Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de

Théorie spectrale et géométrie

Jean-Claude PICAUD

Entropie contre exposant critique

Volume 24 (2005-2006), p. 61-66.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2005-2006__24__61_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
Grenoble
TSG n° 24 (2007), p. 61 – 66

ENTROPIE CONTRE EXPOSANT CRITIQUE

par Jean-Claude Picaud

Avertissement : Nous donnons dans cette note une brève présentation d'un résultat exposé dans le cadre de ce séminaire. Nons l'avons conçue comme une lecture introductive à l'article [4], fruit d'une collaboration avec Françoise Dal'Bo, Marc Peigné et Andrea Sambusetti. Le lecteur pourra s'y reporter pour les démonstrations.

I – LES RÉSULTATS ET LEUR MOTIVATION

1. Le cadre

Soit X une variété de Hadamard, munie d'une métrique g à courbures sectionnelles K comprises entre deux constantes strictement négatives (*i.e.* $-b^2 \leq K \leq -a^2$). La tradition de la géométrie (élémentaire) qui remonte aux grecs, consiste à comprendre :

1. Les sous-ensembles remarquables de (X, g), et plus précisément :
   – les géodésiques de X, plus généralement ses sous-espaces totalement géodésiques,
   – les sphères de X (qui sont les hypersurfaces de niveau de la fonction distance à un point de X),
   – les horosphères $\partial\mathcal{H}_\xi$ de X (qui sont les hypersurfaces de niveau de la fonction distance à un point ξ « à l'infini » - comme les hyperplans affines euclidiens),
2. Le groupe $Is(X, g)$ des isométries de (X, g),
3. Les réseaux de $Is(X, g)$.

Si l'on considère une métrique générique, il n'existe pas de sous-espace totalement géodésique (hormis les géodésiques) et son groupe d'isométries est trivial. Par conséquent, le programme précédent n'a d'intérêt que si l'on suppose une *périodicité* de la métrique g. Si la métrique g est invariante par un sous-groupe discret d'isométries Γ, elle définit encore une métrique sur la variété quotient que l'on désignera encore g par abus de notation.

Du point de vue précédent, les métriques remarquables sur X sont celles qui admettent le plus de symétries : les métriques symétriques. Ces dernières admettent à la fois des réseaux Γ :

1. uniformes (*i.e.* des sous-groupes discrets agissant proprement discontinûment sans point fixe sur X tels que la variété quotient $M := X/\Gamma$ est compacte,
2. non uniformes (la variété quotient est non compacte mais de volume fini),
3. convexes co-compacts (le groupe Γ agit de manière cocompacte sur le sous-ensemble de X constitué des géodésiques à extrémités dans l'ensemble limite du groupe (voir ci-dessous),
4. etc.

D'une manière générale, lorsque $Is(X, g)$ contient des réseaux Γ, la géométrie de $M = X/\Gamma$ est naturellement reliée à celle de X, le lien étant mis en lumière par la dynamique de l'action de Γ sur le bord à l'infini $X(\infty)$ de X (*i.e.* l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques asymptotes). Ce bord à l'infini, sur lequel se prolonge l'action de Γ, admet un sous-ensemble fermé invariant minimal pour cette action qui est l'ensemble limite de Γ, défini par $\Lambda_\Gamma := \overline{\Gamma.x} \setminus \Gamma.x$ (ensemble qui ne dépend pas du point base $x \in X$). La dynamique de l'action de Γ sur son ensemble limite peut alors être considérée comme une version discrète de l'action du flot géodésique sur le fibré unitaire de la variété quotient M.

Partant, l'étude géométrique ou dynamique de (X, g) et de ses réseaux passe par la définition d'invariants qui dépendent de la métrique et qui reflètent les propriétés de symétrie de cette dernière. De ce point de vue, deux invariants numériques jouent un rôle capital :
Le premier est l'entropie volumique de (X, g) défini par

$$h(g) = \limsup_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \ln(v_X(x, R))$$

où $v(x, R)$ désigne le volume de la boule centrée en $x \in X$, de rayon R. Un résultat remarquable obtenu dans [1] est que ce nombre *de nature asymptotique*, constitue, lorsque l'on fixe le volume de la base M compacte, un *invariant complet* de la métrique localement symétrique sur M.

Le second invariant pour un sous-groupe discret Γ quelconque (qui n'est pas nécessairement un réseau), est l'abscisse de convergence de ses séries de Poincaré (dépendant d'une origine $x \in X$) :

$$P_\Gamma(s) = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(x,\gamma.x)},$$

abscisse qui ne dépend pas de $x \in X$, que l'on appelle exposant critique de Γ, et que l'on note δ_Γ. De la définition même de l'abscisse de convergence, il suit :

$$\delta_\Gamma = \limsup_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \ln(v_\Gamma(x, R))$$

où $v_\Gamma(x, R) = \sharp\{\gamma \ ; \ d(x, \gamma.x) \leq R\}$. Les lectures, de [9] et des références qui y sont données, nous renseignent sur l'importance de l'exposant critique d'un groupe et des séries de Poincaré qui lui sont associées pour l'étude des propriétés ergodiques du flot géodésique (critère d'ergodicité de Hopf-Tsuji-Sullivan, etc).

Une étude élémentaire de la transformée de Laplace de $t \mapsto v_X(x, t)$ permet d'établir l'inégalité

$$\delta_\Gamma \leq h(g)$$

et, lorsque Γ est un réseau uniforme, l'égalité :

$$\delta_\Gamma = h(g). \tag{1}$$

Une manière plus géométrique de comprendre cette coïncidence dans le cas où $M = X/\Gamma$ est compacte est d'exploiter les travaux de A. Manning ([6]), desquels il ressort l'égalité de l'entropie volumique $h(g)$ et de *l'entropie topologique de la métrique g sur M* qui, dans le contexte de la courbure négative, s'exprime par

$$h_{top}(g) = \limsup_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \ln(v_{per}(R))$$

où $v_{per}(R) = \sharp\{c$ géodésique périodique de $M \ ; \ l_g(c) \leq R\}$ (l_g désigne la longueur pour la métrique g sur la base).

A contrario, si $M = X/\Gamma$ n'est pas de volume fini, on ne peut espérer - en général - que l'égalité (1) ait lieu. Il suffit pour cela de considérer un réseau convexe cocompact de l'espace hyperbolique $(\mathbb{H}^n_\mathbb{R}, g_0)$ dont la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite est strictement plus petite que la dimension du bord à l'infini égale à $h(g_0) = n - 1$.

2. Le cas d'égalité pour les réseaux non uniformes

Le cas intermédiaire est celui des réseaux non uniformes : notre travail a consisté à comprendre si (1) est encore satisfaite pour un tel réseau. Si (X, g) est un espace symétrique de rang un, cette égalité découle d'un résultat difficile (de nature algébrique) d'Eskin et Mac Mullen sur les réseaux des espaces symétriques affines [5].

Il est important de noter que ces espaces sont à courbure $1/4$-pincée (*i.e.* $b^2/a^2 \leq 4$) et que cette condition de pincement sur la courbure est le point de bifurcation à partir duquel il est possible de construire des métriques dans des variétés de volume fini non compactes dont le flot géodésique admet des propriétés ergodiques singulières ([3], [7]). C'est ce principe qui a prévalu pour la construction de contre-exemples à l'égalité.

D'un point de vue heuristique, une hypothèse globale de pincement sur la courbure ne peut être nécessaire puisque (1) dans le cas compact est toujours réalisée. L'hypothèse doit porter sur *les bouts* de la variété quotient et doit par conséquent être de nature asymptotique. À chaque bout de M est naturellement associée une classe de conjugaison de sous-groupes paraboliques maximaux $\mathcal{P} \subset \Gamma$. Précisément, nous mettons en lumière une propriété portant sur les séries de Poincaré de ces sous-groupes paraboliques (et *leurs* exposants critiques - voir Définition I.1) dont on montre, d'une part qu'elle est suffisante, et, d'autre part, qu'un relâchement permet la construction de contre-exemples à l'égalité (1). Nous montrons aussi que la condition précédente, de nature dynamique, est entraînée par une condition *plus forte* de pincement $(1/4)$ sur la courbure dans les bouts de M (donc également de nature asymptotique).

3. Énonçé des résultats

Nous conservons les notations précédentes. La variété $M = X/\Gamma$ est de volume fini non compacte, à courbure négative pincée ; le groupe Γ est géométriquement fini. Rappelons alors les résultats fondamentaux qui nous serons utiles concernant cette classe de groupes (voir [2]) :

1. $\Lambda_\Gamma = X(\infty)$ est la réunion disjointe de l'ensemble limite radial et d'un nombre fini d'orbites $\Gamma.\xi_1, \cdots, \Gamma.\xi_\ell$ de *points fixes paraboliques bornés*, où $\mathcal{P}_i$ est l'unique sous-groupe parabolique maximal stabilisant ξ_i (pour $1 \leq i \leq \ell$) et chaque horosphère centrée en ξ_i.
2. Le sous-groupe parabolique maximal $\mathcal{P}_i$ agit sur une horosphère $\partial\mathcal{H}_i$ de manière cocompacte et nous notons D_i un domaine fondamental Borélien pour cette action.

Definition I.1. *Soit $H \subset \Gamma$ un sous-groupe. On appelle exposant critique de H, noté δ_H l'abscisse de convergence de sa série de Poincaré, donné par*

$$\delta_H = \limsup_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \ln(v_H(x,R))$$

où $v_H(x,R) = \sharp\{\gamma \in H \ ; \ d(x,\gamma.x) \leq R\}$, et exposant critique inférieur de H le nombre

$$\delta_H^- = \liminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \ln(v_H(x,R)) \tag{2}$$

T. Roblin montre dans [8] que l'exposant critique de n'importe quel groupe discret non élémentaire (donc en particulier d'un réseau) coïncide avec son exposant critique inférieur. Ce résultat nous est utile pour minorer le volume des boules de X en fonction de l'exposant critique de Γ.

A contrario, l'exposant critique $\delta_{\mathcal{P}_i}$ d'un sous-groupe parabolique $\mathcal{P}_i$ étant relié au taux de (dé)croissance exponentiel du volume des domaines fondamentaux D_i, donc au comportement asymptotique de la courbure dans les bouts, celui-là peut être distinct de l'exposant critique inférieur $\delta^-_{\mathcal{P}_i}$. Donnons la

Definition I.2. *On dit que Γ est paraboliquement $1/2$-pincé ou pincé au sens dynamique si pour tout sous-groupe parabolique maximal $\mathcal{P} \subset \Gamma$, on a*

$$\frac{\delta_{\mathcal{P}}}{\delta^-_{\mathcal{P}}} \leq 2 \tag{3}$$

Les résultats obtenus dans [4] s'énoncent alors de la manière suivante :

Theorem I.1. *Soit Γ un réseau non uniforme du groupe d'isométries d'une variété de Hadamard (X, g) à courbures pincées.*

1. *Si $M = X/\Gamma$ est asymptotiquement $1/4$-pincée, c'est-à-dire si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact C_ϵ de M tel que les courbures sectionnelles en dehors de ce compact sont $1/(4+\epsilon)$-pincées, alors Γ est paraboliquement $1/2$-pincé.*
2. *Si Γ est paraboliquement $1/2$-pincé, alors $\delta_\Gamma = h(g)$.*

Les hypothèses de pincement du théorème précédent sont optimales au sens du

Theorem I.2. *Pour tout $\eta > 0$, il existe une surface $M := X/\Gamma$ non compacte, de volume fini, munie d'une métrique paraboliquement $1/(2+\eta)$-pincée et pas $1/2$-pincée mais asymptotiquement $1/(4+2\eta)$-pincée telle que*

$$\delta_\Gamma < h(g). \tag{4}$$

II – Les références

Références

[1] Besson G., Courtois G., Gallot S. *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, Geometric and Functional Analysis, vol. 5, n° 5 (1995), pp 732-799.

[2] Bowditch B.H. *Geometrical finiteness with variable negative curvature*, Duke Math. J. vol. 77 (1995), pp 229-274.

[3] Dal'bo F., Otal J.-P., Peigné M., *Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis*, Israel Jour. Math. 118, (2000), pp 109-124.

[4] Dal'bo F., Peigné M., Picaud J.-C., Sambusetti A. *On the growth of nonuniform lattices in pinched negatively curved manifolds*, soumis pour publication Mai 2006.

[5] ESKIN A., MCMULLEN C. *Mixing, counting and equidistribution in Lie groups*, (1995) pp 181-209.

[6] MANNING A. *Topological entropy for geodesic flows*, Annals of Mathematics, **110** (1979), pp 567-573.

[7] OTAL J.-P. ., PEIGNÉ M. *On some exotic kleinian groups*, Preprint.

[8] ROBLIN T. *Sur la fonction orbitale des groupes discrets en courbure négative*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002) n°1, pp 145-151.

[9] ROBLIN T. *Ergodicité et équidistribution en courbure négative*, Mémoires S.M.F. n.95 (2003).

Jean-Claude Picaud
Université de Tours
Faculté des Sciences et Techniques
Laboratoire de Mathématiques et physique théorique
Parc de Grandmont
37200 Tours, France

jean-claude.picaud@univ-tours.fr