Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de

Théorie spectrale et géométrie

Yuxin GE

Problèmes de Yamabe généralisés et ses applications

Volume 25 (2006-2007), p. 211-226.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2006-2007__25__211_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume 25 (2006-2007) 211-226

PROBLÈMES DE YAMABE GÉNÉRALISÉS ET SES APPLICATIONS

Yuxin Ge

RÉSUMÉ. — On étudie quelques équations complètement non linéaires issues de la géométrie conforme. Par une méthode de flot géométrique, on prouve l'existence des solutions. En utilisant ce résultat analytique, on obtient un théorème sur la topologie de la variété : soit M une variété riemannienne compacte de dimension 3. S'il existe une metrique g à courbure scalaire strictement positive telle que l'intégrale de la σ_2-courbure scalaire soit positive, alors M est difféomorphe à un quotient de la sphere.

1. Introduction

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord. On note $[g]$ la classe conforme, Ric_g le tenseur de Ricci et R_g la courbure scalaire de la métrique g. Le tenseur de Schouten est défini par

$$S_g = \frac{1}{n-2}\left(Ric_g - \frac{R_g}{2(n-1)}g\right).$$

Il joue un rôle central en géométrie conforme. Plus précisement, on peut décomposer le tenseur de courbure de Riemann comme suit :

$$Riem_g = W_g + S_g \owedge g,$$

où $\owedge$ est le produit de Kulkani-Nomizu. Note que $g^{-1}\cdot W_g$ est invariant dans une classe conforme donnée. Par conséquent, toutes informations concernant cette classe conforme se trouvent dans le tenseur de Schouten.

Si A est une matrice symétrique réelle carrée d'ordre n, on définit $\sigma_k(A)$ la k-ième fonction symétrique élémentaire des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ de A. Le cône de Garding est défini par

$$\Gamma_k^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, \sigma_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) > 0, \forall j \leqslant k\}.$$

La σ_k-courbure scalaire $\sigma_k(g)$ est définie comme étant égale à la k-ième fonction symétrique des valeurs propres de S_g, calculées par rapport à la métrique g, i.e. $\sigma_k(g) := \sigma_k(g^{-1} \cdot S_g)$, où $g^{-1} \cdot S_g$ est la matrice dont les composantes sont données par $(g^{-1} \cdot S_g)^i_j = \sum_k g^{ik}(S_g)_{kj}$. Une métrique g sera dite k-admissible, et on notera $g \in \Gamma_k^+$, si $g^{-1} \cdot S_g \in \Gamma_k^+$ en tout point $x \in M$. Il est claire que $\sigma_1(g)$ est justement la courbure scalaire usuelle R_g à une constante près. Donc la σ_k-courbure scalaire $\sigma_k(g)$, qui a été considérée pour la première fois par Viaclovsky [39], est une généralisation naturelle de la courbure scalaire. Depuis, l'étude du problème de σ_k-Yamabe a attiré beaucoup d'attention.

Le *problème de σ_k-Yamabe* est défini comme suit :
Étant donnée une métrique $g_0 \in \Gamma_k^+$, peut-on trouver une métrique conforme $g \in [g_0] \cap \Gamma_k^+$ telle que

$$\sigma_k(g) = c, \tag{1.1}$$

où c est une constante.

L'équation (1.1) est complètement non-linéaire et invariante par des transformations conformes. De plus, la contrainte $g \in \Gamma_k^+$ garantit qu'elle est elliptique. Malgré sa nature complètement non-linéaire, elle jouit de belles propriétés, par exemple, les estimations locales à priori ont été prouvées dans [19], un théorème de Liouville a été donné dans [31], et il y a également beaucoup d'applications intéressantes, en particulier, celles pour des variétés de dimension 4 [5] [8]. Voir le papier récent de résumé par Viaclovsky [41] et les références le dedans et aussi des notes par Guan [17]. Pour le problème de σ_k-Yamabe, quand $k = 1$, ce problème n'est autre que le fameux problème de Yamabe qui a été résolu par Yamabe [42], Trudinger [38], Aubin [2] et Schoen [34]. Quand $k \neq 1$, ce problème a été introduit par Viaclovsky qui a aussi prouvé l'existence de telles métriques quand $k = n$ [40]. Le cas important de la dimension $n = 4$ et quand $k = 2$ a été résolu par Chang, Gursky et Yang [6] (voir aussi [5] et [24]). Dans le cas des variétés localement conformément plates, Guan et Wang [20] et Li et Li [31] ont démontré l'existence de telles métriques. Quand $k > n/2$, le problème de σ_k-Yamabe a été récemment résolu par Gursky et Viaclovsky [25], [23]. Enfin, lorsque des variétés ne sont pas localement conformément plates et quand $k = 2$, ce problème a été récemment résolu indépendemment par Ge-Wang [13] pour les variétés de la dimension $n > 8$ et par Shen-Trudinger-Wang [36] pour ceux de la dimension $n > 4$.

Dans cet exposé, on va concentrer sur la σ_2-courbure scalaire. Une raison d'étudier la σ_2-courbure scalaire provient du fait que $\sigma_2(g)$ a une structure variationnelle. Ceci est une observation dûe à Viaclovsky [39].

Cette structure variationnelle est essentielle dans l'analyse suivante. Jusqu'à présent, on pourrait traiter une équation plus générale comme

$$\sigma_k(g) = f \tag{1.2}$$

avec la condition $f \geqslant 0$ ou même $f > 0$. Cette contrainte provient du fait que l'on exige l'ellipticité de l'équation. Sous cette hypothèse, on ne pourrait pas traiter la σ_2-courbure scalaire négative (*cf.* le travail de Gursky et Viaclovsky [26] pour des métriques dans Γ^k_-).

Dans cet exposé, au lieu de considérer $\sigma_2(g)$, on étudie une équation

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = f. \tag{1.3}$$

Quand $f > 0$, il a été étudié récemment dans [14] . Voir également [21], [23], [18] et [36]. Un point délicat ici est que l'on pourrait également traiter le cas où la fonction f pour (1.3) est négative.

On divide la présentation en deux parties : dans un premier temps, on donne une description complètre du problème de Yamabe concernant l'équation (1.3), et puis, en utilisant ces résultats analytiques, on essaie de classifier l'ensemble des variétés à courbure scalaire strictement positive. En particulier, un résultat topologique en dimension 3 est obtenu sous une hypothèse de pincement intégral de la σ_2-courbure scalaire. Les résultats présentés ici sont inclus dans un travail collaboré avec C.S. Lin et G. Wang [12].

2. Étude des équations complètement non-linéaires conformes

Dans cette partie, on voudrais esquisser les propriétés analytiques de l'équation (1.3), en particulier ses liens avec de nouveaux invariants conformes. La résolution de l'équation (1.3) est difficile. Comme pour le problème de Yamabe classique, il y a une difficulté connue : la perte de compacité causée par l'invariance conforme. En outre, l'autre difficulté plus dure provient du fait que le problème est complètement non linéaire. Pour affranchir ces difficultés, on a besoin d'étudier des équations perturbées, c'est-à-dire, celles "sous-critiques".

Rappelle que la constante de Yamabe classique est definie par

$$Y_1([g_0]) = \inf_{g\in[g_0]} \frac{\int \sigma_1(g)dvol(g)}{(vol(g))^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Dans cet exposé, on l'appelle la *première constante de Yamabe.* Pour simplifier la notation, on note $\Gamma^+_k \cap [g_0]$ par $\mathcal{C}_k([g_0])$, ou même $\mathcal{C}_k$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Une classe conforme a la première constante de Yamabe strictement positive si et seulement si cette classe contient une métrique à courbure scalaire strictement positive. Cette simple propriété est importante pour étudier des métrique à courbure scalaire strictement positive. En tant qu'une des applications de l'étude sur l'équation (1.3), on va prouver un résultat similaire pour la σ_2-courbure scalaire. Dès alors, on considère la classe conforme $[g_0]$ avec $\mathcal{C}_1 \neq \emptyset$ et dit une métrique à courbure scalaire strictement positive *métrique à cssp*. Étant donnée une classe conforme $[g]$, sous la métrique conforme $g_u = e^{-2u} g_0$, le tenseur de Schouten S_{g_u} peut s'exprimer comme

$$S_{g_u} = \nabla^2 u + du \otimes du - \frac{|\nabla u|^2}{2} g_0 + S_{g_0}$$

En conséquence, on a pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\sigma_k(g_u) = e^{2ku} \sigma_k\Big(\nabla^2 u + du \otimes du - \frac{|\nabla u|^2}{2} g_0 + S_{g_0}\Big).$$

Maintenant on définit une "valeur propre non-linéaire" pour $\sigma_2(g)$, plus précisement, pour un opérateur complètement non-linéair

$$\sigma_2\Big(\nabla^2 u + du \otimes du - \frac{|\nabla u|^2}{2} g_0 + S_{g_0}\Big). \tag{2.1}$$

on définit

$$\lambda(g_0, \sigma_2) = \lambda(M, g_0, \sigma_2) := \begin{cases} \inf_{g \in \mathcal{C}_1([g_0])} \frac{\int \sigma_2(g) dvol(g)}{\int e^{4u} dvol(g)}, & \text{si } n > 4, \\ \int \sigma_2(g) dvol(g), & \text{si } n = 4, \\ \sup_{g \in \mathcal{C}_1([g_0])} \frac{\int \sigma_2(g) dvol(g)}{\int e^{4u} dvol(g)}, & \text{si } n = 3. \end{cases} \tag{2.2}$$

On pourrait également définir une constante similaire $\lambda(g_0, \sigma_k)$ pour σ_k. Quand $k = 1$, on peut vérifier que $\lambda(g_0, \sigma_k)$ n'est autre que la première valeur propre de l'opérateur laplacien conforme. Donc la constante $\lambda(g_0, \sigma_2)$ (invariant conforme) est appelé *valeur propre non-linéaire* de l'opérateur (2.1).

On définit une seconde constante de Yamabe pour une classe conforme d'une métrique donnée à cssp.

$$Y_{2,1}([g_0]) := \begin{cases} \inf_{g \in \mathcal{C}_1([g_0])} \frac{\int \sigma_2(g) dvol(g)}{(\int \sigma_1(g) dvol(g))^{\frac{n-4}{n-2}}}, & \text{si } n > 4, \\ \int \sigma_2(g) dvol(g), & \text{si } n = 4, \\ \sup_{g \in \mathcal{C}_1([g_0])} \int \sigma_2(g) dvol(g) \times \int \sigma_1(g) dvol(g), & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

On insiste ici que le infimum (ou supremum) dans la définition de λ et $Y_{2,1}$ est sur l'ensmble des métriques $\mathcal{C}_1$, mais pas sur $\mathcal{C}_2$. Et il est bien connu que lorsque $n = 4$, $\int_M \sigma_2(g) dvol(g)$ est une constante pour toutes métriques dans la classe conforme donnée.

Maintenant on énonce le premier résultat analytique dans ce texte.

THÉORÈME 2.1 (Ge-Lin-Wang). — *La constante $\lambda(g_0, \sigma_2)$ est atteinte à condition que $\lambda(g_0, \sigma_2) \geqslant 0$. Plus précisement, on a*

1) *Suppose $n \geqslant 3$. Si $\lambda(g_0, \sigma_2) > 0$, alors $\mathcal{C}_2([g_0])$ n'est pas vide et $\lambda(g_0, \sigma_2)$ est réalisé par une métrique régulière $g = e^{-2u} g_0 \in \mathcal{C}_2$ vérifiant*

$$\sigma_2(g) = \lambda e^{4u}. \tag{2.3}$$

2) *Suppose $n \geqslant 4$. Si $\lambda(g_0, \sigma_2) = 0$, alors $\lambda(g_0, \sigma_2) = 0$ est réalisé par une $C^{1,1}$ métrique $g = e^{-2u} g_0 \in \overline{\mathcal{C}_1}$ vérifiant*

$$\sigma_2(g) = 0. \tag{2.4}$$

Ici, $\overline{\mathcal{C}_1}$ est la fermeture de $\mathcal{C}_1$, c'est-à-dire, $\overline{\mathcal{C}_1}$ est l'ensemble des métriques à courbure scalaire positive conformes à la métrique g_0. Soit $\mathcal{S}_n$ l'espace des matrices symétriques réelles carrées d'ordre n. Soit F une fonction régulière sur $\mathcal{S}_n$. En prolongeant F sur l'espace des matrices réelles carrées d'ordre n par $F(A) = F(\frac{1}{2}(A + A^t))$, on considère F comme une fonction à $n \times n$ variables w_{ij} et définit

$$F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial w_{ij}}.$$

La fonction $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ pourrait être considérée comme une fonction sur $\mathcal{S}_n$ comme suit : soit W une matrice symétrique et $\Lambda_W = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ l'ensemble de ses valeurs propres. Alors on définit $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(W) = \frac{\sigma_2(\Lambda_W)}{\sigma_1(\Lambda_W)}$. Soit $\mathcal{R}_1$ le sous ensemble de $\mathcal{S}_n$ constitué par matrices symétriques dont le rang vaut 1.

LEMME 2.2. — *Pour tout $1 < k \leqslant n$ note $F = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k-1}}$. On a*

1) *la matrice $(F^{ij})(W)$ est positive pour tout $W \in \Gamma^+_{k-1}$ et définie positive pour tout $W \in \Gamma^+_{k-1} \backslash \mathcal{R}_1$.*

2) *la fonction F est concave dans le cône Γ^+_{k-1}. Quand $k = 2$, pour tout $W \in \Gamma^+_1$ et pour tout $R = (r_{ij}) \in \mathcal{S}_n$, on a*

$$\sum_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial w_{ij} \partial w_{kl}} \left(\frac{\sigma_2(W)}{\sigma_1(W)} \right) r_{ij} r_{kl} = - \frac{\sum_{ij} (\sigma_1(W) r_{ij} - \sigma_1(R) w_{ij})^2}{\sigma_1^3(W)}. \tag{2.5}$$

Cette observation est essentielle à l'étude de la σ_2-courbure scalaire. Elle signifie que $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ est un opérateur concave, elliptique dégénéré dans Γ^+_1. Ceci permet de considérer une famille des opérateurs perturbés

$$\begin{aligned} F_\nu : \Gamma_1^+ &\to \mathbb{R} \\ W &\mapsto F_\nu(W) = \frac{\sigma_2(W) - \nu}{\sigma_1(W)}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $\nu \in \mathbb{R}^+$ est une constante strictement positive.

Une conséquence directe issue du Lemme 2.2 est la suivante :

Lemme 2.3. — *La matrice $(F_\nu^{ij})(W)$ est définie positive pour tout $W \in \Gamma_1^+$ et la fonction F_ν est strictement concave dans Γ_1^+. De plus, pour tout $W \in \Gamma_1^+$ et pour tout $R = (r_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$*

$$\sum_{ijkl} \frac{\partial^2 F_\nu(W)}{\partial w_{ij} \partial w_{kl}} r_{ij} r_{kl} \leqslant -\frac{2\nu}{\sigma_1^3(W)} \left(\sum_i r_{ii} \right)^2 . \tag{2.7}$$

Le lemme 2.3 signifie que pour toute constante strictement positive $\nu > 0$, l'opérateur F_ν est elliptique et strictement concave.

Le résultat suivant décrit la relation entre le signe des invariants $Y_{2,1}([g_0])$ et celui de $\lambda(g_0, \sigma_2)$.

Lemme 2.4. — *La valeur propre non-linéaire $\lambda(g_0, \sigma_2)$ est un nombre fini. De plus, on a*

(1) *si $n \geqslant 4$, alors $\lambda(g_0, \sigma_2) > 0$ (resp. $= 0$, < 0) si et seulement si $Y_{2,1}([g_0]) > 0$ (resp. $= 0$, < 0) ;*
(2) *si $n = 3$, alors $\lambda(g_0, \sigma_2) > 0$ (resp. $\leqslant 0$) si et seulement si $Y_{2,1}([g_0]) > 0$ (resp. $\leqslant 0$).*

Maintenant, on est prêt à démontrer le théorème 2.1. On commence par l'étude de l'équation suivante

$$F_\nu(g) = \frac{\sigma_2(g) - \nu e^{4u}}{\sigma_1(g)} = c, \tag{2.8}$$

où $g = e^{-2u} g_0$ et $\nu > 0$, c sont des constantes. Pour montrer l'existence des solutions, on fait appel à la méthode de flot de type de Yamabe comme dans [20], [13] et [14].

Pour tout $\nu \in (0, +\infty)$ et pour tout $g = e^{-2u} g_0$, on considère la fonctionnelle d'énergie perturbée suivante

$$\mathcal{E}_\nu(g) := \begin{cases} \dfrac{2}{n-4} \displaystyle\int_M (\sigma_2(g) - \nu e^{4u}) dvol(g), & \text{si } n \neq 4, \\ -\displaystyle\int_0^1 \int_M (\sigma_2(g_t) - 2\nu e^{4tu}) u dvol(g_t) dt, & \text{si } n = 4, \end{cases}$$

où $g_t = e^{-2tu}g_0$. Quand $\nu = 0$, elle a été considérée dans [39], [5] et [3]. Pose

$$\mathcal{F}_1(g) = \int_M \sigma_1(g)dvol(g) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2(g) = \int_M \sigma_2(g)dvol(g)$$

Par la formule variationnelle donnée dans [39], [5] et [3], on a

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_\nu(g) = \int (\sigma_2(g) - \nu e^{4u})g^{-1} \cdot \frac{d}{dt}gdvol(g) \tag{2.9}$$

et

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(g) = \frac{n-2}{2}\int \sigma_1(g)g^{-1} \cdot \frac{d}{dt}gdvol(g). \tag{2.10}$$

Maintenant on introduit un flot géométrique de type de Yamabe, qui fait décroître $\mathcal{E}_\nu$ et conserver $\mathcal{F}_1$ le long du flot

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}g^{-1}\frac{d}{dt}g = e^{-2u}\frac{\sigma_2(g) - \nu e^{4u}}{\sigma_1(g)} - r_\nu(g)e^{-2u} + s_\nu(g), \tag{2.11}$$

où $r_\nu(g)$ et $s_\nu(g)$ sont constantes définies comme suit :

$$r_\nu(g) := \frac{\mathcal{F}_2(g) - \int_M \nu e^{4u}dvol_g}{\mathcal{F}_1(g)} \tag{2.12}$$

et

$$\int_M \sigma_1(g)\left\{e^{-2u}\frac{\sigma_2(g) - \nu e^{4u}}{\sigma_1(g)} - r_\nu(g)e^{-2u} + s_\nu(g)\right\}dvol(g) = 0. \tag{2.13}$$

On va prouver que le flot existe pour tout $t \in (0, +\infty)$ et converge vers une solution de (2.8) à condition que $r_\nu(t) = r_\nu(g(t)) \leqslant 0$. On divide la preuve en plusieurs étapes.

Étape 1. Propriétés élémentaires du flot

Proposition 2.5. — *Le long du flot (2.11) la fonctionnelle $\mathcal{F}_1$ est conservée et celle $\mathcal{E}_\nu$ est décroissante. Par conséquent, lorsque $n \geqslant 4$, alors r_ν est décroissant le long du flot, et en revanche, quand $n = 3$, alors r_ν est croissant.*

Étape 2. Estimations à priori de la norme C^2

Étant donné $\nu > 0$, suppose $g_0 \in \mathcal{C}_1([g_0])$. Par Lemme 2.3, (2.11) est parabolique. Il en résulte du théorème de la fonction implicite que l'on a le résultat d'existence à court terme. Soit $T^* \in (0, \infty]$ tel que $[0, T^*)$ soit l'intervalle maximal pour l'existence du flot $g(t) \in \Gamma_1^+$. On va montrer que la norme C^2 est bornée le long du flot sous l'hypothèse convenable. Plus précisement, on a le résultat suivant.

Proposition 2.6. — *Suppose que $n \geqslant 3$, $\nu > 0$ et $g_0 \in \Gamma_1^+$. Soit u une solution de (2.11) dans une boule géodésique $B_R \times [0, T]$ pour un certain $T < T^*$ et pour un certain $R < \tau_0$, où τ_0 est le rayon d'injectivité de M. Suppose que $\forall t \in [0, T]$, on a toujours*

$$r_\nu(t) \leqslant 0.$$

Alors, il existe une constante C qui ne dépendent que de g_0 (ne pas dépendant de ν) telle que pour tout $t \in [0, T^*)$

$$\|u\|_{C^2(M)} \leqslant C. \tag{2.14}$$

Ici, la preuve est basée sur les estimations locales à priori, qui sont obtenues pour la première fois par Guan-Wang [19] pour des équations complètement non-linéaires issues de la géométrie conforme (Voir également [9] et le papier résumé [41]).

Étape 3. Ellipticité uniforme

Maintenant, étant donné $\nu > 0$, on définit

$$a_\nu := \begin{cases} \inf_{g \in \mathcal{C}_1([g_0])} \dfrac{\mathcal{E}_\nu(g)}{(\int_M \sigma_1(g) dvol(g))^{\frac{n-4}{n-2}}} & \text{si } n \neq 4; \\ \int_M \sigma_2(g) dvol(g) - \nu & \text{si } n = 4; \end{cases} \tag{2.15}$$

Note que si a_ν est réalisé par une métrique $g = e^{-2u} g_0$, alors g satisfait l'équation (2.8). Soit $\nu > 0$ tel que $a_\nu < 0$ si $n \geqslant 4$, ou, $a_\nu > 0$, si $n = 3$. Quand $n \geqslant 5$, sans perte de la généralité, on choisit $g_0 \in \Gamma_1^+$ tels que $\mathcal{E}_\nu(g_0) < 0$ et $\displaystyle\int_M \sigma_1(g_0) dvol(g_0) = 1$. En utilisant la proposition 2.5, on a $r_\nu(g(t)) \leqslant r_\nu(g(0))$, $\forall t \in [0, T^*)$. Si $n = 3$, ou $n = 4$, par les hypothèses, on a toujours $r_\nu(g(t)) < -c < 0$, $\forall t \in [0, T^*)$. Grâce aux résultats dans les étapes pécédentes, la solution u du flot (2.11) a un borne uniform en norme C^2, qui ne dépend pas de t et ni de ν. On prouve que (2.11) est uniformément parabolique le long du flot. Plus précisement, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 2.7. — *Il existe une constante $C_0 > 0$, qui ne dépend pas de $T \in [0, T^*)$ (peut-être dépendant de ν) telle que $\sigma_1(g(t)) > C_0$ pour tout $t \in [0, T]$.*

Étape 4. Existence des solutions minimisantes pour les problèmes perturbés

En vertu des étapes précédentes, le flot est uniformément parabolique et donc existe pour tout $t \in (0, +\infty)$. La théorie de Evans-Krylov implique le borne en norme $C^{2,\alpha}$. On en déduit que $u(t)$ converge vers $u(\infty)$, l'unique solution minimisante de (2.8) vérifiant $\int_M \sigma_1(g) dvol(g) = 1$.

Pour terminer la preuve de la première partie du théorème 2.1, on choisit $\nu > \lambda(g_0, \sigma_2) > 0$. Il y a une unique métrique régulière

$$g_{u_\nu} = e^{-2u_\nu} g_0 \in \mathcal{C}_1([g_0]),$$

qui résoud l'équation (2.8) pour $c = a_\nu$ vérifiant $\int_M \sigma_1(g_{u_\nu}) dvol(g_{u_\nu}) = 1$. En faisant $\nu \to \lambda(g_0, \sigma_2)$, u_ν converge vers la solution voulue de l'équation (2.3).

À l'aide du Theorem 2.1 et des résultats dans [6], [25] et [14], on peut résoudre complètement le problème de Yamabe pour $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$.

THÉORÈME 2.8 (Ge-Lin-Wang). — *Soit (M^n, g_0) une variété Riemannienne compacte avec $g_0 \in \Gamma_1^+$ et $n \geqslant 3$. On a les propriétés suivantes :*

1) *Si $Y_{2,1}([g_0]) > 0$, alors le cône $\mathcal{C}_2([g_0])$ n'est pas vide. De plus il existe une métrique régulière g dans $\mathcal{C}_2$ satisfaisant*

$$\frac{\sigma_2(g)}{\sigma_1(g)} = 1. \tag{2.16}$$

2) *Si $Y_{2,1}([g_0]) = 0$, alors il existe une $C^{1,1}$ métrique $g \in \overline{\mathcal{C}_1}$ satisfaisant*

$$\sigma_2(g) = 0. \tag{2.17}$$

3) *Si $Y_{2,1}([g_0]) < 0$, il existe une métrique régulière g dans $\overline{\mathcal{C}_1}$ satisfaisant*

$$\sigma_2(g) = -\sigma_1(g). \tag{2.18}$$

Remarque 2.9. — Dans le premier cas, on peut définir un autre invariant conforme intégral

$$\tilde{Y}_{2,1}([g_0]) := \begin{cases} \inf_{g\in\mathcal{C}_2([g_0])} \dfrac{\int \sigma_2(g)dvol(g)}{(\int \sigma_1(g)dvol(g))^{\frac{n-4}{n-2}}}, & \text{si } n>4,\\ \int \sigma_2(g)dvol(g), & \text{si } n=4,\\ \sup_{g\in\mathcal{C}_2([g_0])} \int \sigma_2(g)dvol(g)\times \int \sigma_1(g)dvol(g), & \text{si } n=3. \end{cases}$$

Dans [15], on prouve que $\tilde{Y}_{2,1}([g_0]) = Y_{2,1}([g_0])$ à condition que $Y_{2,1}([g_0]) \in (0,+\infty)$

3. Applications géométriques

Il y a des liens étroits entre la topologie des variétés et leur courbure. La première application de la σ_2-courbure scalaire en cette direction est obtenue par Chang-Gursky-Yang [5]. Ils ont montré que pour une variété riemannienne compacte de dimension 4 (M, g_0), si $Y_1([g_0]) > 0$ et $\int |W_{g_0}|^2 < 16\pi^2\chi(M)$ où $\chi(M)$ est le caractéristique d'Euler, alors M est difféomorphe à un quotient de la sphère.

Dans cette partie, on voudrais donner des applications géométriques à l'aide de la σ_2-courbure scalaire, en particulier pour des variétés riemanniennes compactes de dimension 3. D'abord, on donne une conséquence directe du Théorème 2.1.

Théorème 3.1 (Ge-Lin-Wang). — *Soit (M^n, g_0) une variété riemannienne compacte de dimension $n > 2$ avec la constante de Yamabe $Y_1([g_0]) > 0$. Si $Y_{2,1}([g_0]) > 0$, alors il existe une métrique $g \in [g_0]$ telle que $g \in \Gamma_2^+$, c'est-à-dire,*

$$R_g > 0 \text{ et } \sigma_2(g) > 0.$$

De plus, $Y_{2,1}([g_0]) > 0$ si et seulement si le cône $\mathcal{C}_2([g_0])$ n'est pas vide.

Ceci permet de charactériser la sphère en dimension 3 par une condition de pincement intégral sur la σ_2-courbure scalaire.

Théorème 3.2 (Ge-Lin-Wang). — *Soit M^3 une variété riemannienne compacte de dimension 3. S'il existe une métrique g à courbure scalaire strictement positive t.q. $\displaystyle\int \sigma_2(g) \geqslant 0$. Alors M est difféomorphe à un quotient de la sphère.*

Démonstration. — Si $\int \sigma_2(g)dvol(g) = 0$ est une métrique extrémale, alors on a $\sigma_1(g) > 0$ et $\sigma_2(g) = 0$ partout. Sinon, il vient du Théorème 3.1, qu'il existe une métrique $\tilde{g}$ telles que $\sigma_1(\tilde{g}) > 0$ et $\sigma_2(\tilde{g}) > 0$ partout. Sans ambiguïté, on note encore $\tilde{g}$ par g. Par un résultat dû à Gursky-Viaclovsky [22], le tenseur de Ricci de g est définie positif partout. Grâce au résultat de Hamilton [27] en utilisant le flot de Ricci, M est difféomorphe à un quotient de la sphère. □

Il est bien connu que la positivité stricte de la première constante de Yamabe Y_1 soit équivalente à l'existence d'une métrique conforme à la courbure scalaire strictement positive. À l'aide du théorème 2.8, $Y_{2,1}$ a une propriété semblable. Motivé par ce résultat, on espère d'utiliser la σ_2-courbure scalaire pour donner une autre classification des variétés admettant une métrique à courbure scalaire strictement positive. Rappelle d'abord les définitions suivantes.

(1_+) variétés fermées connexes admettant une métrique Riemannienne dont la courbure scalaire est positive et non identiquement égale à 0.

(1_0) variétés fermées connexes admettant une métrique Riemannienne dont la courbure scalaire est positive, mais ne pas appartenant à la classe (1_+).

(1_-) variétés fermées connexes ne pas appartenant à la classe (1_0) et ni à la classe (1_+).

Le résultat suivant remarquable est obtenu par Kazdan et Warner en 1975.

Théorème A (Théorème de Trichotomie — [29], [30]). — *Soit M^n une variété fermée connexe de dimension $n \geqslant 3$.*

1. *Si M appartient à la classe (1_+), alors toute fonction régulière peut être réalisée comme la courbure scalaire d'une métrique Riemannienne sur M.*
2. *Si M appartient à la classe (1_0), alors une fonction régulière peut être réalisée comme la courbure scalaire d'une métrique Riemannienne sur M si et seulement si $f(x) < 0$ en un certain point $x \in M$, ou $f = 0$. Si la courbure scalaire d'une métrique Riemannienne g s'annule partout, alors g est Ricci plat.*
3. *Si M appartient à la classe (1_-), alors une fonction régulière peut être réalisée comme la courbure scalaire d'une métrique Riemannienne sur M si et seulement si $f(x) < 0$ en un certain point $x \in M$.*

L'analyse utilisée dans la preuve du théorème A est basée sur l'étude de la valeur propre pour l'opérateur conforme Laplacien

$$-\Delta u+\frac{n-2}{4(n-1)}R_g u=\lambda u. \tag{3.1}$$

Et cette équation est proche de l'équation de Yamabe

$$-\Delta u+\frac{n-2}{4(n-1)}R_g u=u^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{3.2}$$

À partir du théorème A ou d'un résultat d'Aubin plus tôt dans [1] on sait qu'une fonction négative peut toujours être réalisée comme la courbure scalaire d'une métrique. Voir également les résultats dans [11] et dans [33] pour l'existence de la courbure de Ricci négative. Grâce à un résultat de Futaki [10], la classe (1_0) est très petite et contient peu de variétés. Le théorème A implique également que la classe (1_+) est justement celle des variétés admettant une métrique à courbure scalaire strictement positive. Il y a des obstructions topologiques pour les variétés admettant une métrique à courbure scalaire strictement positive, voir [32] et [28]. Cette classe attire beaucoup d'attention pendant plusieurs années, particulièrement après le travail de Gromov-Lawson[16] et de Schoen-Yau [35]. Le problème le plus important à ce sujet est la conjecture de Gromov-Lawson-Rosenberg qui a été prouvée par Stolz [37] dans le cas simplement connexe.

Maintenant en utilisant la σ_2-courbure scalaire, on veut diviser la classe (1_+) en 3 sous-classes :

- (2_+) variétés fermées connexes admettant une métrique Riemannienne à courbure scalaire strictement positive dont la σ_2-courbure scalaire est positive et non identiquement égale à 0.
- (2_0) variétés fermées connexes admettant une métrique Riemannienne à courbure scalaire strictement positive dont la σ_2-courbure scalaire est positive, mais ne pas appartenant à (2_+).
- (2_-) variétés fermées connexes dans (1_+), mais ne pas appartenant à (2_+) et ni à (2_0).

Vu le résultat analytique sur la σ_2-courbure scalaire dans la partie précédente, on propose la conjecture suivante.

Conjecture (Théorème de Trichotomie). — *Soit M^n $(n>2)$ variété fermée connexe dans la classe (1_+).*

1. *Si M appartient à la classe (2_+), alors pour toute fonction régulière f, il existe une métrique Riemannienne à courbure scalaire strictement positive g telle que $f\sigma_1(g)$ soit sa σ_2-courbure scalaire.*

2. *Si M appartient à la classe (2_0), alors pour toute fonction régulière f, il existe une métrique Riemannienne à courbure scalaire strictement positive g avec $\sigma_2(g) = f\sigma_1(g)$ si et seulement si $f(x) < 0$ en un certain point $x \in M$, ou $f = 0$.*
3. *Si M appartient à la classe (2_-), alors pour toute fonction régulière f, il existe une métrique Riemannienne à courbure scalaire strictement positive g avec $\sigma_2(g) = f\sigma_1(g)$ si et seulement si $f(x) < 0$ en un certain point $x \in M$.*

Malgré que l'on ne sache pas comment prouver cette conjecture pour l'instant, on a quand même les résultats suivants qui pourrait la soutenir.

THÉORÈME 3.3 (Ge-Lin-Wang). — *Toute variété Riemannienne compacte connexe M^n de dimension $n \geqslant 4$ dans la classe (1_+) admet une métrique à courbure scalaire positive telle que la σ_2-courbure scalaire soit négative.*

THÉORÈME 3.4 (Ge-Lin-Wang). — *Soit M^n une variété Riemannienne compacte connexe de dimension $n \geqslant 3$.*

1. *Si M appartient à la classe (2_+), alors pour toute constante b, il existe une métrique Riemannienne $g \in \overline{\mathcal{C}}_1$ telle que $b\sigma_1(g)$ soit sa σ_2-courbure scalaire.*
2. *Si M appartient à la classe (2_0), alors pour toute constante b, il existe une métrique Riemannienne $g \in \overline{\mathcal{C}}_1$ avec $\sigma_2(g) = b\sigma_1(g)$ si et seulement si $b \leqslant 0$.*
3. *Si M appartient à la classe (2_-), alors pour toute constante b, il existe une métrique Riemannienne $g \in \overline{\mathcal{C}}_1$ avec $\sigma_2(g) = b\sigma_1(g)$ si et seulement si $b < 0$.*

La métrique obtenue dans le Théorème 3.4 pourrait avoir des points sur lesquels la courbure scalaire s'annule. En tels points, le tenseur de Ricci s'annule également. Quand $b > 0$, alors la courbure scalaire de la métrique obtenue est strictement positive. Il est claire que la sphère appartient à (2_+). Par le théorème 3.2, en dimension 3, (2_+) se constitue par la sphère et ses quotients et (2_0) est vide. En dimension 4, beaucoup d'exemples des variétés avec une métrique dans Γ_2^+ sont donnés dans [5]. Toutes ces variétés appartiennent à (2_+). D'autant plus, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ appartient à (2_0), c'est-à-dire, il n'y a pas de métriques à courbure scalaire strictement positive sur $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ telle que la σ_2-courbure scalaire soit strictement positive. Comme la classe (1_0), la classe (2_0) devrait être très petite. Cependant, quand $n > 4$, on n'a aucun exemple de variété dans la classe (1_+) qui n'appartient pas à (2_+). C'est un peu étrange. Un candidat possible est la variété $\mathbb{S}^6 \times H^3$, où H^3 est un quotient compact de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$. Il est facile de vérifier que la métrique produite g_P satisfait $\sigma_1(g_p) > 0$ et $\sigma_2(g_p) = 0$. Cependant, on croit que $\mathbb{S}^6 \times H^3$ admet une métrique g avec $\sigma_1(g) > 0$ et $\sigma_2(g) > 0$. Par conséquent on peut demander

Problème : Est-ce qu'il y a une obstruction topologique pour l'existence de métrique à cssp telle que la σ_2-courbure scalaire soit strictement positive ?

Pour la courbure scalaire, il y a des obstructions topologiques. Ce que l'on voudrait, c'est de trouver d'autres conditions pour distinguer les variétés dans (2_+), (2_0) et (2_+) pour les dimensions supérieures. Avec l'analyse présentée ici, ce problème pour trouver une obstruction topologique telle que la σ_2-courbure scalaire soit strictement positive, pourrait être abordable.

Remarque 3.5. — Lorsque l'on a participé à une conférence à Luminy en juin 2007, on a été tenu au courant par P. Yang que Catino et Djadli ont obtenu un résultat similaire que le théorème 3.2. Leur prépublication peut être trouvée maintenant dans [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aubin, Métriques riemanniennes et courbure, J. Differential Geometry **4** (1970), 383–424.

[2] T. Aubin, *Équations différentilles non linéaires et probléme de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl. **55** (1976), 269-296.

[3] S. Brendle and J. Viaclovsky, *A variational characterization for $\sigma_{n/2}$*, Calc. Var. P. D. E. **20** (2004), 399–402.

[4] G. Catino and Z. Djadli, *Integral pinched 3-manifolds are space forms*, ArXiv : **math.DG/07070338**.

[5] A. Chang, M. Gursky and P. Yang, *An equation of Monge-ampère type in conformal geometry, and four manifolds of positive Ricci curvature*, Ann. of Math.,**155** (2002), 709-787.

[6] A. Chang, Gursky and P. Yang, An a priori estimates for a fully nonlinear equation on Four-manifolds, J. D'Analysis Math., **87** (2002), 151–186.

[7] A. Chang, Gursky and P. Yang, *Entire solutions of a fully nonlinear equation,* Lectures on partial differential equations, 43–60, New Stud. Adv. Math., **2**, Int. Press, Somerville, MA, 2003.

[8] A. Chang, Gursky and P. Yang, A conformally invariant sphere theorem in four dimensions, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **98** (2003), 105–143.

[9] S. Chen, *Local estimates for some fully nonlinear elliptic equations,* Int. Math. Res. Not. **2005** (2005), 3403–3425.

[10] A. Futaki, Scalar-flat closed manifolds not admitting positive scalar curvature metrics, Invent. Math., **112** (1993), 23–29.

[11] Z. Gao and S.T. Yau, The existence of negatively Ricci curved metrics on three-manifolds., Invent. Math. , **85** (1986), 637–652.

[12] Y. Ge, C.S.Lin and G. Wang, *On the σ_2-scalar curvature,* prépublication.

[13] Y. Ge and G. Wang, *On a fully nonlinear Yamabe problem,* Ann. Sci. École Norm. Sup., **39** (2006) 569–598.

[14] Y. Ge and G. Wang, *On a quotient conformal equation,* to appear in Int. Math. Res. Not..

[15] Y. Ge and G. Wang, en préparation.

[16] M. Gromov and H. B. Lawson, *The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature,* Ann. of Math. (2) **111** (1980), 423–434.

[17] P. Guan, Topics in Geometric Fully Nonlinear Equations, Lecture Notes, http ://www.math.mcgill.ca/guan/notes.html

[18] P. Guan, C.-S. Lin and G. Wang, *local gradient estimates for conformal quotient equations*, to appear in Int. J. Math.

[19] P. Guan and G. Wang, *Local estimates for a class of fully nonlinear equations arising from conformal geometry*, Intern. Math. Res. Not. , **2003**, (2003), 1413-1432.

[20] P. Guan and G. Wang, *A fully nonlinear conformal flow on locally conformally flat manifolds*, J. reine und angew. Math., **557**, (2003), 219-238.

[21] P. Guan and G. Wang, *Geometric inequalities on locally conformally flat manifolds*, Duke Math. J., **124**, (2004), 177-212.

[22] M. Gursky and J. Viaclovsky, A new variational characterization of three-dimensional space forms. Invent. Math. **145** (2001), no. 2, 251–278.

[23] M. Gursky and J. Viaclovsky, *Volume comparison and the σ_k-Yamabe problem*, Adv. in Math. **187** (2004), 447-487.

[24] M. Gursky and J. Viaclovsky, *A fully nonlinear equation on 4-manifolds with positive scalar curvature*, J. Diff. Geom., **63**, (2003), 131-154.

[25] M. Gursky and J. Viaclovsky, *Prescribing symmetric functions of the eigenvalues of the Ricci tensor*, to appear in Annals Math.

[26] M. Gursky and J. Viaclovsky, Fully nonlinear equations on Riemannian manifolds with negative curvature, Indiana Univ. Math. J., **52** (2003), 399–419.

[27] R. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature. J. Differential Geom. , **17** (1982), 255–306.

[28] N. Hitchin, Harmonic spinors, Adv. Math. ,**14** (1974) 1–55.

[29] J. Kazdan and F. Warner, Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure. J. Differential Geometry, **10** (1975), 113–134.

[30] J. Kazdan and F. Warner, Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures. Ann. of Math. (2) **101** (1975), 317–331.

[31] A. Li and Y. Li, *On some conformally invariant fully nonlinear equations*, Comm. Pure Appl. Math., **56** (2003), 1416–1464.

[32] A. Lichnerowicz, Spineurs harmoniques, C. R. Acad. Sci. Paris, **257** (1963) 7–9.

[33] J. Lohkamp, Metrics of negative Ricci curvature, Ann. of Math. (2) **140** (1994), 655–683.

[34] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant curvature,* J. Diff. Geom., **20** (1984), 479-495.

[35] R. Schoen ans S. T. Yau, On the structure of manifolds with positive scalar curvature. Manuscripta Math. **28** (1979), 159–183.

[36] W.M. Sheng, N.Trudinger, X.-J. Wang *the Yamabe problem for higher order curvatures,* ArXiv : **math.DG/0505463**.

[37] S. Stolz, Simply connected manifolds of positive scalar curvature. Ann. of Math. (2) **136** (1992), 511–540.

[38] N. Trudinger, *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. **17** (1967), 473–483.

[39] J. Viaclovsky, *Conformal geometry, contact geometry and the calculus of variations*, Duke J. Math. **101** (2000), no. 2, 283-316.

[40] J. Viaclovsky, *Estimates and some existence results for some fully nonlinear elliptic equations on Riemannian manifolds*, Comm. Anal. Geom. **10** (2002), 815-847.

[41] J. Viaclovsky Conformal geometry and fully nonlinear equations. Arxiv : **DG/0609158**

[42] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J., **12** (1960), 21–37.

Yuxin Ge
Université Paris XII - Val de Marne
Faculté de Sciences et Technologie
Centre de Mathématiques
61 avenue du Général de Gaulle
94010 Créteil cedex (France)
ge@univ-paris12.fr