

Institut Fourier — Université de Grenoble I

*Actes du séminaire de*  
**Théorie spectrale  
et géométrie**

Cédric VILLANI

**Transport optimal et courbure de Ricci**

Volume 24 (2005-2006), p. 79-100.

<[http://tsg.cedram.org/item?id=TSG\\_2005-2006\\_\\_24\\_\\_79\\_0](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2005-2006__24__79_0)>

© Institut Fourier, 2005-2006, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# TRANSPORT OPTIMAL ET COURBURE DE RICCI

par Cédric Villani

## Résumé

Des liens inattendus ont été récemment mis à jour entre le transport optimal de Monge–Kantorovich et certains problèmes de géométrie riemannienne, en liaison avec la courbure de Ricci. Une des retombées de ces interactions est la naissance d’une théorie « synthétique » des espaces métriques mesurés à courbure de Ricci minorée, venant compléter la théorie classique des espaces métriques à courbure sectionnelle minorée. Dans ce texte (également fourni aux actes du Séminaire d’Équations aux dérivées partielles de l’École polytechnique), je passerai en revue ces développements de manière concise et informelle. Les notes bibliographiques renvoient à des sources plus complètes et précises.

## PROLOGUE : CHANGEMENTS DE VARIABLES MONOTONES

Ce n’est un secret pour personne, les changements de variables, adroitement manipulés, constituent un puissant outil analytique. Les changements de variables *monotones* jouent un rôle crucial dans divers problèmes de nature géométrique. Pour étayer cette assertion, je vais présenter un exemple étudié par Cordero-Erausquin, Maggi, Nazaret et moi-même [12, 19].

Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné Lipschitz, et  $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble mesurable borné. Soient  $F$  une densité de probabilité sur  $\Omega$  et  $G$  une densité de probabilité sur  $\Omega'$ . Soit maintenant  $y = T(x)$  un changement de variables entre la mesure  $F(x) dx$  et la mesure  $G(y) dy$ ; par là j’entends que la *mesure image*  $T_{\#}(F dx)$  de  $F dx$  par  $T$  coïncide avec  $G dy$ . Autrement dit, pour toute fonction continue bornée  $\psi$ ,

$$\int \psi(T(x)) F(x) dx = \int \psi(y) G(y) dy. \quad (1)$$

Je supposerai en outre que  $T$  est **injectif** ( $F(x) dx$ -presque sûrement) et **monotone** au sens suivant :

*En tout  $x \in \Omega$ , la matrice jacobienne  $\nabla T(x)$  a toutes ses valeurs propres positives.*

Ces propriétés entraînent deux conséquences importantes :

– l'équation jacobienne

$$F(x) = G(T(x)) \det(\nabla T(x)) \tag{2}$$

est vérifiée presque partout (même si  $T$  n'est pas lipschitzienne, on peut le montrer avec une version suffisamment forte du théorème de changement de variables ; je passerai sous silence ce détail technique) ;

– la positivité des valeurs propres de  $\nabla T$  implique l'inégalité arithmético-géométrique

$$(\det \nabla T)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\nabla \cdot T}{n}. \tag{3}$$

Voici maintenant un calcul un peu mystérieux. Soient  $p \in [1, n[, p' = p/(p-1)$ ,  $p^* = np/(n-p)$ ,  $p^\sharp = (n-1)p/(n-p)$  ; soit  $\sigma = \sigma(x)$  le vecteur unitaire normal extérieur à  $\Omega$ , défini presque partout sur  $\partial\Omega$  ; soient également  $f = F^{1/p^*}$ ,  $g = G^{1/p^*}$ . On peut alors écrire la chaîne d'inégalités

$$\int_{\Omega'} g^{p^\sharp} = \int_{\Omega} (\det \nabla T)^{1/n} f^{p^\sharp} \tag{4}$$

$$\leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} (\nabla \cdot T) f^{p^\sharp} \tag{5}$$

$$\leq -\frac{p^\sharp}{n} \int_{\Omega} T \cdot f^{p^\sharp-1} \nabla f + \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} (T \cdot \sigma) f^{p^\sharp} \tag{6}$$

$$\leq \frac{p^\sharp}{n} \left( \int_{\Omega} f^{p^*} |T|^{p'} \right)^{1/p'} \left( \int_{\Omega} |\nabla f|^p \right)^{1/p} + \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} f^{p^\sharp} |T| \tag{7}$$

$$\leq \frac{p^\sharp}{n} \left( \int_{\Omega'} g^{p^*}(y) |y|^{p'} dy \right)^{1/p'} \left( \int_{\Omega} |\nabla f|^p \right)^{1/p} + \frac{(\sup_{\Omega'} |y|)}{n} \int_{\partial\Omega} f^{p^\sharp} \tag{8}$$

Quelques explications. L'égalité en (4) est une conséquence de l'équation jacobienne (2) ; l'inégalité entre (4) et (5) découle de l'inégalité arithmético-géométrique (3) ; pour passer de (5) à (6) j'ai effectué une intégration par parties (il y aurait en fait égalité si tout était suffisamment régulier ; laissons encore de côté les détails techniques) ; ensuite (7) a été obtenu par inégalité de Hölder ; et finalement le passage de (7) à (8) découle de la formule de changement de variables (1).

Si  $g$  est fixée, l'inégalité ainsi obtenue est de la forme

$$K \leq C \left( \int_{\Omega} |\nabla f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + C' \int_{\partial\Omega} f^{p^\sharp}, \tag{9}$$

où  $K$ ,  $C$  et  $C'$  sont des constantes positives (dépendant du choix de la fonction  $g$ ), et la seule contrainte sur  $f$ , outre la positivité, est la condition

$\int f^{p^*} = 1$ . Il n'est pas difficile de se débarrasser de la contrainte de positivité et de mettre cette inégalité sous une forme homogène :

$$\left( \int_{\Omega} |f|^{p^*} \right)^{1/p^*} \leq A \left( \int_{\Omega} |\nabla f|^p \right)^{1/p} + C \left( \int_{\partial\Omega} |f|^{p^*} \right)^{1/p^*}, \quad (10)$$

où  $A$  et  $C$  sont de nouvelles constantes positives. Il devient alors clair que nous venons de démontrer une **inégalité de Sobolev à trace** dans l'ouvert  $\Omega$ .

Cette méthode peut paraître grossière, mais elle ne l'est pas du tout. En jouant sur le choix de la fonction  $g$ , on peut obtenir d'excellentes constantes dans l'inégalité (10). Comme il est prouvé dans [19], on peut choisir pour  $A$  la constante optimale dans l'inégalité de Sobolev « classique » posée dans tout l'espace (c'est-à-dire le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ); et pour  $C$  la constante  $|B^n|^{1/p^*} / |S^{n-1}|^{1/p^*}$ . L'inégalité ainsi obtenue contient à la fois l'inégalité optimale de Sobolev dans  $\mathbb{R}^n$ , l'inégalité isopérimétrique classique, et l'inégalité à trace de Brézis–Lieb [4], généralisée à toutes les valeurs de  $p \in [1, n]$ .

Bien évidemment, l'argument que j'ai présenté n'est pas vraiment complet puisque j'ai admis l'existence d'un changement de variables vérifiant les propriétés souhaitées. La question se pose donc de construire des changements de variables monotones. Une solution classique, introduite indépendamment par Knothe et Rosenblatt dans les années 50, consiste à construire le changement de variables par récurrence, coordonnée après coordonnée. Ce *transport de Knothe–Rosenblatt* fera l'affaire dans notre problème d'inégalités de Sobolev, et dans beaucoup d'autres problèmes de nature géométrique posés dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour autant, un géomètre pourra lui trouver de nombreux défauts : le transport de Knothe–Rosenblatt n'est pas invariant par isométrie euclidienne, même pas par permutation des coordonnées. Pour traiter des problèmes plus géométriques, posés par exemple sur des variétés riemanniennes, il sera souhaitable de trouver d'autres procédures plus intrinsèques.

**Notes bibliographiques pour le prologue.** *Le transport de Knothe–Rosenblatt est décrit dans [29, Chapitre 1]. Knothe lui-même utilisait ce transport comme un auxiliaire à la démonstration de certaines inégalités géométriques dans  $\mathbb{R}^n$ ; de fait, la méthode de changement de variables, souvent appelée reparamétrage, a été par la suite appliquée avec succès à divers problèmes, comme on pourra le voir dans l'exposé de Maurey [21]. Dans les années 80, Gromov [24] eut l'idée de traiter par reparamétrage l'inégalité isopérimétrique classique dans  $\mathbb{R}^n$ , ou, de manière équivalente, l'inégalité de Sobolev optimale pour  $p = 1$ . La généralisation à  $p \neq 1$  est due à Cordero-Erausquin, Nazaret et moi-même [12]; ensuite avec Maggi nous avons considéré le problème à trace [19]. (À la place du transport de Knothe, nous utilisons un autre transport monotone; mais la démonstration est exactement la même.) De nombreuses extensions et discussions se trouvent dans ces deux articles (certaines inégalités de Gagliardo–Nirenberg, par exemple), ainsi que dans [20]. L'existence de cette démonstration avait été suggérée par le rapprochement de divers indices issus de*

la théorie du transport optimal et d'études antérieures sur les inégalités de Gagliardo–Nirenberg ; on pourra consulter les explications dans [12] pour plus de détails.

## I – TRANSPORT OPTIMAL

La théorie du transport optimal naît dans les années 1780 avec le problème des *déblais* et des *remblais* de Monge.

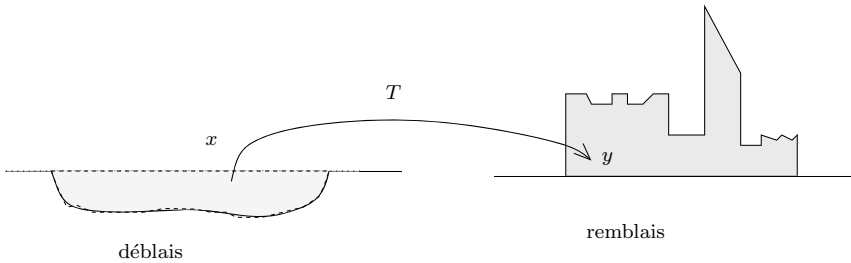


FIG. 1 – Le problème de Monge

Voici une façon moderne de présenter ce problème. Étant données deux mesures de probabilités  $\mu(dx)$  (la mesure « initiale ») et  $\nu(dy)$  (la mesure « finale »), et une *fonction de coût*  $c = c(x, y)$  on cherche un changement de variable  $T$  entre  $\mu$  et  $\nu$  qui minimise le *coût total*  $C(T) = \int c(x, T(x)) d\mu(x)$ .

Dans les années 1940, le mathématicien russe Kantorovich reformule le problème de Monge comme la version contrainte d'un problème plus classique de minimisation convexe. Au lieu de minimiser parmi l'ensemble des transports  $T$ , on minimise parmi l'ensemble des *mesures de probabilités jointes*  $\pi(dx dy)$  dont les marginales (mesures images par les projections sur les axes) sont  $\mu(dx)$  et  $\nu(dy)$ . Le coût total devient alors une fonctionnelle linéaire de  $\pi$  :

$$C(\pi) = \int c(x, y) \pi(dx dy).$$

Une mesure  $\pi$  admissible est appelée *plan de transport*. Heuristiquement, la quantité  $\pi(dx dy)$  nous dit combien de masse est transportée depuis le volume infinitésimal  $dx$  vers le volume infinitésimal  $dy$ . Pour retrouver le problème de Monge proprement dit, il suffit de se limiter à des plans de la forme  $\pi(dx dy) = \mu(dx) \delta_{y=T(x)}$ .

C'est en termes probabilistes que le problème de Monge–Kantorovich s'énonce le plus simplement. Étant données deux variables aléatoires  $U$  et  $V$ , dont les lois sont prescrites, on minimise l'espérance du coût,  $\mathbb{E} c(U, V)$ , parmi tous les *couplages* possibles de  $U$  et  $V$ . Dans le cas particulier où  $c(x, y) = |x - y|^2$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et où  $U$  et  $V$  sont de variance finie, le problème

revient à *maximiser les corrélations* entre  $U$  et  $V$ . La condition de Monge revient alors tout simplement à exiger que  $V$  soit une fonction (déterministe) de  $U$ .

Après sa formalisation par Kantorovich, les probabilistes et statisticiens ont largement utilisé le problème du transport optimal, pendant plusieurs décennies. Les analystes au contraire n'y ont que très peu contribué ; cela s'explique probablement par l'extrême complexité du problème de transport reformulé en termes analytiques. Supposons en effet que l'on cherche une solution au problème de Monge, les mesures  $\mu(dx)$  et  $\nu(dy)$  étant respectivement égales à  $f(x) dx$  et  $g(y) dy$  dans  $\mathbb{R}^n$  ; alors l'équation à résoudre est donnée par la formule de changement de variables,

$$f(x) = g(T(x)) |\det(\nabla T(x))| / (\text{multiplicité de } T \text{ en } x).$$

Cette formule, considérée comme une équation en l'inconnue  $T$ , est bien sûr « fortement non linéaire ».

Une note de Brenier [2], publiée en 1987, marque le début d'un important renouveau dans la théorie du transport optimal, ainsi que l'apparition de nouvelles problématiques :

- l'étude analytique du problème de Monge : y a-t-il existence d'un minimiseur ? unicité ? peut-on donner une caractérisation géométrique des minimiseurs ? peut-on étudier leur régularité ?
- le lien avec la théorie des équations aux dérivées partielles : équation de Monge–Ampère, mécanique des fluides compressible et incompressible, équations de diffusion ;
- son utilisation dans des problèmes mêlant analyse et géométrie.

Mon ouvrage, *Topics in Optimal Transportation*, publié en 2003, tentait de dresser un tableau d'ensemble de ces nouveaux développements. À titre d'illustration, le théorème suivant rassemble quelques-uns des principaux résultats connus qui s'appliquent quand le coût de transport est le carré de la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 1** (Knott, Smith, Rüschemdorf, Brenier, McCann). *Soient  $\mu(dx) = f(x) dx$  et  $\nu(dy) = g(y) dy$  deux mesures de probabilités sur  $\mathbb{R}^n$ , et soit  $c(x, y) = |x - y|^2$ . Alors*

(i) *il existe une solution unique  $T_{\min}$  au problème de Monge,*

$$\inf \left\{ \int |x - T(x)|^2 \mu(dx); \quad T_{\#}\mu = \nu \right\};$$

(ii)  *$T_{\min}$  est caractérisée (parmi toutes les fonctions  $T$  telles que  $T_{\#}\mu = \nu$ ) par l'existence d'une fonction convexe  $\varphi$  telle que  $T_{\min} = \nabla\varphi$  ;*

(iii) *l'équation de Monge–Ampère*

$$\det(\nabla^2\varphi(x)) = \frac{f(x)}{g(\nabla\varphi(x))}$$

*est alors satisfaite  $\mu(dx)$ -presque partout.*

Dans une perspective d'applications géométriques, ces résultats sont particulièrement intéressants car ils aboutissent à la construction d'un changement de variable monotone *canonique* (ne dépendant que de la structure euclidienne) entre  $\mu$  et  $\nu$ .

Il est alors naturel de chercher à étendre ces résultats à un cadre géométrique plus général. McCann [23] a résolu ce problème dans le cadre des variétés riemanniennes compactes. (Les variétés non compactes ont été traitées depuis, mais pour les besoins de cet exposé je me restreindrai au cas compact.) Pour énoncer ses résultats, j'aurai besoin de deux notions plus ou moins classiques. La première est l'*application exponentielle* d'un champ de vecteurs ; si  $\xi$  est un champ de vecteurs sur une variété riemannienne  $M$ , l'application  $\exp(\xi) : M \rightarrow M$  associe au point  $x$  le point  $y = \gamma(1)$  obtenu en suivant pendant un temps 1 une courbe géodésique  $\gamma$  (de vitesse constante) issue de  $x$  avec la vitesse  $\xi(x)$ . La deuxième est la notion de *c-convexité*.

**Définition 2** (*c-convexité*). Soient  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  deux espaces métriques, et soit  $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  une application mesurable. On dit que  $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est *c-convexe* s'il existe  $\zeta : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  telle que

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \psi(x) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} [c(x, y) - \zeta(y)].$$

On notera qu'en posant  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$ ,  $c(x, y) = x \cdot y$ , on retrouve la notion habituelle de fonction convexe semi-continue inférieurement.

**Théorème 3** (McCann). Soit  $M$  une variété riemannienne compacte, munie de sa distance géodésique  $d$  et de son volume riemannien (ou mesure de Hausdorff  $n$ -dimensionnelle)  $\text{vol}$ ; et soit  $c(x, y) = d(x, y)^2$  le coût de transport quadratique sur  $M \times M$ . Soient  $\mu(dx) = f(x) \text{vol}(dx)$  et  $\nu(dy) = g(y) \text{vol}(dy)$  deux mesures de probabilités sur  $M$ . Il existe alors une unique solution  $T_{\min}$  au problème de Monge

$$\inf_{T_{\#}\mu=\nu} \int d(x, T(x))^2 \mu(dx).$$

En outre  $T_{\min}$  est caractérisé par l'existence d'une fonction  $\psi$   $d^2/2$ -convexe telle que  $T_{\min} = \exp(\nabla\psi)$ . Enfin, l'équation jacobienne

$$f(x) = g(\exp_x \nabla\psi(x)) / (\det(\exp(\nabla\psi))(x))$$

a lieu  $\mu(dx)$ -presque partout.

Ce théorème fournit donc une notion « naturelle » de changement de variables monotone sur une variété riemannienne quelconque. En oubliant l'hypothèse de compacité, on pourra vérifier aisément que le Théorème 1 est un cas particulier du Théorème 3. L'énoncé de ce dernier théorème explique également a posteriori la surprenante identification réalisée dans le Théorème 1 entre vecteurs et vecteurs tangents.

De manière remarquable, quelques années avant McCann, Cabré [6] avait déjà noté l'intérêt d'applications monotones de la forme  $\exp(\nabla\psi)$  dans des problèmes de régularité elliptique posés sur des variétés riemanniennes.

Par rapport à d'autres changements de variables, le transport optimal a de nombreux atouts que je ne développerai pas ici. Son principal inconvénient est le *manque de régularité*. Il est évident que si l'on considère deux densités de probabilité  $f, g$  sur  $\mathbb{R}^n$ , de classe  $C^\infty$ , le transport optimal entre  $f dx$  et  $g dy$ , disons pour le coût quadratique, ne sera pas forcément continu. Pour cela, il suffit de penser au cas où le support de  $f$  est connexe et celui de  $g$  ne l'est pas. Cependant ce problème est commun à toutes les notions de changements de variables. Plus inquiétant est un contre-exemple classique dû à Caffarelli, que l'on peut résumer ainsi : *il existe des densités de probabilités  $f, g$  sur  $\mathbb{R}^n$ , de classe  $C^\infty$ , de support connexe et  $C^\infty$ , strictement positives dans l'intérieur de leur support, telles que le transport optimal entre  $f dx$  et  $g dy$  soit discontinu*. À ce stade, les choses ne semblent toujours pas désespérées pour autant, puisque Caffarelli montre qu'une hypothèse additionnelle de stricte positivité sur  $f$  et  $g$  suffit à garantir la régularité  $C^\infty$  du transport optimal. Mais dès que l'on s'intéresse à des variétés riemanniennes assez générales, tout espoir de travailler dans un cadre régulier est anéanti par un remarquable résultat négatif de Loeper : *si  $M$  est une variété riemannienne compacte dont une courbure sectionnelle est strictement négative en un point, alors on peut construire deux densités de probabilités  $C^\infty$  et strictement positives, telles que le transport optimal (pour le coût quadratique sur  $M$ ) soit discontinu*. Ce résultat justifie a posteriori le fait que la théorie du transport optimal sur des variétés riemanniennes ait été entièrement développée avec des outils d'analyse « non régulière ».

**Notes bibliographiques pour la section I.** *On trouvera dans [29, Chapitre 3] un bref exposé historique sur les débuts du transport optimal, et sur le tournant « historique » du milieu des années 80. Le traité de Rachev et Rüschendorf [26] est une source assez exhaustive sur la théorie et les applications du transport optimal, telles que l'on pouvait les formuler avant ce tournant. Mon livre [30] présente une introduction à la théorie récente du transport optimal, et s'efforce d'en dresser un panorama relativement complet, en insistant sur les directions récentes et sans entrer dans trop de détails. Mon cours de Saint-Flour [29] peut être consulté en complément ; j'y développe un point de vue plus géométrique, probabiliste et dynamique, avec des énoncés plus précis et généraux.*

## II – TRANSPORT OPTIMAL ET COURBURE DE RICCI

Le théorème suivant est une adaptation, dans un cadre riemannien, de travaux dus à Jordan, Kinderlehrer et Otto [15] à la fin des années 90. Je l'énoncerai de manière assez informelle.



**Théorème 4** (Jordan, Kinderlehrer, Otto). *Soit  $M$  une variété riemannienne compacte, munie de sa distance géodésique  $d$  et de son volume  $\text{vol}$ . Alors il existe un lien entre les trois objets suivants :*

- l'équation de la chaleur  $\partial_t \mu = \Delta \mu$ , où l'inconnue  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $M$  ;
- la fonctionnelle  $H$  de Boltzmann :  $H(\mu) = \int f \log f \, d\text{vol}$ , où  $f$  est la densité de  $\mu$  par rapport au volume ;
- la distance de Wasserstein quadratique :  $W_2(\mu, \nu) = \sqrt{C_2(\mu, \nu)}$ , où  $C_2(\mu, \nu)$  est la valeur optimale du coût total de transport entre  $\mu$  et  $\nu$  quand le coût est  $c(x, y) = d(x, y)^2$ .

*En effet, l'équation de la chaleur définit le flot gradient de la fonctionnelle  $H$  dans l'espace des mesures de probabilités sur  $M$ , muni de la métrique  $W_2$ .*

Une discussion rigoureuse de la notion de flot gradient dans ce contexte nous entraînerait trop loin ; ici je me bornerai à dire que l'espace  $P_2(M)$  des mesures de probabilités sur  $M$ , muni de la distance  $W_2$ , possède certaines propriétés d'une variété riemannienne (de dimension infinie), et que l'on peut formellement définir une structure riemannienne telle que le flot gradient associé à  $H$  soit bien l'équation de la chaleur. La structure de l'espace  $P_2(M)$  n'est d'ailleurs pas encore pleinement comprise.

De manière générale, quand on est en présence d'un flot gradient, pour une certaine fonctionnelle d'« énergie » (en l'occurrence la fonction  $H$  de Boltzmann), il est naturel de s'interroger sur la convexité de cette énergie le long des géodésiques. Dans notre contexte, les géodésiques sont des courbes de la forme  $\mu_t = \exp(t\nabla\psi)_{\#}\mu_0$ , qui « interpolent », au sens du transport optimal, entre  $\mu_0$  et  $\mu_1$ . Cette procédure d'interpolation, appelée interpolation par déplacement, a été introduite par McCann.

Il se trouve que dans un contexte riemannien, les propriétés de convexité de  $H$  sont fortement influencées par la **courbure de Ricci**, comme le montre l'énoncé suivant (conjecturé par Otto et moi-même vers 1999).

**Théorème 5** (Cordero-Erausquin, McCann, Schmuckenschläger [11]). *Soit  $M$  une variété riemannienne compacte de courbure de Ricci positive ; alors la fonction  $H$  est convexe le long des géodésiques du transport optimal sur  $M$ , pour le coût quadratique.*

Il est remarquable que la réciproque soit vraie, comme l'ont noté Sturm et von Renesse [28] : *si la fonction  $H$  est convexe le long des géodésiques du transport optimal, alors la courbure de Ricci est positive.*

Ces résultats sont le point de départ d'une théorie assez complète sur les liens entre courbure de Ricci et transport optimal. On peut en résumer les idées principales ainsi :

- le comportement de fonctionnelles non linéaires de densités de probabilités le long des équations du transport optimal est un puissant moyen de « coder » des bornes inférieures sur la courbure de Ricci ;

– de nombreuses inégalités géométriques faisant intervenir des bornes inférieures sur la courbure de Ricci peuvent être démontrées à l'aide de ces outils (de la même façon que les inégalités de Sobolev peuvent être démontrées par transport optimal dans  $\mathbb{R}^n$ ).

Pour illustrer ces considérations, et faire sentir leur lien avec des problèmes de mécanique des fluides, nous allons nous pencher sur le problème suivant : *décrire une expérience de pensée permettant de vérifier si nous sommes dans un espace à courbure (de Ricci) positive.*

Il est classique de répondre à cette question par l'étude de la *distortion*. Si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $M$ , non focaux, on définit le coefficient de distortion comme le grossissement (en termes de volume) avec lequel on aperçoit, en se plaçant en  $x$ , une source située en  $y$ . Si la courbure est positive, l'observateur aura systématiquement tendance à surestimer la surface (ou le volume) de la source lumineuse.

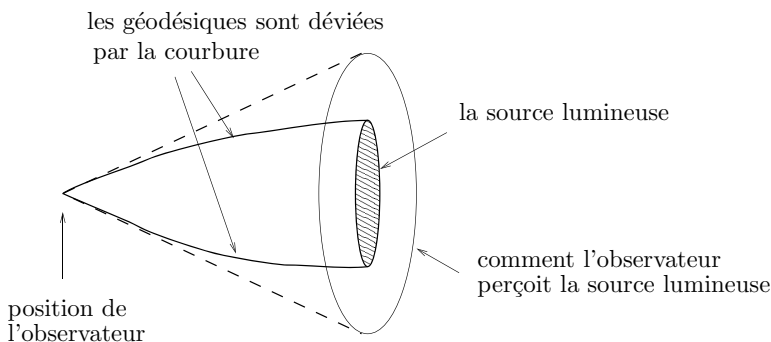


FIG. 2 – Distortion en courbure positive

La définition rigoureuse est plus rébarbative et s'énonce en termes de champs de Jacobi, c'est-à-dire de variations infinitésimales de familles de géodésiques. Si  $x$  et  $y$  sont joints par une unique géodésique  $\gamma$  et ne sont pas conjugués le long de  $\gamma$ , on définit le coefficient  $\beta(x, y)$  comme la limite pour  $t \rightarrow 0$  de  $(\det J(t))/t^n$ , où  $J(t)$  est un  $n$ -uplet de champs de Jacobi le long de  $\gamma$ , s'annulant en  $t = 0$  et définissant une base orthonormée en  $t = 1$ .

Voyons maintenant comment on peut répondre à la même question dans un langage directement inspiré de la mécanique des fluides ; c'est ce que j'appellerai *l'expérience du gaz paresseux*. Soit un fluide distribué au temps  $t = 0$  selon une certaine densité  $\rho_0(x) dx$  sur notre variété riemannienne  $M$ , décrivant l'espace ambiant. On impose au fluide de se déplacer pour venir occuper au temps  $t = 1$  une autre densité prescrite,  $\rho_1(y) dy$ . Étant de nature paresseuse, il obtmpère en suivant un chemin d'action minimale, l'action étant définie

classiquement par l'intégrale de l'énergie cinétique :

$$A = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho(t, x) |v(t, x)|^2 dt,$$

où  $v$  est le champ de vitesses. Pendant ce temps, on mesure l'entropie  $S = - \int \rho \log \rho$  du gaz aux temps intermédiaires. Si la courbure est positive, alors la courbe  $S(t)$  ainsi obtenue sera concave ; et réciproquement, si l'entropie est toujours une fonction concave du temps (pour tous choix de  $\rho_0$  et  $\rho_1$ ), c'est que l'espace ambiant est courbé positivement.

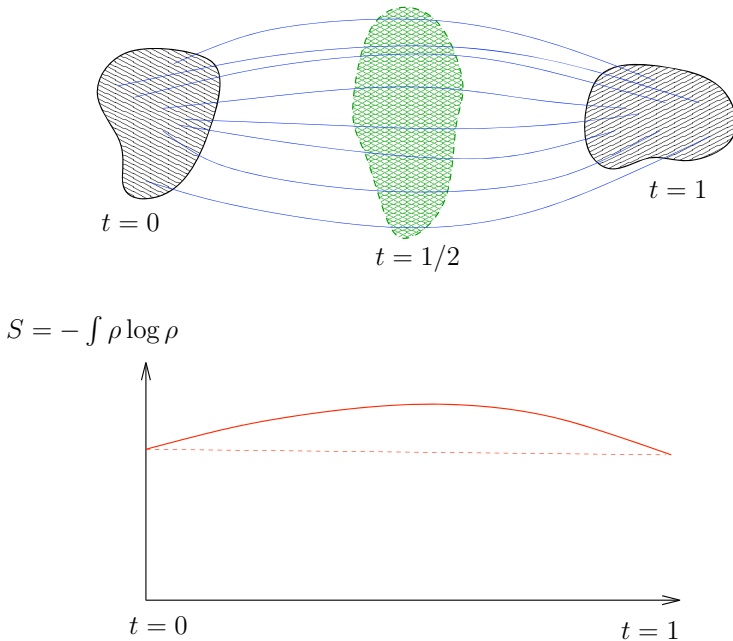


FIG. 3 – L'expérience du gaz paresseux : si la courbure est positive, l'entropie est une fonction concave du temps

Comment interpréter cette expérience ? En courbure positive, passé l'effet dû au champ de vitesses initial, les géodésiques ont tendance à converger. Au cours de l'expérience, elles vont donc typiquement diverger dans un premier temps, puis reconverger. Le phénomène de divergence des géodésiques sera associé à une diminution de la densité du gaz (augmentation de l'entropie), alors que la convergence correspondra à une augmentation de la densité, et partant une diminution de l'entropie. La coïncidence tout à fait remarquable que cet argument heuristique n'explique pas, c'est que la fonctionnelle à utili-

ser pour mesurer la densité « moyenne » du gaz est précisément la fonctionnelle d'entropie de Boltzmann, déjà bien connue en physique statistique !

**Notes bibliographiques pour la section II.** *On trouvera dans mon livre [30, chapitre 8] une introduction aux flots gradients par rapport à la distance de Wasserstein (dans un cadre euclidien), et une preuve du théorème de Jordan–Kinderlehrer–Otto. Ce sujet est repris en bien plus grand détail dans la monographie d'Ambrosio, Gigli et Savaré [1], tout entière consacrée aux flots gradients dans les espaces métriques et tout particulièrement dans l'espace  $P_2(\mathbb{R}^n)$ . Pour s'initier à l'interpolation par déplacement, on pourra consulter [30, Chapitre 5]; une étude beaucoup plus approfondie est menée à bien dans [29, Chapitre 7]. En ce qui concerne les liens entre courbure de Ricci et convexité le long du transport optimal, les articles fondateurs sont l'article d'Otto et moi-même [25], en partie conjectural, et celui de Cordero-Erausquin, McCann et Schmuckenschläger [11]. La Partie II de mes notes de Saint-Flour [29] est tout entière consacrée à ce sujet ; cette source contient un chapitre d'introduction à la courbure de Ricci. Enfin l'exposé de Cordero-Erausquin au Séminaire de Théorie spectrale et géométrie [10] pourra être lu avec profit en complément du présent texte.*

### III – TRAITEMENT SYNTHÉTIQUE DE BORNES SUR LA COURBURE DE RICCI

Dans la dernière partie de cet exposé, je présenterai une direction de recherche récente, explorée par Lott et moi-même depuis 2004, et indépendamment par Sturm. Le programme consiste à *définir une notion synthétique de borne inférieure sur la courbure de Ricci, basée sur le transport optimal.*

Ici « synthétique » doit être compris par opposition à « analytique ». Nous sommes à la recherche d'une notion qui ne soit pas basée sur le calcul (la courbure de Ricci se calcule à partir de la métrique riemannienne), mais sur les propriétés « géométriques » de certains objets. La distinction est la même qu'entre la géométrie euclidienne analytique (basée sur des équations de droites, de cercles, etc.) et la géométrie euclidienne... « à la Euclide », basée sur des axiomes.

Il existe une théorie synthétique bien établie pour les bornes sur la courbure *sectionnelle*, basée sur la forme des triangles géodésiques. Par exemple, des triangles tracés sur une variété riemannienne de courbure sectionnelle positive sont systématiquement plus *gras* que les triangles tracés dans le plan. Inversement, les triangles tracés sur une variété riemannienne de courbure sectionnelle négative sont plus « maigres » que les triangles tracés dans le plan.

Cette notion ne fait intervenir que des longueurs (pour savoir si un triangle est « gras », on mesure la longueur de ses médianes) ; en conséquence on peut l'introduire dans un espace *métrique*, non nécessairement muni d'une structure riemannienne sous-jacente — sous réserve que le milieu de deux points soit toujours défini. On emploie d'ordinaire cette notion dans le cadre des

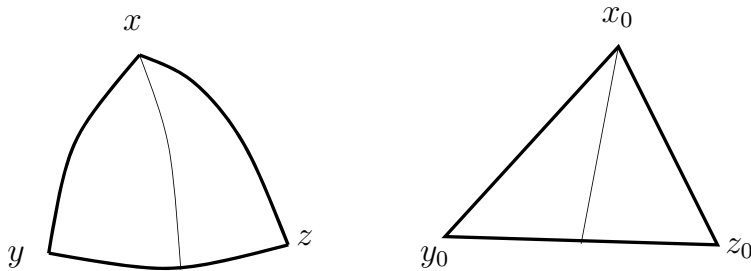


FIG. 4 – Le triangle de gauche est tracé sur une variété riemannienne, le triangle de droite sur le plan. Ces triangles sont isométriques. La médiane issue du sommet « supérieur » est plus longue à gauche qu'à droite : on dira que le triangle de gauche est plus gras. Les triangles gras sont caractéristiques de la courbure positive, les triangles maigres de la courbure négative.

*espaces de longueur* (strictement intrinsèques). Ce sont des espaces métriques  $(\mathcal{X}, d)$  dans lequel deux points  $x$  et  $y$  quelconques sont joints par une courbe géodésique, c'est-à-dire une courbe  $t \rightarrow \gamma(t)$  avec  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(1) = y$ , qui minimise la longueur  $\mathcal{L}(\gamma)$ , définie par

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{0=t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N=1} \sum_j d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})).$$

En remplaçant le plan par une surface de courbure sectionnelle constante (sphère ou espace hyperbolique), on peut généraliser les notions de « courbure sectionnelle positive » ou « courbure sectionnelle négative » en « courbure sectionnelle minorée par  $\kappa$  », ou « courbure sectionnelle majorée par  $\kappa$  »,  $\kappa$  étant un nombre réel arbitraire. Les espaces ainsi définis sont appelés *espaces d'Alexandrov*, et jouent un rôle important en géométrie contemporaine, par exemple pour décrire des variétés « singulières » (cônes, bord de convexes...) ou des limites de variétés riemanniennes. Ici le mot limite est à prendre au sens de la **convergence de Gromov–Hausdorff**, une notion très faible qui autorise des limites singulières, ou des changements de dimension.

**Definition 6** (Convergence de Gromov–Hausdorff). *Une suite d'espaces métriques  $(\mathcal{X}_k, d_k)$  converge vers un espace limite  $(\mathcal{X}, d)$  si l'on peut trouver une suite  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  et une famille de  $\varepsilon_k$ -isométries  $f_k : \mathcal{X}_k \rightarrow \mathcal{X}$ , c'est-à-dire des applications (en général discontinues) qui*

(a) *préservent les distances à  $\varepsilon_k$  près :  $\forall x, y \in \mathcal{X}_k, |d(f_k(x), f_k(y)) - d_k(x, y)| \leq \varepsilon_k$  ;*

(b) *sont surjectives à  $\varepsilon_k$  près :  $\forall x \in \mathcal{X}, \exists x_k \in \mathcal{X}_k ; d(f_k(x_k), x) \leq \varepsilon_k$ .*

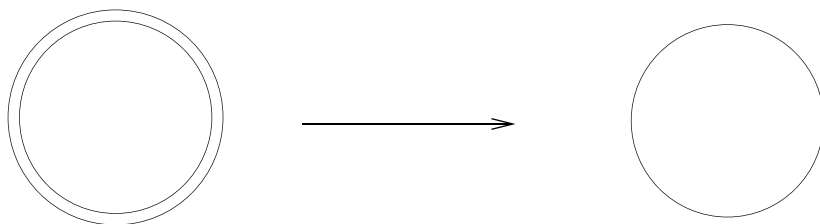


FIG. 5 – Un pneu (dimension 2) dont l'épaisseur tend vers 0 converge vers un cercle (dimension 1).

Parmi les raisons du succès des espaces d'Alexandrov, on notera que :

- (i) cette notion est *compatible* avec la notion classique de bornes sectionnelles (dans une variété riemannienne, la définition basée sur la forme des triangles est équivalente à la définition basée sur le calcul des courbures sectionnelles) ;
- (ii) cette notion est *stable* vis-à-vis de la convergence d'espaces métriques, au sens de Gromov–Hausdorff ;
- (iii) cette notion a des conséquences géométriques non triviales. Par exemple, si un espace métrique est de courbure minorée par  $\kappa > 0$ , alors son diamètre n'excède pas  $\pi/\sqrt{\kappa}$ .

C'est un problème naturel et déjà assez ancien en géométrie riemannienne que de définir une théorie similaire qui s'applique à la courbure de Ricci, plutôt qu'à la courbure sectionnelle. Les bornes supérieures sur la courbure de Ricci sont de peu d'utilité, et n'ont que très peu de conséquences géométriques (et essentiellement aucune conséquence topologique). En revanche, les bornes *inférieures* sur la courbure de Ricci sont d'usage constant en géométrie : estimation de diamètre, de trou spectral, contrôle de la croissance du volume, estimations du noyau de la chaleur, inégalités de Sobolev, inégalités de Poincaré, etc. Autant de problèmes classiques qui font intervenir des bornes inférieures sur la courbure de Ricci, et des bornes supérieures sur la dimension.

Au cahier des charges pour cette notion de « courbure de Ricci minorée », nous porterons bien sûr la compatibilité avec la notion classique ; la stabilité vis-à-vis d'une notion pertinente de convergence ; et l'existence de conséquences géométriques non triviales. On pourra aussi demander à ce que la notion de borne inférieure sur la courbure de Ricci s'accompagne d'une notion de borne supérieure sur la dimension ; en effet ces deux estimations viennent le plus souvent de pair dans les applications.

Un aspect subtil du problème est que ces bornes inférieures sur la courbure de Ricci doivent certainement être formulées non en termes purement métriques, mais en termes de métrique *et de mesure de référence*. En effet, presque tous les

énoncés faisant intervenir la courbure de Ricci font aussi appel à une notion de volume, qui le plus souvent est le volume riemannien. On peut construire ce volume uniquement en termes de la distance et de la dimension ; mais dans un espace métrique arbitraire, il n'y a pas forcément de bonne notion de dimension.

Une autre raison importante pour ne pas travailler systématiquement avec la mesure de volume est que cette dernière n'est pas stable vis-à-vis de la convergence. Le phénomène dit d'effondrement (*collapsing*) peut se produire : une suite de variétés  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de dimension  $N$  converge vers une variété  $M$  de dimension  $n < N$ , et alors la limite du volume  $N$ -dimensionnel sur  $M_k$  ne coïncide pas nécessairement avec le volume  $n$ -dimensionnel sur  $M$ . L'exemple qui suit [16] illustrera la généralité de ce phénomène : prenons une variété riemannienne compacte  $(M, g)$ , de dimension  $n$ , munissons-la d'une mesure de référence  $e^{-V(x)} \text{vol}(dx)$  assez quelconque, et considérons le produit tordu (*warped product*) de  $(M, g)$  par la sphère  $(S^2, s)$ , où la métrique sur l'espace produit est définie par  $g(dx) + \varepsilon^2 e^{-V(x)} ds$ . Nous obtenons ainsi une variété riemannienne  $M_\varepsilon$ , de dimension  $n + 2$ , qui converge, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vers  $M$ , de telle sorte que la mesure de volume sur  $M_\varepsilon$  converge vers la mesure de référence  $e^{-V} \text{vol}(dx)$ .

Quand un tel phénomène d'effondrement se produit, la variété limite  $M$ , munie de la mesure limite, se comporte souvent, par certains aspects, comme un espace de dimension  $N$  et non  $n$ . Pour espérer obtenir de bonnes propriétés de stabilité des bornes de courbure et de dimension, nous serons donc amenés à inclure la mesure dans les données, et à considérer la dimension comme faisant partie du « test ». La question posée n'est donc plus « tel espace est-il courbé positivement ? » mais « si je considère tel espace comme étant de dimension  $N$ , est-il courbé positivement ? »

C'est à ce problème que Lott et moi-même, ainsi que Sturm, proposons une solution basée sur la notion de transport optimal. Dans la suite, je vais exposer les bases de cette théorie, en me limitant au cas où l'espace est compact et la mesure de référence est normalisée en une mesure de probabilité. Commençons par quelques définitions préliminaires.

**Definition 7** (espace de Wasserstein). *Soit  $(\mathcal{X}, d)$  un espace de longueurs compact. L'espace de Wasserstein (d'ordre 2) associé à  $\mathcal{X}$  est l'espace des mesures de probabilités sur  $\mathcal{X}$ , muni de la distance de Wasserstein d'ordre 2. C'est un espace de longueurs compact.*

L'espace de Wasserstein  $P_2(\mathcal{X})$  contient une copie isométrique de  $\mathcal{X}$ , obtenue par le plongement  $x \rightarrow \delta_x$  (masse de Dirac en  $x$ ). En un certain sens, c'est « le plus gros » espace convexe engendré par  $\mathcal{X}$ .

**Definition 8** (fonctionnelle non linéaire d'une mesure). *Soit  $(\mathcal{X}, d, \nu)$  un espace métrique mesuré, où  $\nu$  est une mesure de probabilité borélienne. Soit  $U$  une fonction*

convexe satisfaisant  $U(0) = 0$ . On définit

$$U_\nu(\mu) = \int U(\rho) d\nu + U'(\infty) \mu_s[\mathcal{X}],$$

où  $\mu = \rho\nu + \mu_s$  est la décomposition de Lebesgue de  $\mu$  par rapport à  $\nu$ , et  $U'(\infty)$  est la limite de  $U'$  à l'infini.

**Définition 9** (fonctionnelles de type  $\mathcal{DC}_N$ ). Soit  $N \in ]1, +\infty]$ . On note  $\mathcal{DC}_N$  la classe des fonctions convexes  $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , continues et s'annulant en 0, telles que  $r \rightarrow r^N U(r^{-N})$  soit convexe (si  $N = \infty$ , remplacer  $r^N U(r^{-N})$  par  $e^r U(e^{-r})$ ).

Les classes  $\mathcal{DC}_N$  sont décroissantes en  $N$ ; elles ont été introduites par McCann [22] il y a une dizaine d'années. Les exemples les plus importants sont les suivants : la fonction  $r \rightarrow -r^{1-1/N}$  appartient à  $\mathcal{DC}_N$  pour tout  $N \in ]1, \infty[$ ; la fonction  $r \rightarrow r \log r$  appartient à  $\mathcal{DC}_\infty$ ; les fonctions  $r \rightarrow r^s$ ,  $s > 1$ , appartiennent à toutes les classes  $\mathcal{DC}_N$ .

Nous pouvons maintenant énoncer le plus simple critère de courbure de Ricci.

**Définition 10** (courbure de Ricci positive). Soit  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, d, \nu)$  un espace de longueurs compact muni d'une mesure de probabilité. On dit que  $\mathcal{X}$  est courbé positivement si pour toutes mesures de probabilités  $\mu_0$  et  $\mu_1$ , il existe une géodésique  $(\mu_t)_{0 \leq t \leq 1}$  telle que pour tout  $t \in [0, 1]$  et pour tout  $U \in \mathcal{DC}_\infty$ ,

$$U_\nu(\mu_t) \leq (1-t)U_\nu(\mu_0) + tU_\nu(\mu_1). \quad (11)$$

**Remarque 11** (définition alternative). La définition précédente est due à Lott et moi-même [17]. Cependant, dans le cas où l'espace  $\mathcal{X}$  est « non branchant », c'est-à-dire qu'une géodésique ne se sépare jamais en deux géodésiques distinctes (une géodésique  $[0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$  est entièrement déterminée par sa restriction à un sous-intervalle non trivial de  $[0, 1]$ ), alors on peut reformuler cette définition en termes plus simples, ne faisant intervenir que la fonction  $H$  de Boltzmann :  $H_\nu(\mu) = \int \rho \log \rho d\nu$ ,  $\rho = d\mu/d\nu$ . En effet, la Définition 10 devient équivalente à la définition suivante : pour toutes mesures de probabilités  $\mu_0$  et  $\mu_1$ , il existe une géodésique  $(\mu_t)_{0 \leq t \leq 1}$  telle que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$H_\nu(\mu_t) \leq (1-t)H_\nu(\mu_0) + tH_\nu(\mu_1).$$

C'est cette dernière définition que Sturm [27] a adoptée dans ses travaux sur le transport optimal et la courbure de Ricci.

Dans le cas où  $\mathcal{X}$  est une variété riemannienne régulière, munie de sa distance géodésique et de sa mesure de volume, alors il est équivalent de dire que  $\mathcal{X}$  est courbé positivement au sens de la Définition 10, ou que sa courbure de Ricci est un tenseur partout positif.

Toujours dans le cas riemannien, si la mesure de référence n'est pas le volume riemannien, mais possède une densité régulière strictement positive par rapport à ce volume, disons  $e^{-V(x)}$ , alors on retrouve une notion bien connue en



probabilités dans un contexte riemannien : l'espace  $(M, d, e^{-V} \text{vol})$  est courbé positivement si et seulement si le tenseur  $\text{Ric} + \nabla^2 V$  est partout positif. (Ici  $\text{Ric}$  désigne le tenseur de Ricci, et  $\nabla^2 V$  la Hessienne de  $V$ .)

Pour inclure des bornes dimensionnelles, il suffit de remplacer, dans la Définition 10, la classe  $\mathcal{DC}_\infty$  par la classe  $\mathcal{DC}_N$ . On dira alors que l'espace  $(\mathcal{X}, d, \nu)$  vérifie le critère de courbure-dimension  $\text{CD}(0, N)$ . Si  $(\mathcal{X}, d, \nu)$  est une variété riemannienne de dimension  $n$ , munie de sa distance géodésique et de sa mesure de volume, alors le critère  $\text{CD}(0, N)$  équivaut à la positivité du tenseur de Bakry-Émery-Ricci

$$\text{Ric}_{N, e^{-V} \text{vol}} := \text{Ric} + \nabla^2 V - \frac{\nabla V \otimes \nabla V}{N - n},$$

où  $N$  est toujours supposé plus grand que  $n$ .

Enfin on peut adapter la définition pour définir un critère  $\text{CD}(K, N)$ , où  $K$  est un nombre réel arbitraire ; dans un cadre régulier cela correspond à une borne inférieure sur le tenseur de Bakry-Émery-Ricci. Cette extension est plus délicate. Suivant une idée de Sturm, elle consiste à modifier les quantités  $U_\nu(\mu_0)$  et  $U_\nu(\mu_1)$  apparaissant dans la formule (11) en introduisant des coefficients de distortion ; la nouvelle formule devient

$$U_\nu(\mu_t) \leq (1 - t) \int U \left( \frac{\rho_0(x_0)}{\beta_{1-t}^{(K,N)}(x_0, x_1)} \right) \beta_{1-t}^{(K,N)}(x_0, x_1) \pi(dx_1|x_0) \nu(dx_0) \\ + t \int U \left( \frac{\rho_1(x_1)}{\beta_t^{(K,N)}(x_0, x_1)} \right) \beta_t^{(K,N)}(x_0, x_1) \pi(dx_0|x_1) \nu(dx_1),$$

où  $\rho_0$  (resp.  $\rho_1$ ) est la densité de  $\mu_0$ , supposée absolument continue par rapport à  $\nu$  ;  $\pi(dx_0 dx_1)$  est le couplage optimal de  $(\mu_0, \mu_1)$  ;  $\pi(dx_0|x_1)$  (resp.  $\pi(dx_1|x_0)$ ) désigne sa désintégration par rapport à sa marginale en la variable  $x_1$  (resp.  $x_0$ ) ; et les coefficients de distortion  $\beta_t^{(K,N)}(x_0, x_1)$  sont définis par les formules de distortion classique dans les espaces modèles à courbure sectionnelle constante : en notant  $\alpha = \sqrt{\frac{|K|}{N-1}} d(x_0, x_1)$ , on pose

$$\beta_t^{(K,N)}(x_0, x_1) = \begin{cases} +\infty & \text{si } K > 0 \text{ et } \alpha > \pi, \\ \left( \frac{\sin(t\alpha)}{t \sin \alpha} \right)^{N-1} & \text{si } K > 0 \text{ et } \alpha \in [0, \pi], \\ 1 & \text{si } K = 0, \\ \left( \frac{\sinh(t\alpha)}{t \sinh \alpha} \right)^{N-1} & \text{si } K < 0. \end{cases}$$

Le théorème de stabilité qui suit est l'un des premiers résultats notables du programme. Avant de l'énoncer, je vais introduire la notion de convergence de Gromov-Hausdorff mesurée.

**Definition 12** (convergence de Gromov–Hausdorff mesurée).

Soit  $(\mathcal{X}_k, d_k, \nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'espaces de longueurs mesurés compacts, où les  $\nu_k$  sont des mesures de probabilité. On dit que  $(\mathcal{X}_k, d_k, \nu_k)$  converge au sens de Gromov–Hausdorff mesuré vers un espace limite  $(\mathcal{X}, d, \nu)$  si il existe des  $\varepsilon_k$ -isométries  $f_k : \mathcal{X}_k \rightarrow \mathcal{X}$ , avec  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , telles que la mesure image  $(f_k)_\# \nu_k$  converge faiblement vers  $\nu$ .

**Théorème 13** (Lott, Sturm, Villani). Soit  $(\mathcal{X}_k, d_k, \nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'espaces de longueurs mesurés compacts, convergeant vers un espace limite  $(\mathcal{X}, d, \nu)$  au sens de Gromov–Hausdorff mesuré. Si chaque espace  $(\mathcal{X}_k, d_k, \nu_k)$  vérifie un critère de courbure-dimension  $\text{CD}(K, N)$  où  $K \in \mathbb{R}$  et  $N \in ]1, \infty]$  sont arbitrairement fixés, alors  $(\mathcal{X}, d, \nu)$  vérifie aussi le critère  $\text{CD}(K, N)$ .

**Remarque 14.** Cet énoncé est non trivial, et intéressant, même si les espaces  $\mathcal{X}_k$  et l'espace limite  $\mathcal{X}$  sont tous des variétés riemanniennes régulières !

Énumérons quelques-uns des ingrédients de la preuve du Théorème 13 :

1. l'espace de Wasserstein  $P_2(\mathcal{X})$  est stable par convergence de Gromov–Hausdorff : si  $(\mathcal{X}_k, d_k)$  converge vers  $(\mathcal{X}, d)$  au sens de Gromov–Hausdorff, alors  $P_2(\mathcal{X}_k)$  converge également vers  $P_2(\mathcal{X})$  ;
2. le transport optimal est stable : si sur chaque espace  $\mathcal{X}_k$  on se donne deux mesures de probabilités  $\mu_{0,k}(dx)$  et  $\mu_{1,k}(dy)$ , et un plan de transport optimal  $\pi_k(dx dy)$ , alors, à extraction près,  $(f_k, f_k)_\# \pi_k \rightarrow \pi$ , où  $\pi$  est un transport optimal ;
3. Les fonctionnelles convexes  $U_\nu(\mu)$  possèdent de bonnes propriétés de stabilité :
  - elles sont semi-continues inférieurement vis-à-vis de la convergence faible, en les deux variables  $\mu$  et  $\nu$ ,
  - elles satisfont un principe de contraction : si  $f$  est une application mesurable quelconque, alors  $U_{f_\# \nu}(f_\# \mu) \leq U_\nu(\mu)$ .

**Remarque 15** (Stabilité du transport optimal dynamique). Si pour chaque  $k$  on se donne une géodésique  $(\mu_{t,k})_{0 \leq t \leq 1}$  dans l'espace  $P_2(\mathcal{X}_k)$ , alors pour tout  $t \in [0, 1]$  la mesure  $(f_k)_\# \mu_{t,k}$  converge faiblement vers  $\mu_t$ , où  $(\mu_t)_{0 \leq t \leq 1}$  est une mesure de probabilité. La stabilité du transport optimal s'applique même à l'échelon supérieur, dit des plans de transport dynamiques (qui ne sont pas des géodésiques dans l'espace des mesures, mais des mesures sur l'espace des géodésiques). Ces propriétés sont cruciales dans certains développements.

Il s'agit ensuite de déduire des conséquences non triviales de ces bornes inférieures assez abstraites. Nous avons vu dans le Prologue que l'on pouvait démontrer des inégalités de Sobolev à base de transport ; on ne sera donc pas surpris d'apprendre que le transport optimal permet de démontrer d'autres inégalités fonctionnelles à caractère géométrique. En voici deux qui s'appliquent indépendamment de la dimension :

- pour  $K > 0$ , le critère  $\text{CD}(K, \infty)$  implique une inégalité de Sobolev logarithmique, qui à son tour implique une inégalité de Poincaré avec constante  $K$  (sur une variété riemannienne, ce serait une inégalité de trou spectral pour le Laplacien);
- le critère  $\text{CD}(K, \infty)$  implique aussi l'inégalité fonctionnelle

$$W_2(\mu, \nu) \leq \sqrt{2 H_\nu(\mu)/K},$$

inégalité dite de Talagrand, qui a des conséquences importantes en théorie de la concentration de la mesure.

Voici maintenant quelques résultats faisant intervenir des bornes sur la dimension :

- le critère  $\text{CD}(0, N)$  implique une inégalité de Brunn–Minkowski :

$$\nu[[A_0, A_1]_t]^{\frac{1}{N}} \geq (1-t)\nu[A_0]^{\frac{1}{N}} + t\nu[A_1]^{\frac{1}{N}},$$

où  $A_0$  et  $A_1$  sont deux compacts non vides, et  $[A_0, A_1]_t$  désigne l'ensemble de tous les  $t$ -barycentres de  $A_0$  et  $A_1$  (c'est-à-dire l'ensemble des  $\gamma_t$ ,  $\gamma$  étant une géodésique issue d'un point de  $A_0$  et aboutissant en un point de  $A_1$ );

- le critère  $\text{CD}(0, N)$  implique une inégalité de Bishop–Gromov : pour tout  $x$ ,  $\nu[B(x, r)]/r^N$  est une fonction décroissante de  $r$  (comme la précédente, cette inégalité admet des généralisations à  $\text{CD}(K, N)$ , où  $K$  est un nombre réel arbitraire);
- le critère  $\text{CD}(K, N)$  avec  $K > 0$  et  $N < \infty$  implique une inégalité à la Bonnet–Myers : le diamètre de l'espace  $\mathcal{X}$  est majoré par  $\pi\sqrt{(N-1)/K}$ ;
- le critère  $\text{CD}(K, N)$  avec  $K < 0$  et  $N < \infty$ , ainsi qu'une borne sur le diamètre de  $\mathcal{X}$ , impliquent des inégalités de Sobolev (a priori non optimales).

Pour conclure, je présenterai quelques exemples « concrets » d'espaces métriques-mesurés à courbure de Ricci minorée.

**Exemples 16.** *Les espaces suivants sont des espaces à courbure positive :*

- un cône euclidien;
- le bord d'un convexe non régulier;
- un quotient de variété riemannienne compacte à courbure de Ricci positive;
- l'espace  $(\mathbb{R}^n, |\cdot|, e^{-V(x)} dx)$ , où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne, et  $V$  est convexe;
- l'espace  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|, dx)$ , où  $\|\cdot\|$  désigne une norme quelconque.

*Ce dernier exemple est le plus intrigant ; en effet, si la norme  $\|\cdot\|$  n'est pas euclidienne, l'espace  $\mathbb{R}^n$  n'est pas un espace d'Alexandrov, et ne peut pas être obtenu comme limite d'espaces riemanniens à courbure de Ricci minorée. Le fait que de tels espaces puissent être considérés comme étant à courbure de Ricci minorée est à la fois une force et une faiblesse de la théorie. C'est en tout cas parfaitement cohérent avec la remarque selon laquelle, modulo quelques changements de notation, les inégalités de Sobolev optimales dans  $\mathbb{R}^n$  sont indépendantes du choix de la norme (comme on pourra s'en convaincre en réfléchissant à la preuve présentée dans le Prologue).*

**Notes bibliographiques pour la section III.** *La théorie des espaces d’Alexandrov est passée en revue par Burago, Burago et Ivanov dans [5]; on pourra également consulter le traité de Gromov [14], très inspiré. Le problème de la définition synthétique des espaces à courbure de Ricci minoré est abordé dans [14, 7]. La théorie présentée ici a été introduite par Lott et moi-même [17, 18], et indépendamment par Sturm [27]. La troisième partie de mes notes de Saint-Flour [29] présente une synthèse complète, avec des preuves détaillées. Cette référence contient une introduction élémentaire à la convergence de Gromov–Hausdorff, également abordée dans [5].*

#### IV – QUELQUES PROBLÈMES OUVERTS

De nombreux problèmes sont à résoudre avant que l’on puisse considérer comme « bien compris » les liens entre transport optimal et géométrie. L’un des plus importants, à mon sens, est celui de la *compatibilité* de la théorie des espaces d’Alexandrov à courbure « sectionnelle » minorée avec la théorie des espaces métriques-mesurés à courbure « de Ricci » minorée. En effet, en géométrie riemannienne des bornes sur la courbure sectionnelle impliquent automatiquement des bornes sur la courbure de Ricci ; on aimerait qu’il en soit de même dans les généralisations synthétiques. Le problème peut se formuler ainsi : soit  $(\mathcal{X}, d)$  un espace d’Alexandrov à courbure minorée par  $\kappa$ , compact et de dimension de Hausdorff  $n$  ; on munit  $\mathcal{X}$  de la mesure de Hausdorff  $\nu_n$  de dimension  $n$  ; s’ensuit-il que  $(\mathcal{X}, d, \nu_n)$  vérifie le critère  $CD((n - 1)\kappa, n)$  ?

La question de la *localité* est également importante : soit  $(\mathcal{X}, d, \nu)$  un espace qui vérifie le critère  $CD(K, N)$  de manière *locale* (pour  $\mu_0, \mu_1$  supportés au voisinage d’un point quelconque) ; vérifie-t-il alors ce même critère de manière *globale*, c’est-à-dire sans restriction sur le support de  $\mu_0, \mu_1$  ? À l’heure actuelle, on sait répondre à cette question quand  $K = 0$  et sous une hypothèse de non-branchement des géodésiques. Dans le cadre des espaces d’Alexandrov à courbure minorée, ce passage du local au global est garanti par un théorème célèbre dû à Toponogov et Perelman.

Il serait également bon de compléter la liste des inégalités à contenu géométrique qui s’obtiennent par transport optimal. Parmi celles que l’on voudrait traiter en priorité, se trouvent l’inégalité isopérimétrique de Lévy–Gromov, et l’inégalité optimale de Sobolev  $L^2$ . Cette remarque s’applique même dans un cadre régulier.

La description locale des espaces métriques-mesurés à courbure « de Ricci » minoré est un autre problème intéressant et délicat. Des résultats classiques de Cheeger et d’autres auteurs montrent que si un espace de longueurs mesuré  $(\mathcal{X}, d, \nu)$  vérifie une inégalité de doublement de la mesure et une inégalité de Poincaré *locale*, alors  $(\mathcal{X}, d, \nu)$  admet une structure différentiable définie de manière mesurable. On sait d’ores et déjà que ces résultats s’appliquent si l’on considère un espace vérifiant un critère  $CD(K, N)$  sous une hypothèse de *non-branchement* des géodésiques.

À plus long terme, on peut envisager d'utiliser les liens entre transport optimal et équation de la chaleur, d'abord mis à jour par Jordan, Kinderlehrer et Otto, pour définir des équations de la chaleur sur des espaces singuliers. Notons que la question, probablement plus délicate, de la définition d'un Laplacien sur de tels espaces a été étudiée par Cheeger et Colding, avec des résultats partiels.

**Notes bibliographiques pour la section IV.** *La plupart des problèmes ouverts décrits ici sont repris plus en détail à la fin de mon cours de Saint-Flour [29]. Les inégalités de Poincaré locales dans des espaces singuliers, sous une hypothèse  $CD(K, N)$ , ont été étudiées indépendamment par Sturm [27], von Renesse [31], et Lott et moi-même [18]. Dans leur étude des limites de variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée, Cheeger et Colding [7, 8, 9] présentent de nombreuses pistes de recherche qui peuvent être posées dans des espaces  $CD(K, N)$ . Dans le prolongement de ces travaux, on pourra aussi consulter [13].*

## RÉFÉRENCES

- [1] AMBROSIO, L., GIGLI, N., AND SAVARÉ, G. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures.* Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
- [2] BRENIER, Y. Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 305, 19 (1987), 805–808.
- [3] BRENIER, Y. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Comm. Pure Appl. Math.* 44, 4 (1991), 375–417.
- [4] BRÉZIS, H., AND LIEB, E. Sobolev inequalities with a remainder term. *J. Funct. Anal.* 62 (1985), 73–86.
- [5] BURAGO, D., BURAGO, Y., AND IVANOV, S. *A course in metric geometry*, vol. 33 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Une liste d'errata est disponible en ligne à [www.pdmi.ras.ru/staff/burago.html](http://www.pdmi.ras.ru/staff/burago.html).
- [6] CABRÉ, X. Nondivergent elliptic equations on manifolds with nonnegative curvature. *Comm. Pure Appl. Math.* 50, 7 (1997), 623–665.
- [7] CHEEGER, J., AND COLDING, T. H. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I. *J. Differential Geom.* 46, 3 (1997), 406–480.
- [8] CHEEGER, J., AND COLDING, T. H. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. II. *J. Differential Geom.* 54, 1 (2000), 13–35.
- [9] CHEEGER, J., AND COLDING, T. H. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. III. *J. Differential Geom.* 54, 1 (2000), 37–74.
- [10] CORDERO-ERAUSQUIN, D. Quelques exemples d'application du transport de mesure en géométrie euclidienne et riemannienne. *Sémin. Théor. Spectr. Géom.* 22 (2004), 125–152.

- [11] CORDERO-ERAUSQUIN, D., MCCANN, R. J., AND SCHMUCKEN-SCHLÄGER, M. A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb. *Invent. Math.* 146, 2 (2001), 219–257.
- [12] CORDERO-ERAUSQUIN, D., NAZARET, B., AND VILLANI, C. A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities. *Adv. Math.* 182, 2 (2004), 307–332.
- [13] DING, Y. Heat kernels and Green’s functions on limit spaces. *Comm. Anal. Geom.* 10, 3 (2002), 475–514.
- [14] GROMOV, M. Sign and geometric meaning of curvature. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* 61 (1991), 9–123 (1994).
- [15] JORDAN, R., KINDERLEHRER, D., AND OTTO, F. The variational formulation of the Fokker-Planck equation. *SIAM J. Math. Anal.* 29, 1 (1998), 1–17.
- [16] LOTT, J. Some geometric properties of the Bakry-Émery-Ricci tensor. *Comment. Math. Helv.* 78, 4 (2003), 865–883.
- [17] LOTT, J., AND VILLANI, C. Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport. À paraître dans *Ann. of Math.* Disponible en ligne à [www.umpa.ens-lyon.fr/~cvillani/](http://www.umpa.ens-lyon.fr/~cvillani/).
- [18] LOTT, J., AND VILLANI, C. Weak curvature bounds and Poincaré inequalities. À paraître dans *J. Math. Pures Appl.* Disponible en ligne à [www.umpa.ens-lyon.fr/~cvillani/](http://www.umpa.ens-lyon.fr/~cvillani/).
- [19] MAGGI, F., AND VILLANI, C. Balls have the worst best Sobolev inequalities. *J. Geom. Anal.* 15, 1 (2005), 83–121.
- [20] MAGGI, F., AND VILLANI, C. Balls have the worst Sobolev inequalities. Part II : Variants and extensions. À paraître dans *Calc. Var Partial Differential Equations*.
- [21] MAUREY, B. Inégalité de Brunn-Minkowski-Lusternik, et autres inégalités géométriques et fonctionnelles. *Astérisque*, 299 (2005), Exp. No. 928, vii, 95–113. Séminaire Bourbaki. Vol. 2003/2004.
- [22] MCCANN, R. J. A convexity principle for interacting gases. *Adv. Math.* 128, 1 (1997), 153–179.
- [23] MCCANN, R. J. Polar factorization of maps on Riemannian manifolds. *Geom. Funct. Anal.* 11, 3 (2001), 589–608.
- [24] MILMAN, V. D., AND SCHECHTMAN, G. *Asymptotic theory of finite-dimensional normed spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Avec un appendice de M. Gromov.
- [25] OTTO, F., AND VILLANI, C. Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality. *J. Funct. Anal.* 173, 2 (2000), 361–400.
- [26] RACHEV, S., AND RÜSCHENDORF, L. *Mass Transportation Problems. Vol. I : Theory, Vol. II : Applications*. Probability and its applications. Springer-Verlag, New York, 1998.

- [27] STURM, K.-T. On the geometry of metric measure spaces I, II. *Acta Math.* 196, 1 (2006), 65–177.
- [28] STURM, K.-T., AND VON RENESSE, M.-K. Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature. *Comm. Pure Appl. Math.* 58, 7 (2005), 923–940.
- [29] VILLANI, C. Optimal transport, old and new. Notes de cours pour l'École d'été de Saint-Flour 2005, disponibles en ligne à [www.umpa.ens-lyon.fr/~cvillani](http://www.umpa.ens-lyon.fr/~cvillani).
- [30] VILLANI, C. *Topics in optimal transportation*, vol. 58 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [31] VON RENESSE, M.-K. On local Poincaré via transportation. À paraître dans *Math. Z.* Disponible en ligne à [math.MG/0505588](http://math.MG/0505588).

Cédric Villani  
UMPA, ENS Lyon (UMR CNRS 5669)  
46 allée d'Italie  
69364 Lyon Cedex 07 France  
[cvillani@umpa.ens-lyon.fr](mailto:cvillani@umpa.ens-lyon.fr)