

Institut Fourier — Université de Grenoble I

*Actes du séminaire de*  
**Théorie spectrale  
et géométrie**

Julien PAUPERT

**Applications moment, polygones de configurations et groupes discrets de réflexions complexes dans  $PU(2, 1)$**

Volume 24 (2005-2006), p. 45-60.

[http://tsg.cedram.org/item?id=TSG\\_2005-2006\\_\\_24\\_\\_45\\_0](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2005-2006__24__45_0)

© Institut Fourier, 2005-2006, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

# APPLICATIONS MOMENT, POLYGONES DE CONFIGURATIONS ET GROUPES DISCRETS DE RÉFLEXIONS COMPLEXES DANS $PU(2, 1)$

*par* Julien Paupert

Nous présentons dans cet article des résultats concernant les sous-groupes à deux générateurs elliptiques de  $PU(2, 1)$ , groupe des isométries holomorphes du plan hyperbolique complexe  $H_{\mathbb{C}}^2$ . Dans la première partie nous énonçons les résultats principaux de [Pau2]; ceux-ci décrivent les valeurs propres admissibles pour trois matrices elliptiques  $A, B, C$  dans  $PU(2, 1)$  telles que  $ABC = 1$ . Notre point de vue est de décrire géométriquement l'image d'une certaine application moment  $\tilde{\mu}$  associée à l'action diagonale du groupe (non compact)  $PU(2, 1)$  par conjugaison sur un produit  $C_1 \times C_2$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux classes de conjugaison elliptiques dans  $PU(2, 1)$ . De façon surprenante, cette image n'est pas toujours convexe, mais est la réunion d'au plus trois polygones convexes dans la surface  $\mathbb{T}^2/\mathfrak{S}_2$ .

La deuxième partie est consacrée à la description d'exemples de telles images, dessins à l'appui; la plupart de ces exemples apparaissaient déjà dans le dernier chapitre de [Pau1].

Nous présentons dans la dernière partie des résultats en commun avec John Parker (voir [ParPau] à paraître), qui indiquent en quoi ces polygones peuvent servir de carte pour chercher des nouveaux sous-groupes discrets (et idéalement des réseaux) dans  $PU(2, 1)$ . L'étude des réseaux de Mostow construits dans [Mos1] était d'ailleurs le point de départ des questions précédentes.

Aucune connaissance de la théorie des applications moment (dans le cadre hamiltonien ou quasi-hamiltonien) n'est nécessaire pour la compréhension de ce texte. On supposera par contre une certaine familiarité avec la géométrie de  $H_{\mathbb{C}}^2$  (sous-espaces, isométries), pour laquelle le lecteur pourra consulter le traité [G], ou le premier chapitre de [Pau1].

## I – IMAGE DE L'APPLICATION MOMENT ET POLYGONES DE CONFIGURATIONS

On appellera ici *groupe triangulaire elliptique* dans  $PU(2, 1)$  tout sous-groupe engendré par deux transformations elliptiques  $A$  et  $B$  dont le produit  $AB$  est aussi elliptique. La question que l'on se pose est alors la suivante : dans un tel groupe, quelles sont les classes de conjugaison possibles pour le produit  $AB$  lorsque  $A$  et  $B$  sont chacun dans une classe de conjugaison fixée ?

C'est un problème classique dans un groupe linéaire de caractériser les valeurs propres possibles de matrices  $A_1, \dots, A_n$  vérifiant  $A_1 \dots A_n = 1$ . Dans le groupe  $GL(n, \mathbb{C})$ , cette question est connue sous le nom de problème de Deligne-Simpson et provient de l'étude des systèmes différentiels dits fuchsien sur la sphère de Riemann  $\mathbb{C}P^1$ . Ce problème est intimement lié au problème de Riemann-Hilbert (ou 21<sup>ème</sup> problème de Hilbert) et a fait l'objet de beaucoup de travaux ; on pourra se reporter à [Ko] pour un panorama de ces questions et des réponses partielles dont on dispose à ce jour. Le cas opposé du groupe compact  $U(n)$  a aussi été très étudié, et essentiellement résolu dans [AW], [Be], [Bi2], [K11] ; il est lié de façon surprenante à plusieurs branches des mathématiques, voir les panoramas [F] et [K12]. Ce cas du groupe  $U(n)$  a aussi été étudié du point de vue des sous-espaces lagrangiens et des réflexions associées de  $\mathbb{C}^n$  dans [FW1], dont on a adapté quelques idées au cadre du groupe non compact  $PU(2, 1)$ .

Rappelons qu'une classe de conjugaison de transformations elliptiques dans  $PU(2, 1)$  est caractérisée par une paire d'angles non ordonnée (le stabilisateur d'un point étant une copie de  $U(2)$ ) ; notre question revient alors à déterminer l'image dans la surface  $\mathbb{T}^2/\mathfrak{S}_2$  de l'application  $\tilde{\mu}$ , qui est la composée du produit du groupe  $\mu$ , restreint à un produit  $C_1 \times C_2$  de classes de conjugaison, suivi de la projection  $\pi$  de  $G = PU(2, 1)$  sur ses classes de conjugaison :

$$\tilde{\mu} : (C_1 \times C_2) \cap \mu^{-1}(\{\text{elliptiques}\}) \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^2/\mathfrak{S}_2$$

Cette application est un exemple d'application moment associée à l'espace quasi-hamiltonien  $C_1 \times C_2$ , notion définie dans [AMM] comme généralisation à valeurs dans le groupe de la notion classique (à valeurs dans l'algèbre de Lie) d'application moment associée à l'action hamiltonnienne d'un groupe sur une variété symplectique (voir également [Sf] pour plus de détails sur cet aspect).

Nous décrivons dans [Pau2] l'image de cette application  $\tilde{\mu}$ , qui se révèle être la réunion d'au plus trois polygones convexes (se recoupant parfois) dans  $\mathbb{T}^2/\mathfrak{S}_2$ . En particulier l'image n'est pas toujours convexe, ni même localement convexe, dans les cas où les différents polygones se recourent.

On dispose dans le cas classique de théorèmes généraux de convexité de l'image, le plus célèbre étant celui d'Atiyah et Guillemin-Sternberg (voir [A], [GS1], [GS2]), qui stipule dans les cas d'action d'un tore sur une variété symplectique connexe et compacte que l'image de l'application moment est un

polytope convexe, l'enveloppe convexe des images des points fixes de l'action. Dans le cas d'actions de groupes non compacts, certaines conditions au but sont requises pour obtenir de tels énoncés de convexité de l'image (voir [We]).

Notre description de l'image peut être résumée par les deux résultats ci-dessous ; notons qu'en pratique nos critères déterminent entièrement l'image pour toute paire de classes de conjugaison elliptiques  $C_1$  et  $C_2$ . Différents exemples de ces polygones images sont décrits et dessinés dans la partie suivante.

On utilise une approche directe, reposant sur une description explicite soignée de l'image des groupes réductibles (au sens des représentations, à savoir ici les groupes qui fixent un point de  $\mathbb{C}P^2$ ) ; l'idée principale (inspirée de la question analogue dans  $U(n)$  étudiée dans [FW1]) étant que les points correspondant aux groupes irréductibles se projettent sur des points intérieurs de l'image, laquelle sera donc une réunion de *chambres* délimitées par les *murs réductibles*. (En effet l'image est également fermée ; Falbel et Wentworth ont montré dans [FW2] que ceci est vrai dans tout espace symétrique de rang 1.)

Les groupes réductibles sont ici de deux types, selon que le point fixe de l'action sur  $\mathbb{C}P^2$  est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'espace hyperbolique complexe  $H_{\mathbb{C}}^2$  (il ne peut pas être au bord si les générateurs sont elliptiques et ne sont pas tous deux des réflexions complexes). Lorsque ce point fixe est dans  $H_{\mathbb{C}}^2$ , le groupe  $\Gamma = \langle A, B \rangle$  est conjugué à un sous-groupe de  $U(2)$  (le stabilisateur d'un point dans  $PU(2, 1)$ ) ; on dira alors que  $\Gamma$  est *réductible sphérique*. Lorsque le point fixe est à l'extérieur de  $H_{\mathbb{C}}^2$ , le groupe  $\Gamma = \langle A, B \rangle$  est conjugué à un sous-groupe de  $P(U(1) \times U(1, 1))$  (le stabilisateur d'une géodésique complexe, ou  $\mathbb{C}$ -plan) ; on dira alors que  $\Gamma$  est *réductible hyperbolique*. Il y a alors deux points spéciaux, qui sont à la fois réductibles sphériques et réductibles hyperboliques : ce sont les points où  $\Gamma$  est abélien (autrement dit, les deux générateurs ont sous forme matricielle une base commune de vecteurs propres). On dira que ces deux groupes sont *totalelement réductibles*.

L'image dans  $\mathbb{T}^2/\mathfrak{S}_2$  de tous ces groupes réductibles est alors un graphe trivalent à deux sommets, jouissant des propriétés suivantes (que l'on démontre dans [Pau1] ou [Pau2]). Les deux sommets sont les images des deux groupes totalement réductibles. Ils sont joints par un segment de droite de pente  $-1$  qui est l'image des groupes réductibles sphériques. Deux autres segments sont issus de chaque sommet, l'un de pente  $2$  et l'autre de pente  $1/2$ , correspondant aux deux familles réductibles hyperboliques contenant le sommet. Notons que la pente d'une droite est bien définie dans le tore, mais qu'elle n'est définie qu'à inversion près dans le quotient  $\mathbb{T}^2/\mathfrak{S}_2$ . On fixe ici une fois pour toutes une carte affine donnée pour  $\mathbb{T}^2/\mathfrak{S}_2$ , à savoir le demi-carré inférieur comme dans la figure 1. Il est important de noter que les bords du carré en question ont un sens géométrique (autrement dit, le tore n'est pas homogène) parce qu'ils correspondent à des classes de conjugaison spéciales. Il y a en fait une

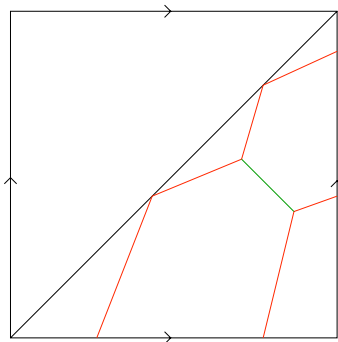


FIG. 1 – Une configuration de réductibles

subtilité, parce que ces points du bord représentent chacun deux classes de conjugaison distinctes, l'une composée de  $\mathbb{C}$ -réflexions (*i.e.* des transformations elliptiques qui fixent un  $\mathbb{C}$ -plan) et l'autre de transformations paraboliques ; ces deux classes sont indiscernables du point de vue des angles ou de la trace (à comparer avec le "triangle" de Goldman dans le plan complexe des traces, p. 204–205 de [G], voir également le premier chapitre de [Pau1]).

On notera  $W_{red} \subset \mathbb{T}^2/\mathfrak{S}_2$  l'image de tous les groupes réductibles, et on appellera chaque segment de droite de  $W_{red}$  un *mur*. Alors  $W_{red}$  avec les deux axes  $\{0\} \times S^1$  et  $S^1 \times \{0\}$  sépare  $\mathbb{T}^2/\mathfrak{S}_2$  en une union de polygones convexes ouverts que l'on appellera des *chambres*. Une analyse détaillée montre qu'il y a au plus 9 de ces chambres. On appellera également *chambre fermée* la réunion d'une chambre, des segments de murs réductibles qui la bordent, ainsi que des éventuels points des axes qui sont à la frontière de la chambre et qui correspondent à un produit elliptique.

**Théorème I.1.** *Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux classes de conjugaison elliptiques dans  $PU(2, 1)$ , dont une au moins n'est pas une classe de réflexions complexes. Alors l'image de l'application  $\tilde{\mu}$  dans  $\mathbb{T}^2/\mathfrak{S}_2$  est une réunion de chambres fermées, contenant au voisinage de chaque sommet totalement réductible l'enveloppe convexe des murs réductibles qui contiennent ce sommet.*

Ceci évoque le résultat d'Atiyah-Guillemin-Sternberg, sachant que dans notre cas les groupes réductibles sont ce qui s'approche le plus de points fixes sous l'action de  $PU(2, 1)$  par conjugaison (ce sont eux qui ont les plus petites orbites).

En ce qui concerne l'hypothèse faite sur  $C_1$  et  $C_2$ , il est facile de voir que deux réflexions complexes engendrent toujours un groupe réductible, parce que leurs miroirs ( $\mathbb{C}$ -plans fixes) s'intersectent toujours dans  $\mathbb{C}P^2$ , et que l'image est donc dans ce cas une réunion non convexe de segments ; voir figure 4.

On a obtenu dans [Pau2] des critères permettant de déterminer exactement quelles chambres sont dans l'image de  $\tilde{\mu}$ . Ceci nous permet en particulier de déterminer quand cette application est surjective :

**Théorème I.2.** *Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux classes de conjugaison elliptiques dans  $PU(2, 1)$ , correspondant aux paires d'angles  $\{\theta_1, \theta_2\}$  et  $\{\theta_3, \theta_4\}$ , avec  $\theta_i \in [0, 2\pi[$ ,  $\theta_1 \geq \theta_2$  et  $\theta_3 \geq \theta_4$ . Soit :*

$$\tilde{\mu} : (C_1 \times C_2) \cap \mu^{-1}(\{\text{elliptiques}\}) \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^2 / \mathfrak{S}_2$$

*l'application moment associée. Alors :*

$$\tilde{\mu} \text{ est surjective si et seulement si } \iff \begin{cases} \theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 - 2\theta_4 \geq 2\pi \\ 2\theta_1 - \theta_2 + 2\theta_3 - \theta_4 \geq 6\pi \end{cases}$$

Remarquons qu'il n'existe pas de telles conditions dans  $GL(3, \mathbb{C})$  : si  $C_1, C_2$  et  $C_3$  sont trois classes de conjugaison semisimples dans  $GL(3, \mathbb{C})$ , alors il existe des matrices  $M_i \in C_i$  telles que  $M_1 M_2 M_3 = \text{Id}$ , par les résultats de Simpson (voir [Ko]). Autrement dit,  $\tilde{\mu}$  est toujours surjective. Notons que les classes de conjugaison semisimples dans  $PU(2, 1)$  sont celles de transformations elliptiques ou loxodromiques. En ce qui concerne les transformations loxodromiques, notre analyse implique que si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux classes de conjugaison elliptiques dans  $PU(2, 1)$  (dont une au moins n'est pas une classe de réflexions complexes), alors le produit  $AB$  peut prendre ses valeurs dans toute classe de conjugaison loxodromique lorsque  $(A, B)$  parcourt  $C_1 \times C_2$ . (Falbel et Wentworth obtiennent dans [FW2] le résultat analogue lorsque  $C_1$  et  $C_2$  sont elles-mêmes deux classes de conjugaison loxodromiques). Ceci découle du fait que l'image des paires réductibles ne sépare pas l'espace des classes de conjugaison loxodromiques de  $PU(2, 1)$  (il n'y a donc qu'une chambre).

Notons enfin que ces questions étaient motivées par l'étude des réseaux  $\Gamma(p, t)$  de Mostow construits dans [Mos1]; chacune de ses familles  $\Gamma(p, t)$  pour  $p$  fixé peut se voir dans le polygone image pour les paires d'angles  $\{0, 2\pi/p\}$  et  $\{2\pi/3, -2\pi/3\}$ . L'image dans ce cas est un trapèze (dégénéré en un triangle pour  $p = 3$ ), à l'intérieur duquel la famille considérée par Mostow est un segment traversant le polygone de part en part, voir figures 5 et 6.

## II – EXEMPLES

On étudie dans cette section des exemples précis des polygones image de  $\tilde{\mu}$  que l'on a décrits. Chacun de ces exemples est donné par deux paires d'angles  $\{\theta_1, \theta_2\}$  et  $\{\theta_3, \theta_4\}$ , correspondant aux classes de conjugaison elliptiques des deux générateurs  $A$  et  $B$ . Rappelons que l'application  $\tilde{\mu}$  associe à une paire d'isométries elliptiques  $(A, B)$  (chacune dans une classe de conjugaison fixée) la paire d'angles du produit  $AB$  lorsque celui-ci est elliptique.

On commence par les cas dégénérés où l'un au moins des générateurs est une réflexion complexe (un angle est nul) ou une réflexion complexe par rapport à un point (les deux angles sont égaux).

Le cas qui nous intéresse particulièrement est celui où l'un des générateurs est une réflexion complexe, puisque c'est le cas des exemples qui ont fourni la motivation d'origine de ce travail, à savoir les réseaux  $\Gamma(p, t)$  de Mostow (voir [Mos1], [Mos2] et les figures 5 et 6). On donnera plus de détails sur ces exemples dans la dernière section, où l'on explique pourquoi et comment on espère trouver de nouveaux groupes discrets dans ces images. De plus, dans ces cas le polygone image est exactement l'espace de configurations des groupes qui nous intéressent ; plus précisément :

**Proposition II.1.** *Soient  $A$  et  $B$  deux transformations elliptiques dans  $PU(2, 1)$ . Si  $A$  ou  $B$  est une réflexion complexe ou une réflexion complexe par rapport à un point, alors le groupe  $\langle A, B \rangle$  est déterminé à conjugaison près par les classes de conjugaison de  $A$ ,  $B$  et  $AB$ .*

Notons qu'en général il faut fixer 5 classes de conjugaison (ou traces) pour déterminer  $\langle A, B \rangle$ , par exemple celles des mots  $A$ ,  $B$ ,  $AB$ ,  $A^{-1}B$  et  $[A, B]$  (voir [Wi] ou [Kh]). On a ainsi des familles à 4 paramètres de groupes deux à deux non conjugués, pour lesquelles les classes de conjugaison de  $A$ ,  $B$  et  $AB$  sont fixées. Le résultat dans le cas présent vient de la plus grande isotropie qu'admettent alors les configurations de points fixes.

Les exemples génériques que l'on donne ensuite parcourent les différents types de configurations réductibles que l'on a décrits dans [Pau1] et [Pau2]. On espère également qu'ils donneront au lecteur une certaine intuition quant au comportement possible de ces objets : murs intérieurs et extérieurs, auto-intersection...

## 1. Les deux générateurs sont des réflexions complexes par rapport à un point

Ceci constitue le cas le plus dégénéré au sens où les réductibles consistent simplement en un sommet totalement réductible avec un segment réductible hyperbolique, et l'image complète est réduite à cela (voir figure 2). En effet, une réflexion complexe par rapport à un point stabilise tous les  $\mathbb{C}$ -plans passant par son point fixe (dans  $U(2)$  un tel élément est un élément  $e^{i\theta} \cdot \text{Id}$  du centre) ; ainsi deux telles transformations engendrent toujours un groupe réductible hyperbolique : elles stabilisent toutes deux le  $\mathbb{C}$ -plan passant par les deux points fixes.

## 2. L'un des générateurs est une réflexion complexe par rapport à un point

Il n'y a comme ci-dessus qu'un sommet totalement réductible, mais il donne maintenant lieu à deux familles réductibles hyperboliques, qui délimitent

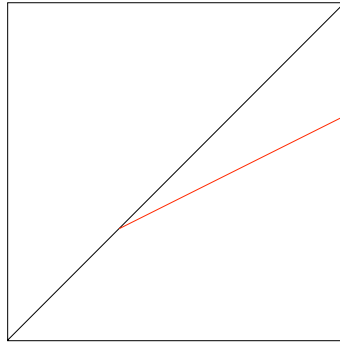


FIG. 2 – L'image pour les paires d'angles  $\{\frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}\}, \{\frac{2\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}\}$

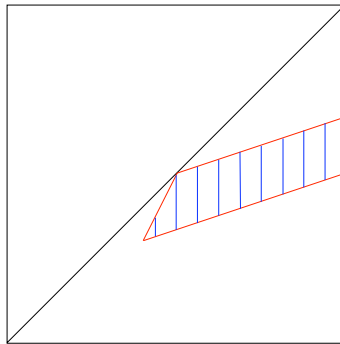


FIG. 3 – L'image pour les paires d'angles  $\{\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}\}, \{\frac{2\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}\}$

une enveloppe convexe d'intérieur non vide (voir figure 3), sauf si l'autre générateur est une réflexion complexe (resp. par rapport à un point). L'image est alors exactement cette enveloppe convexe par l'argument suivant. Si  $A$  ou  $B$  est un elliptique spécial (une réflexion complexe ou une réflexion complexe par rapport à un point) et si  $AB$  est aussi un elliptique spécial, alors tout le groupe est réductible. En effet, ces transformations fixent alors chacune une droite complexe dans  $\mathbb{C}P^2$ , et celles-ci doivent se couper dans  $\mathbb{C}P^2$ . Ceci exclut donc toutes les chambres qui touchent la diagonale ailleurs qu'en un réductible.

### 3. Les deux générateurs sont des réflexions complexes : un exemple non convexe

Ceci est le cas où notre argument de convexité locale autour d'un sommet totalement réductible est en défaut, et il l'est pour la bonne raison que le résultat est faux dans ce cas. Il y a maintenant deux sommets totalement



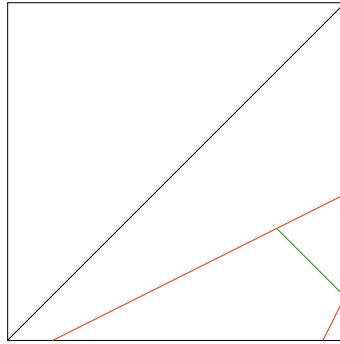


FIG. 4 – L'image pour les paires d'angles  $\{0, \frac{2\pi}{3}\}$ ,  $\{0, \frac{8\pi}{5}\}$  (non convexe)

réductibles distincts, joints par le segment réductible sphérique, ainsi qu'un segment réductible hyperbolique (les autres sont réduits à un point) qui passe par les deux sommets, voir figure 4. L'image complète est alors la réunion non convexe de ces deux segments, parce que deux réflexions complexes engendrent toujours un groupe réductible (leurs miroirs, ou lieux des points fixes, se coupent dans  $\mathbb{C}P^2$ ).

#### 4. L'un des générateurs est une réflexion complexe : familles contenant les réseaux $\Gamma(p, t)$ de Mostow

La configuration réductible est maintenant la réunion du segment réductible sphérique avec deux segments réductibles hyperboliques (un à chaque sommet) ; on sait comme ci-dessus que l'image complète est exactement l'enveloppe convexe des réductibles (voir figures 5, 6). On a également représenté sur ces images un segment en pointillés qui est la famille à un paramètre  $\Gamma(p, t)$  de Mostow (chaque valeur entière de  $p$  correspond à un dessin différent). On va se concentrer dans la dernière section sur ces groupes  $\Gamma(p, t)$  (qui sont avec nos notations situés sur un segment dans l'image pour les paires  $\{\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\}$ ,  $\{0, \frac{2\pi}{p}\}$ ).

#### 5. Exemples génériques

On en vient maintenant à des exemples génériques qui illustrent plus fidèlement notre description des configurations réductibles. Comme on l'a dit, les valeurs ont été choisies pour montrer toute la palette des types de configurations réductibles mentionnés dans notre classification. Notons également quelques caractéristiques visibles sur ces images. Le cas des paires  $\{\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}\}$ ,  $\{\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{6}\}$  (figure 7) montre des points d'auto-intersection de la charpente réductible, entre différents segments réductibles hyperboliques. On

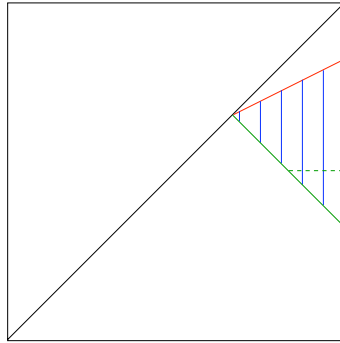


FIG. 5 – L'image pour les paires d'angles  $\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}, \{0, \frac{2\pi}{3}\}$ ; le segment en pointillés représente la famille  $\Gamma(3, t)$  de Mostow.

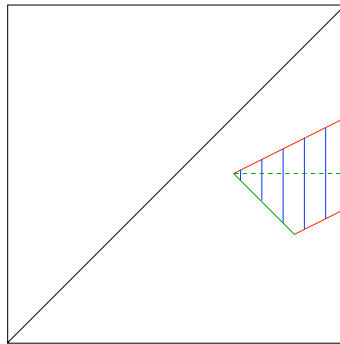
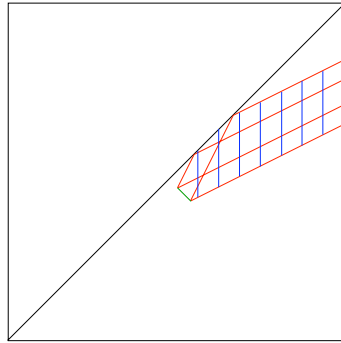
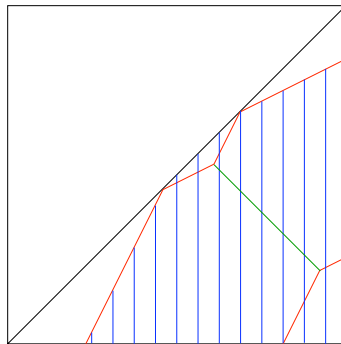


FIG. 6 – L'image pour les paires d'angles  $\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}, \{0, \frac{2\pi}{6}\}$ ; le segment en pointillés représente la famille  $\Gamma(6, t)$  de Mostow.

peut également remarquer qu'un même segment réductible hyperbolique peut avoir une partie qui est un mur extérieur de l'image, et une autre qui est un mur intérieur (après avoir rebondi sur la diagonale). L'image contient également tout un segment de la diagonale. Les images suivantes fournissent des exemples de sommets intérieurs (des sommets totalement réductibles qui sont des points intérieurs de l'image).

### III – GROUPES DISCRETS ENGENDRÉS PAR DES RÉFLEXIONS COMPLEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR

Cette partie est un travail commun avec John Parker ([ParPau]). Nous considérons les groupes triangulaires symétriques dans  $PU(2, 1)$  engendrés par trois réflexions complexes d'ordre  $p$ . Nous nous intéressons particulièrement aux groupes dans lesquels certains mots sont elliptiques, et

FIG. 7 – L'image pour les paires d'angles  $\{\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}\}, \{\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{6}\}$ FIG. 8 – L'image pour les paires d'angles  $\{\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{4}\}, \{\frac{2\pi}{5}, -\frac{2\pi}{6}\}$ 

donnons des conditions nécessaires de discrétude pour de tels groupes. La motivation principale est que ces groupes sont des candidats de réseaux non arithmétiques.

Dans [Mos1] Mostow a construit les premiers exemples de réseaux non arithmétiques dans  $PU(2,1)$ . Ces réseaux étaient engendrés par trois réflexions complexes  $R_1, R_2$  et  $R_3$  ayant la propriété qu'il existe une isométrie  $J$  d'ordre 3 telle que  $R_{j+1} = JR_jJ^{-1}$ . Dans les exemples de Mostow les générateurs  $R_j$  ont pour ordre  $p = 3, 4$  ou  $5$ . Plus tard Deligne et Mostow ont construit d'autres réseaux non arithmétiques comme groupes de monodromie de certaines fonctions hypergéométriques dans [DM] (ces réseaux étaient connus de Picard qui ne considéra pas leur nature arithmétique). Ces réseaux sont (commensurables à) des groupes engendrés par des réflexions complexes  $R_j$  pour d'autres valeurs de  $p$ ; voir Mostow [Mos2] et Sauter [Sa]. Par la suite, aucun nouveau réseau non arithmétique n'a été construit.

Dans [Par], Parker a considéré le cas  $p = 2$ , c'est-à-dire des involutions complexes  $I_1, I_2$  et  $I_3$  avec une isométrie  $J$  d'ordre 3 telle que  $I_{j+1} = JI_jJ^{-1}$ .

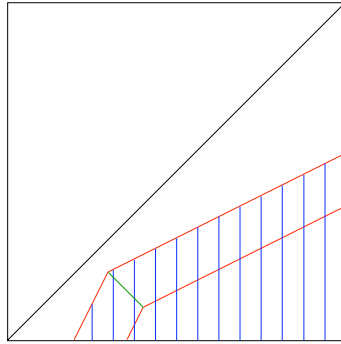


FIG. 9 – L'image pour les paires d'angles  $\{-\frac{2\pi}{10}, \frac{2\pi}{10}\}, \{\frac{4\pi}{10}, \frac{6\pi}{10}\}$

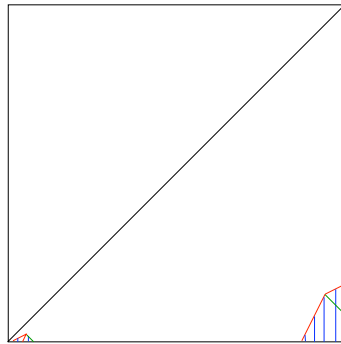


FIG. 10 – L'image pour les paires d'angles  $\{\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}\}, \{-\frac{2\pi}{5}, -\frac{2\pi}{7}\}$

En particulier il a utilisé un théorème de Conway et Jones ([CJ]) pour classer tous les tels groupes où  $I_1I_2$  et  $I_1I_2I_3$  sont elliptiques d'ordre fini.

De façon remarquable, trouver les groupes pour lesquels  $R_1R_2$  et  $R_1R_2R_3$  sont elliptiques d'ordre fini avec  $p \geq 3$  demande de résoudre la même équation que pour  $p = 2$ . Dans [ParPau], nous utilisons dans le cas général les solutions de cette équation trouvées dans [Par] en utilisant [CJ].

Nous décrivons l'espace des configurations de tous les groupes engendrés par une réflexion complexe  $R_1$  d'ordre  $p$  et une isométrie elliptique régulière  $J$  d'ordre 3 dans  $PU(2, 1)$ . Cet espace de configurations est paramétré par la classe de conjugaison du produit  $R_1J$ , que l'on représente géométriquement de deux manières. La première, suivant Goldman, Parker, est de considérer la trace de  $R_1J$ ; ceci détermine la classe de conjugaison de  $R_1J$  lorsque celui-ci est loxodromique, mais il y a une indétermination d'ordre 3 s'il est elliptique ou parabolique. La deuxième manière, suivant la dernière partie de [Pau1] et [Pau2], est d'utiliser les invariants géométriques de la classe de conjugaison, à savoir une paire d'angles pour les isométries elliptiques et une paire

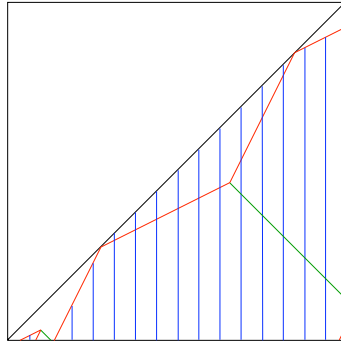


FIG. 11 – L'image pour les paires d'angles  $\{\frac{2\pi}{4}, -\frac{2\pi}{6}\}, \{\frac{2\pi}{5}, -\frac{2\pi}{7}\}$

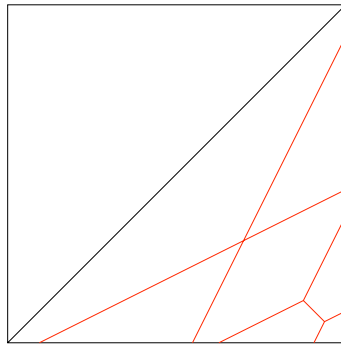


FIG. 12 – L'image pour les paires d'angles  $\{\varepsilon, 2\pi - \varepsilon\}, \{\eta, 2\pi - \eta\}$ ; ici  $\tilde{\mu}$  est surjective

(angle, longueur) pour les isométries loxodromiques. Nous utilisons les deux espaces de paramètres dans [ParPau], où l'on se concentre sur le cas elliptique. Notre premier résultat est l'analogie direct du théorème principal de [Par], et peut être énoncé comme suit :

**Théorème III.1.** *Soit  $R_1$  une réflexion complexe d'ordre  $p$  et  $J$  un elliptique régulier d'ordre 3 dans  $PU(2, 1)$ . Supposons que  $R_1J$  et  $R_1R_2 = R_1JR_1J^{-1}$  sont elliptiques. Si le groupe  $\Gamma = \langle R_1, R_2, R_3 \rangle$  est discret alors on est dans l'un des cas suivants :*

- $\Gamma$  est un réseau de Mostow.
- $\Gamma$  est un sous-groupe distingué d'un groupe de Mostow.
- $\Gamma$  est l'un des groupes sporadiques décrits ci-dessous.

Les groupes sporadiques correspondent aux 18 solutions exceptionnelles venant de [CJ], qui ne dépendent pas de  $p$  (les groupes, eux, changent bien sûr avec  $p$ ). Nous déterminons pour chaque  $p \geq 3$  lesquels de ces points sont

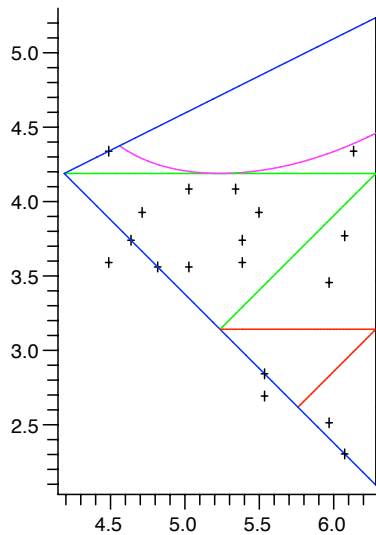


FIG. 13 – Groupes discrets dans le triangle des configurations pour  $p = 3$

situés dans notre espace de configurations. On doit alors analyser chacun de ces groupes pour déterminer s’il est discret, si oui si c’est un réseau, et si oui s’il est arithmétique. Nous illustrons des manières d’aborder ces questions en montrant que certains groupes sont arithmétiques, et d’autres sont non discrets. Nous analysons en détail la situation pour  $p = 3$ , qui peut être résumée ainsi :

**Théorème III.2.** *Il y a 16 groupes sporadiques pour  $p = 3$ , avec les propriétés suivantes :*

- *Quatre d’entre eux ont un point fixe dans  $H_{\mathbb{C}}^2$ .*
- *Un stabilise une droite complexe.*
- *Un est contenu dans un réseau arithmétique.*
- *Les dix autres ne sont dans aucun cas précédent.*

La question cruciale est alors de déterminer lesquels des dix groupes restants sont discrets. Nous donnons une réponse négative pour trois d’entre eux, en trouvant des mots elliptiques d’ordre infini dans ces groupes.

La figure 13 montre le cas où  $R_1$  est d’ordre 3 ; le triangle extérieur est le polygone des configurations décrit dans les parties précédentes. La courbe en zigzag a en fait deux composantes qui correspondent aux deux familles évoquées ci-dessus ; on a également marqué les 16 points sporadiques (deux des points cités dans le théorème ci-dessus sont à l’extérieur du triangle de configurations).

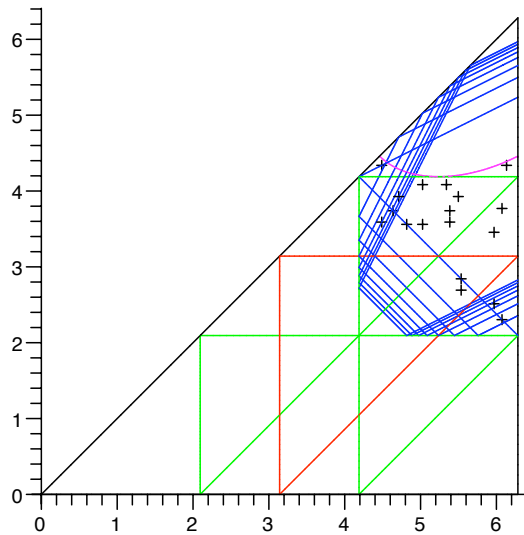


FIG. 14 – Groupes discrets et polygone de configurations pour  $p = 2, 3, \dots, 10$

Notons que les seuls groupes discrets connus dans cette image sont les réseaux de Mostow de [Mos1], tous situés sur le petit segment horizontal (voir la dernière partie de [Pau1]).

Le coup de chance dans cette approche est que les solutions en termes d'angles (données par le théorème de Conway et Jones) sont les mêmes pour toutes les valeurs de  $p$ ; il n'y a que le polygone de configurations associé qui change (et il y a alors plus ou moins de solutions possibles). La figure 14 illustre ce phénomène pour  $p = 2, 3, \dots, 10$ .

## RÉFÉRENCES

- [A] M. F. Atiyah; *Convexity and commuting Hamiltonians*. Bull. London Math. Soc. **14**(1) (1982), 1–15.
- [AMM] A. Alekseev, A. Malkin, E. Meinrenken; *Lie group valued moment maps*. J. Diff. Geom. **48**(3) (1998), 445–495.
- [AW] S. Agnihotri, C. Woodward; *Eigenvalues of products of unitary matrices and quantum Schubert calculus*. Math. Res. Lett. **5**(6) (1998), 817–836.
- [Be] P. Belkale; *Local systems on  $P^1 - S$  for  $S$  a finite set*. Compositio Math. **129**(1) (2001), 67–86.

- [Bi1] I. Biswas ; *A criterion for the existence of a parabolic stable bundle of rank two over the projective line*. *Internat. J. Math.* **9(5)** (1998), 523–533.
- [Bi2] I. Biswas ; *On the existence of unitary flat connections over the punctured sphere with given local monodromy around the punctures*. *Asian J. Math.* **3(2)** (1999), 333–344.
- [CJ] J.H. Conway, A.J. Jones. *Trigonometric diophantine equations (On vanishing sums of roots of unity)*. *Acta Arithmetica* **30** (1976), 229–240.
- [DM] P. Deligne, G. D. Mostow ; *Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy*. *Publ. Math. IHES* **63** (1986), 5–89.
- [DFP] M. Deraux, E. Falbel, J. Paupert ; *New constructions of fundamental polyhedra in complex hyperbolic space*. *Acta Math.* **194** (2005), 155–201.
- [FPau] E. Falbel, J. Paupert ; *Fundamental domains for finite subgroups in  $U(2)$  and configurations of Lagrangians*. *Geom. Dedicata* **109** (2004), 221–238.
- [FW1] E. Falbel, R. Wentworth ; *Eigenvalues of products of unitary matrices and Lagrangian involutions*. *Topology* **45** (2006), 65–99.
- [FW2] E. Falbel, R. Wentworth ; *Produits d'isométries d'un espace symétrique de rang un et compacité à la Mumford-Mahler*. Preprint 2006.
- [FZ] E. Falbel, V. Zocca ; *A Poincaré's polyhedron theorem for complex hyperbolic geometry*. *J. Reine Angew. Math.* **516** (1999), 138–158.
- [F] W. Fulton ; *Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus*. *Bull. Amer. Math. Soc.* **37(3)** (2000), 209–249.
- [G] W.M. Goldman ; *Complex Hyperbolic Geometry*. *Oxford Mathematical Monographs*. Oxford Science Publications (1999).
- [GS1] V. Guillemin, S. Sternberg ; *Convexity properties of the moment mapping*. *Invent. Math.* **67(3)** (1982), 491–513.
- [GS2] V. Guillemin, S. Sternberg ; *Convexity properties of the moment mapping II*. *Invent. Math.* **77(3)** (1984), 533–546.
- [Kh] V. T. Khoi ; *On the  $SU(2, 1)$  character variety of the Brieskorn homology spheres*. Preprint.
- [K11] A. Klyachko ; *Stable bundles, representation theory and Hermitian operators*. *Selecta Math. (NS)* **4(3)** (1998), 419–445.
- [K12] A. Klyachko ; *Vector bundles, linear representations, and spectral problems*. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, 599–613, Higher Ed. Press, Beijing (2002).
- [Ko] V. P. Kostov ; *The Deligne-Simpson problem—a survey*. *J. Algebra* **281** (2004), 83–108.



- [Mos1] G. D. Mostow ; *On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space*. Pacific J. Math. **86** (1980), 171–276.
- [Mos2] G. D. Mostow ; *Generalized Picard lattices arising from half-integral conditions*. Publ. Math. IHES **63** (1986), 91–106.
- [Par] J. R. Parker ; *Unfaithful complex hyperbolic triangle groups*. Prépublication (2005).
- [ParPau] J. R. Parker, J. Paupert ; *Unfaithful complex hyperbolic triangle groups II : Higher order reflections*. En préparation.
- [Pau1] J. Paupert ; *Configurations de lagrangiens, domaines fondamentaux et sous-groupes discrets de  $PU(2, 1)$* . Thèse de doctorat de l'Université Paris 6 (2005). [www.institut.math.jussieu.fr/theses/2005/paupert/](http://www.institut.math.jussieu.fr/theses/2005/paupert/)
- [Pau2] J. Paupert ; *Elliptic triangle groups in  $PU(2, 1)$ , Lagrangian triples and momentum maps*. Preprint (2006). A paraître dans Topology.
- [Sa] J.K. Sauter ; *Isomorphisms among monodromy groups and applications to lattices in  $PU(1, 2)$* . Pacific J. Maths. **146** (1990), 331–384.
- [Sf] F. Schaffhauser ; *Decomposable representations and Lagrangian submanifolds of moduli spaces associated to surface groups*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, 2005.
- [Sz] R. E. Schwartz ; *Complex hyperbolic triangle groups*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 339–349, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
- [Th] W. P. Thurston ; *Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere*. Geometry and Topology Monographs **1**, the Epstein Birthday Schrift (1998), 511–549.
- [We] A. Weinstein ; *Poisson geometry of discrete series orbits, and momentum convexity for noncompact group actions*. Lett. Math. Phys. **56(1)** (2001), 17-30.
- [Wi] P. Will ; *Groupes libres, groupes triangulaires et tore épointé dans  $PU(2, 1)$* . Thèse de doctorat de l'Université Paris 6 (2006).

Julien Paupert  
Department of Mathematics  
Johns Hopkins University  
3400 N. Charles Street  
Baltimore, MD 21218, USA  
[paupert@math.jhu.edu](mailto:paupert@math.jhu.edu)