Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de

Théorie spectrale et géométrie

Marc HERZLICH

Une approche pédestre de quelques aspects locaux des variétés de Cauchy-Riemann

Volume 27 (2008-2009), p. 131-141.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2008-2009__27__131_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume 27 (2008-2009) 131-141

UNE APPROCHE PÉDESTRE DE QUELQUES ASPECTS LOCAUX DES VARIÉTÉS DE CAUCHY-RIEMANN

Marc Herzlich

De nombreuses structures géométriques possèdent un modèle « plat » caractérisé par l'annulation d'une courbure. C'est le cas par exemple de la géométrie riemannienne, la nullité de la courbure de la connexion de Levi-Civita caractérisant alors (localement) l'espace euclidien. Un autre exemple est la géométrie conforme ; le modèle plat (la sphère de Möbius) est caractérisé localement par l'annulation de la courbure de Weyl de toute métrique riemannienne dans la classe conforme, mais il est loin d'être évident d'identifier la condition $W = 0$ à l'annulation de toute la courbure –et non pas simplement une partie– d'une connexion bien choisie sur un fibré vectoriel également bien choisi.

Une construction possible de ces objets consiste à considérer la géométrie conforme comme une réduction du fibré des repères d'ordre 2. Cela donne bien naissance à un fibré vectoriel muni d'une connexion canonique, ou encore un « parallélisme » dans le langage (hérité d'Elie Cartan) du petit livre de Shoshichi Kobayashi [14]. Le terme principal de la courbure est alors la courbure de Weyl et son annulation entraine l'annulation de toute la courbure. Mais la construction repose sur la méthode du repère mobile (version formes différentielles), fait des choix certes « canoniques » mais d'apparence un peu arbitraire et, du moins du goût de l'auteur de ces lignes, manque un peu de transparence. Une approche alternative se place dans le cadre beaucoup plus général des « géométries paraboliques », telles que décrites dans le livre de Robert Sharpe [17]. Un fibré et une connexion canonique existent dans le cadre parabolique [3] et rend plus naturels les

Mots-clés : géométrie CR, fibré de Cartan, fibré des tracteurs, connexion de Cartan.
Classification math. : 32V05, 53B05.

choix mentionnés plus haut. Néanmoins, elle repose avant tout sur les propriétés des algèbres de Lie de structure des différents fibrés pertinents et est donc, toujours du point de vue de l'auteur de ces lignes, essentiellement non géométrique.

Pour la géométrie conforme, une approche radicalement différente a été décrite il y a une vingtaine d'années par Paul Gauduchon dans un texte malheureusement non publié [8]. Cette approche est fondamentalement géométrique et ne fait intervenir que des considérations assez simples de géométrie riemannienne. Elle conduit à une construction transparente du fibré de Cartan et de sa connexion, et explique pourquoi l'annulation de la courbure de Weyl est la condition naturelle de platitude dans ce cadre. L'approche de Gauduchon, parce qu'elle est intimement liée à la géométrie conforme, ne peut bien entendu pas se généraliser telle quelle à d'autres structures géométriques. Le but de ce texte est de décrire, en suivant assez fidèlement [10], une approche similaire dans le cadre de la géométrie CR, qui est un autre exemple important de géométrie parabolique. Elle permet de retrouver de manière naturelle la définition un peu *ad hoc* de la connexion canonique CR que l'on trouve par exemple dans [9].

Nous commencerons par une rapide présentation des bases de la géométrie CR, puis d'une description des deux outils qui nous seront nécessaires : le fibré canonique CR et le formalisme des fibré de jets. La construction du fibré canonique et de sa connexion en découle naturellement. On conclura en faisant le lien avec la construction de Gauduchon dans le cadre conforme. On notera par ailleurs que le rédacteur a délibérément choisi de privilégier tout au long du texte une approche pédestre, quitte à masquer certains aspects importants ou à substituer des arguments simplistes à d'autres plus conceptuels mais qui auraient nécessité plus de bagage mathématique.

1. La géométrie CR

Dit de façon réductrice, la géométrie CR est la géométrie des hypersurfaces réelles [(1)] de $\mathbb{C}^{m+1}$ (les initiales CR font référence à Cauchy-Riemann, des équations du même nom). Localement, il s'agit du lieu des zéros d'une fonction $\varphi : \mathbb{C}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si 0 est une valeur régulière, l'espace tangent de $M = \varphi^{-1}(0)$ est $TM = \ker d\varphi \subset \mathbb{C}^{m+1}$, et la multiplication des vecteurs par i dans l'espace ambiant laisse stable la distribution d'hyperplans

$$H = TM \cap iTM \subset TM,$$

1. En réalité, il existe des exemples lisses de dimension 3 qui ne se plongent pas, même localement, dans un $\mathbb{C}^N$.

qui est donc muni d'une structure complexe. Génériquement, la distribution est totalement non-intégrable ou encore de *contact*, c'est-à-dire que les crochets des champs de vecteurs de H engendrent tout l'espace tangent TM (il s'agit bien sûr d'une condition de non-dégénerescence de la matrice des dérivées secondes de φ). Ces considérations justifient les notions générales [(2)] suivantes.

DÉFINITION. — *Une variété CR est une variété* (M^{2m+1}, H, J) *de dimension impaire munie d'une distribution d'hyperplans de contact* $H \subset TM$*, elle-même munie d'une structure complexe* $J : H \longrightarrow H$ *compatible.*

Rappelons qu'une structure presque complexe est un endomorphisme J de carré égal à -1, et qu'il s'agit d'une structure complexe si le tenseur de Nijenhuis

$$N(X,Y) = [JX, JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y]$$

est identiquement nul. Ces définitions classiques en géométrie complexe ont encore cours en géométrie CR, et nous supposerons ici que le tenseur de Nijenhuis attaché à J est identiquement nul lorsqu'il est évalué sur les vecteurs tangents à H (cette condition est vide en dimension 3). Si la variété est orientable (hypothèse que nous pouvons toujours imposer ici puisque le but est de faire de la géométrie locale), la distribution de contact peut-être vue comme le noyau d'un champ de 1-formes θ. Une fois restreinte à H, la différentielle de θ est une 2-forme différentielle, et nous dirons que la structure complexe est *compatible* si $\omega = d\theta_{|H\times H}$ est de type $(1,1)$, ou encore si $\omega(J\cdot, J\cdot) = \omega$. La 2-forme ω est toujours non-dégénérée (conséquence de la structure de contact), ce qui motive l'introduction de la *métrique de Levi* :

$$\gamma_\theta = \omega(\cdot, J\cdot).$$

Le choix de θ est bien entendu arbitraire, tout multiple (positif si l'orientation est prise en compte) convenant aussi bien. La métrique de Levi attachée à $e^f\theta$ est

$$\begin{aligned}\gamma_{e^f\theta} &= d\left(e^f\theta\right)_{|H\times H}(\cdot, J\cdot)\\ &= \left(e^f df \wedge \theta \ + \ e^f\omega\right)_{|H\times H}(\cdot, J\cdot) \ = \ e^f\gamma_\theta.\end{aligned}$$

La liberté de choix sur la 1-forme θ se traduit donc par une liberté *conforme* sur la distribution H. Nous dirons que (M, H, J) est *strictement pseudo-convexe* si une (et donc toutes) des métriques de Levi associées est définie positive.

2. Le lecteur féru d'analyse complexe prendra garde au fait que la notion de variété CR utilisée ici est beaucoup plus restrictive que celle qu'il connait.

La sphère CR. — Le modèle plat de la géométrie CR strictement pseudo-convexe est la sphère $\mathbb{S}$, qui peut être vue soit comme le lieu des zéros de la fonction $\varphi(z^0,\dots,z^m) = 1 - |z|^2$ sur $\mathbb{C}^{m+1}$, soit comme la variété des droites complexes isotropes de $\mathbb{C}^{m+2}$ muni dans les coordonnées $(z^\infty, z^0, z^1, \dots, z^m)$ de la forme hermitienne non dégénérée $-(dz^\infty)^2 + (dz^0)^2 + (dz^1)^2 + \cdots + (dz^m)^2$. Cette description de $\mathbb{S}$ comme hypersurface de $P^{m+1}\mathbb{C}$ présente l'avantage de faire ressortir le rôle du fibré tautologique de $\mathbb{S}$ et du fibré trivial $\mathbb{S} \times \mathbb{C}^{m+2}$.

Connexions pseudo-hermitiennes. — On peut attacher à chaque 1-forme θ des connexions privilégiées qui jouent le rôle de la connexion de Levi-Civita en géométrie riemannienne. Un choix naturel est celui de la connexion dite de Tanaka-Webster [18, 19] qui est caractérisée par son action sur la métrique et des conditions de stabilité et de torsion. Plus précisément, tout choix de 1-forme θ donne naissance à une décomposition

$$TM = H \oplus \mathbb{R}\xi,$$

où ξ est le *champ de Reeb* défini par $\theta(\xi) = 1$ et $d\theta(\xi,\cdot) = 0$; la connexion de Tanaka-Webster ∇^θ est alors uniquement déterminée par les conditions suivantes :

(1) ξ est ∇^θ-parallèle et H est préservé par ∇^θ ;

(2) γ_θ et J sont ∇^θ-parallèles ;

(3) la torsion $\tau = T(\xi,\cdot) = \nabla^\theta_\xi \cdot - \nabla^\theta_\cdot \xi - [\xi,\cdot]$ est J-antilinéaire.

Le théorème d'uniformisation de la géométrie CR est essentiellement dû à Elie Cartan [4, 5] en dimension 3 et à Shiing-Shen Chern et Jürgen Moser [6] en dimension supérieure. Il peut s'énoncer de la manière suivante, qui ne dépaysera pas les spécialistes de géométrie conforme.

Théorème. — *Si $m \geqslant 2$, une variété CR strictement pseudo-convexe est* sphérique, *c'est-à-dire localement isomorphe à la sphère $\mathbb{S}$, si et seulement si la partie CR-invariante de la courbure de Tanaka-Webster de toute γ_θ, connue sous le nom de tenseur de Chern-Moser, est identiquement nulle.*

Le même résultat vaut en dimension 3 à condition de remplacer le tenseur de Chern-Moser par un tenseur d'ordre 4 en γ_θ, le tenseur de Cartan.

Ce choix de connexion est le plus usité par les spécialistes de géométrie CR mais semble peu adapté à notre contexte, en particulier parce que la formule donnant la variation de la connexion lorsque l'on passe de θ à $e^f\theta$ n'est pas de degré 1 en f : en effet, le champ ξ et donc la projection de TM sur H le long de ξ dépendent elles-mêmes du 1-jet de θ, d'où la présence d'un terme de degré 2 dans $\nabla^{e^f\theta} - \nabla^\theta$, cf [10]. David Calderbank, Tammo Diemer et Vladimir Souček [1] ont défini une autre famille de connexions, dites de Weyl (par référence à une théorie générale qui englobe aussi les structures de Weyl en géométrie conforme), qui présente l'avantage de ne dépendre que du 1-jet des 1-formes θ. Une question ouverte est d'exhiber des conditions géométriques caractérisant ces connexions, dans l'esprit de [7].

2. Trousse à outils

L'objet sur lequel repose l'essentiel de la construction est le *fibré canonique CR*, noté K et engendré localement par $\theta \wedge \alpha_1 \wedge \dots \alpha_m$, où les α_j sont des 1-formes de type $(1,0)$ sur H. Travaillant localement, nous nous autoriserons à utiliser la racine $(m+2)$-ème de son dual

$$L = K^{-\frac{1}{m+2}} .$$

Les fibrés K et L sont des fibrés CR-holomorphes, au sens où ils possèdent un opérateur de Cauchy-Riemann naturel. C'est particulièrement évident sur le fibré de formes différentielles K, en posant

$$\bar\partial_H \beta(\bar Z, \cdots) = d\beta(\bar Z, \cdots)$$

pour tout $\bar Z$ de type $(0,1)$ dans la distribution de contact [(3)]. Lorsque M est la sphère $\mathbb{S}$, le fibré L n'est autre que le fibré tautologique.

Nous aurons également usage d'un peu de formalisme des fibrés de jets : si F est un fibré vectoriel sur M, l'ensemble des 1-jets en un point x des sections de F est la fibre d'un fibré J^1F. La projection sur les 0-jets, *i.e.* les valeurs des sections, donne naissance à une suite exacte

$$0 \longrightarrow T^*M \otimes F \longrightarrow J^1F \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

et il est facile de voir que toute section $s : F \longrightarrow J^1F$ d'image transverse à la partie principale $T^*M \otimes F$ est équivalente à la donnée d'une connexion (dérivation covariante) sur F. L'image de s est alors l'espace des 1-jets en chaque point des sections « ponctuellement parallèles » de F.

L'intérêt des fibrés de jets est de ramener à des questions de nature algébrico-géométrique l'étude d'équations aux dérivées partielles : toute

3. La lettre H ajoutée en indice à l'opérateur de Cauchy-Riemann signale qu'on ne peut définir un tel opérateur que sur des vecteurs tangents à H. Il est en effet impossible d'attribuer un type à un vecteur transverse à la distribution de contact ; en revanche, le type d'une forme, défini comme une condition d'annulation sur un sous fibré de $H\otimes\mathbb{C}$, est une notion sans ambiguïté... à condition de prendre garde à l'existence d'une intersection non-triviale des espaces des $(1,0)$-formes et des $(0,1)$-formes, constitué précisément des formes s'annulant sur H.

équation d'ordre 1 sur les sections de L se traduit en effet par la donnée d'une sous-variété de J^1L, qui est un sous-fibré vectoriel si l'équation est linéaire. Un exemple particulièrement intéressant est celui donné par l'holomorphie des sections : $\bar{\partial}_H \ell = 0$. Dans le cas plat, les sections holomorphes de L (ou de K) sont nombreuses et donnent naissance au plongement standard de $\mathbb{S}$ dans le projectif complexe $P^{m+1}\mathbb{C}$ déjà évoqué. (Ce fait ne surprendra pas les spécialistes de géométrie complexe... On notera néanmons que dans le cas CR, l'existence de sections holomorphes de K ne suffit pas en soi à produire un plongement, ou, selon le vocabulaire traditionnel, une *réalisation* de la variété CR comme hypersurface réelle du projectif complexe, voir par exemple [12].)

3. Le fibré de Cartan

DÉFINITION. — *Le fibré de Cartan d'une variété CR* (M, H, J) *est le fibré* $\mathbb{T}$ *des* 1*-jets de sections* holomorphes *de* L.

Le fibré $\mathbb{T}$ est donc un fibré vectoriel complexe de rang $(m+2)$. Il possède, comme nous le verrons plus loin, une métrique hermitienne de signature $(m+1, 1)$ et un sous-fibré en droites donné par l'image de $\theta \otimes L$ (pour tout choix de θ dont le noyau est H) dans la partie principale $(T^*M \otimes L) \cap \mathbb{T}$, qui est isotrope. Il est également possible de construire un déterminant canonique sur $\mathbb{T}$, ce qui réduit finalement son groupe de structure au sous-groupe parabolique P de $SU(m+1, 1)$ fixant une droite isotrope. Dans le cas plat, le fibré $\mathbb{T}$ n'est autre que le fibré trivial $\mathbb{S} \times \mathbb{C}^{m+2}$ avec sa métrique constante, et le sous-fibré privilégié est le fibré tautologique.

L'idée essentielle pour construire la connexion canonique sur $\mathbb{T}$ est maintenant d'interpréter l'équation donnant l'existence d'un choix de θ dont la connexion de Tanaka-Webster associée est plate comme une équation donnant l'existence de sections parallèles de $\mathbb{T}$. Le tenseur de Chern-Moser étant CR-invariant, il faut donc analyser les autres termes de la courbure. En utilisant le formalisme des fibrés de jets, nous recherchons alors une section r de la suite exacte

$$0 \longrightarrow T^*M \otimes \mathbb{T} \longrightarrow J^1\mathbb{T} \overset{\overset{r}{\longleftarrow}}{\longrightarrow} \mathbb{T} \longrightarrow 0$$

dont l'image est transverse à la partie principale. Notre principal résultat est alors le suivant :

THÉORÈME. — *Il existe une section* r*, donc une connexion, CR-invariante canonique sur* $\mathbb{T}$*.*

Première partie de la construction : sections holonomes. — La nature de notre fibré $\mathbb{T}$ conduit naturellement à essayer d'identifier l'équation d'holomorphie $\bar{\partial}_H \ell = 0$ à une partie de l'équation satisfaite par une section parallèle (nous verrons plus loin pourquoi cette idée est naturelle y compris en termes d'annulation d'une courbure). Cela revient à imposer à une section parallèle de $\mathbb{T} \subset J^1L$ est d'être *holonome*, c'est-à-dire de donner effectivement naissance à une « vraie » section de L au moins jusqu'à l'ordre 1. De façon imprécise, les conditions d'holonomie assurent que « la dérivée de la partie 0-jet d'une section parallèle σ de $\mathbb{T}$ est égale à sa partie 1-jet et que la partie antisymétrique de la dérivée de sa partie 1-jet est reliée à la partie 0-jet de σ par une courbure ».

Cette prescription se comprend de façon plus détaillée en introduisant une connexion auxiliaire (arbitraire) ∇ sur L. Les fibrés J^1L, J^2L et $J^1(J^1L)$ se scindent alors en

$$\begin{aligned} J^1L &\overset{\nabla}{\simeq} (T^*M \otimes L) \oplus L \ ; \\ J^2L &\overset{\nabla}{\simeq} (S^2T^*M \otimes L) \oplus (T^*M \otimes L) \oplus L \ ; \\ J^1(J^1L) &\overset{\nabla}{\simeq} (T^*M \otimes T^*M \otimes L) \oplus (T^*M \otimes L) \oplus (T^*M \otimes L) \oplus L \ . \end{aligned}$$

On dispose alors d'un plongement canonique de J^2L dans $J^1(J^1L)$: il suffit d'imposer que la partie antisymétrique du premier facteur de $J^1(J^1L)$ soit donné par la courbure de ∇ appliquée au facteur le plus à droite et que les deux facteurs centraux soit égaux. L'image de ce plongement est appelé espace des sections holonomes. Il donne naissance à un sous-fibré naturel $\mathbb{T}^{(2)} = J^1\mathbb{T} \cap J^2L$ de $J^1\mathbb{T}$, et plus précisément à une famille de sous-espaces affines de $J^1\mathbb{T}$ (avec des notations évidentes)

$$V_\sigma \ = \ \left\{\sigma_1 \in J^1\mathbb{T} \, , \, j^0\sigma_1 = \sigma\right\} \ \bigcap \ \left\{\sigma_2 \in J^2L \, , \, j^1\sigma_2 = \sigma\right\}$$

paramétrés par les éléments de $\mathbb{T}$.

Si ces sous espaces étaient réduits à un point, nous aurions alors un candidat naturel pour notre section $r : \mathbb{T} \longrightarrow J^1\mathbb{T}$. Malheureusement ce n'est pas le cas. De fait, l'existence d'une section holomorphe de L ne suffit pas à caractériser les variétés CR localement isomorphes à la sphère $\mathbb{S}$, puisque de telles sections existent par exemple sur toute variété CR localement plongée dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

Seconde partie : courbure de Tanaka-Webster. — Les conditions supplémentaires nécessaires pour réduire ces sous-espaces à un point proviennent d'une étude plus attentive de la géométrie à l'ordre 2, chose que nous n'avons pas faite jusqu'à présent.

À tout élément ℓ non nul de L (ou de K) est associé un choix canonique de θ, précisément celui qui rend ℓ unitaire (nous parlerons ci-dessous de la 1-forme *normalisée*). Des calculs essentiellement dus à Jack Lee [15] montrent que l'existence d'une (vraie) section holomorphe de L entraîne que la connexion de Tanaka-Webster de sa 1-forme normalisée est d'Einstein, au sens où le tenseur obtenu en traçant une fois la courbure restreinte à H est un multiple de l'identité [4]. Dans notre contexte de jets, les calculs de Jack Lee signifient que la partie sans trace de la courbure de Ricci de la 1-forme normalisée peut être lue comme une fonction sur les 2-jets de sections de L, et que cette fonction est identiquement nulle lorsqu'elle est restreinte aux éléments de $\mathbb{T}^{(2)} = J^2L \cap J^1\mathbb{T}$.

La courbure scalaire de Webster peut être analysée selon les mêmes méthodes, c'est-à-dire comme une fonction sur J^2L. Une fois restreinte à $\mathbb{T}^{(2)}$, cette fonction se révèle ne porter que sur les 1-jets. Elle est donc définie sur $\mathbb{T}$ lui-même... et n'est autre que la forme hermitienne de signature $(m+1,1)$ sur $\mathbb{T}$ annoncée plus haut !

Hélas, le travail fait jusqu'ici ne suffit pas car, contrairement à ce qui se passe en géométrie riemannienne, la courbure de Tanaka-Webster contient d'autres termes que ses courbures de Ricci et de Chern-Moser (ces tenseurs ne constituent de fait que la partie entièrement contenue dans H de la courbure). Les termes mixtes, qui sont avant tout sont pilotés par la torsion, doivent donc être annulés séparément. Cela se traduit encore une fois en une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 2 sur une section ℓ de L, que nous pouvons réinterpréter comme un sous-espace W de J^2L, ce qui nous conduit à un nouveau candidat $W \cap V_\sigma$.

Ce sous-espace n'est toujours pas réduit à un point. Ce fait, qui pourrait surprendre le lecteur puisque nous avons désormais annulé tous les facteurs de la courbure à l'exception du tensur de Chern-Moser (qui est CR invariant et donc évidemment insensible nos manipulations), est inhérent à la nature des fibrés de jets : nous ne sommes pas ici en face d'équations portant sur de vraies sections de L mais sur les jets, et ces équations impliquent l'annulation de la courbure et de la torsion si et seulement si elles sont appliquées à de vraies sections de L. Il nous faut donc exhiber d'autres équations ne dépendant que du 2-jet des sections de L. L'annulation des courbures étant acquise à l'ordre 0, il est alors nécessaire d'analyser des dérivées de courbures.

4. Cette condition est une condition nécessaire et suffisante d'existence locale d'une section holomorphe de L si $m \geqslant 2$ [15] ; en dimension 3 ($m = 1$), elle est toujours satisfaite et il faut dériver une fois de plus pour obtenir la condition d'intégrabilité locale souhaitée [11].

Un premier groupe d'équations est obtenu en imposant à la courbure scalaire de Tanaka-Webster d'être constante (c'est-à-dire de dérivée nulle). Un décompte de dimensions montre qu'il faut y ajouter une dernière équation, que l'on peut obtenir en combinant le laplacien de la courbure scalaire, un laplacien de la torsion et des normes au carré de la torsion et de la courbure de Ricci. Toutes se traduisent en des équations linéaires sur J^2L et les sous-espaces correspondants ont une intersection réduite à un point avec $W \cap V_\sigma$ et induisent donc la section souhaitée.

Courbure de la connexion canonique et modèle plat. — Des calculs explicites de la connexion canonique et de sa courbure sont faisables avec un peu d'efforts et permettent de les identifier à ceux de [9]. Ils montrent aussi que la courbure, qui est par nature et tout comme la connexion un objet CR invariant, contient les tenseurs de Chern-Moser et de Cartan lorsqu'on l'exprime relativement au choux d'une 1-forme θ annulant H.

Si le tenseur de Chern-Moser (ou le tenseur de Cartan en dimension 3) est nul, l'identité différentielle de Bianchi assure alors la nullité de tous les autres facteurs de la courbure de la connexion canonique. Il existe donc une section parallèle, par exemple isotrope. La connexion de Tanaka-Webster de la 1-forme normalisée pour son 0-jet est donc plate... et la variété est donc localement isomorphe à l'espace de Heisenberg (donc à la sphère $\mathbb{S}$ puisque l'espace de Heisenberg est un autre vision du modèle plat de la géométrie CR).

Pourquoi toutes ces équations ?. — Le choix des équations complémentaires (celles qui sont issues des dérivées de la courbure) pourra sembler un peu arbitraire au lecteur. En réalité, elles interviennent dans de nombreaux travaux. En premier lieu, elles jouent un rôle dans le lien profond qui unit la géométrie CR et la géométrie conforme. Il existe en effet sur toute variété CR (locale) un fibré en cercles naturel, connu sous le nom de fibré de Fefferman, et qui porte une structure conforme (lorentzienne) induite par la structure CR de la base, le choix d'une 1-forme de contact sur cette dernière induisant une métrique dans la classe conforme de l'espace total du fibré. Les conditions d'annulation utilisées pour construire la connexion canonique reviennent exactement à imposer que la métrique de Fefferman soit la plus proche possible d'une métrique d'Einstein. Or le fibré canonique apparaissant dans la construction de Gauduchon en géomérie conforme est un sous-fibré des 2-jets de métriques de la classe conforme (5) et en chercher une section parallèle revient précisément à rechercher une métrique

5. Cela n'est pas tout à fait exact... mais est suffisant compte-tenu de l'imprécision qui caractérise ce paragraphe.

d'Einstein. On voit donc apparaitre un lien entre les fibrés canoniques des géométries conforme et CR, lien qui a déjà été mis au jour dans un contexte abstrait par Andreas Čap et Rod Gover [2] et qui mériterait d'être explicité plus en détail dans notre cadre plus géométrique.

On notera également l'apparition (reliée à la précédente) de ces équations dans la définition des *métriques normales* utilisées par David Jerison, Jack Lee et Tom Parker dans leurs études des problèmes de Yamabe conforme ou CR [13, 16]. Il s'agit de métriques locales dans la classe conforme ou CR dont les cartes exponentielles fournissent un moyen commode pour mener à bien des calculs de géométrie conforme ou CR. Elles sont caractérisées par des conditions d'annulation de courbure au centre de la carte : annulation de la courbure de Ricci dans le cas conforme, et dans le cas CR annulation de l'ensemble des courbures utilisées ici pour construire la connexion canonique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] David M. J. Calderbank, Tammo Diemer, and Vladimír Souček, *Ricci-corrected derivatives and invariant differential operators*, Differential Geom. Appl. **23** (2005), 149–175.

[2] Andreas Čap and A. Rod Gover, *CR-tractors and the Fefferman space*, Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), 2519–2570.

[3] Andreas Čap and Hermann Schichl, *Parabolic geometries and canonical Cartan connections*, Hokkaido Math. J. **29** (2000), 453–505.

[4] Élie Cartan, *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes, II*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (2) **1** (1932), 333–354.

[5] Elie Cartan, *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes*, Ann. Mat. Pura Appl. **11** (1933), 17–90.

[6] Shiing-Shen Chern and Jürgen K. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), 219–271, *Erratum*, Acta Math. **150** (1983), 3–4.

[7] Liana David, *Weyl connections and curvature properties of CR manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **26** (2004), 59–72.

[8] Paul Gauduchon, *Connexion canonique et structures de Weyl en géométrie conforme*, 1990, non publié.

[9] A. Rod Gover and C. Robin Graham, *CR invariant powers of the sub-Laplacian*, J. Reine Angew. Math. **583** (2005), 1–27.

[10] Marc Herzlich, *The canonical Cartan bundle and connection in CR geometry*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), 415–434.

[11] Kengo Hirachi, *Scalar pseudo-Hermitian invariants and the Szegő kernel on three-dimensional CR manifolds*, Complex geometry (Osaka, 1990), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 143, Dekker, New York, 1993, pp. 67–76.

[12] Howard Jacobowitz, *The canonical bundle and realizable CR hypersurfaces*, Pacific J. Math. **127** (1987), 91–101.

[13] David Jerison and John M. Lee, *Intrinsic CR normal coordinates and the CR Yamabe problem*, J. Differential Geom. **29** (1989), 303–343.

[14] Shoshichi Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, reprint of the 1972 edition.

[15] John M. Lee, *Pseudo-Einstein structures on CR manifolds*, Amer. J. Math. **110** (1988), 157–178.

[16] John M. Lee and Thomas H. Parker, *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1987), 37–91.

[17] Robert W. Sharpe, *Differential geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 166, Springer-Verlag, New York, 1997.

[18] Noboru Tanaka, *A differential geometric study on strongly pseudo-convex manifolds*, Kinokuniya Book-Store Co. Ltd., Tokyo, 1975, Lectures in Mathematics, Department of Mathematics, Kyoto University, No. 9.

[19] Sidney M. Webster, *Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface*, J. Differential Geom. **13** (1978), 25–41.

Marc Herzlich
Université Montpellier 2
Institut de Mathématiques et de Modélisation
UMR 5149 CNRS
Place Eugène Bataillon
Case courrier 51
34095 Montpellier cedex 5 (France)
Marc.Herzlich@math.univ-montp2.fr