

Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de
**Théorie spectrale
et géométrie**

Julie DÉSERTI

Quelques propriétés des transformations birationnelles du plan projectif complexe, *une histoire pour S*.

Volume 27 (2008-2009), p. 45-100.

http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2008-2009__27__45_0

© Institut Fourier, 2008-2009, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DU PLAN PROJECTIF COMPLEXE, *UNE HISTOIRE POUR S.*

Julie Déserti

RÉSUMÉ. — On présente certaines (malheureusement pas toutes) propriétés connues du groupe de Cremona en faisant, lorsque c'est possible, un parallèle avec le groupe des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 . Les propriétés abordées seront essentiellement de nature algébrique : théorème de génération, sous-groupes finis, sous-groupes de type fini, description du groupe d'automorphismes du groupe de Cremona,... mais aussi de nature dynamique : classification des transformations birationnelles, centralisateur, dynamique d'un sous-groupe de Heisenberg... On évoque un peu les aspects concernant l'étude dynamique des itérés d'une transformation birationnelle ainsi que les problèmes de construction d'automorphismes de type entropique sur les surfaces rationnelles.

ABSTRACT. — We present some (unfortunately not all) known properties of the Cremona group; when it's possible we mentioned links with the most known group of polynomial automorphisms of the affine plane. The mentioned properties are essentially algebraic properties: generators, relations, finite subgroups, subgroups of finite type, automorphisms of the Cremona group, Tits alternative... but also dynamical properties: classification of birational maps, centralizer, dynamic of an Heisenberg subgroup... We deal with a little the dynamical study of the iterates of a birational map and also with the construction of automorphisms with positive entropy.

Klein, in his 1872 Erlanger Programme, defined geometry as the study of those properties of figures that remain invariant under a particular group of transformations. "Invariance" and "group" are the unifying concepts in Klein's Erlanger Programme. Groups of transformations had been used in geometry for many years, but Klein's originality consisted in reversing the roles, in making the group the primary object of interest and letting it operate on various geometries, looking for invariants ([50]).

Mots-clés : Transformations birationnelles, groupe de Cremona.

Classification math. : 14E07, 14E05.

Crédits : Membre de l'ANR BLAN06-3_137237.

1. Introduction

Dès la fin du XIX^e siècle, de nombreux mathématiciens s'intéressent au groupe des transformations birationnelles du plan projectif complexe appelé aussi groupe de Cremona : Noëther donne un théorème de génération ; Bertini, Kantor et Wiman tentent de décrire ses sous-groupes finis et Castelnuovo de déterminer les transformations birationnelles fixant une courbe de genre strictement plus grand que 1. Toutes ces questions ont été reprises et approfondies au cours du XX^e siècle ; on en aborde certaines aux §4 et §5. On peut dès lors justifier le fait que le groupe des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ se distingue de celui des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 3$ en expliquant pourquoi il n'y a pas d'analogue au théorème de Noëther en dimension supérieure. Le §3 est consacré à la démonstration du fait suivant : tout élément du groupe de Cremona s'écrit comme une composée de transformations élémentaires, les éclatements. Au §6 on rappelle que la description du groupe d'automorphismes d'un groupe donné est un problème classique ; on précise aussi, entre autres, une démarche qui a conduit à la description du groupe des automorphismes du groupe de Cremona.

Après avoir évoqué certains aspects algébriques du groupe de Cremona on aborde des propriétés dynamiques comme la classification des transformations birationnelles à conjugaison près, la caractérisation du centralisateur de certaines transformations de Cremona... On établit un parallèle entre le groupe des transformations birationnelles du plan projectif complexe et celui des automorphismes polynomiaux du plan (§7). Le « programme de Zimmer » a motivé l'étude des représentations de certains réseaux dans le groupe de Cremona ; cette problématique conduit aussi naturellement à la description des sous-groupes nilpotents (§8). Bien que le groupe de Cremona ne se plonge pas dans un groupe linéaire (§2), il satisfait, comme les groupes linéaires, l'alternative de Tits ; cet énoncé s'obtient à partir des propriétés des sous-groupes de type fini du groupe de Cremona (§9). Au §10 on s'intéresse au problème suivant : étant donnée une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ existe-t-il une suite finie d'éclatements $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ telle que l'application induite $f_{\mathcal{X}} = \pi^{-1}f\pi$ soit un automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$? On finit en mentionnant un problème ouvert : le groupe de Cremona est-il simple ? On donne des références où il a été abordé sans être résolu ; on évoque aussi les résultats obtenus pour le groupe des automorphismes polynomiaux du plan affine.

Après soumission de l'article, Cantat et Lamy ont annoncé dans [24] la non simplicité du groupe de Cremona.

2. Premiers pas dans le groupe de Cremona

Une *transformation rationnelle* du plan projectif complexe dans lui-même est une transformation de la forme

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (f_0(x, y, z) : f_1(x, y, z) : f_2(x, y, z)),$$

les f_i désignant des polynômes homogènes de même degré sans facteur commun.

Une *transformation birationnelle* $f = (f_0 : f_1 : f_2)$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est une transformation rationnelle qui admet un inverse lui-même rationnel.

Le *degré* de f , noté $\deg f$, est le degré des f_i ; c'est aussi si L désigne une droite générique du plan projectif complexe $\deg f^{-1}L$.

Le *groupe de Cremona* est le groupe des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans lui-même; on le note $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Ses éléments sont aussi appelés *transformations de Cremona*.

Exemple 2.1. —

- Tout automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, *i.e.* tout élément de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$, est une transformation birationnelle.
- La transformation

$$\sigma : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy)$$

est rationnelle. Dans la carte affine $z = 1$ on a $\sigma = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$; on remarque en particulier que σ est une involution birationnelle. Elle porte souvent le nom *d'involution de Cremona*; comme on le verra elle joue un rôle particulier.

- Un *automorphisme polynomial* de \mathbb{C}^2 est une application bijective de la forme suivante

$$\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y)), \quad f_i \in \mathbb{C}[x, y].$$

Le groupe de Cremona contient le groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ des automorphismes polynomiaux du plan complexe; en particulier le prolongement d'un *automorphisme élémentaire*

$$(\alpha x + P(y), \beta y + \gamma), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*, \gamma \in \mathbb{C}, P \in \mathbb{C}[y], \deg P \geq 2,$$

au plan projectif complexe est une transformation birationnelle. Il en est de même pour le prolongement d'une *application de Hénon généralisée*

$$(y, P(y) - \alpha x), \quad \alpha \in \mathbb{C}^*, \quad P \in \mathbb{C}[y], \quad \deg P \geq 2.$$

DÉFINITION 2.2. — Soit $f = (f_0 : f_1 : f_2)$ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Le lieu d'indétermination de f , ou encore l'ensemble des points éclatés par f , est le lieu d'annulation des f_i . On le désigne par $\text{Ind}(f)$.

Le lieu exceptionnel de f , ou encore l'ensemble des courbes contractées par f , est le lieu des zéros du déterminant jacobien de f . On le note $\text{Exc}(f)$.

Exemple 2.3. —

- Si f appartient à $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = \text{PGL}_3(\mathbb{C})$ on a $\text{Ind}(f) = \text{Exc}(f) = \emptyset$.
- Rappelons que l'involution de Cremona s'écrit

$$\sigma : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy);$$

on remarque que

$$\text{Ind}(\sigma) = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}$$

et

$$\text{Exc}(\sigma) = \{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{z = 0\}.$$

- Si ρ est l'involution donnée par

$$\rho : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (xy : z^2 : yz),$$

on a $\text{Ind}(\rho) = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0)\}$ et $\text{Exc}(\rho) = \{y = 0\} \cup \{z = 0\}$.

- Enfin l'involution τ définie par

$$\tau : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (x^2 : xy : y^2 - xz)$$

satisfait $\text{Ind}(\tau) = \{(0 : 0 : 1)\}$ et $\text{Exc}(\tau) = \{x = 0\}$.

À une transformation de Cremona f on peut associer son graphe Γ_f qui est une sous-variété irréductible de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (voir [41]). Soit p_1 (resp. p_2) la projection de Γ_f sur le premier (resp. second) facteur :

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma_f & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) & \overset{f}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \end{array}$$

Le lieu d'indétermination de f est l'ensemble (fini) des points où p_1 n'est pas localement inversible. Notons $\mathcal{E}(p_2)$ le lieu des points où p_2 n'est pas une application finie ; $\text{Exc}(f)$ coïncide avec $p_1(\mathcal{E}(p_2))$.

Dans ce qui suit on verra que $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ possède de nombreuses propriétés du groupe linéaire, néanmoins on a l'énoncé suivant.

PROPOSITION 2.4 ([27]). — *Le groupe de Cremona ne se plonge pas dans $\text{GL}_n(\mathbb{k})$ où \mathbb{k} désigne un corps de caractéristique nulle.*

Démonstration. — Commençons par rappeler le résultat suivant dû à Birkhoff : soient \mathbb{k} un corps de caractéristique nulle et A, B, C trois éléments de $GL_n(\mathbb{k})$ tels que C soit d'ordre p premier et

$$[A, B] = C, [A, C] = [B, C] = \text{id};$$

alors $p \leq n$ (voir [10]).

Supposons qu'il existe un morphisme injectif ι de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ dans $GL_n(\mathbb{k})$. Pour tout nombre premier p considérons, dans la carte affine $z = 1$, le groupe

$$\left\langle \left(\exp\left(-\frac{2i\pi}{p}\right) x, y \right), (x, xy), \left(x, \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right) y \right) \right\rangle.$$

Les images par ι des trois générateurs satisfont le lemme de Birkhoff donc $p \leq n$; ceci étant valable pour tout premier p , on obtient le résultat annoncé. \square

2.1. Le sous-groupe des automorphismes polynomiaux du plan

Introduisons deux sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ qui jouent un rôle particulier :
 – le *groupe affine*

$$A = \{(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1, \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2) \mid \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}, \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0\}$$

– et le *groupe élémentaire*

$$E = \{(\alpha x + P(y), \beta y + \gamma) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*, \gamma \in \mathbb{C}, P \in \mathbb{C}[y], \deg P \geq 2\}.$$

En 1942, Jung a démontré le théorème de structure suivant.

THÉORÈME 2.5 ([53]). — *Le groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ est un produit amalgamé*

$$\text{Aut}[\mathbb{C}^2] = A *_S E, \quad S = A \cap E.$$

Dit autrement, tout élément ϕ de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ n'appartenant pas à S est de la forme

$$(a_1)e_1 \dots a_n(e_n), \quad a_i \in A \setminus E, \quad e_i \in E \setminus A;$$

de plus cette écriture est unique modulo les relations suivantes

$$a_i e_i = (a_i s)(s^{-1} e_i), \quad e_{i-1} a_i = (e_{i-1} s')(s'^{-1} a_i), \quad s, s' \in S.$$

Il y a de nombreuses démonstrations du théorème 2.5. On renvoie à [58] pour un historique détaillé et pour une preuve originale et géométrique de cet énoncé dont on va juste évoquer l'idée. Soit

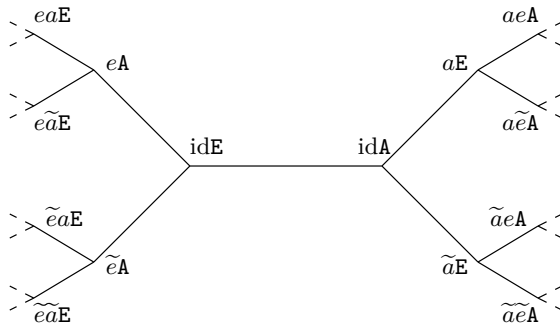
$$\tilde{f}: (x, y) \mapsto (\tilde{f}_1(x, y), \tilde{f}_2(x, y))$$

un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 de degré n ; on peut prolonger \tilde{f} en une transformation de Cremona

$$f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto \left(z^n \tilde{f}_1 \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) : z^n \tilde{f}_2 \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) : z^n \right).$$

La démonstration de Lamy s’effectue par récurrence sur le nombre de points d’indétermination de f : il s’agit de montrer qu’il existe $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, prolongement d’un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 , tel que $\# \text{Ind}(f\varphi^{-1}) < \# \text{Ind}(f)$.

Puisque $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ est le produit amalgamé de \mathbf{A} et \mathbf{E} le long de $\mathbf{A} \cap \mathbf{E}$ la théorie de Bass-Serre assure que $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ agit de manière non triviale par translation à gauche sur un arbre \mathcal{T} (voir [73]). L’arbre \mathcal{T} est défini comme suit : l’ensemble des sommets est l’union disjointe des classes à gauche $(\text{Aut}[\mathbb{C}^2])/\mathbf{A}$ et $(\text{Aut}[\mathbb{C}^2])/\mathbf{E}$ et celui des arêtes l’union disjointe des classes à gauche $(\text{Aut}[\mathbb{C}^2])/\mathbf{S}$. Pour tout automorphisme polynomial f l’arête $f\mathbf{S}$ relie les sommets $f\mathbf{A}$ et $f\mathbf{E}$. Voici quelques sommets de \mathcal{T}



où a, \tilde{a} (resp. e, \tilde{e}) désignent des éléments de \mathbf{A} (resp. \mathbf{E}).

On récupère ainsi une représentation fidèle⁽¹⁾ de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ dans le groupe des isométries de l’arbre \mathcal{T} . En étudiant cette action Lamy a démontré de nombreuses propriétés pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ (voir [57]), on en précisera certaines dans la suite.

1. Pour certains produits amalgamés l’action induite n’est pas fidèle : on peut vérifier que la matrice $-\text{id}$ agit trivialement sur l’arbre associé au produit amalgamé $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

2.2. Le groupe de de Jonquières

Le *groupe de de Jonquières* est le groupe des transformations birationnelles du plan projectif complexe préservant un pinceau de courbes rationnelles ; on le note dJ. Comme deux pinceaux de courbes rationnelles sont birationnellement conjugués, dJ ne dépend pas, à conjugaison près, du pinceau choisi. Dit autrement on peut supposer à conjugaison birationnelle près que dJ est, dans une carte affine (x, y) de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, le groupe maximal des transformations birationnelles laissant la fibration $y = \text{cte}$ invariante. Une transformation f de dJ permute les fibres de la fibration, f induit un automorphisme de la base $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ soit un élément de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$; lorsque f préserve les fibres, f agit comme une homographie dans celles-ci. Le groupe de de Jonquières s'identifie donc au produit semi-direct $\text{PGL}_2(\mathbb{C}(y)) \rtimes \text{PGL}_2(\mathbb{C})$.

2.3. Réseaux homaloïdaux

On mentionne le lien entre réseaux homaloïdaux et transformations birationnelles, ces réseaux ayant conduit l'école de géométrie italienne à l'étude des transformations birationnelles.

DÉFINITION 2.6. — Soient S une surface et p un point de S . Il existe une surface \tilde{S} et un morphisme $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$, uniques à isomorphisme près, tels que

- $\pi|_{\pi^{-1}(S \setminus \{p\})}: \pi^{-1}(S \setminus \{p\}) \rightarrow S \setminus \{p\}$ soit un isomorphisme ;
- $E := \pi^{-1}(p)$ soit isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

On dit que π est l'éclatement de S en p et E la courbe exceptionnelle ou diviseur exceptionnel ; l'inverse π^{-1} de π contracte E .

Considérons une courbe irréductible \mathcal{C} sur S passant par p avec multiplicité ν . L'adhérence de $\pi^{-1}(\mathcal{C} \setminus \{p\})$ dans \tilde{S} est une courbe irréductible $\tilde{\mathcal{C}}$ appelée transformée stricte de \mathcal{C} dans \tilde{S} . Soient D et D' deux diviseurs sur S ; nous avons

$$(2.1) \quad \pi^* \mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}} + \nu E, (\pi^* D, \pi^* D') = (D, D'),$$

$$(E, \pi^* D) = 0 \text{ et } E^2 = -1.$$

Soient S une surface et p un point de S . Le diviseur exceptionnel obtenu en éclatant p est appelé premier voisinage infinitésimal de p et les points de E sont dits infiniment proches de p . Le i -ème voisinage infinitésimal de p est l'ensemble des points contenus dans le premier voisinage d'un certain point

du $(i - 1)$ -ème voisinage infinitésimal de p . Lorsqu'on souhaite distinguer les points de S des points infiniment proches on appelle points propres les points de S .

Soit $f = (f_0 : f_1 : f_2)$ une transformation birationnelle du plan projectif dans lui-même. Le réseau homaloïdal associé à f est le système de courbes \mathcal{R}_f défini par

$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \quad (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}).$$

Les points base p_i du réseau \mathcal{R}_f sont les points par lesquels passent toutes les courbes du réseau; on dit aussi que les p_i sont les *points base* de f . Ils peuvent être dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ou infiniment proches de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$; si p_j n'est pas propre, il appartient à un k -ième voisinage infinitésimal de p_ℓ , $\ell \neq j$. Les points base propres de f sont les points d'indétermination de f . La multiplicité de f en p_i est la multiplicité d'une courbe générique de \mathcal{R}_f en p_i , *i.e.* l'ordre en p_i d'un élément générique de \mathcal{R}_f .

On a vu qu'à toute transformation birationnelle on peut associer un réseau homaloïdal, réciproquement on a l'énoncé suivant.

THÉORÈME 2.7 ([72]). — *Un réseau homaloïdal définit une infinité de transformations birationnelles, chacune pouvant être obtenue à partir d'une autre via composition à gauche par un automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.*

Exemple 2.8. —

- Considérons la transformation birationnelle σ . Les points d'indétermination de σ sont $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ et $(0 : 0 : 1)$. Les transformations de Cremona associées au réseau homaloïdal constitué des coniques passant par les points $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ et $(0 : 0 : 1)$ sont les transformations de la forme $A\sigma$ avec A dans $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$.
- Soit \mathcal{S} le réseau homaloïdal formé des coniques passant par $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ et tangentes à la droite d'équation $z = 0$. Les transformations birationnelles associées à \mathcal{S} sont du type $A\rho$ avec A automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Soient f une transformation birationnelle et \mathcal{R}_f le réseau homaloïdal associé à f . Les courbes de \mathcal{R}_f satisfont les équations suivantes ([1])

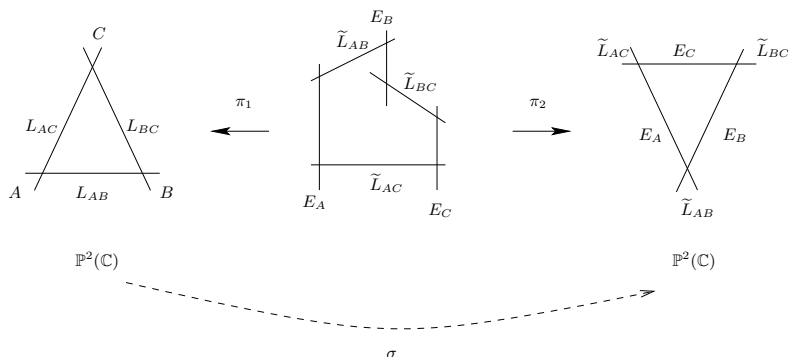
$$\sum_{i=1}^q \mu_i^2 = n^2 - 1, \quad \sum_{i=1}^q \mu_i = 3n - 3$$

où μ_i désigne la multiplicité aux points base (qui rappelons-le ne sont pas nécessairement propres), q le nombre de points base et n le degré de f .

La première équation traduit le fait que deux courbes génériques du réseau homaloïdal se coupent en les points base et un unique autre point ; la seconde exprime que les courbes du réseau sont rationnelles.

3. Le théorème de factorisation de Zariski

L'involution σ se décompose en deux suites d'éclatements



avec

$$A = (1 : 0 : 0), \quad B = (0 : 1 : 0), \quad C = (0 : 0 : 1),$$

E_A (resp. E_B , resp. E_C) le diviseur exceptionnel obtenu en éclatant A (resp. B , resp. C) et \tilde{L}_{AB} (resp. \tilde{L}_{AC} , resp. \tilde{L}_{BC}) la transformée stricte de L_{AB} (resp. L_{AC} , resp. L_{BC}).

Ceci n'est pas propre à σ , c'est un fait général : toute transformation de Cremona s'écrit au moyen d'éclatements comme l'assure le théorème suivant dû à Zariski ; ce résultat est en fait valable pour toute transformation birationnelle d'une surface projective lisse dans une autre. Avant de l'énoncer rappelons que si X est une variété irréductible et Y une variété, une *transformation rationnelle* $f: X \dashrightarrow Y$ est un morphisme d'un ouvert \mathcal{U} de X dans Y qui n'est pas la restriction d'un morphisme $\tilde{\mathcal{U}} \rightarrow X$ avec $\mathcal{U} \subsetneq \tilde{\mathcal{U}}$.

THÉORÈME 3.1 (Zariski, 1944). — *Soient S, \tilde{S} deux surfaces projectives lisses et $f: S \dashrightarrow \tilde{S}$ une transformation birationnelle. Il existe une surface projective lisse S' et deux suites d'éclatements*

$$\pi_1: S' \rightarrow S, \quad \pi_2: S' \rightarrow \tilde{S}$$

telles que $f = \pi_2 \pi_1^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} & S' & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ S & \dashrightarrow_f & \tilde{S} \end{array}$$

Exemple 3.2. — Considérons l'involution τ introduite dans les Exemples 2.3

$$\tau: \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (x^2 : xy : y^2 - xz)$$

Rappelons qu'elle a un seul point d'indétermination $(0 : 0 : 1)$ et une seule courbe contractée, la droite $x = 0$ que nous noterons Θ .

Soit $\pi_1: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ l'éclatement de $(0 : 0 : 1)$. On désigne par E_1 le diviseur exceptionnel et on se place dans les coordonnées locales (ξ, s) avec $\pi_1(\xi, s) = (\xi s : s : 1)$. On remarque que

$$\Theta = \{\xi = 0\}, \quad E_1 = \{s = 0\}, \quad \pi_1^{-1}(x : y : z) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z} \right).$$

La transformation τ est donnée sur \mathcal{X}_1 par

$$\tau_{\mathcal{X}_1} = \pi_1^{-1} \tau \pi_1: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_1, \quad (\xi, s) \mapsto \left(\xi, \frac{\xi s}{s - \xi} \right).$$

La restriction de $\tau_{\mathcal{X}_1}$ à E_1 est l'identité; en particulier E_1 n'est pas exceptionnel.

Au voisinage de Θ on a

$$\pi_1^{-1} \tau(x : y : z) = \left(\frac{x}{y}, \frac{xy}{y^2 - xz} \right);$$

ainsi Θ est contractée par $\tau_{\mathcal{X}_1}$ sur le point $(0, 0) = E_1 \cap \Theta$.

Notons $\pi_2: \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}_1$ l'éclatement de $(0, 0)$. On désigne par E_2 le diviseur exceptionnel. Choisissons un système de coordonnées locales (u, v) dans lequel

$$\pi_2: \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}_1, \quad (u, v) \mapsto (u, uv).$$

On remarque que $E_2 = \{u = 0\}$ et $\tau_{\mathcal{X}_2}(u, v) = \left(u, \frac{v}{v-1} \right)$. Par suite E_2 est invariant par $\tau_{\mathcal{X}_2}$ et au voisinage de Θ on a

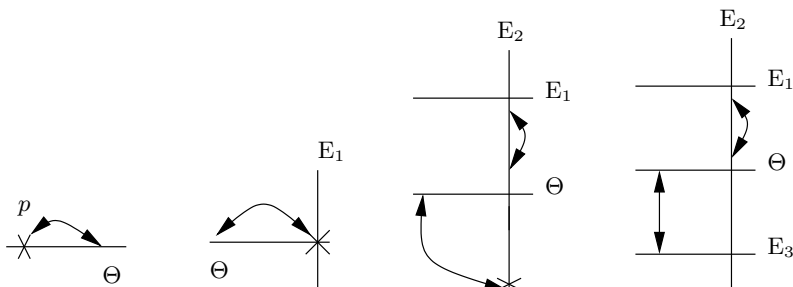
$$\pi_2^{-1} \pi_1^{-1} \tau(x : y : z) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y^2}{y^2 - xz} \right);$$

ainsi Θ est contractée sur le point $(0, 1) \in E_2$.

Finalement considérons l'éclatement $\pi_3: \mathcal{X}_3 \rightarrow \mathcal{X}_2$ du point $(0, 1)$. Utilisons les coordonnées locales (η, μ) pour lesquelles $\pi_3(\eta, \mu) = (\eta, \eta\mu + 1)$. Le diviseur exceptionnel est $E_3 = \{\eta = 0\}$ et au voisinage de Θ on a

$$\pi_3^{-1}\pi_2^{-1}\pi_1^{-1}\tau = \left(\frac{x}{y}, \frac{yz}{y^2 - xz} \right);$$

en particulier l'image de Θ par $\tau_{\mathcal{X}_3}$ est E_3 et τ étant une involution E_3 est envoyé sur Θ . Il en résulte que ni E_3 , ni Θ n'est exceptionnel; la transformation $\tau_{\mathcal{X}_3}$ est un automorphisme.



On va démontrer le théorème 3.1 en suivant [3]. La démonstration se fait en deux temps :

- tout d'abord on montre qu'une transformation rationnelle d'une surface dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ s'écrit $\phi\pi^{-1}$ où π désigne une suite d'éclatements et ϕ un morphisme (théorème 3.4);
- puis on établit qu'un morphisme entre deux surfaces est la composée d'un isomorphisme et d'une suite d'éclatements (théorème 3.9).

Si V désigne une variété lisse on note $\text{Pic}(V)$ le *groupe de Picard* de V , *i.e.* le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur V .

Remarque 3.3. — Soit S une surface. À une transformation rationnelle $f: S \dashrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et un système d'hyperplans H dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ on peut associer le système linéaire $f^*[H]$. En effet la transformation f est un morphisme d'un ouvert maximal U de S dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. L'ensemble $S \setminus U$ est fini donc $\text{Pic}(S)$ et $\text{Pic}(S \setminus U)$ sont isomorphes; par conséquent on peut parler d'image inverse par f d'un système linéaire \mathcal{P} que l'on note $f^*\mathcal{P}$.

Réciproquement soit \mathcal{P} un système linéaire de S sans composante fixe; notons $\check{\mathcal{P}}$ l'espace projectif dual de \mathcal{P} . On peut définir une transformation rationnelle $f: S \dashrightarrow \check{\mathcal{P}}$: à un point p de S on associe l'hyperplan de \mathcal{P} constitué des diviseurs passant par p ; notons que f est définie en p si et seulement si p n'est pas un point base de \mathcal{P} .

Il y a donc une bijection entre :

- les transformations rationnelles f de S dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ telles que $f(S)$ ne soit pas contenu dans un hyperplan et
- les systèmes linéaires sur S sans composante fixe et de dimension n .

THÉORÈME 3.4 ([3]). — Soit $f: S \dashrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ une transformation rationnelle d'une surface S dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Il existe une surface S' , une suite d'éclatements $\pi: S' \rightarrow S$ et un morphisme $\phi: S' \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ tels que $f = \phi\pi^{-1}$

$$\begin{array}{ccc}
 & S' & \\
 \pi \swarrow & & \searrow \phi \\
 S & \text{-----} & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\
 & f &
 \end{array}$$

Démonstration. — On peut se ramener au cas où $f(S)$ n'est pas contenu dans un hyperplan de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. À f correspond donc un système linéaire $\mathcal{P} \subset |D|$ (si D est un diviseur sur une surface S on désigne par $|D|$ l'ensemble des diviseurs effectifs sur S linéairement équivalents à D) de dimension n sur S sans composante fixe (Remarque 3.3). Si \mathcal{P} n'a pas de point base, f est un morphisme et le théorème est démontré.

Supposons que \mathcal{P} ait un point base p . Soit $\pi_1: S_1 \rightarrow S$ l'éclatement de S au point p ; la courbe exceptionnelle E_1 appartient à une composante fixe de $\pi_1^*\mathcal{P} \subset |\pi_1^*D|$ avec une certaine multiplicité $\nu_1 \geq 1$; autrement dit le système

$$\mathcal{P}_1 = \pi_1^*\mathcal{P} - \nu_1 E_1 \subset |D_1| = |\pi_1^*D - \nu_1 E_1|$$

n'a pas de composante fixe. À \mathcal{P}_1 correspond une transformation rationnelle $f_1: S_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ qui coïncide avec $f\pi_1$. Si f_1 est un morphisme le théorème est démontré; sinon on itère le procédé. On obtient alors une suite d'éclatements $(\pi_q: S_q \rightarrow S_{q-1})_q$ et une suite de systèmes linéaires $(\mathcal{P}_q \subset |D_q| = |\pi_q^*D_{q-1} - \nu_q E_q|)_q$ sur S_q sans composante fixe. À partir de (2.1) on obtient

$$D_q^2 = D_{q-1}^2 - \nu_q^2 < D_{q-1}^2.$$

Comme \mathcal{P}_q n'a pas de composante fixe on a $D_q^2 \geq 0$ ce qui assure que la suite d'éclatements est finie : le procédé conduit nécessairement, en un nombre fini d'étapes, à un système linéaire \mathcal{P}_q sans point base et définissant un morphisme $f: S_q \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. \square

Exemple 3.5. — Soit S une surface quadrique lisse de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$; une telle surface est donnée par

$$\sum q_{ij}x_ix_j = 0$$

où (q_{ij}) désigne une matrice symétrique non dégénérée. Les formes quadratiques symétriques non dégénérées sur \mathbb{C}^4 sont isomorphes; il en résulte que les surfaces quadriques lisses de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ sont projectivement isomorphes. Considérons l'application de Segré

$$\xi: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C}), \quad ((x : y), (u : v)) \mapsto (xu : xv : yu : yv).$$

L'application ξ est un plongement dont l'image est la quadrique lisse

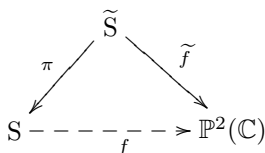
$$X_0X_3 - X_1X_2 = 0.$$

Ainsi toute surface quadrique S de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Soit p un point de S ; l'ensemble des droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ passant par p s'identifie à l'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. À tout point m de S on peut associer la droite passant par m et p ; ceci induit une application rationnelle f de S dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, application rationnelle non définie en p qui s'étend en un morphisme $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. L'image par \tilde{f}^{-1} d'un point de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, correspondant à une droite L passant par p , est constituée :

- ou bien du second point d'intersection de L avec S ;
- ou bien, si L est contenue dans S , de tous les points de L .

Ainsi \tilde{f} est un morphisme qui contracte les deux génératrices de S passant par p . On a donc



où \tilde{f} est, à isomorphisme près, l'éclatement de deux points distincts et π l'éclatement de S en p .

LEMME 3.6 ([3]). — Soit $f: S \rightarrow S'$ un morphisme birationnel d'une surface irréductible éventuellement singulière S dans une surface lisse S' . Supposons que la transformation rationnelle f^{-1} ne soit pas définie en un point p de S' ; alors $f^{-1}(p)$ est une courbe sur S .

À partir de cet énoncé, on obtient le résultat qui suit.

LEMME 3.7 ([3]). — Soit $f: S \dashrightarrow S'$ une transformation birationnelle entre deux surfaces S et S' . S'il existe un point p de S' en lequel f^{-1} n'est pas définie il existe une courbe C sur S telle que $f(C) = p$.

Démonstration. — L'application f induit un morphisme ϕ d'un ouvert U de S dans S' . Notons $\Gamma_\phi \subset U \times S'$ le graphe de ϕ . L'adhérence $\overline{\Gamma_\phi}$ de Γ_ϕ dans $S \times S'$ est une surface irréductible, éventuellement singulière. On désigne par π_1 (resp. π_2) la projection de $\overline{\Gamma_\phi}$ sur S (resp. S') ; ces deux projections sont birationnelles et $f = \pi_2\pi_1^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} & \overline{\Gamma_\phi} & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ S & \text{-----} & S' \\ & & f \end{array}$$

Le fait que f^{-1} ne soit pas défini en p implique que π_2^{-1} aussi ; le lemme 3.6 assure l'existence d'une courbe $\tilde{\mathcal{C}}$ sur $\overline{\Gamma_\phi}$ telle que $\pi_2(\tilde{\mathcal{C}}) = p$. L'image de $\tilde{\mathcal{C}}$ par π_1 est une courbe \mathcal{C} satisfaisant $f(\mathcal{C}) = p$. \square

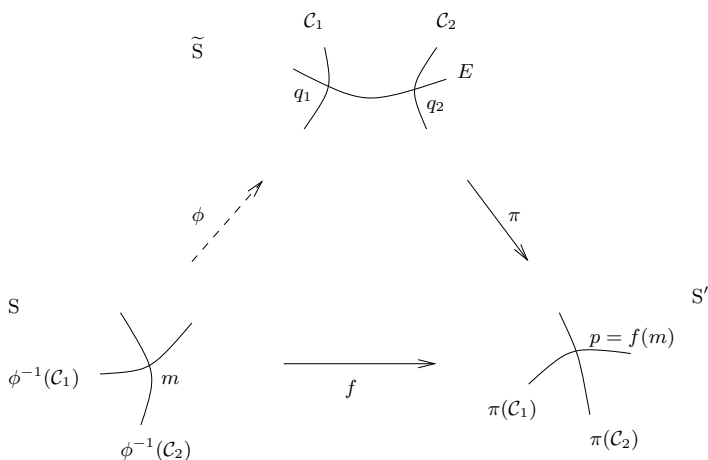
PROPOSITION 3.8 ([58]). — Soit $f: S \rightarrow S'$ un morphisme birationnel entre deux surfaces S et S' . Supposons que la transformation rationnelle f^{-1} ne soit pas définie en un point p de S' ; alors f s'écrit $\pi\phi$ où $\pi: \tilde{S} \rightarrow S'$ désigne l'éclatement de S' en p et ϕ un morphisme birationnel de S dans \tilde{S}

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{S} & \\ \phi \nearrow & & \searrow \pi \\ S & \xrightarrow{f} & S' \end{array}$$

Démonstration. — Soit $\pi: \tilde{S} \rightarrow S'$ l'éclatement de S' au point p ; posons $\phi := \pi^{-1}f$. Supposons que ϕ ne soit pas un morphisme ; soit m un point de S où ϕ n'est pas défini. On a :

- $f(m) = p$;
- f n'est pas localement inversible en m ;
- il existe une courbe sur \tilde{S} contractée sur m par ϕ^{-1} ; cette courbe ne peut être que le diviseur exceptionnel E associé à π .

Considérons q_1, q_2 deux points distincts de E où ϕ^{-1} est bien défini et $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux germes de courbes lisses transverses à E en q_1 et q_2 respectivement. Alors $\pi(\mathcal{C}_1)$ et $\pi(\mathcal{C}_2)$ sont deux germes de courbes lisses transverses en $p = f(m)$ qui sont image par f de deux germes de courbes en m .



La différentielle de f en m est donc de rang 2 ce qui contredit le fait que f n'est pas localement inversible en m . \square

L'énoncé qui précède nous permet de terminer la seconde étape.

THÉORÈME 3.9 ([3]). — Soit $f: S \rightarrow S_0$ un morphisme birationnel entre les surfaces S et S_0 . Il existe une suite d'éclatements $(\pi_k: S_k \rightarrow S_{k-1})_{k=1\dots n}$ et un isomorphisme $\phi: S \xrightarrow{\sim} S_n$ tels que

$$f = \pi_1 \dots \pi_n \phi.$$

Démonstration. — Si f est un isomorphisme la preuve est terminée ; sinon f^{-1} n'est pas défini en un certain point p de S_0 . La proposition 3.8 assure que f s'écrit comme la composée de l'éclatement π_1 de S_0 en p et du morphisme birationnel $f_1: S \rightarrow S_1$. Si f_1 n'est pas un isomorphisme on itère le procédé ; reste à montrer qu'itérer un nombre fini de fois suffit. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'on ait une suite infinie d'éclatements $(\pi_k: S_k \rightarrow S_{k-1})_k$ et de morphismes birationnels $(f_k: S \rightarrow S_k)_k$ tels que

$$f_{k-1} = \pi_k f_k, \quad \forall k \geq 1.$$

Notons $\nu(f_k)$ le nombre de courbes irréductibles contractées par f_k . Puisque $f_{k-1} = \pi_k f_k$ toute courbe contractée par f_k est donc contractée par f_{k-1} . De plus il existe au moins une courbe irréductible \mathcal{C} sur S_k telle que $f_k(\mathcal{C})$ soit le diviseur exceptionnel de π_k d'où $\nu(f_k) < \nu(f_{k-1})$; pour k suffisamment grand on a donc $\nu(f_k) < 0$ ce qui est impossible. \square

4. Génération du groupe de Cremona

4.1. Énoncés de Noether et Iskovskikh

En 1871, Noether donne un résultat de génération pour le groupe de Cremona.

THÉORÈME 4.1 (Noether, [64, 65, 66]). — *Le groupe de Cremona est engendré par l'involution de Cremona σ et $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$.*

Exemple 4.2. —

- La décomposition de ρ (voir Exemples 2.3) est la suivante

$$(z - y : y - x : y)\sigma(y + z : z : x)\sigma(x + z : y - z : z).$$

- La transformation τ (définie dans Exemples 2.3) s'écrit aussi $\ell_1\sigma\ell_2\sigma\ell_3\sigma\ell_4\sigma\ell_5$ où

$$\begin{aligned} \ell_1 &= (y - x : 2y - x : z - y + x), & \ell_2 &= (x + z : x : y), \\ \ell_3 &= (-y : x + z - 3y : x), & \ell_4 &= (x + z : x : y), \\ \ell_5 &= (y - x : -2x + z : 2x - y). \end{aligned}$$

- Un calcul montre que

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (xz(x + y) : yz(x + y) : xy^2)$$

se décompose comme suit

$$(2y - x : -y : -z)\sigma(y + z : z : x)\sigma(z : -2x - y : x + y)\sigma.$$

La démonstration du théorème 4.1 donnée par Noether était incomplète. Il ne considérait que les transformations birationnelles quadratiques ayant trois points d'indétermination propres alors que certaines en ont moins (*cf.* les transformations ρ et τ de Exemples 2.3). Il faudra attendre 1901 et Castelnuovo pour une preuve complète ([26]). Au cours du XX^e siècle il y a eu de nombreuses démonstrations du théorème 4.1, on renvoie à [1] pour un historique détaillé.

Dans les années 80, Gizatullin et Iskovskikh ont donné une présentation de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ par générateurs et relations ([48, 52]); énonçons le résultat d'Iskovskikh qu'il présente dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui est birationnellement isomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

THÉORÈME 4.3. — *Le groupe des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est engendré par $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ et le groupe dJ de de Jonquières⁽²⁾.*

2. Le groupe de de Jonquières est birationnellement conjugué au sous-groupe de $\text{Bir}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ qui préserve la première projection $p: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

De plus, les relations dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ sont les relations internes au groupe dJ , au groupe $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ auxquelles s'ajoutent la relation

$$(\eta e)^3 = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) \quad \text{où} \quad \eta: (x, y) \mapsto (y, x) \quad \text{et} \quad e: (x, y) \mapsto \left(x, \frac{x}{y} \right).$$

Remarque 4.4. — Il n'y a pas d'analogue au théorème de Noether en dimension supérieure : il faut une infinité non dénombrable de transformations de degré strictement supérieur à 1 pour engendrer le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$ des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ dans lui-même (voir [67]). L'idée de la démonstration est la suivante. Pan construit pour toute cubique plane lisse une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, avec $n \geq 3$, qui contracte cette cubique. Or l'ensemble des classes d'isomorphismes des cubiques planes lisses est une famille à un paramètre ; donc l'ensemble des types birationnels⁽³⁾ des composantes du lieu exceptionnel des éléments de $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$ est infini. Supposons que $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$ soit engendré par un nombre fini de transformations f_1, \dots, f_r et $\text{Aut}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$. Les types birationnels des composantes du lieu exceptionnel de tout élément de $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$ s'obtiennent alors à partir de ceux des f_i ; l'ensemble des types birationnels des composantes du lieu exceptionnel des transformations de $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$ est donc fini : contradiction.

Par contre on dispose d'un énoncé semblable au théorème de Noether pour les transformations birationnelles réelles qui sont des difféomorphismes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (voir [69]) ; on a un énoncé comparable pour la sphère \mathbb{S}^2 (voir [56]).

Remarque 4.5. — Wright a reformulé le théorème de Noether en terme de produit amalgamé : le groupe de Cremona est le produit amalgamé de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$, dJ et $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ suivant leur intersection ([77]).

4.2. Transformations birationnelles quadratiques

Le théorème de Noether conduit naturellement à s'intéresser aux transformations birationnelles de degré 2 ; notons Bir_2 l'ensemble qu'elles forment. Le groupe $\text{PGL}_3(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_3(\mathbb{C})$ agit sur Bir_2

$$\text{PGL}_3(\mathbb{C}) \times \text{Bir}_2 \times \text{PGL}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Bir}_2, \quad (A, f, B) \mapsto AfB^{-1}.$$

L'orbite d'un élément f de Bir_2 sous cette action est notée $\mathcal{O}(f)$.

3. Soient X et X' deux sous-variétés de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$; on dit que X et X' ont même type birationnel si X et X' sont birationnellement équivalentes.

THÉORÈME 4.6 ([27]). — Si

$$\Sigma^0 = \mathcal{O}(x : y : z), \quad \Sigma^1 = \mathcal{O}(\tau), \quad \Sigma^2 = \mathcal{O}(\rho), \quad \Sigma^3 = \mathcal{O}(\sigma),$$

alors

$$\text{Bir}_2 = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3.$$

On a

$$\dim \Sigma^0 = 10, \quad \dim \Sigma^1 = 12, \quad \dim \Sigma^2 = 13, \quad \dim \Sigma^3 = 14$$

ainsi que les conditions d'incidence suivantes

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma^0} &= \Sigma^0, & \overline{\Sigma^1} &= \Sigma^0 \cup \Sigma^1, \\ \overline{\Sigma^2} &= \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2, & \overline{\Sigma^3} &= \text{Bir}_2 = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3. \end{aligned}$$

Remarque 4.7. — Les éléments de Σ^i possèdent i points d'indétermination.

D'après le théorème 4.6 il suffit de montrer que l'adhérence de Σ^3 est lisse le long de Σ^0 pour obtenir l'énoncé qui suit.

THÉORÈME 4.8 ([27]). — *L'ensemble des transformations birationnelles quadratiques est lisse dans l'ensemble des transformations rationnelles quadratiques.*

Remarque 4.9. — La description, à composition à gauche et à droite près par un automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, des transformations birationnelles cubiques se fait aussi en étudiant la nature du lieu des zéros du déterminant jacobien ([27]); elle est sensiblement plus compliquée (32 modèles). Alors que Bir_2 est lisse et irréductible, il n'en est pas de même pour l'ensemble des transformations birationnelles cubiques vu comme sous-ensemble de $\mathbb{P}^{29}(\mathbb{C})$ (le projectivisé de l'espace des polynômes homogènes de degré 3 en 3 variables s'identifie à $\mathbb{P}^{29}(\mathbb{C})$).

On peut se demander à quelle(s) condition(s) une transformation rationnelle quadratique est birationnelle. Dans [27] deux critères sont établis; l'un d'entre eux est très simple à énoncer.

THÉORÈME 4.10 ([27]). — *Soit Q une transformation rationnelle quadratique dont le déterminant jacobien n'est pas identiquement nul. Supposons que Q contracte le lieu des zéros \mathcal{Z} du déterminant jacobien de Q ; alors \mathcal{Z} est l'union de trois droites (non concourantes lorsqu'elles sont distinctes) et Q est birationnelle.*

De plus à composition à gauche et à droite près par un automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ on a :

- si \mathcal{Z} est l'union de trois droites en position générale, Q est σ ;
- si \mathcal{Z} est l'union d'une droite double et d'une droite simple, Q coïncide ρ ;
- enfin si \mathcal{Z} est une droite triple, $Q = \tau$.

Notons que ce critère ne se généralise pas en degré supérieur.

COROLLAIRE 4.11 ([27]). — Une transformation rationnelle quadratique du plan projectif dans lui-même appartient à Σ^3 si et seulement si elle admet trois points d'indétermination.

4.3. Transformations birationnelles et feuilletages

Un feuilletage \mathcal{F} de degré ν sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est donné par une 1-forme différentielle homogène

$$\omega = F_0 dx + F_1 dy + F_2 dz,$$

les F_i désignant des polynômes homogènes de degré $\nu + 1$ satisfaisant

$$\text{pgcd}(F_0, F_1, F_2) = 1 \quad \text{et} \quad xF_0 + yF_1 + zF_2 = 0.$$

Rappelons que le lieu singulier $\text{Sing}(\mathcal{F})$ du feuilletage \mathcal{F} défini par ω est le projectivisé du lieu singulier de ω

$$\text{Sing}(\omega) = \{F_0 = F_1 = F_2 = 0\};$$

l'identité d'Euler $xF_0 + yF_1 + zF_2 = 0$ assure que cet ensemble n'est jamais vide. Plus précisément on a une formule de type Bezout

$$\# \text{Sing}(\mathcal{F}) = \nu^2 + \nu + 1,$$

chaque point singulier étant compté avec multiplicité. À une transformation rationnelle $f = (f_0 : f_1 : f_2)$ du plan projectif on peut associer un feuilletage $\mathcal{F}(f)$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ décrit par la 1-forme

$$(yf_2 - zf_1)dx + (zf_0 - xf_2)dy + (xf_1 - yf_0)dz.$$

Exemple 4.12. — Le feuilletage $\mathcal{F}(\sigma)$ associé à σ est défini par

$$x(z^2 - y^2)dx + y(x^2 - z^2)dy + z(y^2 - x^2)dz = \frac{1}{2}(x^2, y^2, z^2)^*((z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz).$$

Le feuilletage $\mathcal{F}(\sigma)$ est de degré 2, admet pour intégrale première $\frac{x^2 - z^2}{y^2 - z^2}$ et possède sept points singuliers qui sont les points fixes et les points d'indétermination de σ . On a donc l'énoncé suivant.

PROPOSITION 4.13 ([27]). — *Si f est une transformation birationnelle quadratique générique, $\mathcal{F}(f)$ possède sept points singuliers ; quatre sont des points fixes de f , les trois autres des points d'indétermination.*

L'ensemble des applications rationnelles quadratiques s'identifie à $\mathbb{P}^{17}(\mathbb{C})$ et celui des feuilletages de degré 2 sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ à $\mathbb{P}^{14}(\mathbb{C})$; l'application $f \mapsto \mathcal{F}(\cdot)$ induit une application linéaire qu'on note encore $\mathcal{F}(\cdot)$ de $\mathbb{P}^{17}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^{14}(\mathbb{C})$.

Soit \mathcal{F} un feuilletage quadratique générique sur le plan projectif complexe, *i.e.* dont les sept points singuliers sont en position générale. Le théorème de division de de Rham-Saito ([70]) assure l'existence de polynômes homogènes f_0 , f_1 et f_2 de degré 2 tels que \mathcal{F} soit défini par

$$(yf_2 - zf_1)dx + (zf_0 - xf_2)dy + (xf_1 - yf_0)dz.$$

Notons f la transformation quadratique dont les composantes sont f_0 , f_1 et f_2 . L'ensemble $\text{Sing}(\mathcal{F})$ est le lieu des points p_i pour lesquels il existe η_i dans \mathbb{C} tel que $f(p_i) = \eta_i p_i$. Choisissons trois points p_1 , p_2 et p_3 dans $\text{Sing}(\mathcal{F})$. Les p_i n'étant pas alignés il existe une forme linéaire ℓ telle que $\ell(p_i) = -\eta_i$. L'application $\phi = f + \ell.\text{id}$ satisfait $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(\phi) = \mathcal{F}$ et les points p_i sont d'indétermination pour f . En particulier f est birationnelle (Corollaire 4.11). La restriction de $\mathcal{F}(\cdot)$ à Bir_2 est donc dominante et par suite à fibre générique finie puisque la dimension de Bir_2 coïncide avec celle de l'ensemble des feuilletages quadratiques sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Un feuilletage quadratique générique est déterminé par la position de ses sept points singuliers et toute configuration générique est réalisée ([17, 49]) ; on hérite d'une propriété analogue pour les éléments de Σ^3 .

PROPOSITION 4.14 ([27]). — *Une transformation birationnelle quadratique générique est déterminée par la position de ses points d'indétermination et de ses points fixes.*

On en déduit que la fibre générique de la restriction de l'application $\mathcal{F}(\cdot)$ à Bir_2 compte 35 points exactement (choix de 3 points d'indétermination parmi 7 points).

5. Sous-groupes finis du groupe de Cremona

L'étude des sous-groupes finis du groupe de Cremona a commencé dans les années 1870 avec Bertini, Kantor et Wiman ([9, 54, 76]). De nombreux auteurs se sont depuis intéressés à ce sujet ; citons par exemple [2, 4, 5, 14, 29, 39]. En 2006 Dolgachev et Iskovskikh ont amélioré les

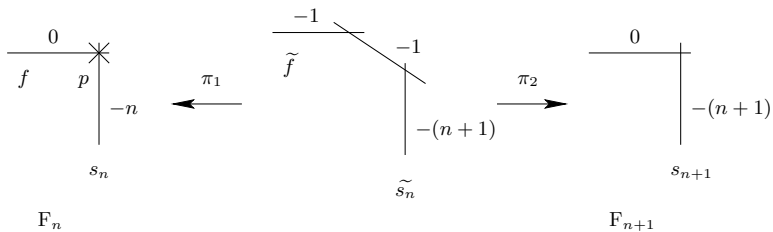
résultats de Kantor et Wiman et ont donné une liste des sous-groupes finis de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$; avant de donner un théorème clé sur lequel ils s'appuient, introduisons quelques notions. Commençons par les surfaces F_n de Hirzebruch. Posons $F_0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$; la surface F_1 est la surface obtenue en éclatant $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en $(1 : 0 : 0)$; cette surface est un compactifié de \mathbb{C}^2 naturellement muni d'une fibration rationnelle correspondant aux droites $y = \text{cte}$. Le diviseur à l'infini est constitué de deux courbes rationnelles s'intersectant transversalement en un point. On a :

- d'une part la transformée stricte de la droite à l'infini dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, c'est une fibre ;
- d'autre part le diviseur exceptionnel de l'éclatement qui est une section pour la fibration.

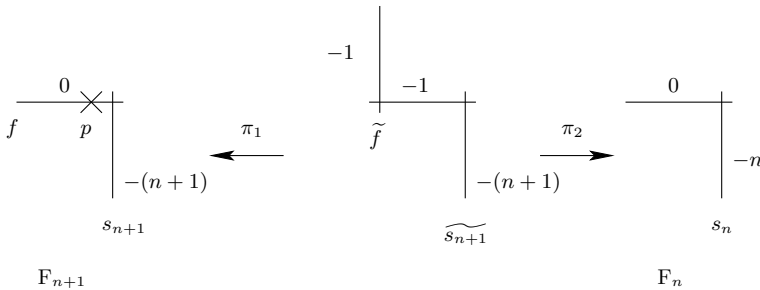
Plus généralement F_n est, pour tout $n \geq 1$, un compactifié de \mathbb{C}^2 muni d'une fibration rationnelle telle que le diviseur à l'infini soit constitué de deux courbes rationnelles transverses, une fibre f et une section s_n d'auto-intersection $-n$

$$F_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(n)), \quad \forall n \geq 2.$$

Plaçons-nous sur F_n ; on note p l'intersection de s_n et f , π_1 l'éclatement de F_n en p et π_2 la contraction de la transformée stricte \tilde{f} de f . On passe de F_n à F_{n+1} via $\pi_2\pi_1^{-1}$.



On peut aussi passer de la $(n+1)$ -ième à la n -ième surface de Hirzebruch via $\pi_2\pi_1^{-1}$ où π_1 est l'éclatement de F_{n+1} en un point p de la fibre f qui n'appartient pas à s_{n+1} et π_2 la contraction de la transformée stricte \tilde{f} de f .



Soit S une surface projective lisse ; un *fibré en coniques* $\eta: S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est un morphisme dont les fibres générales sont de genre 0 et les fibres singulières l'union de deux droites. Une surface munie d'un fibré en coniques est isomorphe

- ou bien à F_n ;
- ou bien à F_n éclaté en un nombre fini de points, tous appartenant à des fibres différentes. Le nombre d'éclatements coïncide avec le nombre de fibres singulières du fibré.

Une *surface de Del Pezzo* est une surface lisse S dont le fibré anticanonique $-K_S$ est ample. Le degré d'une surface de Del Pezzo est $d = K_S^2$. D'après la formule de Noether on a $1 \leq d \leq 9$.

Si $d = 9$, alors $S \simeq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$; si $d = 8$ alors $S \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou $S \simeq F_1$. Pour $d \leq 7$ la surface S est isomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ éclaté en $n = 9 - d$ points p_i , ces points satisfaisant les conditions suivantes :

- il n'y en a pas 3 alignés ;
- il n'y en a pas 6 sur une conique ;
- si de plus $n = 8$ les p_i ne sont pas sur une cubique plane dont le point singulier serait un des p_i .

THÉORÈME 5.1 ([59, 51]). — *Soit G un sous-groupe fini du groupe de Cremona. Il existe une surface projective lisse S et une transformation birationnelle $\phi: \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow S$ telles que $\phi G \phi^{-1}$ soit un sous-groupe de $\text{Aut}(S)$. De plus, on peut supposer que :*

- ou bien S est une surface de Del Pezzo ;
- ou bien il existe un fibré en coniques $S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ invariant par $\phi G \phi^{-1}$.

Notons que l'alternative qui précède n'est pas exclusive : il y a des fibrés en coniques sur les surfaces de Del Pezzo.

Dolgachev et Iskovskikh donnent une caractérisation des couples (G, S) satisfaisant l'une des éventualités du théorème 5.1. Ils utilisent ensuite la

théorie de Mori afin de pouvoir déterminer quand deux couples sont birationnellement conjugués. Notons que si le premier point avait été partiellement résolu par Wiman et Kantor, le second non. Il reste encore des questions ouvertes ([39], §9), comme par exemple décrire les variétés algébriques qui paramètrent les classes de conjugaisons des sous-groupes finis de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Blanc donne une réponse à cette question pour les sous-groupes abéliens finis de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ dont aucun élément ne fixe une courbe de genre positif et aussi pour les sous-groupes cycliques d'ordre fini et les éléments d'ordre fini de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ (voir [14, 12]).

Avant d'énoncer le résultat de Bertini, repris par Bayle et Beauville, introduisons trois types d'involutions qui, comme on le verra, jouent un rôle très particulier.

Soient p_1, \dots, p_7 sept points de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en position générale. Désignons par L le système linéaire de cubiques passant par les p_i ; il est de dimension 2. Soit p un point générique de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$; considérons le pinceau L_p constitué des éléments de L passant par p . Un pinceau de cubiques génériques ayant neuf points base, on définit par $i_G(p)$ le neuvième point base de L_p . L'involution i_G qui à p associe $i_G(p)$ ainsi construite est appelée *involution de Geiser*. On peut vérifier qu'une telle involution est birationnelle de degré 8; ses points fixes forment une courbe non hyperelliptique de genre 3, de degré 6 avec des points double aux sept points choisis.

Soient p_1, \dots, p_8 huit points de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en position générale. Considérons le pinceau de cubiques passant par ces huit points; il a un neuvième point base qu'on notera p_9 . Soit p un point générique de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$; il y a une unique cubique $\mathcal{C}(p)$ qui passe par les p_i et p . Sur $\mathcal{C}(p)$ il y a une loi de groupe avec p_9 comme élément neutre. On note i_B l'involution qui à p associe $-p$; alors i_B définit une involution birationnelle de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de degré 17 appelée *involution de Bertini*. Les points fixes de i_B forment une courbe non hyperelliptique de genre 4, de degré 9 avec des points triples aux huit points choisis.

Pour finir introduisons les involutions de de Jonquières. Soit \mathcal{C} une courbe de degré $\nu \geq 2$ et soit p un point sur \mathcal{C} de multiplicité $\nu - 2$ (si $\nu = 2$, le point p n'appartient pas à \mathcal{C}). On suppose que p est l'unique point singulier de \mathcal{C} . Au couple (\mathcal{C}, p) on va associer l'unique involution birationnelle i_{dJ} qui fixe la courbe \mathcal{C} et préserve les droites passant par p . Soit m un point générique de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$; notons q_m, r_m les deux points d'intersection, distincts de p , de la droite (pm) avec \mathcal{C} . La transformation i_{dJ} associe au point m le conjugué harmonique de m sur la droite (pm) par rapport à q_m et r_m ; autrement dit le point $i_{dJ}(m)$ vérifie la propriété suivante : le birapport

de m , $i_{dJ}(m)$, q_m et r_m vaut -1 . La transformation i_{dJ} est une *involution de de Jonquières* de degré ν centrée en p et préservant \mathcal{C} . La normalisée de la courbe de points fixes de i_{dJ} est une courbe hyperelliptique de genre $\nu - 2$ dès que $\nu \geq 3$ (par convention on dira qu'une courbe elliptique est hyperelliptique).

L'énoncé suivant donne la classification des involutions birationnelles.

THÉORÈME 5.2 ([9, 2]). — *Une involution de Cremona est à conjugaison birationnelle près de l'un des types suivants :*

- une involution projective ;
- une involution de de Jonquières i_{dJ} de degré $\nu \geq 2$;
- une involution de Bertini i_B ;
- une involution de Geiser i_G .

Dans [2] les auteurs montrent de plus que les classes de conjugaison des sous-groupes finis cycliques d'ordre 2 de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ sont uniquement déterminées par le type birationnel des courbes de points fixes de genre positif. Plus précisément l'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes d'ordre 2 de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ est une variété algébrique non connexe dont les composants connexes sont respectivement isomorphes :

- à l'espace des modules des courbes hyperelliptiques de genre g (involutions de de Jonquières) ;
- à l'espace des modules des courbes canoniques de genre 3 (involutions de Geiser) ;
- à l'espace des modules des courbes canoniques de genre 4 avec une theta caractéristique nulle, isomorphes à une intersection non singulière d'une surface cubique et d'un cône quadratique dans \mathbb{P}^3 (involutions de Bertini).

Il n'est donc pas surprenant de constater que simultanément à l'étude des sous-groupes finis de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ se développe la caractérisation des transformations birationnelles qui fixent une courbe de genre donné. Soit \mathcal{C} une courbe irréductible dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$; le *groupe d'inertie* de \mathcal{C} , noté $\text{Ine}(\mathcal{C})$, est le sous-groupe des éléments de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ qui fixent \mathcal{C} point par point. Soit \mathcal{C} une courbe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de genre > 1 ; dans les années 1890 Castelnuovo a montré qu'un élément de $\text{Ine}(\mathcal{C})$ est ou bien une transformation de de Jonquières, ou bien une transformation de Cremona d'ordre 2, 3 ou 4 (voir [25]). Blanc, Pan et Vust précisent l'énoncé de Castelnuovo.

THÉORÈME 5.3 ([15]). — *Soit \mathcal{C} une courbe irréductible de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de genre strictement supérieur à 1. Un élément f de $\text{Ine}(\mathcal{C})$ est ou bien conjugué à une transformation de de Jonquières, ou bien d'ordre 2 ou 3. Dans le premier cas si f est d'ordre fini, c'est une involution.*

Pour le démontrer, ils suivent la même idée que Castelnuovo ; ils construisent le système linéaire adjoint de \mathcal{C} : soient $\pi : Y \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une résolution plongée des singularités de \mathcal{C} et $\tilde{\mathcal{C}}$ la transformée stricte de \mathcal{C} par π^{-1} . Si le système linéaire $|\tilde{\mathcal{C}} + K_Y|$ n'est ni vide, ni réduit à un diviseur, $\pi_*|\tilde{\mathcal{C}} + K_Y|$ privé de ses éventuelles composantes fixes est le système linéaire adjoint. En itérant cette construction, appelée méthode des systèmes linéaires adjoints successifs, ils obtiennent que tout élément f de $\text{Ine}(\mathcal{C})$ préserve une fibration \mathcal{F} , rationnelle ou elliptique. Si \mathcal{F} est rationnelle, f est de de Jonquières. Supposons que \mathcal{F} soit elliptique. Puisque $g(\mathcal{C}) > 1$ la restriction de f à une fibre générique est un automorphisme avec au moins deux points fixes ; par suite f est d'ordre 2, 3 ou 4. En appliquant certains résultats classiques sur les automorphismes des courbes elliptiques, ils montrent que f est d'ordre 2 ou 3. Finalement ils remarquent que ce résultat ne se généralise pas aux courbes de genre inférieur ou égal à 1. Le cas des courbes de genre 1 a été traité avec des techniques différentes dans [68] et [13].

Remarque 5.4. — Signalons que Diller, Jackson et Sommese classifient les courbes invariantes par une transformation birationnelle d'une surface projective complexe ([38]). Leur approche utilise des techniques de dynamique complexe ; n'ayant pas encore introduit le vocabulaire adéquat on abordera leurs résultats au §7.

Le nombre de classes de conjugaison des transformations de Cremona d'ordre 2 dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ est infini ([2]). Montrons qu'il en est de même pour les éléments d'ordre 3 et 5. Si deux transformations de Cremona f et g sont conjuguées via ϕ alors ϕ envoie les courbes non rationnelles fixées par f sur les courbes non rationnelles fixées par g . Soient f et g deux transformations de Cremona d'ordre 3 (resp. 5) ; les courbes de points fixes de celles-ci peuvent être n'importe quelle courbe elliptique. Comme le nombre de classes d'isomorphisme de telles courbes est infini, le nombre de classes de conjugaison dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ des éléments de Cremona d'ordre 3 (resp. 5) aussi. Étant donné un entier positif n on peut se demander combien vaut le nombre $\nu(n)$ de classes de conjugaison d'une transformation de Cremona d'ordre n dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$. De Fernex répond à cette question pour n premier ([29]) ; on trouve dans [11] une réponse pour tout n .

THÉORÈME 5.5 ([11]). —

1. Pour n pair $\nu(n)$ est infini ; il en est de même pour $n = 3$ ou $n = 5$.
2. Soit n un entier impair distinct de 3 et 5 ; alors $\nu(n)$ est fini. De plus
 - $\nu(9) = 3$;

- $\nu(15) = 9$;
- $\nu(n) = 1$ *sinon*.

Commençons par donner une idée de la démonstration de la première assertion pour n distinct de 2, 3 et 5, éventualités précédemment abordées. Supposons $n \geq 2$ et considérons un élément P de $\mathbb{C}[x^n]$ sans racine multiple. Blanc montre qu'il existe une transformation de Cremona f d'ordre $2n$ telle que f^n soit l'involution $(x, y) \mapsto (x, P(x)/y)$ qui fixe la courbe hyperelliptique $y^2 = P(x)$; le cas $n = 2$ permet alors de conclure pour n pair supérieur ou égal à 4.

Pour démontrer la seconde partie de l'énoncé Blanc applique le théorème 5.1 au groupe fini engendré par une transformation de Cremona d'ordre impair supérieur ou égal à 7.

6. Groupe des automorphismes du groupe de Cremona

Il est classique d'étudier les automorphismes d'un groupe G donné. On peut, par exemple, décrire le groupe d'automorphismes de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$.

THÉORÈME 6.1 ([36]). — *Un automorphisme de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ s'obtient à partir :*

- *des automorphismes intérieurs;*
- *de la contragrédiente (l'involution $u \mapsto {}^t u^{-1}$);*
- *de l'action des automorphismes du corps \mathbb{C} .*

Ce théorème est qualifié de théorème géométrique. Considérons un espace vectoriel F sur un corps \mathbb{k} et τ un automorphisme du corps \mathbb{k} . Une *collinéation* (relative à τ) est une application semi-linéaire bijective $\ell: F \rightarrow F$ satisfaisant

$$\ell(x + y) = \ell(x) + \ell(y), \quad \ell(x\alpha) = \ell(x)\tau(\alpha), \quad \forall x, y \in F, \quad \forall \alpha \in \mathbb{k}.$$

Une collinéation donne, par passage au quotient, une application bijective $\bar{\ell}$ de $\mathbb{P}(F)$ dans lui-même; les collinéations sont précisément les transformations bijectives respectant les relations d'incidence. Le théorème fondamental de la géométrie projective s'énonce comme suit.

THÉORÈME 6.2 ([36]). — *Soient F un espace vectoriel de dimension n sur un corps \mathbb{k} et f une application bijective de $\mathbb{P}(F)$ dans lui-même. Supposons que f préserve l'alignement. Si $n \geq 3$ il existe une collinéation relative à un automorphisme du corps \mathbb{k} telle que $f = \bar{\ell}$.*

Dans le même esprit on peut décrire le groupe des automorphismes du groupe des automorphismes de la droite affine complexe

$$G = \{\alpha z + \beta \mid \alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

THÉORÈME 6.3. — *Tout automorphisme de G s'obtient à partir des automorphismes intérieurs et de l'action d'un automorphisme du corps \mathbb{C} .*

En effet soit ϕ un élément de $\text{Aut}(G)$. L'image d'un sous-groupe abélien maximal de G par ϕ est encore un sous-groupe abélien maximal de G . Les sous-groupes abéliens maximaux de G sont de l'un des types suivants

$$T = \{z + \alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}\}, \quad D_{z_0} = \{\alpha(z - z_0) + z_0 \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\}.$$

On constate que T n'a pas d'élément de torsion alors que les D_{z_0} en ont ; par suite T est invariant par ϕ et tout D_{z_0} est envoyé par ϕ sur un $D_{z'_0}$. À conjugaison près par une translation on peut supposer que $\phi(D_0) = D_0$. Autrement dit il existe un morphisme multiplicatif $\kappa_1 : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ tel que

$$\phi(\alpha z) = \kappa_1(\alpha)z, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}^*$$

et un morphisme additif $\kappa_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$\phi(z + \beta) = z + \kappa_2(\beta), \quad \forall \beta \in \mathbb{C}.$$

De plus, on a d'une part

$$\phi(\alpha z + \alpha) = \phi(\alpha z)\phi(z + 1) = \kappa_1(\alpha)z + \kappa_1(\alpha)\kappa_2(1)$$

et d'autre part

$$\phi(\alpha z + \alpha) = \phi(z + \alpha)\phi(\alpha z) = \kappa_1(\alpha)z + \kappa_2(\alpha);$$

d'où l'égalité $\kappa_2(\alpha) = \kappa_1(\alpha)\kappa_2(1)$. Puisque $\kappa_2(1)$ est non nul, κ_1 est un morphisme additif et multiplicatif : κ_1 est un automorphisme du corps \mathbb{C} . Notons $\text{Aut}(\mathbb{C}, +, \cdot)$ le groupe des automorphismes du corps \mathbb{C} ; posons $\gamma = \kappa_2(1)$, on a

$$\begin{aligned} \phi(\alpha z + \beta) &= \kappa_1(\alpha)z + \gamma\kappa_1(\beta) = \kappa_1(\alpha z + \kappa_1^{-1}(\gamma)\beta) = \\ & \kappa_1(\kappa_1^{-1}(\gamma)z \circ (\alpha z + \beta) \circ \kappa_1(\gamma)z); \end{aligned}$$

i.e. modulo l'action d'un automorphisme de corps, d'une translation et d'une homothétie, ϕ est trivial.

En s'appuyant sur la structure de produit amalgamé de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ on montre que tout automorphisme de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ s'obtient à partir d'une conjugaison intérieure et de l'action d'un automorphisme du corps \mathbb{C} (voir [31]). Le groupe de Cremona ne possède pas de telle structure néanmoins en étudiant les sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables du groupe de Cremona on peut déterminer $\text{Aut}(\text{Bir}(\mathbb{P}^2))$.

THÉORÈME 6.4 ([32]). — *Le groupe des automorphismes extérieurs du groupe de Cremona s'identifie au groupe des automorphismes du corps \mathbb{C} .*

Autrement dit : soit ϕ dans $\text{Aut}(\text{Bir}(\mathbb{P}^2))$; il existe κ dans $\text{Aut}(\mathbb{C}, +, \cdot)$ et ψ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ tels que

$$\phi(f) = \kappa(\psi f \psi^{-1}), \quad \forall f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2).$$

L'idée est la suivante. Considérons un automorphisme ϕ de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ et un sous-groupe abélien maximal G de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$; alors $\phi(G)$ est un sous-groupe abélien maximal de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$. On modifie ϕ , uniquement à l'aide de conjugaisons intérieures et d'action par automorphismes de corps, de sorte que

$$\phi(G_1) = G_1, \quad \dots, \quad \phi(G_n) = G_n$$

les G_i désignant certains sous-groupes abéliens maximaux de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ bien choisis. On en déduit que $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ est invariant point par point par ϕ puis que $\phi(\sigma) = \sigma$; le théorème de Noëther permet alors de conclure.

Avant de présenter un des points clés de la démonstration du théorème 6.4 introduisons quelques notations et définitions. Si S est une surface complexe compacte, un *feuilletage* \mathcal{F} sur S est la donnée d'une famille $(\chi_i)_i$ de champs de vecteurs holomorphes à zéros isolés définis sur les ouverts \mathcal{U}_i d'un recouvrement de S . Les champs χ_i sont soumis à des conditions de compatibilité : il existe g_{ij} dans $\mathcal{O}^*(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ tel que χ_i coïncide avec $g_{ij}\chi_j$ sur $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. Notons qu'un champ de vecteurs méromorphe non trivial sur S définit un tel feuilletage.

LEMME 6.5. — *Soit G un sous-groupe abélien non dénombrable du groupe de Cremona. Il existe un champ de vecteurs rationnel χ tel que*

$$f_*\chi = \chi, \quad \forall f \in G.$$

En particulier G préserve un feuilletage.

Démonstration. — Puisque le groupe G n'est pas dénombrable, il existe un entier ν tel que l'ensemble

$$G_\nu = \{f \in G \mid \deg f = \nu\}$$

ne soit pas dénombrable. Par suite, l'adhérence de Zariski $\overline{G_\nu}$ de G_ν dans

$$\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))_\nu = \{f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) \mid \deg f \leq \nu\}$$

est un ensemble algébrique de dimension supérieure ou égale à un ; considérons alors une courbe dans $\overline{G_\nu}$, *i.e.* une application

$$\eta: \mathbb{D} \rightarrow \overline{G_\nu}, \quad t \mapsto \eta(t).$$

Notons que les éléments de \overline{G}_ν sont des applications rationnelles qui commutent. Définissons alors le champ de vecteurs rationnel χ en tout point m n'appartenant pas au lieu d'indétermination de $\eta(0)^{-1}$ par

$$\chi(m) = \left. \frac{\partial \eta(s)}{\partial s} \right|_{s=0} (\eta(0)^{-1}(m)).$$

Soit f dans \overline{G}_ν ; en dérivant l'identité $f\eta(s)f^{-1}(m) = \eta(s)(m)$ par rapport à s à m fixé, on obtient : $f_*\chi = \chi$. Autrement dit χ est invariant par les éléments de \overline{G}_ν ; on constate qu'en fait χ est invariant par tout élément de G . □

Ainsi à chaque fois que l'on se donne un sous-groupe abélien non dénombrable G de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ on hérite d'un feuilletage sur le plan projectif complexe invariant par G .

Brunella, McQuillan et Mendes ont classifié, à équivalence birationnelle près, les feuilletages holomorphes singuliers sur une surface complexe, compacte et projective ([16, 62, 63]). Soit S une surface projective munie d'un feuilletage \mathcal{F} ; notons $\text{Bir}(S, \mathcal{F})$ (resp. $\text{Aut}(S, \mathcal{F})$) le groupe des transformations birationnelles (resp. holomorphes) laissant le feuilletage \mathcal{F} invariant sur la surface S . Génériquement $\text{Bir}(S, \mathcal{F})$ coïncide avec $\text{Aut}(S, \mathcal{F})$ et est fini. Dans [22] Cantat et Favre étudient les feuilletages qui ne vérifient pas cette philosophie. Avant d'énoncer la classification qu'ils obtiennent rappelons ce qu'est une surface de Kummer (généralisée). Soit Λ un réseau de \mathbb{C}^2 ; il induit un tore complexe $T = \mathbb{C}^2/\Lambda$ de dimension 2. Par exemple le produit d'une courbe elliptique par elle-même est un tore complexe. Une application affine f préservant Λ induit un automorphisme du tore T . Supposons que la partie linéaire de f soit d'ordre infini, alors :

- ou bien la partie linéaire de f est hyperbolique auquel cas f induit un automorphisme d'Anosov préservant deux feuilletages linéaires;
- ou bien la partie linéaire de f est unipotente et f préserve une fibration elliptique.

Il arrive que le tore T possède un groupe fini d'automorphismes normalisé par f . Notons $\widetilde{T/G}$ la désingularisée de T/G . L'automorphisme \widetilde{f} induit par f sur $\widetilde{T/G}$ préserve :

- une fibration elliptique lorsque la partie linéaire de f est unipotente;
- les transformés des feuilletages stables et instables de f lorsque la partie linéaire de f est hyperbolique.

On dit que $\widetilde{T/G}$ est une *surface de Kummer* lorsque $G = \{\text{id}, (-x, -y)\}$; par analogie pour G quelconque $\widetilde{T/G}$ est une *surface de Kummer généralisée*.

Les 5 classes de feuilletages obtenus par Cantat et Favre sont les suivantes :

- \mathcal{F} est invariant par un champ de vecteurs holomorphe ;
- \mathcal{F} est une fibration elliptique ;
- S est une surface de Kummer généralisée et \mathcal{F} est la projection sur S du feuilletage stable ou instable d'un certain automorphisme d'Anosov ;
- \mathcal{F} est une fibration rationnelle ;
- il existe des entiers p, q, r et s tels qu'à revêtement fini près on ait

$$\text{Bir}(S, \mathcal{F}) = \{(x^p y^q, x^r y^s), (\alpha x, \beta y) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*\}.$$

Génériquement une application biméromorphe qui laisse un feuilletage invariant préserve un pinceau de courbes rationnelles ou elliptiques ; Cantat et Favre décrivent les transformations birationnelles dont la dynamique n'est pas triviale et qui ne satisfont pas cette généralité.

Cette étude conduit à la caractérisation des sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables du groupe de Cremona.

THÉORÈME 6.6 ([32]). — *Si G est un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$, il vérifie l'une des propriétés suivantes*

- G possède des éléments de torsion ;
- G est conjugué à un sous-groupe de dJ .

Cet énoncé permet de déterminer l'image par ϕ des groupes abéliens maximaux non dénombrables

$$dJ_a = \{(x + a(y), y) \mid a \in \mathbb{C}(y)\}, \quad T = \{(x + \alpha, y + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\};$$

modulo une conjugaison intérieure ils sont invariants par ϕ . Ensuite on démontre que, quitte à faire agir un automorphisme du corps \mathbb{C} et un automorphisme intérieur, on a : T et

$$D = \{(\alpha x, \beta y) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*\}$$

sont invariants point par point par ϕ et $\phi(dJ_a) = dJ_a$; on en déduit que $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ et σ le sont aussi d'où l'énoncé (on utilise le théorème de Noëther).

7. Un peu de dynamique

7.1. Classification des transformations birationnelles

Soit f une transformation birationnelle sur une surface complexe compacte S . La transformation f est dite *algébriquement stable* s'il n'existe pas

de courbe \mathcal{C} dans S telle que $f^k(\mathcal{C})$ appartienne à $\text{Ind}(f)$ pour un certain entier $k \geq 0$. Dit autrement une transformation est algébriquement stable si la situation suivante n'arrive pas

$$\left. \begin{array}{ccccccc} & f & & f & & f & \dots & \dots & & f & & f \\ & \rightarrow & \cdot & \rightarrow & \cdot & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \cdot & \rightarrow & \cdot & \rightarrow \end{array} \right\} \mathcal{C}$$

Les deux conditions suivantes sont équivalentes ([37]).

- Il n'existe pas de courbe \mathcal{C} dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ telle que $f^k(\mathcal{C})$ appartienne à $\text{Ind}(f)$ pour un certain entier $k \geq 0$;
- pour tout entier n on a $\deg f^n = (\deg f)^n$.

D'après Diller et Favre toute transformation birationnelle sur une surface complexe compacte est algébriquement stable modulo un changement de coordonnées.

PROPOSITION 7.1 ([37]). — Soit $f: S \dashrightarrow S$ une transformation birationnelle sur une surface complexe compacte S . Il existe une suite d'éclatements $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ telle que $\pi^{-1}f\pi: \tilde{S} \dashrightarrow \tilde{S}$ soit algébriquement stable.

Donnons une idée de la démonstration de cet énoncé. Supposons que f ne soit pas algébriquement stable ; il existe alors une courbe \mathcal{C} et un entier k tels que

$$\left. \begin{array}{ccccccc} & \rightarrow & \cdot & \rightarrow & \cdot & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \cdot & \rightarrow & \cdot & \rightarrow \\ & & p_1 & & p_2 & & & & p_{k-1} & & p_k & & \end{array} \right\} \mathcal{C}$$

L'idée mise en œuvre par Diller et Favre est la suivante : quitte à éclater les p_i l'image de \mathcal{C} est, pour $i = 1, \dots, k$, une courbe.

Soient f et g deux éléments du groupe de Cremona : en général $\deg gfg^{-1} \neq \deg f$, i.e. le degré n'est pas un invariant birationnel. Par contre il existe deux constantes positives α et β telles que

$$\alpha \deg f^n \leq \deg(gf^n g^{-1}) \leq \beta \deg f^n, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

le taux de croissance des degrés est un invariant birationnel. On introduit donc la notion suivante : soit f dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$, le premier degré dynamique de f est la quantité

$$\lambda(f) = \liminf(\deg f^n)^{1/n}.$$

Lorsque f est une transformation de Cremona algébriquement stable on a $\lambda(f) = \deg f$.

THÉORÈME 7.2 ([37]). — Une transformation f de Cremona satisfait, à conjugaison birationnelle près, une et une seule des propriétés suivantes :

- la suite $(\deg f^n)_n$ est bornée, f est un automorphisme d'une surface rationnelle S et un itéré de f appartient à $\text{Aut}^0(S)$, la composante neutre de $\text{Aut}(S)$;
- $\deg f^n \sim n$ alors f n'est pas un automorphisme et f préserve une unique fibration qui est rationnelle ;
- $\deg f^n \sim n^2$ auquel cas f est un automorphisme préservant une unique fibration qui est elliptique ;
- $\deg f^n \sim \alpha^n$, $\alpha > 1$.

Dans les trois premiers cas on a $\lambda(f) = 1$, dans le dernier $\lambda(f) > 1$.

DÉFINITION 7.3. — Soit f une transformation birationnelle du plan projectif complexe dans lui-même :

- si la suite $(\deg f^n)_n$ est bornée, on dit que f est virtuellement isotope à l'identité ;
- si $\deg f^n \sim n$, on dit que f est un twist de de Jonquières ;
- si $\deg f^n \sim n^2$, on dit que f est un twist d'Halphen ;
- si $\deg f^n \sim \alpha^n$ avec $\alpha > 1$, on parle de transformation entropique.

Exemple 7.4. — – Toute transformation birationnelle d'ordre fini, tout automorphisme du plan projectif complexe est virtuellement isotope à l'identité.

- La transformation $f = (xz : xy : z^2)$ est un twist de de Jonquières (dans la carte affine $z = 1$ son itéré n -ième s'écrit $(x, x^n y)$).
- Le prolongement d'un automorphisme de Hénon généralisé $(y, y^2 - \delta x)$, avec $\delta \in \mathbb{C}^*$, est entropique.
- Soit f_M la transformation de la forme

$$f_M = (x^a y^b, x^c y^d), \quad M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z});$$

on a l'alternative

- ou bien $|\text{tr } M| \leq 2$ et $\lambda(f_M) = 1$;
- ou bien M a pour valeurs propres λ et λ^{-1} avec $\lambda^{-1} < 1 < \lambda$ et $\lambda(f_M) = \lambda$.

Par suite f_M est virtuellement isotope à l'identité (resp. un twist de

de Jonquières ou un twist d'Halphen, resp. entropique) dès que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

est elliptique (resp. parabolique, resp. hyperbolique).

Supposons que a, b, c, d soient strictement positifs; f_M^* n'est pas une isométrie. Remarquons que $\deg f_M^2 < (\deg f_M)^2$; en particulier $f_M \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ n'est pas algébriquement stable. On peut voir f_M comme un élément de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ avec (x, y) dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On a

$$\begin{aligned} H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}L_x \oplus \mathbb{Z}L_y, L_x = \{0\} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \\ L_y &= \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \{0\}; \end{aligned}$$

d'où

$$f_M^*L_x = aL_x + bL_y, \quad f_M^*L_y = cL_x + dL_y.$$

Il s'en suit que la matrice de f_M^* coïncide avec tM . Finalement f_M vue comme transformation birationnelle de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est algébriquement stable et $\lambda(f_M)$ est la plus grande valeur propre de M .

Remarque 7.5. — La notion de premier degré dynamique et le théorème 7.2 se généralisent au cas des transformations biméromorphes sur des surfaces complexes compactes kählériennes.

Une transformation rationnelle f sur une surface complexe compacte kählérienne S définit un opérateur linéaire f^* sur les groupes de cohomologie de S préservant la décomposition de Hodge

$$H^k(S, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=k} H^{i,j}(S, \mathbb{C}).$$

On définit le premier degré dynamique de f par

$$\lambda(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(f^n)^*\|^{1/n}$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\text{End}(H^{1,1}(\mathbb{R}, S))$; toujours d'après [37] cette quantité est un invariant birationnel. Elle coïncide sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ avec la notion déjà introduite.

Si f est une transformation biméromorphe sur une surface kählérienne, $\lambda(f)$ est un entier algébrique dont les conjugués μ_i sont de module inférieur à 1 (voir [37]). En particulier $\lambda(f)$ est ou bien un nombre de Pisot (on a $|\mu_i| < 1$ pour tout i), ou bien un nombre de Salem (les conjugués de λ sont λ, λ^{-1} et μ_i avec $|\mu_i| = 1$).

La démonstration du théorème 7.2 se décompose comme suit

- $(\|f^{n*}\|)_n$ est bornée si et seulement si f est conjugué à un automorphisme dont un itéré est isotope à l'identité;
- si $(\|f^{n*}\|)_n$ n'est pas bornée, f est conjugué
 - ou bien à un automorphisme,
 - ou bien à une transformation birationnelle qui préserve une fibration rationnelle, de plus $\|f^{n*}\| \sim n$;

- si f est un automorphisme et si $(\|f^{n*}\|)_n$ n'est pas bornée, f préserve une fibration elliptique ([46, 18, 20]);
- si f est un automorphisme qui préserve une fibration elliptique et si $(\|f^{n*}\|)_n$ est non bornée, alors $\|f^{n*}\| \sim n^2$.
- si f préserve deux fibrations génériquement transverses, la suite $(\|f^{n*}\|)_n$ est bornée.

On a une situation analogue, et même plus précise, pour le groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. À partir du théorème 2.5, Friedland et Milnor donnent une classification des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 . Avant de l'énoncer on introduit le sous-ensemble H de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ constitué des applications de type Hénon, *i.e.* des automorphismes de la forme

$$f = \phi h_1 \dots h_n \phi^{-1}, \quad \phi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2], \quad h_i \text{ application de Hénon généralisée.}$$

THÉORÈME 7.6 ([42]). — *Soit f un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 . On a l'alternative suivante :*

- ou bien f est conjugué à un élément de E ;
- ou bien f appartient à H .

On peut reformuler le théorème 7.6 en utilisant le premier degré dynamique : si f est un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 , alors :

- ou bien $\lambda(f) = 1$ (et f est conjugué à un élément de E) ;
- ou bien $\lambda(f) > 1$ (et f est de type Hénon).

Soit f un automorphisme polynomial du plan complexe. À f on peut associer le sous-arbre $\text{Fix}(f)$ de \mathcal{T} constitué des sommets et des arêtes fixés par l'action de f . Le théorème 7.6 correspond aussi à l'alternative : $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$ ou $\text{Fix}(f) = \emptyset$; en effet le stabilisateur du sommet fE (resp. du sommet fA , resp. de l'arête fS) est le groupe fEf^{-1} (resp. fAf^{-1} , resp. fSf^{-1}). Lorsque f est dans H il existe une unique géodésique infinie, *i.e.* un sous-arbre isomorphe à \mathbb{R} , notée $\text{Geo}(f)$, telle que l'action de f restreinte à $\text{Geo}(f)$ soit une translation.

Plus précisément on a la « dichotomie » suivante :

- ou bien f appartient à E à conjugaison près,
 - le premier degré dynamique de f vaut 1,
 - la transformation f préserve une fibration rationnelle,
 - le centralisateur de f est non dénombrable,
 - l'ensemble $\text{Fix}(f)$ est non vide;
- ou bien f est dans H ,
 - le premier degré de f est strictement supérieur à 1,
 - l'élément f ne préserve pas de courbe rationnelle,
 - le centralisateur de f est dénombrable,

- l'ensemble $\text{Fix}(f)$ est vide,
- l'application f admet une infinité de points périodiques hyperboliques.

La situation est-elle la même pour le groupe de Cremona ?

THÉORÈME 7.7 ([21]). — *Soit f une transformation de Cremona entropique. Si g est une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans lui-même qui commute avec f il existe deux entiers m dans \mathbb{N}^* et n dans \mathbb{Z} tels que $g^m = f^n$.*

Néanmoins contrairement au cas des automorphismes polynomiaux il n'y a pas d'équivalence entre le fait d'être entropique et d'avoir un centralisateur dénombrable : considérons la famille de transformations birationnelles $(f_{\alpha,\beta})$ donnée par

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), (x : y : z) \mapsto ((\alpha x + y)z : \beta y(x + z) : z(x + z)),$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*,$$

soit dans la carte affine $z = 1$

$$f_{\alpha,\beta} = \left(\frac{\alpha x + y}{x + 1}, \beta y \right).$$

Elle vérifie les propriétés suivantes :

THÉORÈME 7.8 ([35]). — *Les $f_{\alpha,\beta}$ sont des twists de de Jonquières. Supposons que α et β soient de module 1 et génériques.*

Si g commute à $f_{\alpha,\beta}$, alors g est une puissance de $f_{\alpha,\beta}$; en particulier le centralisateur de $f_{\alpha,\beta}$ est dénombrable.

Les éléments $f_{\alpha,\beta}^2$ possèdent deux points fixes p_1, p_2 et

- *il existe un voisinage \mathcal{V}_1 de p_1 sur lequel $f_{\alpha,\beta}$ est conjugué à $(\alpha x, \beta y)$; en particulier l'adhérence de l'orbite d'un point de \mathcal{V}_1 sous l'action de $f_{\alpha,\beta}$ est un tore de dimension 2 ;*
- *il existe un voisinage \mathcal{V}_2 de p_2 tel que la dynamique de $f_{\alpha,\beta}^2$ soit localement linéaire sur \mathcal{V}_2 ; l'adhérence de l'orbite générique d'un point de \mathcal{V}_2 sous l'action de $f_{\alpha,\beta}^2$ est un cercle.*

Remarque 7.9. — La droite $z = 0$ est contractée par $f_{\alpha,\beta}$ sur le point $(0 : 1 : 0)$ qui est lui-même éclaté sur $z = 0$; la transformation $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas algébriquement stable, c'est pour cette raison qu'on a considéré $f_{\alpha,\beta}^2$ plutôt que $f_{\alpha,\beta}$.

On va établir un résultat qui nous servira au paragraphe suivant.

LEMME 7.10 ([30]). — Soient f et g deux transformations birationnelles sur une surface S . Supposons que f et g soient virtuellement isotopes à l'identité. Si f et g commutent, il existe une surface \tilde{S} , une transformation birationnelle $\phi: S \dashrightarrow \tilde{S}$ et un entier k tels que

$$\phi f \phi^{-1}, \phi g \phi^{-1} \in \text{Aut}(\tilde{S}) \quad \text{et} \quad \phi f^k \phi^{-1}, \phi g^k \phi^{-1} \in \text{Aut}^0(\tilde{S}).$$

Démonstration. — Par hypothèse il existe une surface \tilde{S} , une transformation birationnelle $\zeta: S \dashrightarrow \tilde{S}$ et un entier n tels que $\zeta^{-1} f^n \zeta$ soit un automorphisme de \tilde{S} isotope à l'identité. Plaçons-nous sur \tilde{S} ; pour simplifier on note encore f l'automorphisme $\zeta^{-1} f^n \zeta$ et g la transformation $\zeta^{-1} g \zeta$.

Commençons par montrer qu'il existe $\eta: Y \dashrightarrow \tilde{S}$ birationnel tel que $\eta^{-1} f^\ell \eta$ soit un automorphisme de Y isotope à l'identité pour un certain ℓ et $\eta^{-1} g \eta$ soit algébriquement stable. On note $\nu(g)$ le nombre minimum d'éclatements nécessaires pour rendre g algébriquement stable. La preuve procède par induction sur $\nu(g)$.

Si $\nu(g)$ est nul, alors $\eta = \text{id}$ convient.

Supposons le lemme démontré pour les transformations f et g satisfaisant $\nu(g) \leq j$; considérons un couple (\tilde{f}, \tilde{g}) vérifiant les hypothèses de l'énoncé et $\nu(\tilde{g}) = j + 1$. Puisque \tilde{g} n'est pas algébriquement stable, il existe une courbe V dans $\text{Exc}(\tilde{g})$ et un entier q tels que $\tilde{g}^q(V)$ soit un point d'indétermination p de \tilde{g} . Comme \tilde{f} et \tilde{g} commutent, \tilde{f}^k fixe les composantes irréductibles de $\text{Ind}(\tilde{g})$ pour un certain entier k . Considérons κ l'éclatement de \tilde{S} au point p ; ce point étant fixé par \tilde{f}^k , d'une part $\kappa^{-1} \tilde{f}^k \kappa$ est un automorphisme, d'autre part $\nu(\kappa^{-1} \tilde{g} \kappa) = j$. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe $\eta: Y \dashrightarrow \tilde{S}$ et ℓ tels que $\eta^{-1} \tilde{f}^\ell \eta$ soit un automorphisme isotope à l'identité et $\eta^{-1} \tilde{g} \eta$ soit algébriquement stable.

Posons $\bar{f} = \eta^{-1} f^\ell \eta$ et $\bar{g} = \eta^{-1} g \eta$. La première étape consiste à considérer ε_1 la contraction d'une courbe de $\text{Exc}(\bar{g}^{-1})$; puisque les courbes contractées par \bar{g}^{-1} sont, d'après [37], d'auto-intersection négative et que \bar{f} est isotope à l'identité, elles sont fixées par \bar{f} donc par $\varepsilon_1 \bar{f} \varepsilon_1^{-1}$. La i -ième étape consistant à répéter la première avec $\varepsilon_{i-1} \dots \varepsilon_1 \bar{f} \varepsilon_1^{-1} \dots \varepsilon_{i-1}^{-1}$ et $\varepsilon_{i-1} \dots \varepsilon_1 \bar{g} \varepsilon_1^{-1} \dots \varepsilon_{i-1}^{-1}$, on obtient le résultat souhaité. D'après [37] le procédé termine. Toujours par l'argument de Diller et Favre, une puissance de $\varepsilon^{-1} g \varepsilon$ est isotope à l'identité. \square

7.2. Caractérisation des courbes invariantes par certaines transformations birationnelles

Au §5 on a évoqué l'article [38] sans en préciser les résultats; le vocabulaire ayant été introduit, donnons quelques-uns de leurs énoncés.

THÉORÈME 7.11 ([38]). — *Soient S une surface projective complexe et f une transformation birationnelle sur S algébriquement stable et entropique. Soit C une courbe connexe invariante par f .*

La courbe C est de genre 0 ou 1.

Supposons que C soit de genre 1. Quitte à contracter certaines courbes sur S , il existe une 2-forme ω méromorphe telle que

- $f^*\omega = \alpha\omega$, $\alpha \in \mathbb{C}$;
- et $-C$ soit le diviseur de ω .

La constante α est déterminée par la courbe C et la restriction de f à C .

Les auteurs s'intéressent aussi au nombre de composantes irréductibles d'une courbe invariante par une transformation birationnelle sur une surface rationnelle S . Ils montrent que, sauf dans un cas bien particulier, ce nombre est borné par une quantité qui ne dépend que de S .

THÉORÈME 7.12 ([38]). — *Soient S une surface rationnelle et f une transformation birationnelle sur S algébriquement stable et entropique. Soit C une courbe de S invariante par f .*

Si l'une des composantes connexes de C est de genre 1 le nombre de composantes irréductibles de C est borné par $\dim H^{1,1}(S) + 2$.

Si toutes les composantes connexes de C sont de genre 0, alors :

- ou bien C a au plus $\dim H^{1,1}(S) + 1$ composantes irréductibles;
- ou bien il existe une application holomorphe $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, unique modulo automorphisme de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, telle que C contienne exactement $k \geq 2$ fibres distinctes de π et C compte au plus $\dim H^{1,1}(S) + k - 1$ composantes irréductibles.

8. Sous-groupes de type fini, sous-groupes nilpotents

Rappelons une conjecture énoncée dans le programme de Zimmer ([78]) : un réseau d'un groupe de Lie réel simple connexe G ne peut pas agir fidèlement sur une variété compacte dont la dimension serait strictement inférieure au rang réel de G . Motivé par cette conjecture on décrit, à l'aide du théorème 7.2, les représentations de certains réseaux dans le groupe de Cremona.

THÉORÈME 8.1 ([30]). — Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ et ι un morphisme injectif de Γ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Alors ι est, à conjugaison birationnelle près, le plongement canonique ou la contragrédiente ($u \mapsto {}^t u^{-1}$).

On en déduit une généralisation du théorème 6.4.

COROLLAIRE 8.2 ([33]). — Soit ϕ un endomorphisme non trivial de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Il existe κ un plongement du corps \mathbb{C} dans lui-même et ψ une transformation birationnelle tels que

$$\phi(f) = \kappa(\psi f \psi^{-1}), \quad \forall f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2).$$

Une autre conséquence est qu'une large classe de groupes ne se plonge pas dans le groupe de Cremona ; on a par exemple l'énoncé suivant.

COROLLAIRE 8.3 ([30]). — Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Dès que n est supérieur ou égal à 4, le groupe Γ ne se plonge pas dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

Avant de signaler un résultat dû à Cantat qui traite une plus large classe de groupes, rappelons qu'un groupe G a la propriété (T) de Kazhdan si toute action continue de G sur un espace de Hilbert par déplacement unitaire a un point fixe global. Par exemple $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ possède la propriété (T) de Kazhdan dès que $n \geq 3$.

THÉORÈME 8.4 ([21]). — Soit Γ un groupe infini non dénombrable de transformations de Cremona. Si Γ a la propriété (T), il existe une application birationnelle qui conjugue Γ à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$.

Dans le même esprit on s'est intéressé aux sous-groupes nilpotents⁽⁴⁾ du groupe de Cremona.

THÉORÈME 8.5 ([34]). — Soit G un groupe nilpotent ; supposons que G ne soit pas abélien à indice fini près. Soit ι un morphisme injectif de G dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Le groupe G vérifie une des propriétés suivantes

- G est de torsion ;
- le premier groupe dérivé de G est abélien à indice fini près.

On en déduit des obstructions à ce que certains groupes se plongent dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

COROLLAIRE 8.6 ([34]). — Soit G un groupe contenant un sous-groupe nilpotent, non virtuellement métabélien et sans torsion. Il n'existe pas de représentation fidèle de G dans le groupe de Cremona.

4. Soit G un groupe ; posons $G^{(0)} = G$ et $G^{(k)} = [G, G^{(k-1)}] = \langle aba^{-1}b^{-1} \mid a \in G, b \in G^{(k-1)} \rangle$ pour $k \geq 1$. La longueur de G est le plus petit entier k pour lequel on a $G^{(k)} = \{\mathrm{id}\}$.

8.1. Idée de la démonstration du théorème 8.1

Pour simplifier, on va se restreindre au cas $\Gamma = \text{SL}_3(\mathbb{Z})$, *i.e.* on considère un plongement $\iota: \text{SL}_3(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

8.1.1. Quelques notions sur les groupes

Notons δ_{ij} la matrice de Kronecker de taille 3×3 et $e_{ij} = \text{id} + \delta_{ij}$.

PROPOSITION 8.7 ([74]). — *Le groupe $\text{SL}_3(\mathbb{Z})$ a pour présentation*

$$\left\langle e_{ij}, i \neq j \mid (e_{12}e_{21}^{-1}e_{12})^4 = \text{id}, [e_{ij}, e_{kl}] = \begin{cases} \text{id} & \text{si } i \neq l \text{ et } j \neq k \\ e_{il} & \text{si } i \neq l \text{ et } j = k \\ e_{kj}^{-1} & \text{si } i = l \text{ et } j \neq k \end{cases} \right\rangle.$$

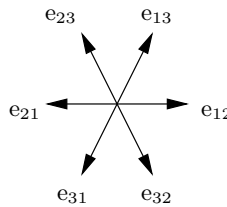
Les e_{ij} seront dits *générateurs standards* de $\text{SL}_3(\mathbb{Z})$.

DÉFINITION 8.8. — *On appelle k -groupe de Heisenberg tout groupe de présentation*

$$\mathcal{H}_k = \langle f, g, h \mid [f, h] = [g, h] = \text{id}, [f, g] = h^k \rangle.$$

Par convention $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ est un groupe de Heisenberg.

Le groupe $\text{SL}_3(\mathbb{Z})$ contient de nombreux groupes de Heisenberg; par exemple le sous-groupe $\langle e_{12}, e_{13}, e_{23} \rangle$ en est un. Plus généralement le groupe engendré par trois générateurs « qui se suivent sur le dessin suivant »



est un groupe de Heisenberg. Remarquons que sur la figure qui précède on a :

- « $e_{12} + e_{23} = e_{13}$ » ce qui traduit que $[e_{12}, e_{23}] = e_{13}$;
- « $e_{12} + e_{13}$ » n'appartient pas au diagramme ce qui signifie que $[e_{12}, e_{13}] = \text{id}$.

DÉFINITION 8.9. — Soient G un groupe de type fini, $\{a_1, \dots, a_n\}$ une partie génératrice de G et f un élément de G .

La longueur de f , notée $|f|$, est le plus petit entier k pour lequel il existe une suite (s_1, \dots, s_k) d'éléments de $\{a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}$ telle que $f = s_1 \dots s_k$.

Un élément f de G est distordu s'il est d'ordre infini et si la quantité $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|f^k|}{k}$ est nulle.

Exemple 8.10. — Le générateur h d'un groupe de Heisenberg est distordu. À partir des égalités $[f, h] = [g, h] = \text{id}$ et $[f, g] = h$ on obtient

$$[f^p, g^q] = h^{pq} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

Il en résulte que $|h^{p^2}| = |[f^p, g^p]| \leq 4p$ d'où l'inégalité $\frac{|h^{p^2}|}{p^2} \leq \frac{4}{p}$.

En particulier les générateurs standards de $\text{SL}_3(\mathbb{Z})$ sont distordus.

8.1.2. Dynamique de l'image d'un groupe de Heisenberg

LEMME 8.11 ([30]). — Soient f un élément d'un groupe de type fini G et ϕ un morphisme de G dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Si f est distordu, le premier degré dynamique de $\phi(f)$ vaut 1.

Démonstration. — Soit $\{a_1, \dots, a_n\}$ une partie génératrice de G . Les inégalités

$$\lambda(\phi(f))^n \leq \deg \phi(f)^n \leq \max_i (\deg \phi(a_i))^{|f^n|}$$

conduisent à

$$0 \leq \log \lambda(\phi(f)) \leq \frac{|f^n|}{n} \log(\max_i (\deg \phi(a_i))).$$

Si f est distordu, la quantité $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|f^k|}{k}$ est nulle et le degré dynamique de $\phi(f)$ vaut un. \square

D'après le théorème 7.2 on a :

- ou bien $\iota(e_{ij})$ est un twist de de Jonquières ou d'Halphen donc en particulier laisse une unique fibration (rationnelle ou elliptique) invariante ;
- ou bien $\iota(e_{ij})$ est virtuellement isotope à l'identité.

Les relations satisfaites par les e_{ij} assurent que si $\iota(e_{i_0 j_0})$ préserve une unique fibration alors tous les $\iota(e_{ij})$ la préservent. D'où l'alternative

- l'un des $\iota(e_{ij})$ laisse une unique fibration (rationnelle ou elliptique) invariante;
- tous les $\iota(e_{ij})$ sont virtuellement isotopes à l'identité.

8.1.3. Fibration invariante

Rappelons une des propriétés satisfaites par les groupes de type fini ayant la propriété (T) qui nous sera utile.

LEMME 8.12 ([30]). — *Soient Γ un groupe de type fini ayant la propriété (T) et ϕ un morphisme de Γ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$ (resp. $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$). L'image de ϕ est finie.*

PROPOSITION 8.13 ([30]). — *Soit ϕ un morphisme de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Si l'un des $\phi(e_{ij})$ préserve une unique fibration, l'image de ϕ est finie.*

Démonstration. — Notons \tilde{e}_{ij} l'image de e_{ij} par ϕ ; les différents générateurs jouent un rôle identique, on peut donc supposer, sans perdre de généralité, que \tilde{e}_{12} préserve une unique fibration \mathcal{F} .

Les relations satisfaites par les e_{ij} (proposition 8.7) entraînent que \mathcal{F} est invariante par tous les \tilde{e}_{ij} . Ainsi, pour tout \tilde{e}_{ij} , il existe ν_{ij} dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ et $F: \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ définissant \mathcal{F} tels que $F \circ \tilde{e}_{ij} = \nu_{ij} \circ F$. Soit ς le morphisme défini par

$$\varsigma: \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}), \quad e_{ij} \mapsto \nu_{ij}.$$

Puisque $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ a la propriété (T) de Kazhdan, le lemme 8.12 assure que $\mathrm{im} \varsigma$ est finie, *i.e.* $\ker \varsigma$ est d'indice fini donc en particulier possède la propriété (T).

Si \mathcal{F} est rationnelle, on peut supposer que l'image de ϕ est contenue dans le groupe de de Jonquières; par suite la restriction de ϕ à $\ker \varsigma$ est « à valeurs » dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$, elle ne peut donc être injective. Dans ce cas $\phi(\ker \varsigma)$ est fini ce qui implique que $\mathrm{im} \phi$ l'est aussi.

La fibration \mathcal{F} ne peut être elliptique; en effet le groupe des transformations birationnelles qui préservent une fibration elliptique fibre à fibre est métabélien et un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ ne peut pas l'être. \square

8.1.4. Factorisation dans un groupe d'automorphismes

Étudions le cas où tout $\iota(e_{ij})$ est virtuellement isotope à l'identité. Avec des techniques similaires à celles utilisées pour établir le lemme 7.10 on montre l'énoncé suivant.

PROPOSITION 8.14. — Soit ς une représentation de \mathcal{H}_k dans le groupe de Cremona. Supposons que tout générateur standard de $\varsigma(\mathcal{H}_k)$ soit virtuellement isotope à l'identité. Il existe une surface \tilde{S} , une transformation birationnelle $\phi: S \dashrightarrow \tilde{S}$ et un entier k tels que

$$\phi_\varsigma(\ell)\phi^{-1} \in \text{Aut}(\tilde{S}) \quad \text{et} \quad \phi_\varsigma(\ell)^k\phi^{-1} \in \text{Aut}^0(\tilde{S}), \quad \ell \in \{f, g, h\}.$$

Ainsi les images de e_{12}^n , e_{13}^n et e_{23}^n par ι sont, pour un certain n , des automorphismes d'une même surface S ; de plus quitte à changer n on peut supposer que $\iota(e_{12}^n)$, $\iota(e_{13}^n)$ et $\iota(e_{23}^n)$ appartiennent à $\text{Aut}^0(S)$ (proposition 8.14).

Comme un automorphisme isotope à l'identité préserve les courbes d'auto-intersection négative on peut supposer à conjugaison birationnelle près et indice fini près que S est minimale, i.e. $S = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ou $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou F_m . Rappelons que

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})) &= (\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C})) \rtimes (y, x), \\ \text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) &= \text{PGL}_3(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

et pour $m \geq 1$

$$\text{Aut}(F_m) = \left\{ \left(\frac{\alpha x + P(y)}{(cy + d)^m}, \frac{ay + b}{cy + d} \right) \mid \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{PGL}_2(\mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{C}^*, P \in \mathbb{C}[y], \deg P \leq m \right\}.$$

Il n'y a pas de plongement de $\langle e_{12}^n, e_{13}^n, e_{23}^n \rangle$ dans $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ donc $S = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ou F_m .

Si $S = F_m$ on peut montrer que l'inclusion $\iota(\langle e_{12}^n, e_{13}^n, e_{23}^n \rangle) \subset \text{Aut}(F_m)$ entraîne que

$$\iota(\langle e_{ij}^n, i \neq j \rangle) \subset \text{Aut}[\mathbb{C}^2].$$

Alors [23] implique que $\iota(\langle e_{ij}^n, i \neq j \rangle)$ est nécessairement un sous-groupe de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$.

Enfin lorsque $S = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ on obtient que si l'image par ι de $\langle e_{12}^n, e_{13}^n, e_{23}^n \rangle$ est un sous-groupe d'automorphismes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, alors $\iota(\langle e_{ij}^n, i \neq j \rangle)$ l'est aussi.

8.2. Conclusion

D'après ce qui précède l'image de tout générateur standard de $\text{SL}_3(\mathbb{Z})$ est virtuellement isotope à l'identité et $\iota(e_{12}^n)$, $\iota(e_{13}^n)$ et $\iota(e_{23}^n)$ sont, pour un certain n , conjugués à des automorphismes d'une surface minimale S

avec $S = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ou $S = F_m$, $m \geq 1$. On montre finalement qu'à conjugaison près $\iota(\langle e_{ij}^n \rangle)$ est, pour un certain n , un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$. La restriction de ι à $\langle e_{ij}^n \rangle$ se prolonge alors en un morphisme de groupe de Lie de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ dans lui-même ([74]); par simplicité de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$, ce prolongement est injectif et donc surjectif. Or les automorphismes lisses de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ s'obtiennent à partir des automorphismes intérieurs et de la contragrédiente (théorème 6.1); ainsi, à conjugaison linéaire près, $\iota|_{\langle e_{ij}^n \rangle}$ coïncide avec le plongement canonique ou la contragrédiente.

Soit f un élément de $\iota(\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})) \setminus \iota(\langle e_{ij}^n \rangle)$ qui contracte au moins une courbe $\mathcal{C} = \mathrm{Exc}(f)$. Le groupe $\langle e_{ij}^n \rangle$ est distingué dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$; la courbe \mathcal{C} est donc invariante par $\iota(\langle e_{ij}^n \rangle)$ et par suite l'est aussi par l'adhérence de Zariski de $\iota(\langle e_{ij}^n \rangle)$, qui n'est autre que $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$, ce qui est impossible. Il en résulte que f appartient à $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ et que $\iota(\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}))$ est inclus dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$.

9. Alternative de Tits

Le groupe linéaire satisfait l'alternative de Tits.

THÉORÈME 9.1 ([75]). — *Soient \mathbb{k} un corps de caractéristique nulle et Γ un sous-groupe de type fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$. Alors*

- ou bien Γ contient un groupe libre non abélien;
- ou bien Γ contient un sous-groupe résoluble⁽⁵⁾ d'indice fini.

Signalons que le groupe des difféomorphismes d'une variété réelle de dimension supérieure ou égale à 1 ne satisfait pas l'alternative de Tits (voir [44] et les références qui s'y trouvent). Par contre le groupe des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 vérifie l'alternative de Tits ([57]); Lamy obtient cet énoncé à partir de la classification des sous-groupes de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$, classification établie en utilisant l'action de ce groupe sur \mathcal{T} .

THÉORÈME 9.2 ([57]). — *Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$. Une et une seule des éventualités suivantes est réalisée.*

- *Chaque élément de G est élémentaire, on a alors l'alternative*
 - *G est conjugué à un sous-groupe de E ou A ;*
 - *G est abélien, G s'écrit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i$ où $G_i \subset G_{i+1}$ et chaque G_i est conjugué à un groupe cyclique fini du type $\langle (\alpha x, \beta y) \rangle$ avec α, β*

5. Soit G un groupe; posons $G^{(0)} = G$ et $G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}] = \langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G^{(k-1)} \rangle$ pour $k \geq 1$. Le groupe G est résoluble s'il existe un entier k tel que $G^{(k)} = \{\mathrm{id}\}$.

racines de l'unité du même ordre. Chaque élément de G admet un unique point fixe⁽⁶⁾ et ce point fixe est le même pour tous les éléments de G . Enfin l'action de G fixe un bout de l'arbre \mathcal{T} .

- G contient des éléments de type Hénon et ceux-ci admettent tous la même géodésique auquel cas G est résoluble et contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à \mathbb{Z} .
- G possède deux éléments de type Hénon avec des géodésiques distinctes, G contient alors un groupe libre à deux générateurs.

En s'appuyant, entre autres, sur le théorème 7.2, Cantat caractérise les sous-groupes de type fini de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$; Favre a reformulé, dans [40], cette classification de la façon suivante.

THÉORÈME 9.3 ([21]). — *Soit G un sous-groupe de type fini du groupe de Cremona. Une et une seule des possibilités suivantes est réalisée.*

- *Tous les éléments de G sont virtuellement isotopes à l'identité, alors*
 - *ou bien G est, à indice fini près et conjugaison birationnelle près, contenu dans la composante neutre de $\text{Aut}(S)$ où S désigne une surface rationnelle minimale;*
 - *ou bien G préserve une fibration rationnelle.*
- *G contient un twist de Jonquières ou d'Halphen et aucun élément entropique auquel cas G préserve une fibration rationnelle ou elliptique.*
- *G contient deux éléments entropiques f et g tels que $\langle f, g \rangle$ soit libre.*
- *G contient un élément entropique et pour tout couple (f, g) d'éléments entropiques, $\langle f, g \rangle$ n'est pas libre, alors*

$$1 \longrightarrow \ker \rho \longrightarrow G \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

et $\ker \rho$ est constitué uniquement d'éléments virtuellement isotopes à l'identité.

Une des conséquences est l'énoncé suivant.

THÉORÈME 9.4 ([21]). — *Le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ satisfait l'alternative de Tits.*

Un des ingrédients communs aux démonstrations des théorèmes 9.1, 9.2 et 9.3 est le « lemme du ping-pong », critère utilisé de nombreuses fois par Klein pour construire des produits libres (la formulation donnée ci-après est toutefois plus récente).

6. en tant qu'automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2

LEMME 9.5 (« Lemme du ping-pong »). — Soit G un groupe agissant sur un ensemble X . Considérons Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes de G et posons $\Gamma = \langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$. On suppose que :

- Γ_1 (resp. Γ_2) compte au moins 3 (resp. 2) éléments,
- il existe X_1 et X_2 deux parties non vides de X telles que

$$X_2 \not\subseteq X_1; \quad \forall \alpha \in \Gamma_1 \setminus \{\text{id}\}, \quad \alpha(X_2) \subset X_1; \quad \forall \beta \in \Gamma_2 \setminus \{\text{id}\}, \quad \beta(X_1) \subset X_2.$$

Alors Γ est isomorphe au produit libre $\Gamma_1 * \Gamma_2$ de Γ_1 et Γ_2 .

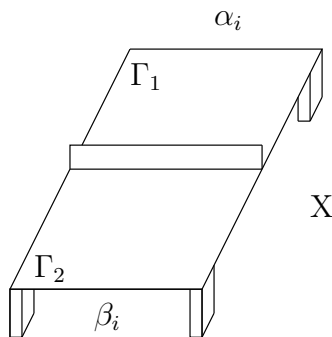
Démonstration. — Considérons le morphisme surjectif $\Gamma_1 * \Gamma_2 \rightarrow \Gamma$. Soit m un mot réduit, non vide, composé de lettres dans l'union disjointe de $\Gamma_1 \setminus \{\text{id}\} \cup \Gamma_2 \setminus \{\text{id}\}$

$$m = (\alpha_1)\beta_1\alpha_2\beta_2 \dots \beta_k(\alpha_{k+1}).$$

Commençons par supposer que m soit de la forme

$$\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \dots \beta_k\alpha_{k+1}.$$

Comme $\alpha_i(X_2) \subset X_1$ et $\beta_i(X_1) \subset X_2$, on obtient $m(X_2) \subset X_1$ donc $m \neq \text{id}$.



Supposons maintenant que m soit du type $\beta_1\alpha_2\beta_2 \dots \beta_k$. Soit $\alpha \in \Gamma_1 \setminus \{\text{id}\}$, l'élément m est trivial si et seulement si $\alpha m \alpha^{-1} = \text{id}$; or d'après le cas précédent $\alpha m \alpha^{-1} \neq \text{id}$ donc $m \neq \text{id}$.

Supposons désormais que m s'écrive $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \dots \beta_k$. Soit $\alpha \in \Gamma_1 \setminus \{\text{id}, \alpha_1\}$, le mot m est trivial si et seulement si $\alpha^{-1}m\alpha = \text{id}$ ce qui est exclu d'après ce qui précède.

Finalement considérons l'éventualité où $m = \beta_1\alpha_2\beta_2 \dots \alpha_k$ auquel cas m est trivial si et seulement si $m^{-1} = \alpha_k^{-1} \dots \beta_1^{-1}$ l'est ce qui est impossible d'après ce qu'on vient de voir. \square

Exemple 9.6. — Les matrices $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ engendrent un sous-groupe libre de rang 2 dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. En effet, posons

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \Gamma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n \mid n \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |y|\} \quad \text{et} \quad X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |y|\}.$$

Considérons γ un élément de $\Gamma_1 \setminus \{\mathrm{id}\}$ et (x, y) un élément de X_2 , on remarque alors que $\gamma(x, y)$ est de la forme $(x + my, y)$, avec $|m| \geq 2$; par suite $\gamma(x, y)$ appartient à X_1 . De même si γ appartient à $\Gamma_2 \setminus \{\mathrm{id}\}$ et (x, y) à X_1 , l'image de (x, y) par γ est dans X_2 . D'après le lemme 9.5 on a

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \simeq F_2 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \Gamma_1 * \Gamma_2.$$

De la même manière on obtient que

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

engendrent un groupe libre de rang 2 dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ pour tout $k \geq 2$. Par contre ce n'est pas le cas pour $k = 1$, les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

engendrent $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Exemple 9.7. — Deux matrices prises au hasard dans $\mathrm{SL}_\nu(\mathbb{C})$, où ν désigne un entier supérieur ou égal à 2, engendrent un groupe libre isomorphe à F_2 . En effet, soit \mathcal{F} le sous-ensemble de $\mathrm{SL}_\nu(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_\nu(\mathbb{C})$ défini par

$$\mathcal{F} = \{(A, B) \in \mathrm{SL}_\nu(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_\nu(\mathbb{C}) \mid \langle A, B \rangle \simeq F_2\}.$$

Le complémentaire $\mathcal{C}\mathcal{F}$ de \mathcal{F} est une réunion dénombrable de sous-variétés algébriques : à tout mot $m = a^{n_1} b^{\ell_1} \dots a^{n_k} b^{\ell_k}$ réduit non trivial dans F_2 , on peut associer la sous-variété V_m d'équation $A^{n_1} B^{\ell_1} \dots A^{n_k} B^{\ell_k} = \mathrm{id}$. Le sous-ensemble \mathcal{F} n'est pas vide : il contient

$$(A, B) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Ainsi $\mathcal{C}\mathcal{F}$ est une union dénombrable d'ensembles algébriques de codimension ≥ 1 strictement incluse dans $\mathrm{SL}_\nu(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_\nu(\mathbb{C})$; la mesure de Lebesgue

de $\mathbb{C}\mathcal{F}$ est donc nulle. Autrement dit deux matrices prises au hasard dans $SL_\nu(\mathbb{C})$ engendrent un groupe libre.

La stratégie de Cantat pour établir le théorème 9.3 est la suivante. On peut étudier certaines propriétés d'une transformation birationnelle en considérant son action sur la cohomologie $H^2(X, \mathbb{R})$ où X désigne un modèle birationnel adéquat du plan projectif complexe. Le choix d'un tel modèle n'étant pas unique, Manin a introduit, dans [60], l'espace \mathbb{H}^∞ de toutes les classes de cohomologie de tous les modèles birationnels de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Le groupe de Cremona agit isométriquement sur cet espace de dimension infinie, $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ se plonge donc dans le groupe des isométries de \mathbb{H}^∞ . L'espace \mathbb{H}^∞ est hyperbolique au sens de Gromov ; Cantat peut alors utiliser, entre autres, un « argument de ping-pong ».

10. Automorphismes sur les surfaces rationnelles

Une surface compacte projective admettant un automorphisme d'entropie positive est ou bien un tore, ou bien une surface K3⁽⁷⁾, ou bien une surface rationnelle ([19]). Pour l'étude des automorphismes sur les surfaces K3 on renvoie à [20]. Il semble que les surfaces rationnelles possédant des automorphismes d'entropie positive soient relativement rares : les premières familles infinies de tels automorphismes sont connues depuis peu ([6, 7, 61]). Néanmoins c'est sur les surfaces rationnelles que les automorphismes d'entropie positive sont les plus abondants au sens où elles possèdent des familles de dimension arbitrairement grande ([8]). Les travaux cités se concentrent sur les surfaces obtenues en éclatant $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$; ceci est justifié par le théorème suivant de Nagata : soient S une surface rationnelle et f un automorphisme sur S tel que f_* soit d'ordre infini. Il existe une suite finie d'éclatements $\pi_{j+1} : S_{j+1} \rightarrow S_j$ telle que

$$S_1 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad S_{N+1} = S, \quad \pi_{j+1} \text{ éclatement de } p_j \in S_j.$$

Néanmoins une surface obtenue à partir de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ après une suite générique d'éclatements n'a pas d'automorphisme non trivial ([55]). La classification des automorphismes sur les surfaces rationnelles est un problème ouvert.

7. Une *surface K3* est une surface S complexe, compacte, simplement connexe, à fibré canonique trivial. En particulier il existe une 2-forme holomorphe ω sur S qui ne s'annule pas ; ω est unique à multiplication près par un scalaire non nul. Toute surface quartique lisse dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ est une surface K3. Tout revêtement double de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ramifié le long de courbes sextiques lisses est une surface K3.

Rappelons que $\text{Pic}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}$. Soient $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ l'éclatement d'un point p de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et E le diviseur exceptionnel. Les fonctions rationnelles sur S sont par définition les tirés en arrière par π des fonctions rationnelles sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Par suite $\text{Pic}(S)$ est engendré par E et le tiré en arrière d'une droite L de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Plus généralement on a l'énoncé suivant.

THÉORÈME 10.1. — *Soient p_1, \dots, p_N des points distincts de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Notons $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ la suite d'éclatements des p_i . Si $E_j = \pi^{-1}p_j$ désignent les fibres exceptionnelles et L une droite générique de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, alors*

$$\text{Pic}(S) = \mathbb{Z}E_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}E_N \oplus \mathbb{Z}\pi^*L.$$

Exemple 10.2. — Reprenons l'exemple 3.2 ainsi que les notations introduites. On va déterminer l'action de $\tau_{\mathcal{X}_3}^*$ sur $\text{Pic}(\mathcal{X}_3)$ dont une base est, d'après le théorème précédent, $\{L, E_1, E_2, E_3\}$. On a vu déjà vu que

$$E_1 \rightarrow E_1, \quad E_2 \rightarrow E_2, \quad E_3 \rightarrow \Theta = \{x = 0\}.$$

On remarque que $L = \Theta$ est un élément de $\text{Pic}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Après le premier éclatement on a $L = \Theta + E_1 \in \text{Pic}(\mathcal{X}_1)$. Le centre du second éclatement est $\Theta \cap E_1 \in \mathcal{X}_1$ ainsi, par tiré en arrière, on obtient deux copies de E_2 d'où $L = \Theta + E_1 + 2E_2 \in \text{Pic}(\mathcal{X}_2)$. Enfin, on éclate un point de $E_2 \setminus (\Theta \cup E_1)$; par suite

$$L = \Theta + E_1 + 2E_2 + 2E_3 \in \text{Pic}(\mathcal{X}_3).$$

Maintenant considérons $L = \{a_0x + a_1y + a_2z = 0\}$; on constate que $\tau^*L = \{a_0x^2 + a_1xy + a_2(-xz + y^2) = 0\}$ qui est de degré 2. Il en résulte que $\tau^*L = 2L - \sum m_j E_j$. Déterminons les m_j . Pour m_1 on tire en arrière $\ell = a_0x + a_1y + a_2z$ par $\tau\pi_1$; on trouve $a_0\xi^2s^2 + a_1\xi s^2 + a_2(-\xi s + s^2)$ qui s'annule à l'ordre 1 sur $E_1 = \{s = 0\}$ d'où $m_1 = 1$. Un calcul montre que $\ell\tau\pi_1\pi_2$ (resp. $\ell\tau\pi_1\pi_2\pi_3$) s'annule à l'ordre 2 (resp. 3) sur $E_2 = \{u = 0\}$ (resp. E_3); autrement dit $m_2 = 2$ et $m_3 = 3$.

Il en résulte que

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L - E_1 - 2E_2 - 3E_3, \\ E_1 &\rightarrow E_1, \quad E_2 \rightarrow E_2, \\ E_3 &\rightarrow \Theta = L - E_1 - 2E_2 - 2E_3; \end{aligned}$$

autrement dit $\tau_{\mathcal{X}_3}^*$ est donné par
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Soient S une surface obtenue en éclatant $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en un nombre fini de points et f un automorphisme sur S ; on a

$$H^*(S; \mathbb{C}) = H^0(S; \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}(S; \mathbb{C}) \oplus H^4(S; \mathbb{C}).$$

L'application f^* agit sur chacun des facteurs. La dimension de H^0 est le nombre de composantes connexes, ici 1, et $f^*_{|H^0(S; \mathbb{C})} = \text{id}$. On a $H^4(S; \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ et $f^*_{|H^4(S; \mathbb{C})}$ est la multiplication par $\text{deg } f = 1$. Ainsi si S est obtenue en éclatant $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ un nombre fini de fois et si f est un automorphisme de S , alors

$$\text{Per}_n = 2 + \text{trace}(f^*_{|H^{1,1}})^n$$

où Per_n désigne le nombre de points périodiques de période n comptés avec multiplicité.

Une variété kählérienne M est une variété hermitienne M (*i.e.* une variété complexe munie d'une métrique hermitienne h) telle que la 2-forme $\omega = -\text{im } h$ soit fermée.

Exemple 10.3. —

- Puisque toute sous-variété d'une variété kählérienne est kählérienne et que la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est kählérienne toute variété algébrique projective est kählérienne.
- Soit Λ un réseau dans \mathbb{C}^n ; le tore \mathbb{C}^n/Λ est une variété kählérienne.
- Toute surface de Riemann est une variété kählérienne.

THÉORÈME 10.4 ([37]). — *Soit f un automorphisme sur une surface kählérienne tel que $\lambda(f) > 1$. Alors $\lambda(f)$ est une valeur propre de f^* avec multiplicité 1 et c'est l'unique valeur propre de module strictement supérieur à 1.*

Si η est une valeur propre de f^ soit η vaut $\lambda(f)$ ou $1/\lambda(f)$, soit $|\eta| = 1$. De plus $\lambda(f)$ est un nombre de Salem.*

À partir d'une transformation birationnelle f sur le plan projectif complexe; peut-on trouver une suite d'éclatements $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ telle que l'application induite $f_{\mathcal{X}}$ soit un automorphisme? Si f n'est pas un automorphisme il existe une courbe \mathcal{C} contractée sur un point p_1 ; la première étape consiste à éclater le point p_1 via $\pi_1: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Il se peut que tout se passe pour le mieux et que l'application induite $f_{\mathcal{X}_1}$ ne contracte pas \mathcal{C} sur un point mais l'envoie sur E_1 ; mais si p_1 n'est pas d'indétermination alors $f_{\mathcal{X}_1}$ contracte E_1 sur $p_2 = f(p_1)$. . . Ainsi cette procédure qui consiste à éclater un nombre fini de points ne porte pas ses fruits si f n'est pas algébriquement stable.

Considérons par exemple la famille de transformations birationnelles étudiée dans [7] donnée par

$$f: \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (x(bx + y) : z(bx + y) : x(ax + z)).$$

La transformation f contracte trois droites : $\Theta_0 = \{x = 0\}$, $\Theta_\beta = \{y + bx = 0\}$ et $\Theta_\gamma = \{ax + z = 0\}$ sur respectivement $p_1 = (0 : 1 : 0)$, $p_2 = (0 : 0 : 1)$ et $q = (1 : -a : 0)$. Les points d'indétermination sont p_2 , p_1 et $m = (1 : -b : -a)$ qui sont respectivement éclatés sur Θ_0 , Θ_B et Θ_C . Soit $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ l'éclatement de p_1 et p_2 . On peut vérifier que ni Θ_0 , ni Θ_β sont exceptionnels pour f_Y ; plus précisément on a

$$(10.1) \quad \Theta_\beta \rightarrow E_2 \rightarrow \Theta_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \Theta_B = \{z = 0\}.$$

De plus Θ_γ est la seule courbe exceptionnelle et m le seul point d'indétermination de f_Y . Déterminons f_{Y^*} . Une base de $\text{Pic}(Y)$ est $\{L, E_1, E_2\}$. La droite Θ_B contient un seul centre d'éclatement, p_1 , donc $\Theta_B = L - E_1$. De même Θ_0 contenant p_1 et p_2 on a $\Theta_0 = L - E_1 - E_2$. Une droite générique intersecte Θ_0 , Θ_β et Θ_γ ; donc l'image de L par f est une conique passant par l'image de chacune de ces droites à savoir p_1 , p_2 et q . Par suite $f_{Y^*}L = 2L - E_1 - E_2$. À l'aide de (10.1) on obtient que f_{Y^*} est donné

par la matrice $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est

$t^3 - t - 1$. Soient D une droite et $\{D\}$ sa classe dans $\text{Pic}(Y)$. Si $D \cup f_Y D$

ne contient pas m , alors $f_Y^2 D$ est donné par $M^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2L - E_2$,

autrement dit $f_Y^2 D$ est une conique qui intersecte E_2 mais pas E_1 . De même si m n'appartient pas à $D \cup f_Y D \cup f_Y^2 D$ alors $f_Y^3 D$ est une cubique intersectant E_1 et E_2 avec multiplicité 1. Si m n'appartient pas à $D \cup \dots \cup f_Y^{n-1} D$, les itérés de f_Y sont holomorphes au voisinage de D et $(f_Y^*)^n L = \{f_Y^n D\}$. Les paramètres a et b sont génériques si m n'appartient pas à $\bigcup_{j=0}^\infty f_Y^j D$. Pour a, b génériques on a $(f_Y^*)^n = (f_Y^n)^*$ et $\lambda(f_Y)$ est la plus grande racine en module du polynôme $t^3 - t - 1$. Soit \mathcal{V}_n le sous-ensemble de \mathbb{C}^2 défini par

$$\mathcal{V}_n = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid f_Y^j(q) \neq m, 0 \leq j < n, f_Y^n q = m\}.$$

Remarquons que si le couple (a, b) n'appartient pas à \mathcal{V}_n alors $\lambda(f_Y)$ est la plus grande racine en valeur absolue de $t^3 - t - 1$ dont on remarque qu'elle n'est pas un nombre de Salem. Il s'en suit que f_Y n'est pas un automorphisme modulo une suite finie d'éclatements. Réciproquement supposons que (a, b) soit dans \mathcal{V}_n ; notons Z la surface obtenue en éclatant les points

$q, f_Y(q), \dots, f_Y^n(q) = m$. On peut montrer que la transformation induite f_Z est alors un automorphisme. Ainsi f est un automorphisme sur un modèle birationnel à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ si et seulement si (a, b) appartient à \mathcal{V}_n . En étudiant f_{Z^*} on obtient que si (a, b) appartient à \mathcal{V}_n le polynôme caractéristique de la matrice de f_{Z^*} est $x^{n+1}(x^3 - x - 1) + x^3 + x^2 - 1$. Le premier degré dynamique de f est la plus grande racine en valeur absolue de ce polynôme; il est strictement supérieur à 1 dès que $n \geq 7$. Dans l'esprit de [38] Bedford et Kim étudient les courbes invariantes par f ainsi que la dynamique de f (voir [7]).

Après soumission de l'article, Cantat et Lamy ont annoncé dans [24] la non simplicité du groupe de Cremona.

11. Le groupe de Cremona est-il simple ?

Rappelons qu'un groupe est simple s'il ne possède pas de sous-groupe distingué non trivial. Commençons par remarquer que $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ n'est pas simple; soit ϕ le morphisme de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ dans \mathbb{C}^* qui à f associe $\det \text{jac } f$. Le noyau de ϕ est un sous-groupe normal propre de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. Dans les années 1970, Danilov établit que $\ker \phi$ n'est pas simple ([28]). À l'aide de résultats de Schupp sur la théorie des petites simplifications ([71]) il montre que le sous-groupe normal⁽⁸⁾ engendré par l'automorphisme

$$(ea)^{13}, \quad a = (y, -x), \quad e = (x, y + 3x^5 - 5x^4)$$

est strictement contenu dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$.

Plus récemment Furter et Lamy ont donné un énoncé un peu plus précis que celui de Danilov. Avant de l'énoncer introduisons une longueur $\ell(\cdot)$ pour les éléments de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$.

- Si f appartient à $\mathbf{A} \cap \mathbf{E}$, alors $\ell(f) = 0$;
- sinon $\ell(f)$ est l'entier minimal n pour lequel f s'écrit $g_1 \dots g_n$ avec g_i dans \mathbf{A} ou \mathbf{E} .

L'élément exhibé par Danilov est de longueur 26.

On note que $\ell(\cdot)$ est invariant par conjugaison intérieure, on peut donc supposer f de longueur minimale dans sa classe de conjugaison.

THÉORÈME 11.1 ([43]). — *Soit f un élément de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de déterminant jacobien 1. Supposons que f soit de longueur minimale dans sa classe de conjugaison.*

8. Soient G un groupe et f un élément de G ; le sous-groupe normal engendré par f dans G est $\langle hfh^{-1} \mid h \in G \rangle$.

- Si f est non trivial et $\ell(f) \leq 8$, le sous-groupe normal engendré par f coïncide avec le groupe des automorphismes polynomiaux du plan de déterminant jacobien 1 ;
- si f est générique⁽⁹⁾ et $\ell(f) \geq 14$, le sous-groupe normal engendré par f est strictement contenu dans le sous-groupe de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ formé des éléments de déterminant jacobien 1.

Le groupe de Cremona est-il simple ? Cette question a été abordée dans [47, 27] mais reste ouverte.

Remerciements

Je tiens à remercier Zindine Djadli pour m'avoir demandé avec enthousiasme d'écrire ce texte et de m'avoir permis de le faire sans contrainte. Merci à Dominique Cerveau pour nos conversations mathématiques aussi fréquentes qu'enrichissantes et pour ses nombreuses remarques. Je remercie Serge Cantat pour ses commentaires et pour m'avoir signalé comment améliorer ([32], lemme 2.1) pour obtenir le lemme 6.5 et Jérémy Blanc pour ses multiples remarques et suggestions. Merci à Julien Grivaux pour m'avoir aidée à éclaircir un paragraphe. Enfin merci à Igor Dolgachev pour m'avoir signaler les références [47, 45].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Alberich-Carramiñana, *Plane Cremona maps, exceptional curves and roots*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), no. 5, 1901–1914 (electronic). MR MR2115081 (2006m :14014)
- [2] L. Bayle and A. Beauville, *Birational involutions of \mathbf{P}^2* , Asian J. Math. **4** (2000), no. 1, 11–17, Kodaira's issue. MR MR1802909 (2001k :14033)
- [3] A. Beauville, *Surfaces algébriques complexes*, Société Mathématique de France, Paris, 1978, Avec une sommaire en anglais, Astérisque, No. 54. MR MR0485887 (58 #5686)
- [4] ———, *p -elementary subgroups of the Cremona group*, J. Algebra **314** (2007), no. 2, 553–564. MR MR2344578
- [5] A. Beauville and J. Blanc, *On Cremona transformations of prime order*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **339** (2004), no. 4, 257–259. MR MR2092009 (2005d :14021)
- [6] E. Bedford and K. Kim, *Periodicities in linear fractional recurrences : degree growth of birational surface maps*, Michigan Math. J. **54** (2006), no. 3, 647–670. MR MR2280499 (2008k :32054)
- [7] ———, *Dynamics of rational surface automorphisms : linear fractional recurrences*, J. Geom. Anal. **19** (2009), no. 3, 553–583. MR MR2496566

9. On renvoie à [43] pour plus de détail.

- [8] ———, *Continuous families of rational surface automorphisms with positive entropy*, *Math. Ann.* **348** (2010), no. 3, 667–688.
- [9] E. Bertini, *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*, *Annali di Mat.* **8** (1877), 244–286.
- [10] G. Birkhoff, *Lie groups simply isomorphic with no linear group*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **42** (1936), no. 12, 883–888. MR MR1563459
- [11] J. Blanc, *The number of conjugacy classes of elements of the Cremona group of some given finite order*, *Bull. Soc. Math. France* **135** (2007), no. 3, 419–434. MR MR2430188
- [12] ———, *Elements and cyclic subgroups of finite order of the Cremona group*, [arXiv:0809.4673](https://arxiv.org/abs/0809.4673), 2008.
- [13] ———, *On the inertia group of elliptic curves in the Cremona group of the plane*, *Michigan Math. J.* **56** (2008), no. 2, 315–330.
- [14] ———, *Linearisation of finite abelian subgroups of the Cremona group of the plane*, *Groups Geom. Dyn.* **3** (2009), no. 2, 215–266.
- [15] J. Blanc, I. Pan, and T. Vust, *Sur un théorème de Castelnuovo*, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **39** (2008), no. 1, 61–80.
- [16] M. Brunella, *Birational geometry of foliations*, *Publicações Matemáticas do IMPA.*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2004. MR MR2114696 (2005k :32037)
- [17] A. Campillo and J. Olivares, *Assigned base conditions and geometry of foliations on the projective plane*, *Singularities—Sapporo 1998*, *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 29, Kinokuniya, Tokyo, 2000, pp. 97–113. MR MR1819632 (2002g :32037)
- [18] S. Cantat, *Dynamique des automorphismes des surfaces complexes compactes*, Master’s thesis, École normale supérieure de Lyon, 1999.
- [19] ———, *Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **328** (1999), no. 10, 901–906. MR MR1689873 (2000c :32061)
- [20] ———, *Dynamique des automorphismes des surfaces $K3$* , *Acta Math.* **187** (2001), no. 1, 1–57. MR MR1864630 (2003h :32026)
- [21] ———, *Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces*, preprint, 2006.
- [22] S. Cantat and C. Favre, *Symétries birationnelles des surfaces feuilletées*, *J. Reine Angew. Math.* **561** (2003), 199–235. MR MR1998612 (2004i :32048)
- [23] S. Cantat and S. Lamy, *Groupes d’automorphismes polynomiaux du plan*, *Geom. Dedicata* **123** (2006), 201–221. MR MR2299735 (2007m :14089)
- [24] ———, *Normal subgroups in the Cremona group*, [arXiv:1007.0895](https://arxiv.org/abs/1007.0895), 2010.
- [25] G. Castelnuovo, *Sulle trasformazioni cremoniane del piano, che ammettono una curva fiera*, *Rend. Accad. Lincei*, 1892.
- [26] ———, *Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano*, *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino* **36** (1901), 861–874.
- [27] D. Cerveau and J. Déserti, *Transformations birationnelles de petit degré*, [arXiv:0811.2325](https://arxiv.org/abs/0811.2325), *Accepté pour publication*, 2008.
- [28] V. I. Danilov, *Non-simplicity of the group of unimodular automorphisms of an affine plane*, *Mat. Zametki* **15** (1974), 289–293. MR MR0357626 (50 #10094)
- [29] T. de Fernex, *On planar Cremona maps of prime order*, *Nagoya Math. J.* **174** (2004), 1–28. MR MR2066103 (2005h :14032)

- [30] J. Déserti, *Groupe de Cremona et dynamique complexe : une approche de la conjecture de Zimmer*, Int. Math. Res. Not. (2006), Art. ID 71701, 27. MR MR2233717 (2007d :22013)
- [31] ———, *Sur le groupe des automorphismes polynomiaux du plan affine*, J. Algebra **297** (2006), no. 2, 584–599. MR MR2209276 (2006k :14121)
- [32] ———, *Sur les automorphismes du groupe de Cremona*, Compos. Math. **142** (2006), no. 6, 1459–1478.
- [33] ———, *Le groupe de Cremona est hopfien*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **344** (2007), no. 3, 153–156. MR MR2292279
- [34] ———, *Sur les sous-groupes nilpotents du groupe de Cremona*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **38** (2007), no. 3, 377–388. MR MR2344204
- [35] ———, *Expériences sur certaines transformations birationnelles quadratiques*, Nonlinearity **21** (2008), no. 6, 1367–1383.
- [36] J. A. Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Troisième édition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 5. MR MR0310083 (46 #9186)
- [37] J. Diller and C. Favre, *Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces*, Amer. J. Math. **123** (2001), no. 6, 1135–1169. MR MR1867314 (2002k :32028)
- [38] J. Diller, D. Jackson, and A. Sommese, *Invariant curves for birational surface maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 6, 2793–2991 (electronic). MR MR2286065
- [39] I. V. Dolgachev and V. A. Iskovskikh, *Finite subgroups of the plane Cremona group*, Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, Progr. Math., vol. 269, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009, pp. 443–548. MR 2641179
- [40] C. Favre, *Le groupe de Cremona et ses sous-groupes de type fini*, À paraître dans Séminaire Bourbaki. Vol. 2008/2009, Exp. No. 998.
- [41] G. Fischer, *Complex analytic geometry*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 538, Springer-Verlag, Berlin, 1976. MR MR0430286 (55 #3291)
- [42] S. Friedland and J. Milnor, *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms*, Ergodic Theory Dynam. Systems **9** (1989), no. 1, 67–99. MR MR991490 (90f :58163)
- [43] J.-P. Furter and S. Lamy, *Normal subgroup generated by a plane polynomial automorphism*, preprint, 2009.
- [44] É. Ghys, *Groups acting on the circle*, Enseign. Math. (2) **47** (2001), no. 3–4, 329–407. MR MR1876932 (2003a :37032)
- [45] M. Gizatullin, *On some tensor representations of the Cremona group of the projective plane*, New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 264, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, pp. 111–150. MR MR1714823 (2000i :14018)
- [46] M. H. Gizatullin, *Rational G -surfaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **44** (1980), no. 1, 110–144, 239. MR MR563788 (81d :14020)
- [47] ———, *The decomposition, inertia and ramification groups in birational geometry*, Algebraic geometry and its applications (Yaroslavl', 1992), Aspects Math., E25, Vieweg, Braunschweig, 1994, pp. 39–45. MR MR1282018 (95d :14018)
- [48] M. Kh. Gizatullin, *Defining relations for the Cremona group of the plane*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 5, 909–970, 1134. MR MR675525 (84e :14010)
- [49] X. Gómez-Mont and G. Kempf, *Stability of meromorphic vector fields in projective spaces*, Comment. Math. Helv. **64** (1989), no. 3, 462–473. MR MR998859 (90d :14012)

- [50] M. J. Greenberg, *Euclidean and non-Euclidean geometries*, third ed., W. H. Freeman and Company, New York, 1993, Development and history. MR MR1261866 (94k :51001)
- [51] V. A. Iskovskikh, *Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields*, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43** (1979), no. 1, 19–43, 237. MR MR525940 (80m :14021)
- [52] ———, *Proof of a theorem on relations in the two-dimensional Cremona group*, *Uspekhi Mat. Nauk* **40** (1985), no. 5(245), 255–256. MR MR810819 (87d :14007)
- [53] H. W. E. Jung, *Über ganze birationale Transformationen der Ebene*, *J. Reine Angew. Math.* **184** (1942), 161–174.
- [54] S. Kantor, *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene*, Mayer & Müller, Berlin, 1895.
- [55] M. Koitabashi, *Automorphism groups of generic rational surfaces*, *J. Algebra* **116** (1988), no. 1, 130–142. MR MR944150 (89f :14045)
- [56] J. Kollár and F. Mangolte, *Cremona transformations and diffeomorphisms of surfaces*, [arXiv:0809.3720](https://arxiv.org/abs/0809.3720), 2008.
- [57] S. Lamy, *L’alternative de Tits pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$* , *J. Algebra* **239** (2001), no. 2, 413–437. MR MR1832900 (2002d :14102)
- [58] S Lamy, *Une preuve géométrique du théorème de Jung*, *Enseign. Math. (2)* **48** (2002), no. 3-4, 291–315. MR MR1955604 (2003m :14099)
- [59] Ju. I. Manin, *Rational surfaces over perfect fields. II*, *Mat. Sb. (N.S.)* **72** (114) (1967), 161–192. MR MR0225781 (37 #1374)
- [60] Yu. I. Manin, *Cubic forms*, second ed., North-Holland Mathematical Library, vol. 4, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986, Algebra, geometry, arithmetic, Translated from the Russian by M. Hazewinkel. MR MR833513 (87d :11037)
- [61] C. T. McMullen, *Dynamics on blowups of the projective plane*, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2007), no. 105, 49–89. MR MR2354205 (2008m :37076)
- [62] M. McQuillan, *Diophantine approximations and foliations*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1998), no. 87, 121–174. MR MR1659270 (99m :32028)
- [63] L. G. Mendes, *Kodaira dimension of holomorphic singular foliations*, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **31** (2000), no. 2, 127–143. MR MR1785264 (2001i :14015)
- [64] M. Noether, *Ueber die auf Ebenen eindeutig abbildbaren algebraischen Flächen*, *Göttigen Nachr.* (1869), 1–6.
- [65] ———, *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, *Math. Ann.* **3**(2) (1870), 161–227.
- [66] ———, *Zur Theorie der eindentigen Ebenentransformationen*, *Math. Ann.* **5**(4) (1872), 635–639.
- [67] I. Pan, *Une remarque sur la génération du groupe de Cremona*, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **30** (1999), no. 1, 95–98. MR MR1686984 (2000b :14015)
- [68] ———, *Sur le sous-groupe de décomposition d’une courbe irrationnelle dans le groupe de Cremona du plan*, *Michigan Math. J.* **55** (2007), no. 2, 285–298. MR MR2369937
- [69] F. Ronga and T. Vust, *Birational diffeomorphisms of the real projective plane*, *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), no. 3, 517–540. MR MR2165201 (2006f :14012)
- [70] K. Saito, *On a generalization of de-Rham lemma*, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **26** (1976), no. 2, vii, 165–170. MR MR0413155 (54 #1276)
- [71] P. E. Schupp, *Small cancellation theory over free products with amalgamation*, *Math. Ann.* **193** (1971), 255–264. MR MR0291298 (45 #392)

- [72] J. G. Semple and L. Roth, *Introduction to algebraic geometry*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1985, Reprint of the 1949 original. MR MR814690 (86m :14001)
- [73] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2* , Société Mathématique de France, Paris, 1977, Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46. MR MR0476875 (57 #16426)
- [74] R. Steinberg, *Some consequences of the elementary relations in SL_n* , Finite groups—coming of age (Montreal, Que., 1982), Contemp. Math., vol. 45, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985, pp. 335–350. MR MR822247 (87k :11046)
- [75] J. Tits, *Free subgroups in linear groups*, J. Algebra **20** (1972), 250–270. MR MR0286898 (44 #4105)
- [76] A. Wiman, *Zur theorie der endlichen gruppen von birationalen transformationen in der ebene*, Math. Ann. **48** (1896), 195–240.
- [77] D. Wright, *Two-dimensional Cremona groups acting on simplicial complexes*, Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992), no. 1, 281–300. MR MR1038019 (92g :14008)
- [78] R. J. Zimmer, *Actions of semisimple groups and discrete subgroups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986) (Providence, RI), Amer. Math. Soc., 1987, pp. 1247–1258. MR MR934329 (89j :22024)

Julie DÉSERTI
Université Paris 7
École Institut de Mathématiques de Jussieu
UMR CNRS 7586
Projet Géométrie et Dynamique
Site Chevaleret
Case 7012
75205 Paris cedex 13 (France)
deserti@math.jussieu.fr
<http://people.math.jussieu.fr/~deserti/>