre qu'un domaine isopérimétrique est nécessairement un domaine de révolution autour d'un axe parallèle à Δ . Comme on

peut appliquer cet argument avec n'importe quelle direction, on en déduit qu'un domaine isopérimétrique est une boule géodésique.

Une démonstration alternative utilise la *symétrisation de Steiner* : on considère un plan Π , et pour toute droite D orthogonale à Π et telle que $\Omega \cap D \neq \emptyset$ on considère le segment de D centré en $\Pi \cap D$ et dont la longueur est égale à la longueur de $\Omega \cap D$: l'union Ω^\sharp de ces segments est un domaine de même volume que Ω mais dont le bord a une aire strictement inférieure à celle de $\partial\Omega$, sauf si Ω est l'image de Ω^\sharp par une isométrie, auquel cas Ω est symétrique par rapport à un plan parallèle à Π . On conclut en appliquant cette technique par rapport à toutes les directions de plans. On pourra se référer à [22] pour une introduction détaillée et élémentaire aux techniques de symétrisation en géométrie et en analyse.

Plus généralement, les sphères rondes ont été caractérisées de deux manières différentes parmi les surfaces CMC dans les années 1950.

THÉORÈME 1.2 (Alexandrov [4]). — *Toute surface CMC compacte plongée dans \mathbb{R}^3 est une sphère ronde.*

La démonstration de ce théorème repose sur une autre technique de symétrisation, la *réflexion d'Alexandrov*. Soit S une surface CMC compacte plongée dans \mathbb{R}^3 . On se donne une famille (P_t) de plans parallèles et on considère les images \tilde{S}_t de S par la réflexion par rapport à P_t . Une application du principe du maximum montre alors l'existence d'un réel t tel que $S = \tilde{S}_t$, c'est-à-dire tel que S est symétrique par rapport à P_t , et chaque moitié de S est un graphe au-dessus d'un domaine de P_t . Comme on peut appliquer cette technique avec n'importe quelle famille de plans parallèles, on en déduit que S est une sphère ronde.

Remarquons que le théorème 1.1 peut s'obtenir comme corollaire du théorème 1.2 puisque tout domaine isopérimétrique dans \mathbb{R}^3 est délimité par une surface CMC compacte plongée.

Notons enfin que Reilly [25] a donné une autre démonstration du théorème d'Alexandrov en utilisant des formules intégrales.

THÉORÈME 1.3 (Hopf [13]). — *Toute sphère CMC dans \mathbb{R}^3 est une sphère ronde.*

(Par sphère CMC nous entendons une surface CMC difféomorphe à S^2 .) La démonstration est d'une nature différente et repose sur le fait que la partie $(2,0)$ de la deuxième forme fondamentale d'une surface CMC dans \mathbb{R}^3 est holomorphe : c'est la *différentielle de Hopf*. Sur une sphère CMC, la différentielle de Hopf est donc identiquement nulle, ce qui implique que la sphère est totalement ombilicale, donc ronde.

Notons qu'il existe des surfaces CMC de genre strictement positif (donc non plongées) dans \mathbb{R}^3 (voir par exemple [16]) : les premières à avoir été découvertes sont les tores de Wente [31].

Les mêmes arguments permettent de généraliser ces trois théorèmes à l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3(\kappa)$ à courbure $\kappa < 0$. Ils permettent aussi d'étendre les théorèmes 1.1 et 1.3 à la sphère $\mathbb{S}^3(\kappa)$ à courbure $\kappa > 0$. En revanche le théorème 1.2 n'a pas d'équivalent dans $\mathbb{S}^3(\kappa)$ où il existe des surfaces CMC compactes plongées de genre strictement positif, comme le tore de Clifford. Cependant, dans un hémisphère de $\mathbb{S}^3(\kappa)$, on peut appliquer la technique de réflexion d'Alexandrov et montrer que les seules surfaces CMC compactes plongées sont les sphères rondes. On pourra se référer à [27] pour la résolution du problème isopérimétrique dans $\mathbb{S}^3(\kappa)$ et $\mathbb{H}^3(\kappa)$ (la technique de symétrisation de Schwarz est plus subtile que dans \mathbb{R}^3).

L'objectif de cet article est de présenter des généralisations de ces théorèmes à d'autres variétés ambiantes homogènes simplement connexes de dimension 3, en évitant d'entrer dans les considérations techniques. Nous commençons par mentionner un résultat très important sur le comportement asymptotique du profil isopérimétrique d'une variété homogène (de dimension quelconque).

THÉORÈME 1.4 (Pittet [24]). — *Soit X une variété homogène non compacte, G la composante connexe de l'identité dans le groupe d'isométries de X et I le profil isopérimétrique de X .*

- (1) *Si G est une extension compacte d'un groupe résoluble et que G est unimodulaire, alors*
 - (a) *ou bien G est à croissance polynomiale de degré d , et alors il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que $c_1 v^{(d-1)/d} \leq I(v) \leq c_2 v^{(d-1)/d}$ pour tout v assez grand,*
 - (b) *ou bien G est à croissance exponentielle, et alors il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que $c_1 v / \log v \leq I(v) \leq c_2 v / \log v$ pour tout v assez grand.*
- (2) *Dans le cas contraire, il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que $c_1 v \leq I(v) \leq c_2 v$ pour tout v assez grand.*

On pourra se référer par exemple à [15] pour la définition de la croissance d'un groupe de Lie (voir également [8]).

Nous rappelons enfin une notion importante liée au problème isopérimétrique. Si Ω est un domaine isopérimétrique, alors son bord $\partial\Omega$ est *stable*

(au sens faible), c'est-à-dire que

$$\int_{\partial\Omega} -uLu \geq 0$$

pour toute fonction lisse u d'intégrale nulle sur $\partial\Omega$, où L désigne l'opérateur de Jacobi de $\partial\Omega$ (c'est-à-dire $L = \Delta + \|B\|^2 + \text{Ric}(N)$ où B est la deuxième forme fondamentale de $\partial\Omega$, N sa normale unitaire et Ric la courbure de Ricci de la variété ambiante). Dans \mathbb{R}^3 , $\mathbb{S}^3(\kappa)$ et $\mathbb{H}^3(\kappa)$, les seules surfaces CMC compactes stables sont les sphères rondes [5, 6].

À la section 2 nous présentons les variétés homogènes que nous allons considérer. Les sections 3, 4 et 5 présentent des généralisations des théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3 dans ces variétés.

2. Les variétés homogènes simplement connexes de dimension 3

La classification des variétés homogènes simplement connexes de dimension 3 est connue. Une telle variété a un groupe d'isométries de dimension 3, 4 ou 6.

- Si le groupe d'isométries est de dimension 6, on a une variété à courbure constante.
- Si le groupe d'isométries est de dimension 4, on a les variétés produits $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, le groupe de Heisenberg Nil_3 muni d'une métrique invariante à gauche, le revêtement universel du groupe de Lie $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ muni d'une métrique invariante à gauche standard, que nous noterons $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$, et les sphères de Berger (voir ci-après). Ces variétés constituent, avec l'espace euclidien et les sphères rondes, une famille à deux paramètres que nous noterons $(\mathbb{E}^3(\kappa, \tau))_{(\kappa, \tau) \in \mathbb{R}^2}$.
- Si le groupe d'isométries est de dimension 3, on a certains groupes de Lie munis de métriques invariantes à gauche. Un exemple particulièrement intéressant est le groupe de Lie Sol_3 muni d'une métrique invariante à gauche standard, car il possède des quotients compacts et des plans de symétrie, comme nous l'expliquerons par la suite.

Toutes les variétés $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ admettent une fibration riemannienne (ou submersion riemannienne)

$$\varpi : \mathbb{E}^3(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$$

sur la surface simplement connexe $\mathbb{M}^2(\kappa)$ de courbure κ avec une courbure de fibration τ (ce nombre est nul si et seulement si la fibration est une fibration produit). Le groupe d'isométries est de dimension 4 si et seulement

si $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$ (sinon on obtient l'espace euclidien ou les sphères rondes). Le tableau 2.1 décrit les variétés $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ en fonction de κ et de τ .

	$\kappa < 0$	$\kappa = 0$	$\kappa > 0$
$\tau = 0$	$\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$	\mathbb{R}^3	$\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$
$\tau \neq 0$	$\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$	Nil_3	sphères rondes, sphères de Berger

TABLE 2.1. Les différents types de variétés $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.

Les variétés $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ sont difféomorphes à \mathbb{R}^3 lorsque $\kappa \leq 0$. Le groupe de Heisenberg Nil_3 est le groupe des matrices réelles de taille 3×3 triangulaires supérieures à coefficients diagonaux égaux à 1 (c'est un groupe de Lie nilpotent).

Le revêtement universel du groupe de Lie $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ peut être identifié avec le revêtement universel du fibré unitaire tangent $\text{UH}^2(\kappa)$ du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2(\kappa)$, que nous noterons $\widetilde{\text{UH}}^2(\kappa)$. En effet, le groupe $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ est le groupe des isométries de $\mathbb{H}^2(\kappa)$ préservant l'orientation ; il agit transitivement sur $\text{UH}^2(\kappa)$ et le stabilisateur de n'importe quel élément de $\text{UH}^2(\kappa)$ est trivial. Le fibré unitaire tangent $\text{UH}^2(\kappa)$ peut être muni de la métrique induite par une métrique de Sasaki sur le fibré tangent $\text{TH}^2(\kappa)$. Son revêtement universel donne alors un modèle de $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$ muni d'une métrique standard ; la fibration riemannienne ϖ est identifiée à la projection canonique $\widetilde{\text{UH}}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{H}^2(\kappa)$.

Les sphères de Berger sont obtenues en déformant la métrique d'une sphère ronde d'une manière qui préserve une fibration de Hopf donnée mais qui modifie la longueur des fibres. Dans les sphères rondes et les sphères de Berger, ϖ est la fibration de Hopf et les fibres sont des cercles de longueur $8\pi\tau/\kappa$. Les sphères de Berger sont dites de type I (respectivement de type II) si $\kappa - 4\tau^2 > 0$ (respectivement $\kappa - 4\tau^2 < 0$), c'est-à-dire si les fibres sont de longueur plus petite (respectivement plus grande) que les fibres de la sphère ronde $\mathbb{S}^3(\kappa/4)$. Les sphères de Berger sont également isométriques au groupe de Lie SU_2 muni de certaines métriques invariantes à gauche obtenues de façon analogue aux métriques standards sur $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$ mais à partir de la sphère $\mathbb{S}^2(\kappa)$.

Le groupe de Lie Sol_3 est le produit semi-direct $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{R}$ où $\varphi_{x_3}(x_1, x_2) = (e^{-x_3}x_1, e^{x_3}x_2)$. C'est un groupe de Lie résoluble mais non nilpotent.

Notons que les huit modèles de géométrie de Thurston sont \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^3 , \mathbb{H}^3 , $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Nil_3 , $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$ et Sol_3 . Pour plus de détails sur la classification des variétés homogènes de dimension 3 et les géométries de Thurston,

on pourra se référer à [28, 7, 18, 10]. (Dans cet article nous considérons sur $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$ et Sol_3 uniquement les métriques standards, c'est-à-dire celles qui en font des géométries de Thurston.)

Nous n'allons pas donner les expressions explicites des métriques de ces variétés mais nous allons plutôt décrire les isométries qui seront importantes pour la suite.

- Chaque variété $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ admet un groupe à un paramètre de *rotations* autour de chaque géodésique verticale (c'est-à-dire dont l'image par la fibration ϖ est un point). Dans $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, Nil_3 et $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$, on obtient ainsi les seuls groupes compacts à un paramètre d'isométries.
- Les variétés produits $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ admettent de plus des *réflexions* par rapport aux surfaces totalement géodésiques horizontales $\mathbb{S}^2 \times \{t\}$ et $\mathbb{H}^2 \times \{t\}$ ($t \in \mathbb{R}$) et verticales $\varpi^{-1}(\gamma)$ où γ est une géodésique de $\mathbb{S}^2(\kappa)$ ou $\mathbb{H}^2(\kappa)$.
- La variété Sol_3 n'admet pas de groupe à un paramètre de rotations mais admet deux feuilletages par des surfaces totalement géodésiques tels que les *réflexions* par rapport aux feuilles sont des isométries.

Notons enfin que \mathbb{R}^3 , Nil_3 et $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ sont dans le cas 1a du théorème 1.4 (avec respectivement $d = 3$, $d = 4$ et $d = 1$), que Sol_3 est dans le cas 1b et que $\mathbb{H}^3(\kappa)$, $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ et $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$ sont dans le cas 2.

3. Le problème de Hopf dans $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

Des candidats naturels pour être solution du problème isopérimétrique sont les domaines délimités par des sphères CMC. Puisqu'il existe des groupes à un paramètre de rotations dans $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, on peut s'intéresser à l'existence de sphères CMC de révolution : on est ramené à étudier une équation différentielle ordinaire (ÉDO) autonome d'ordre 1, dont l'analyse permet de classer les sphères CMC de révolution. En particulier on peut montrer que si $H^2 \leq -\kappa/4$, alors il n'existe pas de sphère CMC H de révolution $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, et que si $H^2 > \kappa/4$, alors il existe une unique sphère CMC H de révolution dans $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ (à isométries ambiantes près). Nous dirons que deux surfaces sont *congruentes* si l'une est l'image de l'autre par une isométrie ambiante.

Nous allons tout d'abord nous intéresser à la classification des sphères CMC (non nécessairement plongées), bien que le résultat suivant soit en fait postérieur à la plupart des résultats que nous exposerons à la section 4.

THÉORÈME 3.1 (Abresch-Rosenberg [1, 2]). — *Toute sphère CMC dans $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ est une sphère de révolution.*

Contrairement au cas des variétés à courbure constante, la différentielle de Hopf classique des surfaces CMC dans $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ (avec $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$) n'est en général pas holomorphe. Cependant, Abresch et Rosenberg ont montré que, pour tout réel H , une certaine combinaison linéaire (dépendant de H , κ et τ) de la différentielle de Hopf et d'un terme provenant du champ de Killing unitaire tangent aux fibres de ϖ est holomorphe pour toutes les surfaces CMC H de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Sur une sphère CMC H , cette différentielle quadratique est donc identiquement nulle. On peut alors montrer que la sphère est de révolution (voir [10] pour une démonstration détaillée dans le cas où $\tau \neq 0$).

4. Le problème isopérimétrique et le problème d'Alexandrov dans $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

L'état des connaissances actuelles est très différent selon que $\tau = 0$ ou $\tau \neq 0$.

4.1. Le cas de $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$

C'est sans doute le cas le plus facile à traiter car la métrique est une métrique produit et l'espace est difféomorphe à \mathbb{R}^3 . L'analogue du théorème d'Alexandrov a été démontré.

THÉORÈME 4.1 (Hsiang-Hsiang [14]). — *Toute surface CMC compacte plongée dans $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ est une sphère de révolution.*

Ceci montre en particulier que pour tout H il existe au plus une surface CMC H compacte plongée (à isométries ambiantes près).

L'idée de la démonstration est la suivante. Pour chaque géodésique horizontale γ on considère la famille (P_t) des plans verticaux orthogonaux à γ . La technique de réflexion d'Alexandrov permet de montrer que S est symétrique par rapport à un des plans P_t . Puisque ceci est vrai pour toute géodésique γ , on montre que tous les plans de symétries se coupent et que la surface est de révolution. Une analyse d'ÉDO montre ensuite que toute surface CMC compacte de révolution est une sphère.

COROLLAIRE 4.2 (Hsiang-Hsiang [14]). — *Tout domaine isopérimétrique dans $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ est délimité par une sphère CMC de révolution.*

Réciproquement, toutes les sphères CMC sont isopérimétriques. En effet, l'étude explicite de ces sphères permet de montrer que l'application V qui à $H > \sqrt{-\kappa}/2$ associe le volume du domaine compact délimité par une sphère CMC H est strictement décroissante [14]. Il en est de même pour l'aire. Ceci implique aussi que le profil isopérimétrique I est concave car $I'(V(H)) = 2H$.

4.2. Le cas de $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$

Comme dans les sphères rondes, le théorème d'Alexandrov n'est pas valable dans $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ (en effet il existe par exemple des tores CMC plongés autour des géodésiques de $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \{t\}$). En revanche, la technique de réflexion d'Alexandrov s'applique dans le produit d'un hémisphère de $\mathbb{S}^2(\kappa)$ et de \mathbb{R} et permet de montrer que les seules surfaces CMC compactes plongées dans le produit d'un hémisphère de $\mathbb{S}^2(\kappa)$ et de \mathbb{R} sont des sphères de révolution autour d'un axe vertical.

Ceci ne suffit pas pour résoudre le problème isopérimétrique. Cependant, l'existence de familles à un paramètre de rotations autour de chaque axe vertical dans $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ et le fait qu'on a une métrique produit permettent d'appliquer la technique de symétrisation de Schwarz pour montrer que tout domaine isopérimétrique est de révolution autour d'un axe vertical. Puisqu'un domaine isopérimétrique est de plus délimité par une ou plusieurs surfaces CMC, l'étude des surfaces CMC de révolution dans $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ permet de montrer que les domaines isopérimétriques de $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ ne peuvent être que de deux types : ou bien des domaines délimités par une sphère CMC (à courbure moyenne non nulle), ou bien des domaines de la forme $\mathbb{S}^2(\kappa) \times [a, b]$ (donc délimités par deux sphères minimales, c'est-à-dire à courbure moyenne nulle). Le calcul explicite des aires et volumes de ces domaines permet ensuite de résoudre complètement le problème isopérimétrique (voir également [23]).

THÉORÈME 4.3 (Pedrosa [21]). — *Il existe une constante $v_0 > 0$ telle que*

- (1) *si $v \in]0, \kappa^{-3/2}v_0[$, alors tout domaine isopérimétrique de volume v dans $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ est délimité par une sphère CMC de révolution (donc tous les domaines isopérimétriques de volume v sont congruents),*
- (2) *si $v > \kappa^{-3/2}v_0$, alors tout domaine isopérimétrique de volume v dans $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ est congruent à $\mathbb{S}^2(\kappa) \times [0, \kappa v / (4\pi)]$ (en particulier tout domaine isopérimétrique est délimité par deux surfaces minimales),*

- (3) si $v = \kappa^{-3/2}v_0$, alors il y a exactement deux domaines isopérimétriques non congruents : l'un du premier type précédent et l'autre du deuxième type précédent.

Il est de plus possible de déterminer quelles sphères CMC sont stables (outre les sphères isopérimétriques). Pour $H > 0$, soit S_H une sphère CMC H , $A(H)$ son aire $V(H)$ le volume du domaine compact délimité par S_H . Alors on a $A'(H) = 2HV(H)$ et S_H est stable si et seulement si $V'(H) \leq 0$ [29]. Le calcul explicite de $A(H)$ [21] permet alors de montrer l'existence d'une constante H_1 telle que S_H est stable si et seulement si $H \geq H_1$. Par ailleurs, quand $H \rightarrow 0$, S_H converge vers un recouvrement double d'une sphère minimale $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \{t\}$ avec une singularité ponctuelle (et donc $V(H) \rightarrow 0$ et $A(H) \rightarrow 8\pi/\kappa$). Cet argument permet aussi de montrer que le profil isopérimétrique est concave (voir la figure 4.1).

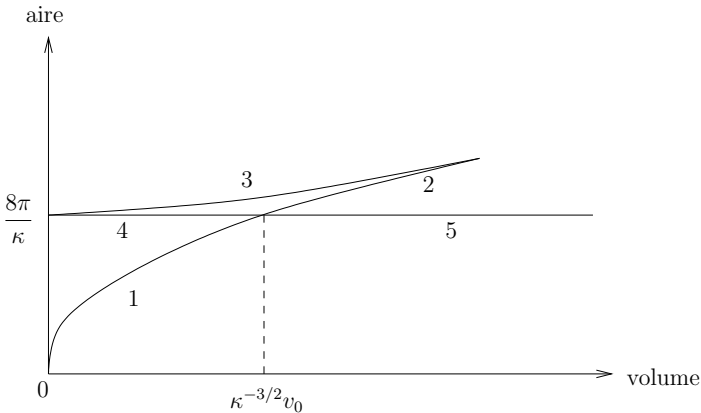


FIGURE 4.1. Aire et volume (allures) de certains domaines dans $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$. 1 : domaines isopérimétriques délimités par des sphères CMC (stables). 2 : domaines non isopérimétriques délimités par des sphères CMC stables. 3 : domaines (non isopérimétriques) délimités par des sphères CMC instables. 4 : domaines non isopérimétriques de la forme $\mathbb{S}^2(\kappa) \times [a, b]$. 5 : domaines isopérimétriques de la forme $\mathbb{S}^2(\kappa) \times [a, b]$. Le profil isopérimétrique est donné par les courbes 1 et 5.

4.3. Le cas de Nil_3 , de $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$ et des sphères de Berger

Dans les variétés $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ avec $\tau \neq 0$, le problème isopérimétrique reste en revanche ouvert. Tout d'abord les techniques de symétrisation ne s'appliquent pas : celle de Steiner car il n'existe pas de « plans de réflexion », celle de Schwarz car il ne semble pas y avoir de surfaces jouant le rôle des plans horizontaux de \mathbb{R}^3 .

Plus généralement, le problème d'Alexandrov est également ouvert dans Nil_3 et dans $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$. En effet on ne peut pas appliquer la technique de réflexion d'Alexandrov car ces variétés ambiantes n'admettent pas de réflexions (plus généralement toutes leurs isométries préservent l'orientation). La démonstration de Reilly du théorème d'Alexandrov dans \mathbb{R}^3 ne semble pas non plus adaptable de façon évidente à Nil_3 et $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$. Dans les sphères de Berger il existe des tores CMC plongés, par exemple les tores de Hopf (c'est-à-dire les images réciproques par ϖ des cercles de $\mathbb{S}^2(\kappa)$).

Il existe toutefois des résultats partiels. Tout d'abord, pour les petits volumes, il est connu que les domaines isopérimétriques sont difféomorphes à une boule (voir [26]), donc délimités par une sphère CMC (donc une sphère de révolution d'après le théorème 3.1).

On peut voir que les sphères CMC dans Nil_3 , $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$ et les sphères de Berger de type II sont stables. En effet, ce sont les *surfaces sœurs* [9] des sphères CMC des produits $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, qui sont le bord de domaines isopérimétriques, donc stables, et cette correspondance préserve la stabilité (la correspondance des surfaces sœurs est une généralisation de la correspondance de Lawson). De plus, cette correspondance et les arguments de [29] permettent de montrer que l'application qui à $H > \sqrt{-\kappa}/2$ associe le volume du domaine compact délimité par une sphère CMC H est strictement décroissante.

De même, les sphères CMC stables dans les sphères de Berger de type I sont celles dont la sphère CMC sœur dans un produit $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ est stable.

Le problème isopérimétrique a été résolu dans certaines sphères de Berger de type I (proches des sphères rondes) par Torralbo et Urbano [30] : pour cela ils utilisent le fait que ces sphères de Berger ont un plongement isométrique naturel dans un plan projectif complexe à courbure holomorphe constante et une inégalité de stabilité.

Notons que lorsque $\kappa > 0$ est fixé et que $\tau \rightarrow 0$, les sphères de Berger $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ convergent vers $\mathbb{S}^2(\kappa)$ pour la topologie de Gromov-Hausdorff (la longueur des fibres tend vers 0).

CONJECTURE 4.4. — *Toute surface CMC compacte plongée dans Nil_3 ou $\widehat{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$ est une sphère CMC de révolution. En particulier, tout domaine isopérimétrique est délimité par une sphère CMC, et toute sphère CMC est le bord d'un domaine isopérimétrique.*

5. Le cas de Sol_3

La situation dans Sol_3 est très différente de la situation dans $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ avec $\tau \neq 0$. Tout d'abord, la version topologique du théorème d'Alexandrov a été démontrée dans Sol_3 .

THÉORÈME 5.1 (Rosenberg). — *Toute surface CMC compacte plongée dans Sol_3 est une sphère.*

La démonstration repose sur l'existence de deux feuilletages par rapport auxquels on peut appliquer la technique de réflexion d'Alexandrov : en utilisant un des feuilletages on montre d'abord que la surface est symétrique par rapport à un « plan » et que chaque moitié est un graphe au-dessus d'un domaine U de ce plan, et en utilisant l'autre feuilletage on montre que U est un disque (voir [11] pour une démonstration détaillée).

COROLLAIRE 5.2. — *Tout domaine isopérimétrique dans Sol_3 est délimité par une sphère CMC.*

Pour étudier l'ensemble des sphères CMC dans Sol_3 , deux difficultés apparaissent :

- la question de l'existence-même de sphères CMC H pour une valeur $H > 0$ donnée se pose puisqu'il n'existe pas de groupe à un paramètre de rotations dans Sol_3 , ce qui ne permet donc pas de calculer des exemples explicites comme dans $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$,
- la technique d'Abresch-Rosenberg pour démontrer l'unicité des sphères CMC H ne fonctionne pas dans Sol_3 .

Le problème de Hopf a cependant été résolu récemment en faisant appel à des méthodes plus variées. Nous appelons *translation* une isométrie de Sol_3 qui est dans la composante connexe de l'identité.

THÉORÈME 5.3 (Daniel-Mira [11], Meeks [17]). — *Pour tout $H > 0$ il existe une unique sphère CMC H dans Sol_3 (à translations près).*

Ce résultat est optimal car il n'existe pas de surface minimale compacte dans Sol_3 (à cause de l'existence de feuilletages par des plans minimaux et du principe du maximum).

L'existence se montre par les arguments suivants :

- pour les très petits volumes, les domaines isopérimétriques sont délimités par des sphères, ce qui montre l'existence de sphères CMC à courbure moyenne très grande; ces sphères sont de plus d'indice 1, c'est-à-dire que leur opérateur de Jacobi a exactement une valeur propre strictement positive;
- un argument de fonctions implicites permet de montrer que l'ensemble \mathcal{J} des réels $H > 0$ tels qu'il existe une sphère CMC H d'indice 1 est ouvert;
- les théorèmes 1.4 et 5.1 permettent de montrer, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'une sphère CMC H avec $H \in]0, \varepsilon[$ (voir aussi la fin de la section 2);
- l'existence de ces sphères permet de montrer des estimées de hauteur pour toutes les sphères CMC;
- ces estimées de hauteur ainsi que des estimées de courbure permettent enfin de montrer que $\mathcal{J} =]0, +\infty[$.

L'unicité pour $H > 0$ donné se montre par les arguments suivants :

- on montre que l'application de Gauss G de la sphère CMC H construite précédemment (qui est d'indice 1), est un difféomorphisme;
- l'application G permet de définir, pour toute surface Σ CMC H , une différentielle quadratique Q_Σ satisfaisant une inégalité dite de *Cauchy-Riemann* [3] (une propriété plus faible que l'holomorphicité);
- par les résultats de [3], une telle différentielle est identiquement nulle sur une sphère;
- une étude de l'application de Gauss permet ensuite de montrer que deux surfaces Σ_1 et Σ_2 CMC H telles que $Q_{\Sigma_1} \equiv Q_{\Sigma_2} \equiv 0$ diffèrent par une translation.

Ces sphères CMC sont de plus plongées. En revanche on ne sait pas si toutes les sphères CMC sont isopérimétriques (ni même si elles sont stables). De façon équivalente, on ne sait pas si l'application qui à $H > 0$ associe le volume du domaine compact délimité par une sphère CMC H est strictement décroissante.

CONJECTURE 5.4. — *Toute sphère CMC dans Sol_3 est le bord d'un domaine isopérimétrique.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] U. Abresch and H. Rosenberg, *A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ and $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$* , Acta Math. **193** (2004), no. 2, 141–174.
- [2] ———, *Generalized Hopf differentials*, Mat. Contemp. **28** (2005), 1–28.

- [3] H. Alencar, M. do Carmo, and R. Tribuzy, *A theorem of Hopf and the Cauchy-Riemann inequality*, *Comm. Anal. Geom.* **15** (2007), no. 2, 283–298.
- [4] A. D. Alexandrov, *A characteristic property of spheres*, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **58** (1962), 303–315.
- [5] J. L. Barbosa and M. do Carmo, *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*, *Math. Z.* **185** (1984), no. 3, 339–353.
- [6] J. L. Barbosa, M. do Carmo, and J. Eschenburg, *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds*, *Math. Z.* **197** (1988), no. 1, 123–138.
- [7] F. Bonahon, *Geometric structures on 3-manifolds*, *Handbook of geometric topology*, North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 93–164.
- [8] T. Coulhon, A. Grigor'yan, and C. Pittet, *A geometric approach to on-diagonal heat kernel lower bounds on groups*, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **51** (2001), no. 6, 1763–1827.
- [9] B. Daniel, *Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds*, *Comment. Math. Helv.* **82** (2007), no. 1, 87–131.
- [10] B. Daniel, L. Hauswirth, and P. Mira, *Constant mean curvature surfaces in homogeneous manifolds*, *Livre en préparation*. Version préliminaire publiée par le Korea Institute for Advanced Study, 2009.
- [11] B. Daniel and P. Mira, *Existence and uniqueness of constant mean curvature spheres in Sol₃*, *Prépublication*, arXiv :0812.3059, 2008.
- [12] E. Gonzalez, U. Massari, and I. Tamanini, *On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint*, *Indiana Univ. Math. J.* **32** (1983), no. 1, 25–37.
- [13] H. Hopf, *Differential geometry in the large*, second ed., *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1000, Springer-Verlag, Berlin, 1989, Notes taken by Peter Lax and John W. Gray, With a preface by S. S. Chern, With a preface by K. Voss.
- [14] W.-T. Hsiang and W.-Y. Hsiang, *On the uniqueness of isoperimetric solutions and imbedded soap bubbles in noncompact symmetric spaces. I*, *Invent. Math.* **98** (1989), no. 1, 39–58.
- [15] J. W. Jenkins, *Growth of connected locally compact groups*, *J. Functional Analysis* **12** (1973), 113–127.
- [16] N. Kapouleas, *Constant mean curvature surfaces constructed by fusing Wente tori*, *Invent. Math.* **119** (1995), no. 3, 443–518.
- [17] W. H. Meeks, III, *Constant mean curvature spheres in Sol₃*, *Prépublication*, 2010.
- [18] J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*, *Advances in Math.* **21** (1976), no. 3, 293–329.
- [19] F. Morgan, *Regularity of isoperimetric hypersurfaces in Riemannian manifolds*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), no. 12, 5041–5052 (electronic).
- [20] ———, *Geometric measure theory*, fourth ed., Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2009, A beginner's guide.
- [21] R. Pedrosa, *The isoperimetric problem in spherical cylinders*, *Ann. Global Anal. Geom.* **26** (2004), no. 4, 333–354.
- [22] ———, *Uma introdução à simetrização em análise e geometria*, *Publicações Matemáticas do IMPA*. [IMPA Mathematical Publications], Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2005, 25o Colóquio Brasileiro de Matemática. [25th Brazilian Mathematics Colloquium].

- [23] R. H. L. Pedrosa and M. Ritoré, *Isoperimetric domains in the Riemannian product of a circle with a simply connected space form and applications to free boundary problems*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), no. 4, 1357–1394.
- [24] C. Pittet, *The isoperimetric profile of homogeneous Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **54** (2000), no. 2, 255–302.
- [25] R. Reilly, *Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), no. 3, 459–472.
- [26] A. Ros, *The isoperimetric problem*, Global theory of minimal surfaces, Clay Math. Proc., vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 175–209.
- [27] E. Schmidt, *Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionenzahl*, Math. Z. **49** (1943), 1–109.
- [28] P. Scott, *The geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), no. 5, 401–487.
- [29] R. Souam, *On stable constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 6, 2845–2857.
- [30] F. Torralbo and F. Urbano, *Compact stable constant mean curvature surfaces in the Berger spheres*, Prépublication, arXiv :0906.1439, 2009.
- [31] H. Wente, *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pacific J. Math. **121** (1986), no. 1, 193–243.

Benoît DANIEL
Université Paris-Est
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques
Appliquées CNRS UMR 8050
61 avenue du Général de Gaulle
94010 Créteil (France)
daniel@u-pec.fr