Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de

Théorie spectrale et géométrie

Zindine DJADLI

Opérateurs géométriques et géométrie conforme

Volume 23 (2004-2005), p. 49-103.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2004-2005__23__49_0>

© Institut Fourier, 2004-2005, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (http://tsg.cedram.org/), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://tsg.cedram.org/legal/).

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **23** (2005) 49–103

OPÉRATEURS GÉOMÉTRIQUES ET GÉOMÉTRIE CONFORME

Zindine DJADLI

1. Introduction

Dans ce survol nous présentons quelques résultats récents en géométrie conforme. L'origine de ce texte est un exposé au séminaire de Théorie spectrale et géométrie de l'université de Grenoble I donné par l'auteur en décembre 2004. Ce survol n'a pas vocation à être complètement exhaustif : il se présente comme une introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés et les problèmes de géométrie conforme sur les surfaces et sur les variétés de dimension 4. Nous n'y donnerons que peu de preuves et renvoyons le lecteur désirant avoir des détails aux articles originaux.

Ce survol est divisé en parties. Dans la première nous parlerons de l'inégalité de Moser-Trudinger (paragraphe 2) et son utilisation pour le traitement du problème de la courbure de Gauss prescrite (paragraphe 3). Dans la deuxième partie nous aborderons le problème de l'isospectralité sur les surfaces à travers l'inégalité de Polyakov qui est l'outil fondamental pour ce probleme (paragraphe 4). Dans la troisième partie nous parlerons de la généralisation de ces outils et de ces problèmes au cas de la dimension 4 : l'opérateur de Paneitz (paragraphe 5) et l'existence de métriques extrémales pour la fonctionnelle log-determinant sur les variétés de dimension 4 (paragraphe 6). La dernière partie sera consacrée aux applications et à l'utilisation de l'opérateur de Paneitz dans des problèmes de géométrie conforme : l'existence de métriques à Q-courbure constante (paragraphe 7), l'étude d'une fonctionnelle quadratique à travers la recherche de métriques extrémales pour une fonctionnelle log-determinant (paragraphe 8) et enfin l'étude de problèmes de rigidité en géométrie conforme (paragraphe 9).

Remerciements : Ma plus vive gratitude va à Gérard Besson et à Sylvain Gallot qui m'ont permis d'exposer mon travail au séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie de Grenoble. Je les remercie également pour l'intérêt qu'ils n'ont cessé de manifester pour mon travail en géométrie conforme. Je voudrais également remercier Alice Chang et Paul Yang pour m'avoir fait découvrir un monde mathématique si riche.

2000 Mathematics Subject Classification: 35B33, 35J35, 53A30, 53C21.

2. Inégalité de Moser-Trudinger

L'un des outils fondamentaux pour l'étude de problèmes elliptiques du type courbure de Gauss prescrite sur les surfaces, c'est-à-dire de problèmes elliptiques non linéaires avec non linéarité exponentielle est l'inégalité de Moser-Trudinger.

Rappelons que le théorème d'inclusion de Sobolev nous dit que pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on a (pour des réels α, p et q avec $q\alpha < n$)

$$W_0^{\alpha,q}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{n}$. Dans le cas $\alpha = 1$, $q < 2$ et $n = 2$ nous avons pour tout $p > 1$

$$W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

mais en général on ne peut pas passer à la limite sur p c'est-à-dire que l'inclusion $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, est fausse en général. Pour s'en convaincre il suffit de considérer la fonction $u(x) = \log\left(1 + \log \frac{1}{|x|}\right)$ sur $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Malgré tout, Trudinger [Tru67] a obtenu l'intégrabilité L^2 de l'exponentielle dans le sens suivant

Théorème 2.1. — *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$. Il existe $C > 0$ et $\beta > 0$ ne dépendant que de Ω telles que pour toute fonction $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ vérifiant $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq 1$, on a*

$$\int_\Omega e^{\beta u^2} dx \leq C\, Vol(\Omega, euclidien). \tag{1}$$

On écrira $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow e^{L^p(\Omega)}$.

Bien entendu il n'est pas très difficile de passer d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à une surface compacte et sans bord. Ce qui nous donne :

Théorème 2.2. — *Soit (M^2, g) une surface compacte, sans bord et de classe C^∞. Il existe $C > 0$ et $\beta > 0$ ne dépendant que de (M, g) telles que pour toute fonction $u \in W^{1,2}(M)$ vérifiant $\int_M u dv_g = 0$ et $\int_M |\nabla u|^2 dv_g \leq 1$, on a*

$$\int_M e^{\beta u^2} dx \leq C\, Vol(M, g).$$

On écrira $W^{1,2}(M) \hookrightarrow e^{L^p(M)}$.

Moser a montré que si (M, g) est la sphère standard $(\mathbb{S}^2, g_c)$ on peut prendre $\beta = 4\pi$ dans le théorème précédent et de plus cette valeur est optimale au sens où pour tout $\beta > 4\pi$ il existe une suite $(u_i)_i \subset W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$ telle que $\int_M |\nabla u_i|^2 dv_g \leq 1$ pour tout i et

$$\int_{\mathbb{S}^2} exp(\beta u_i^2) dv_{g_c} \to +\infty$$

lorsque i tend vers l'infini.

On peut énoncer le théorème :

Théorème 2.3. — *Soit $(\mathbb{S}^2, g_c)$ la 2-sphère standard. Il existe $C > 0$ telle que pour toute fonction $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$ vérifiant $\int_{\mathbb{S}^2} u dv_{g_c} = 0$ et $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 dv_{g_c} \leq 1$, on a*

$$\int_{\mathbb{S}^2} e^{4\pi u^2} dv_{g_c} \leq C.$$

Par conséquent, en posant $C_1 := \log C + \log \frac{1}{4\pi}$, on a pour tout $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$

$$\log \fint_{\mathbb{S}^2} e^{2u} dv_{g_c} \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 dv_{g_c} + 2 \fint_{\mathbb{S}^2} u dv_{g_c} + C_1. \tag{2}$$

Pour les fonctions qui sont symétriques Moser [Mos71] a amélioré cette inégalité en prouvant :

Théorème 2.4. — *Soit $(\mathbb{S}^2, g_c)$ la 2-sphère standard. Il existe $C > 0$ telle que pour toute fonction $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$ vérifiant $u(\xi) = u(-\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{S}^2$, $\int_{\mathbb{S}^2} u dv_{g_c} = 0$ et $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 dv_{g_c} \leq 1$, on a*

$$\int_{\mathbb{S}^2} e^{8\pi u^2} dv_{g_c} \leq C.$$

Par conséquent, en posant $C_1 := \log C + \log \frac{1}{4\pi}$, on a pour tout $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$

$$\log \fint_{\mathbb{S}^2} e^{2u} dv_{g_c} \leq \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 dv_{g_c} + 2 \fint_{\mathbb{S}^2} u dv_{g_c} + C_1. \tag{3}$$

Il existe une version optimale de l'inégalité (2) qui est due à Onofri [Ono82] :

Théorème 2.5. — *Soit $(\mathbb{S}^2, g_c)$ la 2-sphère standard. On a pour tout $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$*

$$\log \fint_{\mathbb{S}^2} e^{2u} dv_{g_c} \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 dv_{g_c} + 2 \fint_{\mathbb{S}^2} u dv_{g_c}. \tag{4}$$

De plus on a égalité dans cette inégalité si et seulement si $e^{2u} g_c$ est isométrique à g_c.

Ce théorème joue un rôle fondamental dans l'étude de familles isospectrales sur la sphère dont nous reparlerons au paragraphe 4.

3. Courbure de Gauss et problèmes elliptiques associés

Considérons une surface compacte M^2, sans bord équipée d'une métrique que l'on notera g_0. A cette métrique est associée sa courbure de Gauss que nous noterons K_{g_0}. Dans cette partie nous nous pencherons sur le comportement de la courbure de Gauss lors d'un changement conforme de métrique, c'est-à-dire lorsque l'on considère une métrique de la forme

$$g_w := e^{2w} g_0,$$

où w est une fonction de classe C^∞ sur M. Il existe une relation très simple entre la courbure de Gauss pour la métrique g_0 et la courbure de Gauss pour la métrique g_w ; si on note Δ_{g_0} l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à g_0, elle est donnée par la proposition suivante :

Proposition 3.1. — *On a la relation*

$$\Delta_{g_0} w + K_{g_w} e^{2w} = K_{g_0}. \tag{5}$$

Cette équation est souvent appelée équation de courbure de Gauss prescrite. La preuve de cette relation est purement locale et utilise l'expression de la courbure en coordonnées locales. Une remarque importante découle directement de cette équation ; si on intègre celle-ci de chaque coté on obtient

$$\int_M K_{g_0} dv_{g_0} = \int_M K_{g_w} e^{2w} dv_{g_0} = \int_M K_{g_w} dv_{g_w},$$

autrement dit $\int_M K_{g_w} dv_{g_w}$ est un invariant conforme, *i.e.* indépendante de w. Nous verrons que cette quantité joue un rôle fondamental dans l'étude de l'équation de courbure scalaire prescrite. En fait $\int_M K_g dv_g$ est bien mieux qu'un invariant conforme puisque la formule de Gauss-Bonnet nous indique que c'est même un invariant topologique

Proposition 3.2. — *(Formule de Gauss-Bonnet pour les surfaces) Soit (M^2, g_0) une surface compacte, sans bord et de classe C^∞. Alors on a*

$$\int_M K_{g_0} dv_{g_0} = 2\pi\chi(M),$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de M.

Un des problèmes centraux reliés à l'équation de courbure scalaire prescrite est le suivant : étant donnés une surface compacte, sans bord et de classe C^∞, (M^2, g_0), et une fonction $K \in C^\infty(M)$, peut-on trouver une métrique $\overline{g}$ conforme à la métrique g_0 telle que la courbure de Gauss associée à $\overline{g}$ soit exactement la fonction K ? Autrement dit est-ce que l'équation (5) admet une solution w dans $C^\infty(M)$? Ce problème est souvent appelé problème de courbure de Gauss prescrite.

Un cas particulier de ce problème est celui où K est une fonction constante. Comme on le voit sur la formule de Gauss-Bonnet, (M^2, g_0) étant donnée, le signe de K ne peut pas être quelconque, il est determiné par celui de $\chi(M)$. Ce problème, que l'on nomme communément problème d'uniformisation des surfaces, a été entièrement résolu par Weil en utilisant des techniques d'analyse complexe : sur toute surface (M^2, g_0), compacte, sans bord et de classe C^∞ et étant donné un réel $\lambda > 0$, il existe une métrique conforme à g_0 dont la courbure de Gauss est $signe(\chi(M))\lambda$. A noter qu'une autre preuve de ce résultat a été obtenue par Osgood, Philipps et Sarnak [OPS88a] et [OPS88b] en utilisant la fonctionnelle log-determinant dont nous parlerons dans la section 4.

Revenons maintenant au problème de courbure de Gauss prescrite dans le cas général. Dans [KW75a], Kazdan et Warner ont obtenu des conditions nécessaires et suffisantes pour la résolution de (5) dans certains cas

Théorème 3.3. — *Supposons $\chi(M) = 0$. Alors l'équation* (5) *possède une solution si et seulement l'une des deux situations suivantes se produit*

(i) $K \equiv 0$ *;*

(ii) *K change de signe et vérifie $\int_M Ke^{2f} dv_{g_0} < 0$ où f est une solution de l'équation $\Delta_{g_0} f = K_{g_0}$.*

Ce théorème résout complètement le problème lorsque M est une surface à caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. Lorsque celle-ci est strictement positive ou strictement négative nous n'avons que des résultats partiels. Commençons par le cas où $\chi(M) < 0$.

Le cas $\chi(M) < 0$ a également été étudié par Kazdan et Warner, mais pas complètement résolu. Dans [KW75a], Kazdan et Warner montrent une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction K soit la courbure de Gauss d'une métrique conforme à la métrique initiale mais cette condition n'est pas explicite et ne permet pas de caractériser les fonctions qui sont la courbure de Gauss d'une métrique conforme à la métrique initiale. On pourra se référer à Kazdan-Warner [KW75a] pour plus de détails (en particulier sur des exemples de fonctions qui ne sont pas courbure de Gauss d'une métrique conforme à la métrique initiale).

Lorsque $\chi(M) > 0$ alors soit $\chi(M) = 2$ et dans ce cas M est difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$, soit $\chi(M) = 1$ et dans ce cas M est difféomorphe au projectif réel $\mathbb{R}P^2$.

Considérons le cas $(M, g) := (\mathbb{S}^2, g_c)$ la sphère standard munie de sa métrique canonique qui est à courbure de Gauss $K_{g_c} \equiv 1$. On a vu que si $g_w := e^{2w} g_c$ on a

$$\Delta_{g_c} w + K_{g_w} e^{2w} = 1 \tag{6}$$

sur $\mathbb{S}^2$. Comme nous l'avons vu dans le cas $\chi(M) < 0$ il existe aussi des fonctions qui ne peuvent pas être réalisées comme courbure de Gauss d'une métrique conforme à la métrique canonique sur $\mathbb{S}^2$. Plus précisément

THÉORÈME 3.4. — *(Obstruction de Kazdan-Warner) Soit $w \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$ une solution de* (6). *Alors, pour toute fonction propre φ de Δ_{g_c} associée à la valeur propre 2 on a*

$$\int_{\mathbb{S}^2} < \nabla_{g_c} K, \nabla_{g_c}\varphi >_{g_c} e^{2w} dv_{g_c} = 0. \tag{7}$$

Les conséquences de ce Théorème sont importantes. En effet, puisque d'après la formule de Gauss-Bonnet nous savons que $\int_{\mathbb{S}^2} Ke^{2w}dv_{g_c} = 4\pi$, on en déduit que K doit être strictement positive quelque part. Mais cela ne suffit pas ; si on considère une fonction propre φ de Δ_{g_c} associée à la valeur propre 2, on voit bien que $K := 1 + \varepsilon\varphi$ est strictement positive dès que ε est assez petit mais ne vérifie pas les conditions du Théorème.

Un des premiers résultats remarquables sur le problème de la courbure de Gauss prescrite sur la sphère standard fut obtenu par Moser [Mos71]

THÉORÈME 3.5. — *Soit $K \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ avec K strictement positive quelque part et $K(x) = K(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^2$. Alors l'équation* (6) *admet une solution $w \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$. De plus $w(x) = w(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^2$*

L'ingrédient principal pour la preuve de ce Théorème est l'inégalité de Moser-Trudinger dont nous avons parlé au paragraphe précédent. Pour montrer ce résultat Moser introduit la fonctionnelle

$$J_K[w] := \log \fint_{\mathbb{S}^2} Ke^{2w}dv_{g_c} - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla w|_{g_c} dv_{g_c} - 2\fint w dv_{g_c}. \tag{8}$$

Les points critiques de cette fonctionnelle sont exactement les solutions de

$$-\Delta_{g_c} w + 1 = \frac{Ke^{2w}}{\fint_{\mathbb{S}^2} Ke^{2w}dv_{g_c}},$$

et si l'on pose $\tilde{w} := w - \frac{1}{2}\log \fint_{\mathbb{S}^2} Ke^{2w}dv_{g_c}$, $\tilde{w}$ sera solution de l'équation

$$\Delta_{g_c} w + Ke^{2w} = 1. \tag{9}$$

En utilisant le Théorème 2.4 il est ensuite facile de montrer que la fonctionnelle J_K admet un maximum sur l'ensemble

$$\mathcal{C} := \left\{ w \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2) \ : \ w \ \text{ est paire et } \int_{\mathbb{S}^2} Ke^{2w}dv_{g_c} > 0 \right\}.$$

Il est important de signaler que l'amélioration de la valeur de la constante 4π entre le Théorème 2.3 et le Théorème 2.4 est cruciale pour montrer l'existence d'un point critique sur $\mathcal{C}$ (à cause de la présence du facteur $\frac{1}{4\pi}$ dans l'expression de la fonctionnelle J_K).

D'autres résultats ont été obtenus pour des fonctions K qui ne sont pas supposées symétriques. Voir par exemple Chang-Yang [CY91a], Chang-Gursky-Yang [CGY93], Bahri-Coron [BC91] et Li [Li96] ainsi que les références contenues dans ces articles.

Motivé par ces résultats d'existence on s'est intéressé très récemment à un problème plus général que celui de la courbure de Gauss prescrite.

Soit (Σ, g) une surface de Riemann (sans bord) de volume 1, $K \in C^\infty(\Sigma)$ une fonction partout strictement positive et ρ un nombre réel. On considère l'équation

$$\Delta_g u + \rho \left(\frac{Ke^u}{\int_\Sigma Ke^u dv_g} - 1 \right) = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \tag{10}$$

(10) est l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle

$$J_\rho(u) = \frac{1}{2} \int_\Sigma |\nabla u|_g^2 \, dv_g + \rho \int_\Sigma u dv_g - \rho \log \int_\Sigma Ke^u dv_g, \tag{11}$$

pour $u \in W^{1,2}(\Sigma)$ (rappelons que $W^{1,2}(\Sigma)$ est l'ensemble des fonctions de L^2 qui ont leurs dérivées premières, au sens des distributions, dans L^2).

Puisque J_ρ est invariante par translation, (10) est équivalente à l'équation :

$$\Delta_g u + \rho \left(Ke^u - 1 \right) = 0 \quad \text{on } \Sigma. \tag{12}$$

Lorsque $\rho = 8\pi$ et (Σ, g) est la sphère standard (à une homothétie près car on impose que le volume soit égal à 1), nous retrouvons simplement le problème de la courbure de Gauss prescrite sur la sphère standard.

Il est à signaler que le problème variationnel (11) apparaît également dans le modèle de vortex de Onsager pour les flots d'Euler turbulents. Dans cette interprétation u est la "stream function" dans la limite infinie du vortex (voir Marchioro et Pulvirenti [MP94] p.256ff). La mesure de Gibbs canonique correspondante et la fonction de partition sont finies précisément dans le cas où $\rho < 8\pi$. Ce problème variationnel est aussi relié à l'étude de l'équation de Chern-Simons-Higgs dans le cas abelien (voir Caffarelli et Yang [CY95a], Struwe et Tarantello [ST98], Tarantello [Tar96] et Yang [Yan00]).

Grâce à l'inégalité de Moser-Trudinger (voir le Théorème 2.3), il est facile de prouver la coercivité et la compacité pour J_ρ lorsque $\rho < 8\pi$ (et dans ce cas la résolution de (10) est claire). Pour $\rho \geq 8\pi$ la situation devient plus compliquée puisque, dans ce cas, la fonctionnelle J_ρ n'est ni majorée ni minorée.

Dans Djadli [Dja] on regarde le cas $\rho > 8\pi$ en supposant que

$$\rho \in (8k\pi, 8(k+1)\pi) \quad \text{pour un certain } k \in \mathbb{N}^*. \tag{13}$$

On prouve (voir Djadli [Dja])

Théorème 3.6. — *Soit (Σ, g) une surface de Riemann compacte (sans bord et de volume 1), $K \in C^\infty(\Sigma)$ une fonction partout strictement positive et ρ un nombre réel. On suppose que $\rho \in (8k\pi, 8(k+1)\pi)$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $u \in C^\infty(\Sigma)$ telle que*

$$\Delta_g u + \rho\left(\frac{Ke^u}{\int_\Sigma Ke^u dv_g} - 1\right) = 0 \quad \textit{sur } \Sigma. \tag{14}$$

Ce résultat généralise des résultats précédents de Ding, Jost, Li et Wang [DJLW99], de Lin [Lin00], et de Chen et Lin [CL03]. Dans [DJLW99], les auteurs montrent que, en supposant $\rho \in]8\pi, 16\pi[$ et en supposant que le genre de la surface est supérieure ou égale à 1, il existe une solution de (10). Dans [Lin00], Lin étudie le cas de la 2-sphere pour $\rho \in]8\pi, 16\pi[\cup]16\pi, 24\pi[$. Il montre l'existence d'une solution lorsque $\rho \in]8\pi, 16\pi[$ en calculant le degré topologique de Leray-Schauder pour l'équation (10) (ce degré ne dépend pas de K et vaut toujours -1). Lorsque $\rho \in]16\pi, 24\pi[$ le degré est égal à 0 et l'auteur n'est pas en mesure de conclure à l'existence d'une solution. Plus généralement, Y.Y. Li [Li99] a initié l'étude de l'existence de solutions pour cette équation en calculant le degré topologique de Leray-Schauder pour (10) ; il a montré que les phénomènes de concentration (et de perte de compacité) ne peuvent se produire que lorsque ρ est égal à $8k\pi$, $k \in \mathbb{N}^*$, et par conséquent le degré topologique est constant sur chaque intervalle $]8k\pi, 8(k+1)\pi[$. Il y a quelques années, Chen et Lin [CL03] ont calculé le degré topologique de Leray-Schauder pour (10) pour tout $\rho \notin 8\pi\mathbb{N}$; en utilisant la formule obtenue ils sont capables de montrer que lorsque la caractéristique d'Euler-Poincaré de Σ vérifie $\chi(\Sigma) \leq 0$, le degré n'est pas 0 et (10) admet une solution. Malheureusement, lorsque $\chi(\Sigma) > 0$ et $\rho \in]8k\pi, 8(k+1)\pi[$, avec $k \geq 2$, le degré vaut toujours 0 et il n'est plus possible de conclure quant à l'existence d'une solution. Dans Djadli [Dja], aucune hypothèse sur la topologie de la variété n'est faite et on est capable de traiter entièrement le cas $\rho \in]8k\pi, 8(k+1)\pi[$ pour un certain entier k.

Une importante remarque ici est que, d'après le Théorème 3.6 et le fait que lorsque $\chi(\Sigma) > 0$ et $\rho \in]8k\pi, 8(k+1)\pi[$, avec $k \geq 2$, le degré vaut 0, on a que, dans ce cas, l'équation (10) a toujours au moins deux solutions.

Pour des détails sur la preuve du Théorème 3.6 on se reportera à Djadli [Dja].

4. Formule de Polyakov sur les surfaces

Dans cette partie nous introduisons la fonctionnelle log-determinant associée à l'opérateur de Laplace-Beltrami. Considérons une variété riemannienne compacte de dimension n, (M^n, g), sans bord et de classe C^∞. On sait que le spectre du laplacien Δ_g constitue une suite croissante

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \ldots,$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers l'infini. De surcroît, les fonctions propres $\{\varphi_j\}_j$ forment une base orthonormée de $L^2(M)$.

On peut définir la fonction ζ associée à Δ_g par

$$\zeta(s) = \sum_{\lambda_k \neq 0} \lambda_k^{-s}. \tag{15}$$

Pour le moment on ne préoccupe pas de la convergence de cette série (convergence dont nous parlerons plus tard). Si on décide d'écrire cette série de manière formelle on obtient

$$\zeta'(s) = -\sum_{\lambda_k \neq 0} (\log \lambda_k) \lambda_k^{-s},$$

autrement dit, toujours formellement,

$$\zeta'(0) = -\sum_{\lambda_k \neq 0} \log \lambda_k = -\log \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k.$$

Cette écriture formelle fut celle qui a motivé la définition de la fonctionnelle log-determinant par Ray et Singer [RS71]

$$\log det(\Delta_g) := \zeta'(0). \tag{16}$$

Nous justifions maintenant l'existence de $\zeta'(0)$. Si on note $N(\lambda) := Card\{j \in \mathbb{N} : \lambda_j \leq \lambda\}$ on a la formule asymptotique de Weyl

Proposition 4.1. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte, sans bord et de classe C^∞. Alors*

$$N(\lambda) \sim \omega_n Vol(M, g) \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n}, \tag{17}$$

lorsque λ tend vers l'infini. Ici ω_n désigne le volume de la boule unité standard de $\mathbb{R}^n$. En particulier lorsque $\lambda = \lambda_k$

$$(\lambda_k)^{\frac{n}{2}} \sim \frac{k(2\pi)^n}{\omega_n Vol(M,g)} \tag{18}$$

lorsque k tend vers l'infini.

Puisque λ_k se comporte asymptotiquement comme $k^{\frac{2}{n}}$, on en déduit que la fonction ζ est bien définie lorsque $Re(s) > \frac{n}{2}$. Maintenant si on veut donner un sens à $\zeta'(0)$ on utilise, de manière classique, la transformée de Mellin

$$x^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_M e^{-xt} t^{s-1} dt, \tag{19}$$

où Γ est la fonction Gamma classique

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

La fonction Γ possède un pôle simple en 0 et on a

$$s\Gamma(s) \sim_{s\to 0} 1.$$

En utilisant la transformée de Mellin on peut écrire ζ en fonction de Γ lorsque $Re(s) > \frac{n}{2}$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty e^{-\lambda_j t} t^{s-1} dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty (Z(t)-1) t^{s-1} dt,$$

où

$$Z(t) := \int_M H(x,x,t) dv_g(x) = \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda_k t} = Trace(e^{t\Delta_g})$$

est la trace du noyau de la chaleur

$$H(x,y,t) := \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x) \varphi_k(y).$$

Rappelons que H est l'unique solution fondamentale de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_g u = 0, \\ \\ \lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x); \end{cases} \tag{20}$$

au sens où f étant donnée dans $C^\infty(M)$, le produit de convolution $u := H \star f$ est solution de (20). La fonction H est continue sur $M \times M \times (0,\infty)$ et de plus on a pour tout x dans M

$$\lim_{t\to 0} \frac{H(x,x,t) - \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^\infty B_k(x) t^{\frac{k-n}{2}}}{t^m} = 0$$

pour tout $m \geq 0$. Ici les fonctions B_k sont des invariants locaux de M ($B_k \equiv 0$ lorsque k est impair). Ceci nous permet de donner l'équivalent suivant de Z

$$Z(t) \sim \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\frac{k-n}{2}}$$

lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures (où $a_k := \int_M B_k dv_g$).

Dans le cas où la variété est une surface de Riemann on peut obtenir une expression explicite pour ces développements. Nous les donnons ci-dessous

$$\begin{cases} H(x,x,t) = \dfrac{1}{4\pi t} + \dfrac{K_g(x)}{12\pi} + \dfrac{K_g^2(x)t}{60\pi} + O(t^2), \\[2ex] Z(t) = \dfrac{Vol(M,g)}{4\pi t} + \dfrac{\chi(M)}{6} + \dfrac{\pi t}{60}\displaystyle\int_M K_g^2 dv_g + O(t^2). \end{cases} \tag{21}$$

Ainsi, lorsque la fonction ζ est bien définie, on a

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 (Z(t)-1)t^{s-1}dt + \frac{1}{\Gamma(s)}\int_1^{\infty}(Z(t)-1)t^{s-1}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 t^{s-1}\left[\frac{Vol(M,g)}{4\pi t} + \frac{\chi(M)}{6} + \frac{\pi t}{60}\int_M K_g^2 dv_g + t^2P(t) - 1\right]dt \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(s)}\int_1^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}\right)t^{s-1}dt, \end{aligned} \tag{22}$$

où P est une fonction bornée. La seconde quantité est holomorphe en s puisque la fonction Γ ne s'annule pas et puisque, pour t grand, $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \leq Ce^{-\lambda_1 t}$ grâce à la formule asymptotique de Weyl. La première quantité quant à elle peut s'écrire

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\left[\frac{t^{s-1}}{s-1}\frac{Vol(M,g)}{4\pi} + \frac{\chi(M)}{6s}t^s + \frac{\pi t^{s+1}}{60(s+1)}\int_M K_g^2 dv_g - \frac{t^s}{s}\right]_{t=0}^{t=1} + B(s),$$

avec $B(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 P(t)t^{s+1}dt$ qui est holomorphe sur $Re(s) > -1$. On observe facilement que l'expression précédente converge pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 1$ et possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier avec un pôle simple en $s = 1$.

Comme on le voit donc, ζ est holomorphe sur le demi-plan $Re(s) > 1$ et possède un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en $s = 1$ et on a de plus

$$\zeta(0) = \frac{\chi(M)}{6} - 1.$$

Notons que l'on peut obtenir une formule explicite de $\zeta(0)$ en dimension plus grande que 2 (voir Rosenberg [Ros97]). Puisque ζ est analytique en 0 on peut définir $\zeta'(0)$ (qui n'est rien d'autre que $\lim_{s\to 0}\frac{\zeta(s)-\zeta(0)}{s}$). Nous avons donc justifié rigoureusement (16).

Une question naturelle consiste à se demander ce qui se produit sur la fonction ζ lorsque l'on réalise un changement conforme de métrique. C'est à cette question que répond le Théorème suivant :

Théorème 4.2. — *(Formule de Polyakov) Soit (M^2, g_0) une surface compacte, sans bord et de classe C^∞. On considère le changement conforme de métrique $g_w := e^{2w}g_0$ avec $Vol(M, g_0) = Vol(M, g_w)$. Alors on a la formule suivante (dite formule de Polyakov [Pol81])*

$$F[w] := \log \frac{det(-\Delta_{g_w})}{det(-\Delta_{g_0})} = -\frac{1}{12\pi}\int_M \left(|\nabla_{g_0} w|^2_{g_0} + 2K_{g_0} w\right) dv_{g_0}. \tag{23}$$

La formule de Polyakov décrit donc le comportement de la fonctionnelle $g \longmapsto \log det(-\Delta_g)$ (que l'on appelle généralement la fonctionnelle log-déterminant) sous changement conforme de métrique qui preserve le volume. En fixant une métrique initiale g_0, l'étude de la fonctionnelle log-déterminant dans la classe conforme de g_0 se réduit donc à l'étude de la fonctionnelle

$$w \in C^\infty(M) \longmapsto -\frac{1}{12\pi}\int_M \left(|\nabla_{g_0} w|^2 + 2K_{g_0} w\right) dv_{g_0}.$$

Les points critiques de cette fonctionnelle possèdent des propriétés remarquables dans certains cas et c'est ce que nous allons illustrer à l'aide des résultats suivants

Proposition 4.3. — *Considérons la 2-sphère standard $(\mathbb{S}^2, g_c)$. Alors pour tout $w \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ tel que $Vol(\mathbb{S}^2, g_w) = 4\pi$ on a $F[w] \le F[0] = 0$. Autrement dit F est maximal pour la métrique standard g_c (ce qui correspond à $w \equiv 0$).*

Dans le cas des surfaces qui ne sont pas la sphère standard la situation est plus compliquée comme nous allons le voir. Toutefois en courbure constante négative nous avons

Proposition 4.4. — *Soit (M^2, g_0) une surface compacte, sans bord et de classe C^∞. On suppose que $K_{g_0} \equiv constante \le 0$. Alors pour toute fonction $w \in C^\infty(M)$ telle que $Vol(M, g_w) = Vol(M, g_0)$ on a*

$$F[w] \le 0,$$

et de plus on a l'égalité si et seulement si $w \equiv 0$.

Dans le cas de la 2-sphère standard, il est assez aisé de voir que l'inégalité d'Onofri (et son cas d'égalité) nous donne un analogue du théorème précédent. A notre connaissance il n'existe pas d'autre résultat d'existence et de caractérisation de métriques extrémales pour la fonctionelle log-déterminant sur les surfaces.

Une autre application de la formule de Polyakov concerne l'étude des familles de métriques (conformes) isospectrales sur une surface. On considère une surface M compacte, lisse et sans bord. On dira qu'une famille de métriques (conformes) $\{g_i\}_i$ définies sur M est isopectrale lorsque toutes ces métriques possèdent le même spectre pour leur opérateur de Laplace-Beltrami respectif. En 1988, Osgood, Phillips et Sarnak [OPS88a] et [OPS88b] ont montré

THÉORÈME 4.5. — *Soit M^2 une surface compacte, sans bord et de classe C^∞. Toute famille de métriques isospectrales sur cette surface forme une famille compacte pour la topologie C^∞ modulo la classe d'isométrie.*

Donnons une idée succinte de la preuve dans le cas de la sphère standard $(\mathbb{S}^2, g_c)$. D'après (21), on a

$$Z(t) \sim \frac{1}{4\pi t}\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots\right)$$

lorque t tend vers 0^+, et où $a_0 = Vol(\mathbb{S}^2, g_c)$, $a_1 = \frac{4\pi}{3}$, $a_2 = \frac{\pi}{60}\int_{\mathbb{S}^2} K_{g_c}^2 dv_{g_c}$, et pour $k \geq 3$, $a_k = \int_{\mathbb{S}^2} B_{2k} dv_{g_c}$, B_{2k} étant un polynôme universel de degré $2k$ en K_{g_c}. Puisque la famille de métriques considérée est isospectrale, a_2 est constant sur toute cette famille et cela nous donne un contrôle sur $\Delta_{g_c} u_i$ (ici on a posé $g_i = e^{2u_i} g_c$). Si on veut obtenir un contrôle sur les dérivées premières des u_i on utilise la formule de Polyakov, qui permet directement de dominer $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u_i| dv_{g_c}$. Ensuite par un argument de bootstrap et en utilisant les a_k pour $k \geq 3$ on parvient à contrôler toutes les dérivées des u_i. A noter que l'on utilise le théorème d'Onofri pour pouvoir dominer $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u_i| dv_{g_c}$ dans ce cas (la sphère). Si la surface sous-jacente n'est pas la sphère (et puisque l'on peut toujours se ramener à une métrique à courbure de Gauss constante égale à -1, 0 ou $+1$) on peut exercer un contrôle sur les dérivées premières des u_i directement à partir de le formule de Polyakov.

5. Opérateurs covariant conforme d'ordre 4

Sur une variété riemannienne de dimension 2, l'opérateur de Laplace-Beltrami est, comme on l'a vu, un opérateur géométrique naturel. Sous le changement conforme $\tilde{g} = e^{2w} g$, et lorsque la dimension est 2, le laplacien pour $\tilde{g}$ est relié au laplacien pour g par la relation

$$\Delta_{\tilde{g}} \varphi = e^{-2w} \Delta_g \varphi, \quad \forall \varphi \in C^\infty(M).$$

En dimension plus grande que 2, le même genre de relation d'invariance conforme est vraie mais pour un opérateur (d'ordre 2) légèrement différent du laplacien, opérateur appelé laplacien conforme $L_g = -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g + Scal_g$. On a, si $\tilde{g} = e^{2w}g$, pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$

$$L_{\tilde{g}}(\varphi) = e^{-\frac{n+2}{2}w} L_g \left(e^{\frac{n-2}{2}w}\varphi\right).$$

D'une façon plus générale, on dira qu'un opérateur A_g dépendant de la métrique est conformément covariant de bi-degré (a,b) si, sous le changement conforme de métrique $\tilde{g} = e^{2w}g$, les opérateurs $A_{\tilde{g}}$ et A_g sont reliés par la relation

$$A_{\tilde{g}}(\varphi) = e^{-bw} A_g(e^{aw}\varphi), \quad \forall \varphi \in C^\infty(M).$$

Un opérateur d'ordre 4 particulièrement intéressant fut découvert en 1983 par S. Paneitz [Pan83]. Cet opérateur défini sur les variétés de dimension 4 est donné par

$$P_g\varphi = \Delta_g^2\varphi - div_g\left(\frac{2}{3}Scal_g g - 2Ric_g\right)d\varphi. \tag{24}$$

Cette opérateur est conformément covariant de bidegré $(0,4)$, *i.e.* si $\tilde{g} = e^{2w}g$

$$P_{\tilde{g}}(\varphi) = e^{-4w}P_g(\varphi), \quad \forall \varphi \in C^\infty(M).$$

L'opérateur de Paneitz sur les variétés de dimension 4 présente beaucoup de similitudes avec l'opérateur laplacien sur les surfaces. Nous allons les présenter ici.

(i) Sur une surface compacte, l'invariant de courbure naturel associé à Δ_g est la courbure de Gauss K_g. Sous le changement conforme $\tilde{g} = e^{2w}g$, on a

$$-\Delta_g w + K_g = K_{\tilde{g}}e^{2w}.$$

Sur une variété de dimension 4 on a

$$P_g w + 2Q_g = 2Q_{\tilde{g}}e^{4w},$$

où Q_g est l'invariant de courbure défini par (on appelle souvent Q_g la Q-courbure)

$$Q_g = \frac{1}{12}\left(-\Delta Scal_g + Scal_g^2 - 3|Ric_g|^2\right). \tag{25}$$

(ii) L'analogie entre K et Q est encore plus flagrante si on considère la formule de Gauss-Bonnet. Sur une surface on a

$$2\pi\chi(M) = \int_M K_g dv_g,$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de M. En dimension 4, on a

$$4\pi^2\chi(M) = \int_M \left(\frac{1}{8}|Weyl_g|_g^2 + Q_g\right)dv_g. \tag{26}$$

Il faut noter que, puisque $|Weyl_g|^2 \, dv_g$ est invariant par changement conforme, c'est le terme $Q_g dv_g$ qui mesure le changement conforme. Notons aussi que compte tenu de la formule de Gauss-Bonnet et de l'invariance conforme de $|Weyl_g|^2 \, dv_g$, la quantité $\int_M Q_g dv_g$ (que l'on note en général k_P) est un invariant conforme.

Lorsque la dimension de la variété est supérieure ou égale à 3, on a vu que l'opérateur invariant conforme d'ordre 2 est le laplacien conforme L_g. Si on écrit le changement conforme $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ où u est une fonction lisse et strictement positive, comme on l'a vu, pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$

$$L_{\tilde{g}}(\varphi) = u^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g(u\varphi).$$

En prenant $\varphi \equiv 1$ dans cette égalité on obtient

$$L_g(u) = Scal_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{27}$$

Il existe aussi un opérateur d'ordre 4 naturel sur les variétés de dimension supérieure ou égale à 5. Celui-ci fut mis en évidence par Branson [Bra85]. Soit une variété (M, g) de dimension $n \geq 5$ et considérons

$$P_g^n(\varphi) = \Delta_g^2 \varphi - div_g \left(a_n Scal_g g + b_n Ric_g \right) d\varphi + \frac{n-4}{2} Q_g^n,$$

où

$$Q_g^n = c_n \left| Ric_g \right|^2 + d_n Scal_g^2 - \frac{1}{2(n-1)} \Delta_g Scal_g,$$

$a_n = \frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)}$, $b_n = -\frac{4}{n-2}$, $c_n = -\frac{2}{(n-2)^2}$ et $d_n = \frac{n^3-4n^2+16n-16}{8(n-1)^2(n-2)^2}$. Cette opérateur est conformément covariant : si $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-4}} g$ alors $\forall \varphi \in C^\infty(M)$

$$P_{\tilde{g}}^n(\varphi) = u^{-\frac{n+4}{n-4}} P_g^n(u\varphi).$$

On a aussi l'analogue de l'équation (27)

$$P_g^n(u) = Q_{\tilde{g}} u^{\frac{n+4}{n-4}}.$$

Dans ce survol nous n'allons pas nous intéresser à l'opérateur P_g^n. Nous ne parlerons que de la dimension 4 et donc uniquement de l'opérateur de Paneitz

$$P_g \varphi = \Delta_g^2 \varphi - div_g \left(\frac{2}{3} Scal_g g - 2 Ric_g \right) d\varphi.$$

L'une des premières questions que l'on peut se poser à propos de cet opérateur, surtout compte tenu de son expression un peu "compliquée", concerne ses propriétés d'opérateur, en particulier sur son noyau et sa positivité éventuelle. Ces questions ne sont pas simples et pour le moment il n'existe que des résultats très partiels. Le premier que nous donnons est dû à Gursky [Gur99] et [Gur98]

Théorème 5.1. — *Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte, sans bord, lisse et de dimension 4. Si l'invariant de Yamabe $Y(M,[g])$ est positif ou nul et si $\int_M Q_g dv_g$ est aussi positif ou nul alors P_g est un opérateur dont le noyau est réduit à $\mathbb{R}$. Si de plus on suppose que $0 \leq \int_M Q_g dv_g < 8\pi^2$ alors P_g est également un opérateur positif au sens où pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$, on a $\int_M \varphi P_g \varphi dv_g \geq 0$.*

La valeur $8\pi^2$ qui apparaît dans ce théorème n'est pas anodine ; c'est la valeur que prend la Q-courbure sur la sphère $\mathbb{S}^4$ munie de sa métrique standard. D'ailleurs Gursky [Gur99] a montré un résultat le rigidité suivant

Théorème 5.2. — *Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte, sans bord, lisse et de dimension 4. Si l'invariant de Yamabe $Y(M,[g])$ est positif ou nul et si $\int_M Q_g dv_g$ est aussi positif ou nul alors $\int_M Q_g dv_g \leq 8\pi^2$ avec égalité si et seulement si (M,g) est conformément difféomorphe à la 4-sphère standard.*

Très récemment Gursky et Viaclovsky [GV03] ont donné une version plus forte du Théorème 5.1

Théorème 5.3. — *Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte, sans bord, lisse et de dimension 4. On suppose que l'invariant de Yamabe $Y(M,[g])$ est strictement positif et que*

$$\int_M Q_g dv_g + \frac{1}{6}(Y(M,[g]))^2 > 0.$$

Alors P_g est un opérateur positif dont le noyau est réduit à $\mathbb{R}$.

6. La fonctionnelle déterminant en dimension 4 et métriques extrémales

Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte, sans bord, lisse et de dimension $n \geq 3$. On considère un opérateur différentiel géométrique (au sens où il dépend de la métrique) A_g que l'on va supposer auto-adjoint, et de symbole principal positif et d'ordre 2ℓ, avec $\ell \in \mathbb{N}^*$. De plus, on suppose que A_g se comporte de la même manière que son symbole principal sous l'action d'une homothétie sur la métrique, c'est-à-dire que si $\overline{g} := \lambda^2 g$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors

$$A_{\overline{g}} = \lambda^{-2\ell} A_g.$$

On peut prendre par exemple l'opérateur laplacien conforme $L_g = -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g + Scal_g$ ou l'opérateur de Dirac ∇^2.

Classiquement, on a le développement suivant pour le noyau de la chaleur associé à A_g pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$

$$Tr(\varphi e^{tA_g}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{\frac{k-n}{2\ell}} a_k(\varphi, A_g), \quad a_k(\varphi, A_g) = \int_M \varphi(x) B_k(x, A_g) dv_g(x),$$

lorsque t tend vers 0, $t > 0$, où les fonctions B_k sont des invariants locaux de la métrique g.

Si on note $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_j, \ldots\}$ les valeurs propres de A_g, on sait que seul un nombre fini de celles-ci sont négatives (car M est compacte), et on a là encore une formule asymptotique de Weyl donnée par

$$\lambda_j \sim c(g, A_g) j^{\frac{2\ell}{n}}, \tag{28}$$

lorsque j tend vers l'infini. De manière analogue à ce que nous avons fait en (15), on peut définir la fonction ζ_A associée à l'opérateur A_g en posant

$$\zeta_A(s) := \sum_{\lambda_j \neq 0} |\lambda_j|^{-s}, \tag{29}$$

pour $Re(s) > \frac{n}{2\ell}$. On peut montrer, ainsi que nous l'avons fait précédemment, que la fonction ζ_A admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples, et que ce prolongement est analytique en 0. Dès lors, on définit le déterminant de A_g en posant

$$det(A_g) := (-1)^{Card\{j, \lambda_j < 0\}} exp\left(-\zeta'(0)\right). \tag{30}$$

Il faut remarquer que cette définition n'est pas invariante par homothétie sur la métrique, ce qui est quelque peu problématique. Pour cette raison on introduit

$$P(A_g) := (Vol(M, g))^{\frac{2\ell}{n}} \, det(A_g), \tag{31}$$

et clairement $P(A_g)$ est invariant par homothétie sur la métrique, c'est-à-dire que si $\overline{g} := \mu^2 g$, avec $\mu \in \mathbb{R}^*$, alors $P(A_{\overline{g}}) = P(A_g)$.

Maintenant que nous avons défini un analogue du determinant comme nous l'avions fait dans la section 4, nous pouvons essayer de comprendre de quelle façon se comporte $P(A_g)$ lors d'un changement conforme de métrique. Nous nous plaçons à partir de maintenant sur une variété riemannienne (M^4, g), sans bord, compacte, lisse et de dimension 4. Introduisons, comme nous l'avons fait dans le cas de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les surfaces, la fonctionnelle log-déterminant pour l'opérateur A_g, que l'on note F_A. Soit $w \in C^\infty(M)$ et $g_w := e^{2w} g$, on définit

$$F_A[w] := -2 \log \frac{P(A(g_w))}{P(A_g)}. \tag{32}$$

Branson et Orsted [BO91] ont remarqué que la fonctionnelle F_A peut se décomposer le long de trois fonctionnelles élémentaires :

Théorème 6.1. — *Il existe γ_1, γ_2 et γ_3 réelles telles que pour tout $w \in C^\infty(M)$*

$$F_A[w] = \gamma_1 I[w] + \gamma_2 II[w] + \gamma_3 III[w], \tag{33}$$

où

$$
\begin{aligned}
I[w] &:= 4\int_M w|Weyl_g|_g^2 dv_g - \left(\int_M |Weyl_g|_g^2 dv_g\right)\log\left(\fint_M e^{4w}dv_g\right),\\
II[w] &:= \int_M (wP_g w + 4wQ_g)\,dv_g - \left(\int_M Q_g dv_g\right)\log\left(\fint_M e^{4w}dv_g\right), \qquad (34)\\
III[w] &:= \frac{1}{3}\left(\int_M Scal_{g_w}^2 dv_{g_w} - \int_M Scal_g^2 dv_g\right).
\end{aligned}
$$

Le fait remarquable ici est que I, II et III ne dépendent pas de A_g mais sont universelles ; si on change A_g ce sont les constantes γ_1, γ_2 et γ_3 qui changent. Par exemple, si A_g est l'opérateur laplacien conforme, alors $(4\pi)^2 180(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) = \left(1,-4,-\frac{2}{3}\right)$.

Dans le cas de la sphère nous avons le Théorème suivant :

Théorème 6.2. — *(Branson-Chang-Yang [BCY92a]) Sur la sphère standard* $(\mathbb{S}^4, g_c)$*, la fonctionnelle* $g \mapsto detL_{g_w}$ *est minimale pour une métrique* $g_w = e^{2w}g$ *(avec* $Vol(\mathbb{S}^4, g_w) = Vol(\mathbb{S}^4, g_c)$*) si et seulement si* $g_w = \phi^*(g_c)$ *où* ϕ *est une transformation conforme de la 4-sphère standard sur elle-même (autrement dit si et seulement si* g_w *et* g_c *sont isométriques).*

Ce théorème peut être vu comme un analogue en dimension 4 de l'inégalité d'Onofri que nous avons vue à la section 4.

Dans la suite nous nous pencherons sur la recherche de métriques extrémales sur des variétés autres que la sphère. Comme nous le verrons, c'est sur la sphère standard que nous avons le plus de résultats de “rigidité” des métriques extrémales. Dans le tableau qui suit nous récapitulons les résultats connus pour les sphères standards de dimension 2, 3, 4, 6, $2n+1$ avec $n \geq 3$, $4n+1$ et $4n+3$.

La métrique standard g_c sur	est un	pour l'opérateur	parmi les métriques où l'on fixe	résultat dû à
$\mathbb{S}^2$	maximum global minimum global	$det(-\Delta)$ $det\nabla^2$	aire aire	Onofri [Ono82]
$\mathbb{S}^4$	minimum global maximum global	$detL$ $det\nabla^2$	volume et classe conforme	Branson, Chang et Yang [BCY92a]
$\mathbb{S}^6$	maximum global minimum global	$detL$ $det\nabla^2$	volume et classe conforme	Branson [Bra95]
$\mathbb{S}^3$	maximum local minimum local	$det(-\Delta)$ $det(-\Delta)$	volume et classe conforme volume	Richardson [Ric94] Okikiolu [Oki01]
$\mathbb{S}^{2n+1}$, $n \geq 3$	point selle	$det(-\Delta)$	volume et classe conforme	Okikiolu [Oki01]
$\mathbb{S}^{4n+1}$ $\mathbb{S}^{4n+3}$	minimum local maximum local	$detL$ $detL$	volume	Okikiolu [Oki01]

Étudions maintenant l'existence de métriques extrémales pour la fonctionnelle F_A définie en (32). L'outil fondamental pour cette étude est une généralisation de l'inégalité de Moser (1) ; cette inégalité est due à Adams [Ada88]

Théorème 6.3. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et soit k un entier naturel tel que $k < n$. On pose $p := \frac{n}{k}$. Il existe une constante $C = C(k,n)$ et une constante $\beta_0 = \beta_0(k,n)$ telles que pour toute fonction $w \in C_0^k(\Omega)$ vérifiant $\|\nabla^k w\|_p \leq 1$*

$$\int_\Omega \exp(\beta|w(x)|^{p'})dx \leq C\,Vol(\Omega, euclidien), \tag{35}$$

pour tout $\beta \leq \beta_0$ (ici $p' := \frac{p}{p-1}$).

Cette inégalité est optimale au sens où si $\beta > \beta_0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe $u_\lambda \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\|\nabla^k u_\lambda\|_p \leq 1$ et $\int_\Omega \exp(\beta|u_\lambda(x)|^{p'})dx \geq \lambda Vol(\Omega, euclidien)$.

Lorsque $n = 4$ et $k = 2$ (dans ce cas $p = p' = 2$) on a (voir Adams [Ada88]) $\beta_0 = 32\pi^2$. A partir du théorème précédent on obtient facilement le lemme

Lemme 6.4. — *Soit (M^4, g_0) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. Il existe une constante $C = C(g_0)$ telle que pour toute fonction $w \in C^2(M)$ vérifiant $\|\Delta_{g_0} w\|_2 \leq 1$*

$$\int_M \exp(32\pi^2|w - \overline{w}|^2)dv_{g_0} \leq C. \tag{36}$$

Par conséquent pour toute fonction $w \in C^2(M)$

$$\log \fint \exp(4(w - \overline{w}))dv_{g_0} \leq \log C + \frac{1}{8\pi^2}\|\Delta_{g_0} w\|_2^2. \tag{37}$$

Considérons trois réels γ_1, γ_2 et γ_3 et la fonctionnelle

$$F[w] := \gamma_1 I[w] + \gamma_2 II[w] + \gamma_3 III[w], \tag{38}$$

où I, II et III sont définies en (34). On pose (où Q_g est la Q-courbure pour la métrique g telle que définie en (25))

$$k_P := \int_M Q_g dv_g, \tag{39}$$

dont nous avons vu que c'est un invariant conforme. Le résultat suivant est dû à Chang et Yang [CY95b]

Théorème 6.5. — *Soit (M^4, g_0) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que $\gamma_2 < 0$, que $\gamma_3 < 0$ et que*

$$k_P < 8\pi^2 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \int_M |Weyl_{g_0}|^2_{g_0} dv_{g_0}. \tag{40}$$

Alors il existe une métrique $g_w := e^{2w} g_0$ conforme à g_0 (ce qui implique bien sur que $w \in C^\infty(M)$) telle que

$$F[w] = \sup_{\varphi \in \mathcal{S}_{c_1,c_2}} F[\varphi], \tag{41}$$

où c_1 et $c_2 > 0$ sont deux réels et

$$\mathcal{S}_{c_1,c_2} := \{\varphi \in C^\infty(M)\,,\, signe(\gamma_2)F[\varphi] \leq c_1, Vol(M, g_\varphi) = c_2 Vol(M, g_0)\}\,.$$

De plus la fonction w vérifie l'équation

$$\begin{aligned} \gamma_1 |Weyl_{g_w}|^2_{g_w} &+ \gamma_2 Q_{g_w} - \gamma_3 \Delta_{g_w} Scal_{g_w} \\ &= \gamma_1 \int_M |Weyl_{g_w}|^2_{g_w} dv_{g_w} + \gamma_2 \int_M Q_{g_w} dv_{g_w} \equiv constante \end{aligned} \tag{42}$$

Remarque 6.6. — *A priori la fontion w qui maximise F sur $\mathcal{S}_{c_1,c_2}$ est dans $W^{2,2}(M)$. La preuve de la régularité C^∞ de w est un résultat de Uhlenbeck et Viaclovsky [UV00].*

7. Variétés de dimension 4 à Q-courbure constante

Comme pour la courbure de Gauss pour les surfaces, il est naturel de se demander dans quelle mesure, sur une variété riemannienne (M, g) compacte, lisse, sans bord et de dimension 4, il existe une métrique conforme à le métrique g qui soit à Q-courbure constante.

Rappelons que sous le changement conforme $\tilde{g} = e^{2w} g$, on a (voir (24) pour la définition de P_g)

$$P_g w + 2Q_g = 2Q_{\tilde{g}} e^{4w},$$

où Q_g est l'invariant de courbure défini par

$$Q_g = \frac{1}{12}\left(-\Delta Scal_g + Scal_g^2 - 3|Ric_g|^2\right).$$

Ainsi d'après cette relation, le problème évoqué ci-dessus est équivalent à la résolution de l'équation (on rappelle que $k_P := \int_M Q_g dv_g$, voir paragraphe 5)

$$P_g u + 2Q_g = 2k_P e^{4u} \qquad \text{sur } M. \tag{43}$$

Les solutions de (43) peuvent être recherchées comme points critiques de la fonctionnelle d'Euler

$$II[w] = \langle P_g w, w\rangle_g + 4\int_M Q_g w dv_g - k_P \log \int_M e^{4w} dv_g; \qquad w \in W^{2,2}(M). \tag{44}$$

Une première réponse a été apportée sur ce problème par Chang et Yang [CY95b] sous la condition $k_P < 8\pi^2$ et en supposant que P_g est un opérateur positif dont le noyau est égal à $\mathbb{R}$:

Théorème 7.1. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que P_g est un opérateur positif et que ker $P_g = \mathbb{R}$, et on suppose également que $k_P < 8\pi^2$. Alors il existe une métrique $\tilde{g}$ conforme à g qui soit à Q-courbure constante (i.e. $Q_{\tilde{g}} =$ constante).*

L'outil principal pour montrer ce théorème est l'inégalité de Adams [Ada88] dont nous avons parlé au paragraphe 6

$$\log \int_M e^{4(u-\overline{u})} dv_g \leq C + \frac{1}{8\pi^2}\langle P_g u, u\rangle_g, \quad \forall\, u \in W^{2,2}(M). \tag{45}$$

Il est très facile de voir que sous l'hypothèse $k_P < 8\pi^2$ la fonctionnelle II est coercive sur les fonctions de $W^{2,2}(M)$ qui sont de moyenne nulle et ainsi, dans ce cas, les solutions peuvent s'obtenir par minimisation.

D'après le Théorème 5.3, les conditions du Théorème 7.1 sont vérifiées dès que la variété est à invariant de Yamabe strictement positif avec $k_P + \frac{1}{6}(Y(M,g))^2 > 0$.

Dans un papier récent, en collaboration avec A. Malchiodi, nous nous sommes interessés au cas $k_P \in]8k\pi^2, 8(k+1)\pi^2[$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, nous considérons le cas où l'opérateur P_g peut avoir des valeurs propres strictement négatives. Il est très facile de construire des exemples de telles variétés. Prenons $M = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, où Σ_1, Σ_2 sont des surfaces de genre $g_1, g_2 \geq 2$, et équipées de la métrique de Poincaré. En utilisant la formule de Gauss-Bonnet, on trouve que dans ce cas $k_P = \frac{16\pi^2}{3}(g_1 - 1)(g_2 - 1)$. Ainsi sous de petites perturbations de la métrique sur chacune des deux surfaces, et pour des valeurs adéquates de g_1, g_2, on aura $kerP_g = \mathbb{R}$ et $k_P \notin 8\pi^2\mathbb{N}^*$.

Le résultat principal de Djadli-Malchiodi [DMa] est le suivant

Théorème 7.2. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que ker $P_g = \mathbb{R}$, et on suppose également que $k_P \notin 8\pi^2\mathbb{N}^*$. Alors il existe une métrique $\tilde{g}$ conforme à g qui soit à Q-courbure constante (i.e. $Q_{\tilde{g}} =$ constante).*

Pour des raisons de place on ne va pas donner une démonstration complète de ce théorème mais la preuve complète dans le cas particulier où P_g est un opérateur positif à noyau réduit à $\mathbb{R}$ et $k_P \in]8\pi^2, 16\pi^2[$. La preuve du théorème général s'inspire d'idées similaires et on renvoie à l'article Djadli-Malchiodi [DMa] pour des détails sur celle-ci.

Notre méthode est basée sur un argument de type minimax lié à celui developpé dans [DJLW99].

La première étape de la preuve consiste à donner une caractérisation des fonctions $u \in W^{2,2}(M)$ pour lesquelles la fonctionnelle II atteint des valeurs très négatives.

Lemme 7.3. — *Sous les hypothèses du Théorème 7.2 (et dans le cas $P_g \geq 0$ et $k_P \in]8\pi^2, 16\pi^2[$), la propriété suivante a lieu. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $r > 0$ il existe un nombre réel strictement positif $L = L(\varepsilon, r)$ tel que pour tout $u \in W^{2,2}(M)$ avec $II[u] \leq -L$ il existe $p_u \in M$ tel que*

$$\int_{M \setminus B_r(p_u)} e^{4u} dv_g < \varepsilon. \tag{46}$$

Le Lemme 7.3 nous permet de plonger continûment les niveau d'energie très négatifs de II dans M. C'est le sens du lemme suivant qui constitue la deuxième étape de la preuve :

Lemme 7.4. — *Il existe un nombre réel $L > 0$ et une application continue Φ de $\{II \leq -L\} \subseteq W^{2,2}(M)$ dans M.*

Preuve. Puisque la fonctionnelle II est invariante par translation sur w, on peut supposer que les fonctions de $W^{2,2}(M)$ avec lesquelles nous travaillons vérifient la normalisation $\int_M e^{4w} dv_g = 1$. D'après le théorème de Withney, il existe $m \in \mathbb{N}$ et un difféomorphisme $\Omega : M \to \mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^m$.

D'abord nous considérons l'application $\tilde{\Phi} : W^{2,2}(M) \to \mathbb{R}^m$ définie par $\tilde{\Phi}(u) = \int_M \Omega(x) e^{4u(x)} dv_g(x)$, qui est continue, comme on peut le voir en utilisant (45) et quelques estimations élémentaires. Nous allons maintenant prouver l'affirmation suivante :

pour tout $\delta > 0$ il existe $L_\delta > 0$ tel que

$$II(u) \leq -L_\delta \text{ implique } dist(\tilde{\Phi}(u), \mathcal{M}) < \delta. \quad (47)$$

On commence par poser $\varepsilon = \frac{\delta}{2} \frac{1}{diam(\mathcal{M})}$, $r = \frac{\delta}{2} \frac{1}{\|d\Omega\|}$, et on applique le Lemme 7.3 avec ces valeurs de ε et de r. Alors, si $II(u) \leq -L(\varepsilon, r)$, il existe un point p_u tel que (46) soit vérifié. En utilisant notre normalisation on peut écrire

$$\begin{aligned} &\tilde{\Phi}(u) - \Omega(p_u) \\ &= \int_{B_r(p_u)} (\Omega(x) - \Omega(p_u)) e^{4u(x)} dv_g(x) + \int_{M \setminus B_r(p_u)} (\Omega(x) - \Omega(p_u)) e^{4u(x)} dv_g(x). \end{aligned}$$

Ce qui implique $\left\| \tilde{\Phi}(u) - \Omega(p_u) \right\| \leq r \|d\Omega\| + \varepsilon diam(\mathcal{M}) \leq \delta$, et ainsi (47) suit. En choisissant δ assez petit, il existe une projection continue Λ d'un δ-voisinage de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}$. Maintenant il suffit de définir $L_\delta = L(\varepsilon, r)$ et Φ par

$$\Phi(u) = \Lambda \circ \tilde{\Phi}(u); \qquad u \in W^{2,2}(M), u \in \{II \leq -L\}.$$

Cette application est clairement continue, et on a le lemme. ■

L'étape suivante consiste à construire une application $(x, \lambda) \mapsto \varphi_{\lambda,x} \in W^{2,2}(M)$, $\lambda > 0$ et $x \in M$, sur l'image de laquelle la fonctionnelle II prend des valeurs très négatives.

Proposition 7.5. — *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ suffisament grand, il existe une application $\varphi_{\lambda,\cdot} : M \to W^{2,2}(M)$ qui vérifie*

(a) $II(\varphi_{\lambda,\cdot}) \to -\infty$ *lorsque* $\lambda \to +\infty$ *uniformément sur* M*;*

(b) $\Phi \circ \varphi_{\lambda,\cdot}$ *est homotope à l'identité.*

Preuve. Pour $\delta > 0$ petit, on considère une fonction cut-off de classe C^∞, $\chi_\delta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\begin{cases} \chi_\delta(t) = t, & \text{pour } t \in [0, \delta]; \\ \chi_\delta(t) = 2\delta, & \text{pour } t \geq 2\delta; \\ \chi_\delta(t) \in [\delta, 2\delta], & \text{pour } t \in [\delta, 2\delta]. \end{cases} \quad (48)$$

Alors, étant donnés $x \in M$ et $\lambda > 0$, on définit la fonction $\varphi_{\lambda,x} : M \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi_{\lambda,x}(y) = \log\left(\frac{2\lambda}{1 + \lambda^2 \chi_\delta^2(\text{dist}(y, x))}\right), \quad (49)$$

où $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ est la fonction distance sur M. Cela implique immédiatement

$$\int_M \exp\left(4\varphi_{\lambda,x}(y)\right) dv_g(y) = \int_M \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2\chi_\delta^2\left(\operatorname{dist}(y,x)\right)}\right)^4 dv_g(y).$$

On découpe l'intégrale sur $B_\delta(x)$ et son complémentaire. Par construction de χ_δ, en travaillant avec des coordonnées normales centrées en x, on a (pour δ assez petit)

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\delta(x)} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2\chi_\delta^2\left(\operatorname{dist}(y,x)\right)}\right)^4 dv_g(y)\\
&\quad= \int_{B_\delta^{\mathbb{R}^4}(0)} (1+O(\delta)) \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2|y|^2}\right)^4 dy\\
&\quad= \int_{B_{\lambda\delta}^{\mathbb{R}^4}(0)} (1+O(\delta)) \left(\frac{2}{1+|y|^2}\right)^4 dy\\
&\quad= (1+O(\delta))\left(\frac{8}{3}\pi^2 + O\left(\frac{1}{\lambda^4\delta^4}\right)\right).
\end{aligned}$$

D'un autre côté, pour $\operatorname{dist}(y,x) \geq \delta$ on a $\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2\chi_\delta^2(\operatorname{dist}(y,x))}\right)^4 \leq \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2\delta^2}\right)^4$. Ainsi, on déduit

$$\int_M \exp\left(4\varphi_{\lambda,x}(y)\right) dv_g(y) = \frac{8}{3}\pi^2 + O(\delta) + O\left(\frac{1}{\lambda^4\delta^4}\right) + O\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2\delta^2}\right)^4. \qquad (50)$$

Passons au terme $\int_M Q_g(y)\varphi_{\lambda,x}(y)dv_g(y)$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi_{\lambda,x} = \log\frac{2\lambda}{1+4\delta^2\lambda^2}, &\qquad \text{sur } M\setminus B_{2\delta}(x);\\
\log\frac{2\lambda}{1+4\delta^2\lambda^2} \leq \varphi_{\lambda,x} \leq \log 2\lambda, &\qquad \text{sur } B_{2\delta}(x).
\end{aligned}$$

En écrivant

$$\begin{aligned}
&\int_M Q_g(y)\varphi_{\lambda,x}(y)dv_g(y)\\
&\quad= \log\frac{2\lambda}{1+4\delta^2\lambda^2}\int_M Q_g dv_g + \int_M Q_g(y)\left(\varphi_{\lambda,x}(y) - \log\frac{2\lambda}{1+4\delta^2\lambda^2}\right) dv_g(y),
\end{aligned}$$

il vient

$$\int_M Q_g(y)\varphi_{\lambda,x}(y)dv_g(y) = k_P \log\frac{2\lambda}{1+4\delta^2\lambda^2} + O\left(\delta^4\log(1+4\delta^2\lambda^2)\right). \qquad (51)$$

Finalement on estime le terme $\int_M \varphi_{\lambda,x} P_g \varphi_{\lambda,x} dv_g$ pour des valeurs très grandes de λ. Par des calculs élémentaires on trouve

$$\nabla_j \varphi_{\lambda,x}(y) = -\frac{\lambda^2 \nabla_j \chi_\delta^2(\mathrm{dist}(x,y))}{1+\lambda^2 \chi_\delta^2(\mathrm{dist}(x,y))};$$

$$\nabla_i \nabla_j \varphi_{\lambda,x}(y) = -\frac{\lambda^2 \nabla_i \nabla_j \chi_\delta^2(\mathrm{dist}(x,y))}{1+\lambda^2 \chi_\delta^2(\mathrm{dist}(x,y))} + \frac{\lambda^4 \nabla_i \chi_\delta^2(\mathrm{dist}(x,y)) \nabla_j \chi_\delta^2(\mathrm{dist}(x,y))}{\left(1+\lambda^2 \chi_\delta^2(\mathrm{dist}(x,y))\right)^2}.$$

En particulier

$$\Delta \varphi_{\lambda,x}(y) = -\frac{\lambda^2 \Delta \chi_\delta^2(\mathrm{dist}(x,y))}{1+\lambda^2 \chi_\delta^2(\mathrm{dist}(x,y))} + \frac{\lambda^4 |\nabla \chi_\delta^2(\mathrm{dist}(x,y))|^2}{\left(1+\lambda^2 \chi_\delta^2(\mathrm{dist}(x,y))\right)^2}.$$

Pour $\mathrm{dist}(x,y) \leq \delta$ on a

$$\Delta \varphi_{\lambda,x}(y) = -4\lambda^2 \frac{2+\lambda^2 |y-x|^2}{(1+\lambda^2|y-x|^2)^2} + O\left(\frac{\delta^4 \lambda^4 \mathrm{dist}^2(x,y)}{\left(1+\lambda^2 \mathrm{dist}^2(x,y)\right)^4}\right);$$

$$|\nabla \varphi_{\lambda,x}|(y) \leq C \frac{\lambda^2 \mathrm{dist}(x,y)}{1+\lambda^2 \mathrm{dist}^2(x,y)}.$$

Par changement de variable on obtient

$$\int_{B_\delta(x)} (\Delta \varphi_{\lambda,x}(y))^2 dv_g(y) = 16 \int_{B_{\lambda\delta}(0)} \frac{(2+|y|^2)^2}{(1+|y|^2)^4} dy + O(\delta^4) = 32\pi^2 \log(\lambda\delta) + O(\delta^4); \quad (52)$$

$$\int_{B_\delta(x)} |\nabla \varphi_{\lambda,x}|^2 \leq \frac{C}{\lambda^2} \int_{B_{\lambda\delta}(0)} \frac{|y|^2}{(1+|y|^2)^2} \leq C\delta^2.$$

D'un autre côté pour $\delta \leq \mathrm{dist}(x,y) \leq 2\delta$ et pour λ grand on a

$$|\nabla \varphi_{\lambda,x}(y)| \leq C \frac{\lambda^2 \delta}{1+\lambda^2 \delta^2} \leq \frac{C}{\delta}; \qquad |\Delta \varphi_{\lambda,x}(y)| \leq \frac{C\lambda^2}{1+\lambda^2\delta^2} + \frac{C\lambda^4 \delta^2}{(1+\lambda^2\delta^2)^2} \leq \frac{C}{\delta^2}.$$

Puisque $\varphi_{\lambda,x}$ est constante en dehors de $B_{2\delta}(x)$, en utilisant ces estimations et (52) on déduit

$$\int_M \varphi_{\lambda,x}(y) P_g \varphi_{\lambda,x}(y) dV_g(y) \leq 32\pi^2 \log \lambda + C.$$

Finalement, à partir de (50), (51) et de la dernière formule il vient

$$II(\varphi_{\lambda,x}) \leq 32\pi^2 \log \lambda - 4k_P \log \lambda + C\delta^4 \log \lambda + C \to -\infty \text{ lorsque } \lambda \to +\infty.$$

Cela montre le point **(a)**.

Le point **(b)** est une conséquence facile de la définition de Φ et de (49). ■

On introduit maintenant notre principe de minimax. Soit $\tilde{M}$ le cône (dont on souligne qu'il est contractible) de base M, que l'on peut représenter par $\tilde{M} = (M \times [0,1])/(M \times \{1\})$, de telle façon que $\partial\tilde{M} = M \times \{0\} \simeq M$. Pour des λ assez grands on définit les ensembles

$$\Theta_\lambda = \left\{ \theta : \tilde{M} \to H^2(M) \ : \ \theta \text{ est continue et } \theta(M \times \{0\}) = \varphi_{\lambda,\cdot} \right\}.$$

On a alors

Lemme 7.6. — *Pour tout λ grand l'ensemble Θ_λ est non vide et de plus en posant*

$$\overline{\Theta}_\lambda = \inf_{\theta_\lambda \in \Theta_\lambda} \sup_{m \in \tilde{M}} II(\theta_\lambda(m)), \qquad \textit{on a} \qquad \overline{\Theta}_\lambda > -\infty.$$

Preuve. Pour montrer que $\Theta_\lambda \neq \emptyset$, on peut juste remarquer que

$$\overline{\theta}(x,t) = \begin{cases} \varphi_{2(1-\lambda)t+\lambda,x}, & \text{pour } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 2\left((2-\varphi_{1,x})t + (\varphi_{1,x} - 1)\right) & \text{pour } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]; \end{cases} \qquad (x,t) \in \tilde{M},$$

appartient à Θ_λ. Supposons maintenant que $\overline{\Theta}_\lambda = -\infty$, on peut appliquer le Lemme 7.4 pour obtenir une application continue $\Psi : \tilde{M} \to M$, avec $\Psi|_{\partial\tilde{M}}$ homotope à l'identité sur M. Mais l'application $H : M \times [0,1] \to M$ définie par

$$H(\cdot, t) = \Psi(\cdot, t)$$

serait alors une homotopie entre une application constante et une application homotope à l'identité sur M, ce qui est impossible puisque M n'est pas contractible. On a donc bien $\overline{\Theta}_\lambda > -\infty$. ■

Par des arguments classiques, le principe de minimax décrit ci-dessus nous permet de construire une suite de Palais-Smale $(u_l)_l$. Par invariance par translation de II, on peut supposer que $\int_M e^{4u_l} dv_g = 1$. On utilise maintenant une astuce introduite par Struwe [Str88]. Pour ρ dans un voisinage de 1, on considère la fonctionnelle $II_\rho : W^{2,2}(M) \to \mathbb{R}$ définie par

$$II_\rho(u) = \langle P_g u, u \rangle + 4\rho \int_M Q_g dv_g - 4\rho k_P \log \int_M e^{4u} dv_g, \qquad u \in W^{2,2}(M),$$

dont les points critiques sont les solutions de

$$P_g u + 2\rho Q_g = 2\rho k_P e^{4u} \qquad \text{sur } M. \tag{53}$$

On peut utiliser notre principe de minimax pour différentes valeurs de ρ et montrer, en suivant Struwe [Str88], que les suites de Palais-Smale pour ρ appartenant à un ensemble Λ qui est dense sur un voisinage de 1, sont bornées (voir [DMa]). Cela montre qu'il existe des solutions de (53) pour $\rho \in \Lambda$. On applique alors le Théorème 7.7 (dont nous donnons l'énoncé ci-dessous et qui est dû à Malchiodi [Mal]), avec $Q_l = \rho_l Q_g$, où $(\rho_l)_l \subseteq \Lambda$ et $\rho_l \to 1$ pour obtenir une solution de (43).

THÉORÈME 7.7. — *On suppose que ker $P_g = \mathbb{R}$, et que $(u_l)_l$ est une suite de solutions de*

$$P_g u_l + 2Q_l = 2k_l e^{4u_l} \qquad \text{sur } M, \tag{54}$$

pour laquelle $\int_M e^{4u_l} dv_g = 1$. Ici $k_l = \int_M Q_l dv_g$ et on suppose que $Q_l \to Q_0$ dans $C^0(M)$ et que $k_0 := \int_M Q_0 dv_g \neq 8k\pi^2$ pour $k = 1, 2, 3, \dots$. Alors $(u_l)_l$ est bornée dans $C^\alpha(M)$ pour tout $\alpha \in (0,1)$.

8. Un résultat de classification

Dans cette partie nous allons nous intéresser à un des exemples d'utilisation de la Q-courbure, en l'occurence à son application dans des problèmes de classification.

Le point de départ est l'étude d'une fonctionnelle riemannienne (c'est-à-dire une fonctionnelle définie sur l'ensemble des métriques définies sur une variété M lisse et sans bord). L'exemple classique est la fonctionnelle de Einstein-Hilbert

$$g \longmapsto \int_M Scal_g dv_g, \tag{55}$$

dont on sait que les points critiques (lorsqu'il en existe) sous la contrainte du volume égal à 1 sont d'Einstein. Une variante de ce problème consiste à rechercher les points critiques de cette fonctionnelle mais cette fois en se restreignant à une classe conforme : c'est ce que l'on appelle le problème de Yamabe (voir Lee-Parker [LP87] pour un panorama complet sur ce problème) qui fut entièmement résolu par Yamabe [Yam60], Trudinger [Tru68], Aubin [Aub76a] et Schoen [Sch84].

D'autres fonctionnelles possèdent des propriétés intéressantes, en particulier celles qui sont quadratiques en la courbure (voir Besse [Bes87] page 133). Par exemple

$$g \longmapsto \mathcal{R}[g] := \int_M Scal_g^2 dv_g, \tag{56}$$

et

$$g \longmapsto \mathcal{W}[g] := \int_M |Weyl_g|_g^2 dv_g. \tag{57}$$

La fonctionnelle $\mathcal{R}$ fut introduite par Calabi en géométrie kählerienne. Ici nous allons nous pencher plus particulièrement sur la fonctionnelle de Weyl $\mathcal{W}$ en dimension 4. Supposons que M^4 est une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. On sait qu'alors l'opérateur de Hodge $*$ induit une décomposition du fibré exterieur Λ^2 en deux composantes $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$, où Λ^2_+ est l'espace des formes autoduales et Λ^2_- est l'espace des formes anti-autoduales. Cette décomposition induit à son tour une décomposition du tenseur de Weyl (que l'on regarde comme un endomorphisme à trace nulle sur Λ^2) en une partie autoduale, notée $Weyl^+$, et une partie anti-autoduale, notée $Weyl^-$. Si on note $\sigma(M)$ la signature de M (voir Besse [Bes87]) on a la formule de Hirzebruch

$$12\pi^2\sigma(M) = \int_M \left(|Weyl_g^+|_g^2 - |Weyl_g^-|_g^2\right) dv_g. \tag{58}$$

Par conséquent l'étude de la fonctionnelle $\mathcal{W}$ se résume à l'étude de la fonctionnelle

$$\mathcal{W}_+[g] := \int_M |Weyl_g^+|_g^2 dv_g. \tag{59}$$

que l'on appellera par commodité fonctionnelle de Weyl autoduale.

Cette fonctionnelle de Weyl autoduale est conformément invariante au sens où si $\overline{g}$ est une métrique conforme à g alors $\mathcal{W}_+[\overline{g}] = \mathcal{W}_+[g]$. De plus on peut calculer son gradient, que l'on appelle le tenseur de Bach, et celui-ci est également conformément invariant (voir Derdziński [Der83]). Nous verrons dans le paragraphe suivant que le tenseur de Bach joue un grand rôle en géométrie conforme.

Dans le cas général on ne sait pas dire grand chose sur les points critiques, s'il en existe, de la fonctionnelle de Weyl autoduale. Il est très simple de voir grâce à la formule de Hirzebruch que

$$\mathcal{W}_+[g] \geq \max\left\{12\pi^2\sigma(M), 0\right\},$$

avec égalité si et seulement si la variété est semi-conformément plate ($Weyl_g^+ \equiv 0$ ou $Weyl_g^- \equiv 0$).

D'un autre coté, en utilisant l'expression explicite du tenseur de Weyl, on peut voir assez aisément que les métriques d'Einstein sont aussi des points critiques de la fonctionnelle de Weyl autoduale. Et plus généralement, toute métrique qui est localement conforme à une métrique d'Einstein est aussi un point critique de la fonctionnelle de Weyl autoduale.

Dans un article récent, Gursky [Gur98] s'est intéressé à la minimisation de la fonctionnelle de Weyl autoduale sous une contrainte géométrique très naturelle : la positivité de l'invariant de Yamabe. Il faut tout de suite remarquer que cette contrainte est conformément invariante ce qui est primordial puisque la fonctionnelle de Weyl autoduale est elle-même conformément invariante.

Le premier résultat obtenu par Gursky est le suivant :

Théorème 8.1. — *Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. On suppose que sa forme d'intersection possède au moins une valeur propre strictement positive. Alors pour toute métrique g définie sur M et telle que son invariant de Yamabe $Y(M,g)$ est positif ou nul, on a*

$$\mathcal{W}_+[g] \geq \frac{4\pi^2}{3}\left(2\chi(M)+3\sigma(M)\right), \tag{60}$$

où $\chi(M)$ et $\sigma(M)$ sont respectivement la caractéristique d'Euler-Poincaré et la signature de M. De plus

(i) l'égalité est réalisée dans (60) *par une métrique g_0 telle que $Y(M,g_0)>0$ si et seulement si g_0 est conforme à une métrique de Kähler-Einstein.*

(ii) l'égalité est réalisée dans (60) *par une métrique g_0 telle que $Y(M,g_0)=0$ si et seulement si g_0 est conforme à une métrique de Kähler-Einstein qui est Ricci-plate et anti-autoduale.*

Ce théorème possède plusieurs corollaires. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article de Gursky [Gur98].

Une remarque que l'on peut faire sur ce résultat est que si une métrique g réalise l'égalité dans (60), alors elle est conforme à une métrique de Kähler-Einstein. En particulier son premier groupe de cohomologie de Rham est non réduit à 0. D'un autre coté, Gursky [Gur98] a montré que si l'on suppose que le premier groupe de cohomologie de M, $H^1(M)$, est non réduit à 0 alors la borne inférieure dans (60) peut être améliorée. C'est l'objet du théorème suivant

Théorème 8.2. — *Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. On suppose que $H^1(M)\neq 0$. Alors pour toute métrique g définie sur M et telle que son invariant de Yamabe $Y(M,g)$ est strictement positif, on a*

$$\mathcal{W}_+[g] \geq 2\pi^2\left(2\chi(M)+3\sigma(M)\right), \tag{61}$$

où $\chi(M)$ et $\sigma(M)$ sont respectivement la caractéristique d'Euler-Poincaré et la signature de M. De plus l'égalité est réalisée dans (61) *par une métrique g_0 telle que $Y(M,g_0)>0$ si et seulement si (M,g_0) est conformément difféomorphe à un quotient de $\mathbb{S}^3\times\mathbb{R}$ muni de la métrique produit. En particulier g_0 est conformément plate et $\chi(M)=\sigma(M)=0$.*

Si on suppose que la métrique g est telle que $Y(M,g)=0$ il n'est plus nécessaire de supposer que $H^1(M)\neq 0$. On a dans ce cas (Gursky [Gur98]) :

Théorème 8.3. — *Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. Alors pour toute métrique g définie sur M et telle que son invariant de Yamabe $Y(M,g)$ est nul, on a*

$$\mathcal{W}_+[g] \geq 2\pi^2\left(2\chi(M)+3\sigma(M)\right), \tag{62}$$

où $\chi(M)$ et $\sigma(M)$ sont respectivement la caractéristique d'Euler-Poincaré et la signature de M. De plus l'égalité est réalisée dans (62) *par une métrique g_0 telle que $Y(M, g_0) = 0$ si et seulement si g_0 est conforme à une métrique Ricci-plate.*

On peut reformuler ces deux résultats en utilisant la Q-courbure. Rappelons que

$$Q_g = \frac{1}{12}\left(-\Delta_g Scal_g - 3\,|Ric_g|^2 + Scal_g^2\right).$$

On a vu que la formule de Gauss-Bonnet nous donne

$$\int_M Q_g dv_g = 4\pi^2\chi(M) + \frac{1}{8}\int_M |Weyl_g|_g^2 dv_g.$$

De manière équivalente on peut énoncer les deux théorèmes précédents de la manière suivante :

Théorème 8.4. —

(i) Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. On suppose que l'invariant de Yamabe de g_0 vérifie $Y(M, g_0) > 0$ et que $\int_M Q_{g_0} dv_{g_0} > 0$. Alors $H^1(M) = 0$.

(ii) Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. On suppose que l'invariant de Yamabe de g_0 vérifie $Y(M, g_0) > 0$ et que $\int_M Q_{g_0} dv_{g_0} = 0$. Alors $H^1(M) \neq 0$ si et seulement si (M, g_0) est conformément difféomorphe à un quotient de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ munie de la métrique produit standard. En particulier (M^4, g_0) est localement conformément plate et $\chi(M) = \sigma(M) = 0$.

On peut voir ce résultat comme une généralisation aux variétés de dimension 4 du résultat suivant sur les surfaces : soit (M^2, g_0) une surface compacte, lisse, sans bord telle que $\int_M K_{g_0} dv_{g_0} > 0$ alors $\chi(M) > 0$ et le genre de M est 0 ; si $\int_M K_{g_0} dv_{g_0} = 0$ alors $\chi(M) = 0$, le genre de M est 1 et par le théorème d'uniformisation M est conformément difféomorphe à un quotient de $\mathbb{R}^2$.

L'une des conséquences de ce théorème est de permettre de compléter la classification des variétés de dimension 4, lisses, compactes et sans bord qui sont localement conformément plates, à invariant de Yamabe strictement positif et à caractéristique d'Euler-Poncaré positive ou nulle. Dans un papier datant de 1994, Gursky [Gur94] avait classifié les variétés de dimension 4, lisses, compactes et sans bord qui sont localement conformément plates, à invariant de Yamabe strictement positif et à caractéristique d'Euler-Poncaré strictement positive. Il ne restait que le cas où caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle ; le Théorème précédent permet de traiter ce cas et on a le résultat suivant :

Théorème 8.5. — *(Gursky [Gur94] et [Gur98]) Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord. On suppose qu'elle est localement conformément plate et à invariant de Yamabe strictement positif. Alors :*

(i) si $\chi(M) > 0$ soit (M, g_0) est conformément difféomorphe à la 4-sphère standard (cas $\chi(M) = 2$) soit (M, g_0) est conformément difféomorphe à l'espace projectif réel muni de sa métrique standard ;

(ii) si $\chi(M) = 0$ (M, g_0) est conformément difféomorphe à un quotient de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ munie de la métrique produit standard.

Nous voudrions dire quelques mots sur la preuve de ces différents théorèmes. Cela nous permettra de montrer comment on peut utiliser la recherche de métriques extrémales pour obtenir des résultats de classification géométriques.

8.1. La preuve du Théorème 8.1

La preuve de ce théorème est basée sur l'étude d'une fonctionnelle de type log-déterminant que nous avons introduit en (32). Considérons donc γ_1, γ_2 et γ_3 trois réels et considérons la fonctionnelle log-déterminant donnée par

$$F_A[w] = \gamma_1 I[w] + \gamma_2 II[w] + \gamma_3 III[w], \tag{63}$$

où

$$\begin{aligned} I[w] &:= 4\int_M w|Weyl_g|_g^2 dv_g - \left(\int_M |Weyl_g|_g^2 dv_g\right) \log\left(\fint_M e^{4w} dv_g\right), \\ II[w] &:= \int_M (wP_g w + 4wQ_g)\, dv_g - \left(\int_M Q_g dv_g\right) \log\left(\fint_M e^{4w} dv_g\right), \\ III[w] &:= \frac{1}{3}\left(\int_M Scal_{g_w}^2 dv_{g_w} - \int_M Scal_g^2 dv_g\right). \end{aligned} \tag{64}$$

En fait, puisque l'on veut minorer la fonctionnelle $\mathcal{W}_+$ on va regarder une fonctionnelle légèrement différente :

$$F_A[w] = \gamma_1^+ I^+[w] + \gamma_1^- I^-[w] + \gamma_2 II[w] + \gamma_3 III[w], \tag{65}$$

où γ_1^+ et γ_1^- sont des réels et où

$$\begin{aligned} I^+[w] &:= 4\int_M w|Weyl_g^+|_g^2 dv_g - \left(\int_M |Weyl_g^+|_g^2 dv_g\right) \log\left(\fint_M e^{4w} dv_g\right), \\ I^-[w] &:= 4\int_M w|Weyl_g^-|_g^2 dv_g - \left(\int_M |Weyl_g^-|_g^2 dv_g\right) \log\left(\fint_M e^{4w} dv_g\right). \end{aligned} \tag{66}$$

On posera dans toute la suite (notons que c'est un invariant conforme)

$$\tilde{k}_d = -\gamma_1^+ \int_M |Weyl_g^+|_g^2 dv_g - \gamma_1^- \int_M |Weyl_g^-|_g^2 dv_g - \gamma_2 \int_M Q_g dv_g. \tag{67}$$

La première étape de la preuve consiste à montrer un résultat d'existence d'une métrique extrémale pour la fonctionnelle F du type de celui obtenu au Théorème 6.5. C'est l'objet du lemme suivant

LEMME 8.6. — *Soit (M^4, g_0) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que $\gamma_2 < 0$, que $\gamma_3 < 0$ et que*

$$\tilde{k}_d < (-\gamma_2)8\pi^2. \tag{68}$$

Alors il existe une métrique $g_w := e^{2w}g_0$ conforme à g_0 (ce qui implique bien sur que $w \in C^\infty(M)$) telle que

$$F[w] = \sup_{\varphi \in W^{2,2}(M)} F[\varphi], \tag{69}$$

De plus la fonction w vérifie l'équation

$$\gamma_1^+ |Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w} + \gamma_1^- |Weyl^-_{g_w}|^2_{g_w} + \gamma_2 Q_{g_w} - \gamma_3 \Delta_{g_w} Scal_{g_w} = -\tilde{k}_d Vol(M, g_w)^{-1}. \tag{70}$$

On peut réecrire (70) un peu différemment. Si on pose

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(\gamma_3 + \frac{1}{12}\gamma_2\right)^{-1} \tilde{k}_d Vol(M, g_w)^{-1} \\ \alpha_\pm &= -\gamma_1^\pm \left(\gamma_3 + \frac{1}{12}\gamma_2\right)^{-1} \\ \beta &= \frac{1}{4}\gamma_2 \left(\gamma_3 + \frac{1}{12}\gamma_2\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{71}$$

alors (70) s'écrit, en utilisant l'expression de la Q-courbure

$$\begin{aligned} &\Delta_{g_w} Scal_{g_w} \\ &= \lambda - \alpha_+ |Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w} - \alpha_- |Weyl^-_{g_w}|^2_{g_w} - \beta \left| Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w \right|^2_{g_w} + \frac{1}{12}\beta Scal^2_{g_w}. \end{aligned} \tag{72}$$

La seconde étape de la preuve consiste à trouver une condition conforme sous laquelle on peut connaître le signe de la courbure scalaire. Le candidat naturel pour une telle condition est l'invariant de Yamabe, ce qu'illustre le lemme suivant (rappelons que l'on note $L_g := -\Delta_g + \frac{1}{6} Scal_g$ l'opérateur laplacien conforme associé à une métrique g)

Lemme 8.7. — *Soit* (M^4, g) *une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que* $Scal_g$ *vérifie* $L_g Scal_g \geq 0$ *sur* M. *Alors*

(i) si $Y(M,g) > 0$ *on a* $Scal_g > 0$ *sur* M*;*

(ii) si $Y(M,g) = 0$ *on a* $Scal_g \equiv 0$ *sur* M.

La preuve de ce lemme est très simple et n'utilise que le principe du maximum pour l'opérateur de Laplace-Beltrami (voir Gursky [Gur98]).

En mettant bout à bout ces deux lemmes on a la proposition :

Proposition 8.8. — *Soit* (M^4, g) *une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4.*

(i) On suppose que

$$0 < \int_M |Weyl_{g_0}|^2_{g_0} dv_{g_0} < \frac{4\pi^2}{3} \left(2\chi(M) + 3\sigma(M)\right). \tag{73}$$

Alors il existe une métrique $g_w := e^{2w} g$ *et il existe* $\varepsilon > 0$ *tels que*

$$\Delta_{g_w} Scal_{g_w} = -(4+\varepsilon)|Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w} - 2\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w\right|^2_{g_w} + \frac{1}{6} Scal^2_{g_w}. \tag{74}$$

De plus si $Y(M, g_0) > 0$ *alors* $Scal_{g_w} > 0$ *sur* M *et si* $Y(M, g_0) = 0$ *alors (73) ne peut pas se produire.*

(ii) On suppose que

$$\int_M |Weyl_{g_0}|^2_{g_0} dv_{g_0} = \frac{4\pi^2}{3} \left(2\chi(M) + 3\sigma(M)\right). \tag{75}$$

Alors il existe une métrique $g_w := e^{2w} g$ *telle que*

$$\Delta_{g_w} Scal_{g_w} = -4|Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w} - 2\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w\right|^2_{g_w} + \frac{1}{6} Scal^2_{g_w}. \tag{76}$$

De plus si $Y(M, g_0) > 0$ *alors* $Scal_{g_w} > 0$ *sur* M *et si* $Y(M, g_0) = 0$ *alors* g_w *est Ricci-plate et anti-autoduale.*

Preuve. La preuve de cette proposition est la suivante. Pour le point (i), on considère $\varepsilon > 0$ tel que

$$(1+\varepsilon)\int_M |Weyl_{g_0}|^2_{g_0} dv_{g_0} = \frac{4\pi^2}{3} \left(2\chi(M) + 3\sigma(M)\right).$$

On choisit $\gamma_1^- = 0$, $\gamma_2 = -12$ et $\gamma_3 = -\frac{1}{2}$ et $\gamma_1^+ = 6(1+3\varepsilon)$ dans le lemme 8.6. Alors on a clairement $\tilde{k}_d = 0$ et on peut appliquer le lemme 8.6 et on obtient l'existence de la métrique g_w qui vérifie (72). On calcule ensuite $L_{g_w} Scal_{g_w}$ et il est très facile de voir que $L_{g_w} Scal_{g_w} \leq 0$. On applique le lemme 8.7 pour conclure sur le signe de $Scal_{g_w}$ lorsque $Y(M, g_0) > 0$. Par contre si (73) se produit avec $Y(M, g_0) = 0$ on a, toujours d'après le lemme 8.7, $Scal_{g_w} = 0$ et cela implique que $\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w\right|^2_{g_w} = |Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w} \equiv 0$ ce qui est impossible.

La preuve de (ii) se fait de manière similaire. ■

Avec ces ingrédients on est en mesure de montrer le Théorème 8.1. On suppose donc que M admet une métrique g_0 telle que $Y(M, g_0) \geq 0$ et

$$\mathcal{W}_+[g_0] < \frac{4\pi^2}{3} \left(2\chi(M) + 3\sigma(M)\right). \tag{77}$$

Supposons tout d'abord que $\mathcal{W}_+[g_0] = 0$ et $Y(g_0) > 0$. D'après un résultat de Bourguignon [Bou81] on a forcément $H^2_+(M) = 0$ ce qui est une contradiction avec l'hypothèse du théorème. Donc on doit avoir $Y(M, g_0) = 0$. Mais on obtient facilement en manipulant la formule de Gauss-Bonnet et la formule de Hirzebruch (pour toute métrique g définie sur M)

$$2\pi^2 \left(2\chi(M) + 3\sigma(M)\right) = \mathcal{W}_+[g] - \frac{1}{4} \int_M \left|Ric_g - \frac{1}{4} Scal_g g\right|^2_g dv_g + \frac{1}{48} \int_M Scal_g^2 dv_g.$$

Si $Y(M, g_0) = 0$ il existe une métrique g dans la classe conforme de g_0 telle que $Scal_g \equiv 0$. Et puisque que nous avons supposé que $\mathcal{W}_+[g_0] = \mathcal{W}_+[g] = 0$ la formule précédente nous dit que $2\chi(M) + 3\sigma(M) \leq 0$ ce qui est incompatible avec (77).

Ainsi on est forcément dans la situation où $\mathcal{W}_+[g_0] > 0$. D'après la Proposition 8.8 (point (i)) on doit avoir $Y(M, g_0) > 0$. Et par cette même proposition il existe une métrique $g_w := e^{2w} g_0$ telle que

$$\Delta_{g_w} Scal_{g_w} = -(4+\varepsilon)|Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w} - 2\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w\right|^2_{g_w} + \frac{1}{6} Scal^2_{g_w}. \tag{78}$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. De surcroît $Scal_{g_w} > 0$ sur M.

Considérons maintenant une forme $u \in H^2_+(M)$ et posons $G := \dfrac{|u|_{g_w}}{Scal_{g_w}}$. Un petit calcul nous donne (là où u ne s'annule pas)

$$\begin{aligned}\Delta_{g_w} G + 2\left\langle \nabla_{g_w} G, \frac{\nabla_{g_w} Scal_{g_w}}{Scal_{g_w}} \right\rangle_{g_w} &\geq \varepsilon \frac{|Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w}}{Scal_{g_w}} G \\ &+ 2\frac{\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w\right|^2_{g_w}}{Scal_{g_w}} G + 4\frac{G}{Scal_{g_w}} \left(|Weyl^+_{g_w}|_{g_w} - \frac{\sqrt{6}}{12} Scal_{g_w} \right)^2 \\ &+ G|u|^{-2}_{g_w} \left(|\nabla_{g_w} u|^2_{g_w} - |\nabla_{g_w} |u|_{g_w}|^2_{g_w} \right). \end{aligned} \tag{79}$$

Le second membre de cette inégalité est positif donc d'après le principe du maximum G doit être constante. Mais comme on a supposé $|Weyl^+_{g_w}|_{g_w} \not\equiv 0$ cette constante doit être 0, mais cela contredit l'hypothèse $H^1_+(M) \neq 0$. Cela prouve la minoration du Théorème.

Si on a l'égalité dans (77), alors par la Proposition 8.8 il existe une métrique $g_w := e^{2w} g_0$ telle que

$$\Delta_{g_w} Scal_{g_w} = -4|Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w} - 2\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w\right|^2_{g_w} + \frac{1}{6} Scal^2_{g_w}. \tag{80}$$

Si $Y(M, g_0) = 0$ alors g_w est Ricci-plate et anti-autoduale. D'après un résultat de LeBrun [LeB86] g est alors une métrique de Kähler.

Maintenant si $Y(M, g_0) > 0$ alors $Scal_{g_w} > 0$ et comme précédemment, on a là où u ne s'annule pas

$$\begin{aligned}\Delta_{g_w} G + 2\left\langle \nabla_{g_w} G, \frac{\nabla_{g_w} Scal_{g_w}}{Scal_{g_w}} \right\rangle_{g_w} &\geq 2\frac{\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w\right|^2_{g_w}}{Scal_{g_w}} G \\ &+ 4\frac{G}{Scal_{g_w}} \left(|Weyl^+_{g_w}|_{g_w} - \frac{\sqrt{6}}{12} Scal_{g_w} \right)^2 \\ &+ G|u|^{-2}_{g_w} \left(|\nabla_{g_w} u|^2_{g_w} - |\nabla_{g_w} |u|_{g_w}|^2_{g_w} \right). \end{aligned} \tag{81}$$

Le membre de droite est positif et donc G doit être constante d'après le principe du maximum. On en déduit que le membre de droite est nul sur M. Il vient immédiatement que g est Einstein, et donc $Scal_{g_w}$ est constante. Puisque G est constant, $|u|_{g_w}$ l'est aussi et donc, toujours d'après LeBrun [LeB86], g_w est de Kähler.

Il reste à prouver que si g est de Kähler alors on a bien égalité dans (77). Cela découle du fait que (voir Besse [Bes87] page 319)

$$\int_M Scal_{g_w} dv_{g_w} = 32\pi^2 c_1^2(M) = 32\pi^2 \left(2\chi(M) + 3\sigma(M) \right), \tag{82}$$

où $c_1^2(M)$ est le carré de la première classe de Chern de M.

La preuve du Théorème 8.2 et celle du Théorème 8.3 se font de manière similaire. On pourra consulter Gursky [Gur98] pour des détails.

8.2. La preuve du Théorème 8.4

Pour prouver ce théorème on va raisonner par l'absurde en supposant que M admet une métrique g_0 telle que $Y(M,g_0)>0$ et

$$\mathcal{W}_+[g_0] < 2\pi^2\left(2\chi(M)+3\sigma(M)\right). \tag{83}$$

Si $\mathcal{W}_+[g_0]=0$, alors toujours d'après Bourguignon [Bou81], on a $H_+^2(M)=0$. On pose $\beta_1 = dimH^1(M)$, et $\beta_2^{\mp} = dimH_{\mp}^2(M)$. Puisque M est orientée, on a

$$\chi(M) = 2-2\beta_1+\beta_2^-$$

et

$$\sigma(M) = \beta_2^+ - \beta_2^- = -\beta_2^-.$$

Ainsi on aurait

$$0 < 2\chi(M)+3\sigma(M) = 4-4\beta_1-\beta_2^-,$$

ce qui est impossible car $\beta_1 \neq 0$ par hypothèse.

On a donc $\mathcal{W}_+[g_0]\neq 0$ et on suppose à nouveau que

$$\mathcal{W}_+[g_0] < 2\pi^2\left(2\chi(M)+3\sigma(M)\right). \tag{84}$$

Comme dans la preuve du Théorème 8.1, on montre que dans ce cas il existe une métrique $g_w = e^{2w}g_0$ telle que

$$\Delta_{g_w} Scal_{g_w} = -\varepsilon |Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w} - \frac{3}{2}\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4}Scal_{g_w}g_w\right|^2_{g_w} + \frac{1}{8}Scal^2_{g_w},$$

où $\varepsilon>0$. De plus en utilisant le Lemme 8.7, on a $Scal_{g_w}>0$. A nouveau, en considérant $u\in H^1(M)$ et en posant $G := \dfrac{|u|_{g_w}}{Scal_{g_w}}$, on a là où u ne s'annule pas

$$\begin{aligned}\Delta_{g_w} G + 2\left\langle \nabla_{g_w} G, \frac{\nabla Scal_{g_w}}{Scal_{g_w}}\right\rangle_{g_w} &\geq \varepsilon \frac{|Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w}}{Scal_{g_w}} G \\ &+ \frac{3}{2}\frac{G}{Scal_{g_w}}\left(\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4}Scal_{g_w}g_w\right|_{g_w} - \frac{\sqrt{3}}{6}Scal_{g_w}\right)^2 \\ &+ G|u|^{-2}_{g_w}\left(|\nabla_{g_w}u|^2_{g_w} - |\nabla_{g_w}|u|_{g_w}|^2_{g_w}\right).\end{aligned} \tag{85}$$

Puisque le membre de droite est positif ou nul, par principe du maximum, G doit être une constante. De plus cette constante doit être 0 car on a $\mathcal{W}_+[g_0] \neq 0$. Mais cela contredit l'hypothèse $H^1(M) \neq 0$.

Cela achève la preuve de la première partie du théorème.

Supposons maintenant que nous avons l'égalité dans (84) pour une métrique g_0 telle que $Y(M, g_0) > 0$. Alors comme précédemment on montre l'existence d'une métrique $g_{g_w} = e^{2w} g_0$ telle que

$$\Delta_{g_w} Scal_{g_w} = -\frac{3}{2} \left| Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w \right|_{g_w}^2 + \frac{1}{8} Scal_{g_w}^2, \tag{86}$$

avec $Scal_{g_w} > 0$ sur M. A nouveau, en considérant $u \in H^1(M)$ et en posant $G := \dfrac{|u|_{g_w}}{Scal_{g_w}}$, on a là où u ne s'annule pas

$$\Delta_{g_w} G + 2 \left\langle \nabla_{g_w} G, \frac{\nabla Scal_{g_w}}{Scal_{g_w}} \right\rangle_{g_w} \geq \frac{3}{2} \frac{G}{Scal_{g_w}}$$
$$\left(\left| Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w \right|_{g_w} - \frac{\sqrt{3}}{6} Scal_{g_w} \right)^2 + G |u|_{g_w}^{-2} \left(|\nabla_{g_w} u|_{g_w}^2 - |\nabla_{g_w} |u|_{g_w}|_{g_w}^2 \right). \tag{87}$$

De plus on a égalité dans (87) en un point $P \in M$ si et seulement s'il existe une base orthonormée de $T_P(M)$ pour laquelle

$$\begin{pmatrix} -3\nu & & & 0 \\ & \nu & & \\ & & \nu & \\ 0 & & & \nu \end{pmatrix} \tag{88}$$

pour un certain $\nu \in \mathbb{R}$.

Puisque le membre de droite de (87) est positif ou nul, on en déduit que G est constante. Et donc, aussi bien le membre de droite que celui de gauche doivent valoir 0, et on a l'écriture (88) en tout point de M.

En plus de cela, puisque le premier terme du membre de droite de (87) est nul on a

$$\left| Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w \right|_{g_w}^2 = \frac{1}{12} Scal_{g_w}^2, \tag{89}$$

et si on combine cela avec (86), on obtient $\Delta_{g_w} Scal_{g_w} = 0$, c'est-à-dire que $Scal_{g_w}$ est constante. Puisque G est constante, $|u|_{g_w}$ l'est aussi, et le second terme du membre de droite de (87) implique que $\nabla_{g_w} u = 0$.

Ecrivons la formule de Weitzenbock pour u :

$$0 = \frac{1}{2}\Delta_{g_w}|u|^2_{g_w} = |\nabla_{g_w} u|^2_{g_w} + Ric_{g_w}(u,u) \Longrightarrow Ric_{g_w}(u,u) = 0. \tag{90}$$

Il s'ensuit en utilisant (88) et (90) qu'en tout point de M, il existe une base orthonormale de $T_P M$ telle que sur celle-ci

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \xi & & \\ & & \xi & \\ 0 & & & \xi \end{pmatrix} \tag{91}$$

où $\xi = \xi(P)$. Puisque $Scal_{g_w}$ est constante on voit immédiatement que ξ l'est aussi. En renormalisant eventuellement on peut se ramener à $\xi = 2$.

Passons maintenant au revêtement universel $\tilde{M}$ de M. Si on note $\tilde{u}$ le relevé de u sur $\tilde{M}$, puisque u est fermée, il existe une fonction $f \in C^\infty(\tilde{M})$ telle que

$$\tilde{u} = df. \tag{92}$$

Puisque u est parallèle,

$$Hess(f) = \nabla\tilde{u} \equiv 0. \tag{93}$$

De plus, puisque $|\tilde{u}|$ est constante sur $\tilde{M}$,

$$|df| > 0, \tag{94}$$

sur $\tilde{M}$. Il suit de (92)-(94) que chaque surface de niveau $\Sigma(c) = \left\{ x \in \tilde{M} \ : \ f(c) = c \right\}$ de f est une sous-variété de codimension 1 totalement géodésique. D'après (91), $Ric_{g_w}(\nabla f, \nabla f) \equiv 0$, et donc la courbure de Ricci de $\Sigma(c)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix} \tag{95}$$

Ainsi $\Sigma(c)$ est une variété à courbure constante strictement positive. On en conclut que $\tilde{M}$ se décompose et est isométrique à $\mathbb{R} \times N$, où N est une variété de dimension 3 à courbure constante. On en déduit que (M, g) est isométrique à un quotient de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$. Ce qui achève la preuve du Théorème 8.4.

Nous allons terminer ce paragraphe en donnant la preuve du point (ii) du Théorème 8.5 (pour la preuve du point (i) on se reportera à Gursky [Gur98]).

Soit donc (M, g) compacte, lisse, sans bord et de dimension 4 qui est localement conformément plate et telle que $\chi(M) = 0$. La formule de Gauss-Bonnet nous donne tout de suite $\int_M Q_g dv_g = 0$. Et donc on pourra conclure si on arrive à montrer que $H^1(M) \neq 0$. Si M n'est pas orientable on passe au revêtement universel le cas échéant. D'après le théorème d'annulation de Bourguignon, puisque g est localement conformément plate avec $Y(M, g) > 0$ on a $H^2(M) = 0$. En posant $\beta_i = dim H^1(M)$, on a

$$0 = \chi(M) = 2 - 2\beta_1 + \beta_2 = 2 - 2\beta_1,$$

et donc $H^1(M) \neq 0$ et on a le point (ii) du Théorème 8.5.

9. Fonctions symétriques géométriques

Dans sa thèse Jeff Viaclovsky [Via00] a étudié une famille d'équations totalement non linéaires et qui sont une généralisation des équations de type Yamabe. Nous allons, dans ce paragraphe, introduire ce type de problèmes et parler de quelques applications à la géométrie conforme.

Considérons une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension $n \geq 3$ que l'on notera (M, g). On définit le tenseur de Schouten par

$$A_g := Ric_g - \frac{1}{2(n-1)} Scal_g g. \tag{96}$$

En dimension strictement plus grande que 2, ce tenseur joue un grand rôle à cause de la décomposition du tenseur riemannien

$$Riem_g = Weyl_g + A_g \odot g,$$

où $\odot$ est le produit de Kulkarni-Nomizu.

On peut voir A_g, en tout point x de M, comme un endomorphisme de l'espace tangent $T_x M$. Cette matrice est symétrique et on notera $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses n valeurs propres. On appellera alors (pour un entier naturel k, $1 \leq k \leq n$) k-ième fonction symétrique élémentaire associée à A_g la fonction définie par

$$\sigma_k(A_g) := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k}. \tag{97}$$

Il est facile de voir que $\sigma_1(A_g)$ est un multiple de la courbure scalaire associée à g et que $\sigma_n(A_g)$ n'est rien d'autre que le déterminant de la matrice A_g.

Nous allons nous intéresser ici au cas de la dimension 4. Ces fonctions $\sigma_k(A_g)$ ont de nombreuses applications en géométrie conforme en dimension 4.

Pour $k=2$, on peut écrire $\sigma_2(A_g)$ en fonction de la norme de la courbure ; plus précisement :

$$\sigma_2(A_g) = -\frac{1}{2}\left|Ric_g - \frac{1}{4}Scal_g g\right|^2 + \frac{1}{24}Scal_g^2. \tag{98}$$

On voit ainsi en utilisant la formule de Gauss-Bonnet (26) que l'on a

$$\frac{1}{4}\int_M |Weyl_g|^2 dv_g + \int_M \sigma_2(A_g)dv_g = 8\pi^2\chi(M), \tag{99}$$

puisque $Q_g = -\frac{1}{12}\Delta_g Scal_g + \frac{1}{2}\sigma_2(A_g)$. Ainsi, comme pour

$$\int_M Q_g dv_g,\ \int_M \sigma_2(A_g)dv_g$$

est un invariant conforme en dimension 4.

Le premier résultat que nous citons est dû à Chang, Gursky et Yang [CGY02] :

Théorème 9.1. — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que son invariant de Yamabe $Y(M,g)$ est strictement positif et que $\int_M \sigma_2(A_g)dv_g$ est aussi strictement positif. Alors, il existe une métrique $\tilde{g} = e^{2w}g$ conforme à la métrique g telle que*

$$\sigma_2(A_{\tilde{g}}) > 0.$$

En particulier, pour la métrique $\tilde{g}$, on a

$$0 < Ric_{\tilde{g}} < \frac{1}{2}Scal_{\tilde{g}}\tilde{g}.$$

Une conséquence de ce théorème est que les variétés de dimension 4 qui sont telles que $Y(M,g) > 0$ et $\int_M \sigma_2(A_g)dv_g > 0$ ont forcément un groupe fondamental fini. On pourra se reporter à Chang-Gursky-Yang [CGY02] pour des exemples de telles variétés.

La preuve du Théorème 9.1 nécessite de manière fondamentale la positivité de l'opérateur de Paneitz. La méthode utilisée dans celle-ci est la méthode de continuité pour la famille d'équation (où $g_w = e^{2w}g$)

$$\sigma_2(A_{g_w}) = \frac{\delta}{4}\Delta_{g_w}Scal_{g_w} - 2\gamma|Weyl_{g_w}|^2_{g_w}dv_{g_w}, \tag{100}$$

où γ est choisi tel que $\int_M \sigma_2(A_g)dv_g = -2\gamma\int_M |Weyl_g|^2 dv_g$ et où $\delta \in]0,1]$. On suppose ici que $Weyl_g$ ne s'annule jamais. La méthode de continuité porte sur le paramètre δ : pour $\delta = 1$ on montre d'abord qu'il existe une solution $w_1 \in C^\infty(M)$

(autrement dit une métrique g_{w_1} conforme à g) qui vérifie (100) avec $\delta = 1$ et telle que $\sigma_2(A_{g_{w_1}}) > 0$. Ensuite, pour $\delta \in]0,1]$, on montre des estimations a priori pour les solutions de (100), ce qui permet de prouver que l'ensemble des $\delta \in]0,1]$ tels que (100) possède une solution $w_\delta \in C^\infty(M)$ vérifiant $\sigma_2(A_{g_{w_\delta}}) > 0$ est à la fois ouvert et fermé. L'obtention de ces estimations a priori est longue et délicate et se fait au prix d'un travail technique difficile. Par connexité on déduit alors que (100) possède une solution $w_0 \in C^\infty(M)$ telle que

$$\sigma_2(A_{g_{w_0}}) = -2\gamma |Weyl_{g_{w_0}}|^2_{g_{w_0}} dv_{g_{w_0}}, \tag{101}$$

ce qui montre le résultat voulu. Si $Weyl_g$ s'annule quelque part, on construit (très simplement) un 4-tenseur Z_g du même type que $Weyl_g$, qui se comporte de la même façon sous changement conforme de métrique, et on travaille avec la famille d'équations

$$\sigma_2(A_{g_w}) = \frac{\delta}{4}\Delta_{g_w} Scal_{g_w} - 2\gamma |Z_{g_w}|^2_{g_w} dv_{g_w}, \tag{102}$$

où γ est choisi tel que $\int_M \sigma_2(A_g) dv_g = -2\gamma \int_M |Z_g|^2 dv_g$ et où $\delta \in]0,1]$.

Très récemment, Gursky et Viaclovsky [GV01] ont simplifié considérablement la preuve de Chang-Gursky-Yang [CGY02] en se servant toujours de la méthode de continuité mais à partir d'un autre type de déformation. Cela leur permet d'utiliser des estimations a priori qui s'obtiennent de manière plus directe.

Une autre application remarquable de $\sigma_2(A_g)$ (ou de manière équivalente de la Q-courbure) est le résultat suivant dû à Chang, Gursky et Yang [CGY03]

Théorème 9.2. — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4.*

(i) On suppose que son invariant de Yamabe $Y(M,g)$ est strictement positif et que

$$\int_M \sigma_2(A_g) dv_g > \frac{1}{4} \int_M |Weyl_g|^2_g dv_g. \tag{103}$$

Alors M est difféomorphe à la 4-sphère standard $(\mathbb{S}^4, g_c)$ ou au projectif réel de dimension 4 muni de sa métrique standard $(\mathbb{R}P^4, g_c)$.

(ii) Si M n'est difféomorphe ni à la 4-sphère standard $(\mathbb{S}^4, g_c)$ ni au projectif réel de dimension 4 muni de sa métrique standard $(\mathbb{R}P^4, g_c)$ et si

$$\int_M \sigma_2(A_g) dv_g = \frac{1}{4} \int_M |Weyl_g|^2_g dv_g, \tag{104}$$

alors (M,g) est conformément difféomorphe soit au 2-projectif complexe muni de la métrique de Fubini-Study, soit à un quotient de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ muni de la métrique produit.

Ce théorème peut se voir comme la version conforme (puisque les quantités

$$\int_M \sigma_2(A_g)dv_g \quad \text{et} \quad \int_M |Weyl_g|_g^2 dv_g$$

sont des invariants conformes) du résultat suivant de Margerin [Mar98]

THÉORÈME 9.3. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que $Scal_g$ est partout strictement positive et que*

$$|Weyl_g|_g^2 + 2\left|Ric_g - \frac{1}{4}Scal_g g\right|_g^2 < \frac{1}{6}Scal_g^2. \tag{105}$$

Alors M est difféomorphe à la 4-sphère $\mathbb{S}^4$ ou au projectif réel $\mathbb{R}P^4$.

(ii) On suppose que $Scal_g$ est partout strictement positive et que

$$|Weyl_g|_g^2 + 2\left|Ric_g - \frac{1}{4}Scal_g g\right|_g^2 = \frac{1}{6}Scal_g^2 \tag{106}$$

Alors (M, g) est conformément difféomorphe soit au 2-projectif complexe muni de la métrique de Fubini-Study, soit à un quotient de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ muni de la métrique produit.

Pour se convaincre que le Théorème 9.2 est bien une version conforme du Théorème 9.3, il suffit d'intégrer sur M chaque coté de (105) pour obtenir exactement (103).

La preuve du point (i) de ce théorème s'inspire des méthodes développées dans Chang-Gursky-Yang [CGY02]. Là encore on utilise la résolution d'une famille d'équation du type de celles étudiées dans Chang-Gursky-Yang [CGY02] dont nous avons parlé plus haut (mais légèrement modifiées) pour montrer que sous les hypothèses $Y(M, g) > 0$ et (103), il existe une métrique g_w conforme à g telle que

$$|Weyl_{g_w}|_{g_w}^2 + 2\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4}Scal_{g_w} g_w\right|_{g_w}^2 < \frac{1}{6}Scal_{g_w}^2, \tag{107}$$

puis on applique le résultat de Margerin. On renvoie à Chang-Gursky-Yang [CGY03] pour les détails.

La preuve du point (ii) de ce théorème se fait au prix d'une caractérisation des métriques qui sont Bach-plates (*i.e.* dont le tenseur de Bach dont nous avons parlé au paragraphe 8 est identiquement nul), à invariant de Yamabe strictement positif et dont le tenseur de Weyl vérifie

$$\int_M |Weyl_g|_g^2 dv_g = 16\pi^2\chi(M).$$

Nous renvoyons à l'article original Chang-Gursky-Yang [CGY03] pour les détails.

Bibliographie

[AB97a] T. Aubin and A. Bahri. Méthodes de topologie algébrique pour le problème de la courbure scalaire prescrite. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 76(6):525–549, 1997.

[AB97b] T. Aubin and A. Bahri. Une hypothèse topologique pour le problème de la courbure scalaire prescrite. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 76(10):843–850, 1997.

[AB99] Thierry Aubin and Abbas Bahri. Une remarque sur l'indice et la norme infinie des solutions d'équations elliptiques surlinéaires. *Ricerche Mat.*, 48(suppl.):117–128, 1999. Papers in memory of Ennio De Giorgi (Italian).

[Ada88] David R. Adams. A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives. *Ann. of Math. (2)*, 128(2):385–398, 1988.

[Ahl87] Lars V. Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings.* The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, 1987. With the assistance of Clifford J. Earle, Jr., Reprint of the 1966 original.

[AL99a] Thierry Aubin and Yan Yan Li. On the best Sobolev inequality. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 78(4):353–387, 1999.

[AL99b] Thierry Aubin and Yan Yan Li. Sur la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(2):135–138, 1999.

[AM99] Antonio Ambrosetti and Andrea Malchiodi. A multiplicity result for the Yamabe problem on S^n. *J. Funct. Anal.*, 168(2):529–561, 1999.

[Aub70a] Thierry Aubin. Métriques riemanniennes et courbure. *J. Differential Geometry*, 4:383–424, 1970.

[Aub70b] Thierry Aubin. Sur la fonction exponentielle. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 270:A1514–A1516, 1970.

[Aub74] Thierry Aubin. Fonction de Green et valeurs propres du laplacien. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 53:347–371, 1974.

[Aub75a] Thierry Aubin. Équations différentielles non linéaires. *Bull. Sci. Math. (2)*, 99(4):201–210, 1975.

[Aub75b] Thierry Aubin. Étude d'un certain type d'équations différentielles non linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 280(7):Aiii, A455–A457, 1975.

[Aub75c] Thierry Aubin. Inégalités concernant la première valeur propre non nulle du laplacien pour certaines variétés riemanniennes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 281(22):Aii, A979–A982, 1975.

[Aub75d] Thierry Aubin. Le problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 280:Aii, A721–A724, 1975.

[Aub75e] Thierry Aubin. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 280(5):Aii, A279–A281, 1975.

[Aub76a] Thierry Aubin. Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 55(3):269–296, 1976.

[Aub76b] Thierry Aubin. Espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes. *Bull. Sci. Math. (2)*, 100(2):149–173, 1976.

[Aub76c] Thierry Aubin. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev. *J. Differential Geometry*, 11(4):573–598, 1976.

[Aub78] Thierry Aubin. Sur les meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 287(11):A795–A797, 1978.

[Aub79] Thierry Aubin. Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire. *J. Funct. Anal.*, 32(2):148–174, 1979.

[Aub80] Thierry Aubin. Un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire sur la sphère. In *Analysis on manifolds (Conf., Univ. Metz, Metz, 1979) (French)*, volume 80 of *Astérisque*, pages 4, 57–62. Soc. Math. France, Paris, 1980.

[Aub82a] Thierry Aubin. Best constants in the Sobolev imbedding theorem: the Yamabe problem. In *Seminar on Differential Geometry*, volume 102 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 173–184. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982.

[Aub82b] Thierry Aubin. *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*, volume 252 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[Aub86] Thierry Aubin. Le problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. In *Differential geometry, Peñíscola 1985*, volume 1209 of *Lecture Notes in Math.*, pages 66–72. Springer, Berlin, 1986.

[Aub94a] Thierry Aubin. Prescribed scalar curvature and the method of isometry-concentration. In *Partial differential equations of elliptic type (Cortona, 1992)*, Sympos. Math., XXXV, pages 37–45. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[Aub94b] Thierry Aubin. Sur le problème de la courbure scalaire prescrite. *Bull. Sci. Math.*, 118(5):465–474, 1994.

[Aub98] Thierry Aubin. *Some nonlinear problems in Riemannian geometry.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Aub01] Thierry Aubin. *A course in differential geometry*, volume 27 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[BC91] A. Bahri and J.-M. Coron. The scalar-curvature problem on the standard three-dimensional sphere. *J. Funct. Anal.*, 95(1):106–172, 1991.

[BCY92a] Thomas P. Branson, Sun-Yung A. Chang, and Paul C. Yang. Estimates and extremals for zeta function determinants on four-manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 149(2):241–262, 1992.

[BCY92b] Thomas P. Branson, Sun-Yung A. Chang, and Paul C. Yang. Estimates and extremals for zeta function determinants on four-manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 149(2):241–262, 1992.

[Bes87] Arthur L. Besse. *Einstein manifolds*, volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)].* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[BGM71] Marcel Berger, Paul Gauduchon, and Edmond Mazet. *Le spectre d'une variété riemannienne.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[BL96] D. Bakry and M. Ledoux. Sobolev inequalities and Myers's diameter theorem for an abstract Markov generator. *Duke Math. J.*, 85(1):253–270, 1996.

[BM01] Massimiliano Berti and Andrea Malchiodi. Non-compactness and multiplicity results for the Yamabe problem on S^n. *J. Funct. Anal.*, 180(1):210–241, 2001.

[BO91] Thomas P. Branson and Bent Orsted. Explicit functional determinants in four dimensions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 113(3):669–682, 1991.

[Bou81] Jean-Pierre Bourguignon. Les variétés de dimension 4 à signature non nulle dont la courbure est harmonique sont d'Einstein. *Invent. Math.*, 63(2):263–286, 1981.

[Bra85] Thomas P. Branson. Differential operators canonically associated to a conformal structure. *Math. Scand.*, 57(2):293–345, 1985.

[Bra87] Thomas P. Branson. Group representations arising from Lorentz conformal geometry. *J. Funct. Anal.*, 74(2):199–291, 1987.

[Bra95] Thomas P. Branson. Sharp inequalities, the functional determinant, and the complementary series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(10):3671–3742, 1995.

[CC86] Lennart Carleson and Sun-Yung A. Chang. On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser. *Bull. Sci. Math. (2)*, 110(2):113–127, 1986.

[CC01] Sun-Yung Alice Chang and Wenxiong Chen. A note on a class of higher order conformally covariant equations. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 7(2):275–281, 2001.

[CGW94] S.-Y. A. Chang, M. Gursky, and T. Wolff. Lack of compactness in conformal metrics with $L^{d/2}$ curvature. *J. Geom. Anal.*, 4(2):143–153, 1994.

[CGY93] Sun-Yung A. Chang, Matthew J. Gursky, and Paul C. Yang. The scalar curvature equation on 2- and 3-spheres. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 1(2):205–229, 1993.

[CGY99] Sun-Yung A. Chang, Matthew J. Gursky, and Paul C. Yang. Regularity of a fourth order nonlinear PDE with critical exponent. *Amer. J. Math.*, 121(2):215–257, 1999.

[CGY02] Sun-Yung A. Chang, Matthew J. Gursky, and Paul C. Yang. An equation of Monge-Ampère type in conformal geometry, and four-manifolds of positive Ricci curvature. *Ann. of Math. (2)*, 155(3):709–787, 2002.

[CGY03] Sun-Yung A. Chang, Matthew J. Gursky, and Paul C. Yang. A conformally invariant sphere theorem in four dimensions. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (98):105–143, 2003.

[CGYre] Sun-Yung A. Chang, Matthew J. Gursky, and Paul C. Yang. A conformally invariant sphere theorem in four dimensions. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, A paraître.

[Cha87] Sun-Yung A. Chang. Extremal functions in a sharp form of Sobolev inequality. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 715–723, Providence, RI, 1987. Amer. Math. Soc.

[Cha96] Sun-Yung Alice Chang. The Moser-Trudinger inequality and applications to some problems in conformal geometry. In *Nonlinear partial differential equations in differential geometry (Park City, UT, 1992)*, volume 2 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 65–125. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[Cha97] Sun-Yung Alice Chang. On zeta functional determinant. In *Partial differential equations and their applications (Toronto, ON, 1995)*, volume 12 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 25–50. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997. With notes taken by Jie Qing.

[Cha99] Sun-Yung A. Chang. On a fourth-order partial differential equation in conformal geometry. In *Harmonic analysis and partial differential equations (Chicago, IL, 1996)*, Chicago Lectures in Math., pages 127–150. Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[CL03] Chiun-Chuan Chen and Chang-Shou Lin. Topological degree for a mean field equation on Riemann surfaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 56(12):1667–1727, 2003.

[CQ96] Sun-Yung A. Chang and Jie Qing. Zeta functional determinants on manifolds with boundary. *Math. Res. Lett.*, 3(1):1–17, 1996.

[CQ97a] Sun-Yung A. Chang and Jie Qing. The zeta functional determinants on manifolds with boundary. I. The formula. *J. Funct. Anal.*, 147(2):327–362, 1997.

[CQ97b] Sun-Yung A. Chang and Jie Qing. The zeta functional determinants on manifolds with boundary. II. Extremal metrics and compactness of isospectral set. *J. Funct. Anal.*, 147(2):363–399, 1997.

[CQY] Sun-Yung A. Chang, Jie Qing, and Paul C. Yang. On the topology of conformally compact einstein 4-manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, A paraître.

[CQY00] Sun-Yung A. Chang, Jie Qing, and Paul C. Yang. Compactification of a class of conformally flat 4-manifold. *Invent. Math.*, 142(1):65–93, 2000.

[CX96] Roger Chen and Xingwang Xu. Compactness of isospectral conformal metrics and isospectral potentials on a 4-manifold. *Duke Math. J.*, 84(1):131–154, 1996.

[CXY98] Sun-Yung A. Chang, Xingwang Xu, and Paul C. Yang. A perturbation result for prescribing mean curvature. *Math. Ann.*, 310(3):473–496, 1998.

[CY87] Sun-Yung Alice Chang and Paul C. Yang. Prescribing Gaussian curvature on S^2. *Acta Math.*, 159(3-4):215–259, 1987.

[CY88] Sun-Yung A. Chang and Paul C. Yang. Conformal deformation of metrics on S^2. *J. Differential Geom.*, 27(2):259–296, 1988.

[CY89a] Sun-Yung A. Chang and Paul C. Yang. Compactness of isospectral conformal metrics on S^3. *Comment. Math. Helv.*, 64(3):363–374, 1989.

[CY89b] Sun-Yung A. Chang and Paul C. Yang. The conformal deformation equation and isospectral set of conformal metrics. In *Recent developments in geometry (Los Angeles, CA, 1987)*, volume 101 of *Contemp. Math.*, pages 165–178. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[CY90] Sun-Yung A. Chang and Paul C.-P. Yang. Isospectral conformal metrics on 3-manifolds. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(1):117–145, 1990.

[CY91a] Sun-Yung A. Chang and Paul C. Yang. A perturbation result in prescribing scalar curvature on S^n. *Duke Math. J.*, 64(1):27–69, 1991.

[CY91b] Sun-Yung A. Chang and Paul C. Yang. Spectral invariants of conformal metrics. In *Harmonic analysis (Sendai, 1990)*, ICM-90 Satell. Conf. Proc., pages 51–60. Springer, Tokyo, 1991.

[CY93] Sun-Yung Alice Chang and Paul C. Yang. Addendum to: "A perturbation result in prescribing scalar curvature on S^n" [Duke Math. J. **64** (1991), no. 1, 27–69; MR 92m:53063]. *Duke Math. J.*, 71(1):333–335, 1993.

[CY95a] Luis A. Caffarelli and Yi Song Yang. Vortex condensation in the Chern-Simons Higgs model: an existence theorem. *Comm. Math. Phys.*, 168(2):321–336, 1995.

[CY95b] Sun-Yung A. Chang and Paul C. Yang. Extremal metrics of zeta function determinants on 4-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 142(1):171–212, 1995.

[CY97a] Sun-Yung A. Chang and Paul C. Yang. Determinants and extremal metrics in conformal geometry. In *Geometry from the Pacific Rim (Singapore, 1994)*, pages 37–57. de Gruyter, Berlin, 1997.

[CY97b] Sun-Yung A. Chang and Paul C. Yang. On uniqueness of solutions of nth order differential equations in conformal geometry. *Math. Res. Lett.*, 4(1):91–102, 1997.

[CY99] Sun-Yung A. Chang and Paul C. Yang. On a fourth order curvature invariant. In *Spectral problems in geometry and arithmetic (Iowa City, IA, 1997)*, volume 237 of *Contemp. Math.*, pages 9–28. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[CY00] Sun-Yung A. Chang and Paul C. Yang. Fourth order equations in conformal geometry. In *Global analysis and harmonic analysis (Marseille-Luminy, 1999)*, volume 4 of *Sémin. Congr.*, pages 155–165. Soc. Math. France, Paris, 2000.

[DD01] Zindine Djadli and Olivier Druet. Extremal functions for optimal Sobolev inequalities on compact manifolds. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 12(1):59–84, 2001.

[Der83] Andrzej Derdziński. Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four. *Compositio Math.*, 49(3):405–433, 1983.

[DHL00] Zindine Djadli, Emmanuel Hebey, and Michel Ledoux. Paneitz-type operators and applications. *Duke Math. J.*, 104(1):129–169, 2000.

[DJ02] Zindine Djadli and Antoinette Jourdain. Nodal solutions for scalar curvature type equations with perturbation terms on compact Riemannian manifolds. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8)*, 5(1):205–226, 2002.

[Dja] Zindine Djadli. Existence result for the mean field problem on riemann surfaces of all genuses. *Preprint.*

[Dja99a] Zindine Djadli. Nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent on compact Riemannian manifolds in presence of symmetries. *Rev. Mat. Complut.*, 12(1):201–229, 1999.

[Dja99b] Zindine Djadli. Nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent on compact Riemannian manifolds. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 8(4):293–326, 1999.

[DJLW99] Weiyue Ding, Jürgen Jost, Jiayu Li, and Guofang Wang. Existence results for mean field equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 16(5):653–666, 1999.

[DMa] Zindine Djadli and Andrea Malchiodi. Existence of conformal metrics with constant Q-curvature. *préprint, ArXiv : math.AP/0410141.*

[DMb] Zindine Djadli and Andrea Malchiodi. A fourth order uniformization theorem on some four manifolds with large total Q-curvature. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005), 341-346.*

[DMA02] Zindine Djadli, Andrea Malchiodi, and Mohameden Ould Ahmedou. Prescribing a fourth order conformal invariant on the standard sphere. I. A perturbation result. *Commun. Contemp. Math.*, 4(3):375–408, 2002.

[DMOA] Zindine Djadli, Andrea Malchiodi, and Mohameden Ould Ahmedou. The prescribed boundary men curvature problem on B^4. *préprint.*

[DMOA02] Zindine Djadli, Andrea Malchiodi, and Mohameden Ould Ahmedou. Prescribing a fourth order conformal invariant on the standard sphere, part ii: Blow-up analysis and applications. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 1(2):387–434, 2002.

[DMOA03] Zindine Djadli, Andrea Malchiodi, and Mohameden Ould Ahmedou. Prescribing scalar and boundary mean curvature on the three dimensional half sphere. *J. Geom. Anal.*, 13(2):233–267, 2003.

[EG] José Escobar and G. Garcia. Conformal metrics on the ball with zero scalar curvature and prescribed mean curvature on the boundary. *préprint*.

[ES86] José F. Escobar and Richard M. Schoen. Conformal metrics with prescribed scalar curvature. *Invent. Math.*, 86(2):243–254, 1986.

[Esc88] José Escobar. Sharp constant in a sobolev trace inequality. *Indiana University Journal*, (37):687–698, 1988.

[Esc92] José Escobar. Conformal deformation of a riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary. *Annals of Mathematics*, (136):1–50, 1992.

[Esc96] José Escobar. Conformal metrics with prescribed mean curvature on the boundary. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, (4):559–592, 1996.

[Gur94] Matthew J. Gursky. Locally conformally flat four- and six-manifolds of positive scalar curvature and positive Euler characteristic. *Indiana Univ. Math. J.*, 43(3):747–774, 1994.

[Gur98] Matthew J. Gursky. The Weyl functional, de Rham cohomology, and Kähler-Einstein metrics. *Ann. of Math. (2)*, 148(1):315–337, 1998.

[Gur99] Matthew J. Gursky. The principal eigenvalue of a conformally invariant differential operator, with an application to semilinear elliptic PDE. *Comm. Math. Phys.*, 207(1):131–143, 1999.

[Gur00a] Matthew J. Gursky. Four-manifolds with $\delta W^{+} = 0$ and Einstein constants of the sphere. *Math. Ann.*, 318(3):417–431, 2000.

[Gur00b] Matthew J. Gursky. Some local and non-local variational problems in Riemannian geometry. In *Global analysis and harmonic analysis (Marseille-Luminy, 1999)*, volume 4 of *Sémin. Congr.*, pages 167–177. Soc. Math. France, Paris, 2000.

[GV01] Matthew J. Gursky and Jeff A. Viaclovsky. A new variational characterization of three-dimensional space forms. *Invent. Math.*, 145(2):251–278, 2001.

[GV03] Matthew J. Gursky and Jeff A. Viaclovsky. A fully nonlinear equation on four-manifolds with positive scalar curvature. *J. Differential Geom.*, 63(1):131–154, 2003.

[Ili82] Saïd Ilias. Sur une inégalité de Sobolev. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 294(22):731–734, 1982.

[Ili83] Saïd Ilias. Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 33(2):151–165, 1983.

[Ili93] Saïd Ilias. Un nouveau résultat de pincement de la première valeur propre du laplacien et conjecture du diamètre pincé. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 43(3):843–863, 1993.

[Ili96] Saïd Ilias. Inégalités de Sobolev et résultats d'isolement pour les applications harmoniques. *J. Funct. Anal.*, 139(1):182–195, 1996.

[KV95] Maxim Kontsevich and Simeon Vishik. Geometry of determinants of elliptic operators. In *Functional analysis on the eve of the 21st century, Vol. 1 (New Brunswick, NJ, 1993)*, volume 131 of *Progr. Math.*, pages 173–197. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.

[KW74a] Jerry L. Kazdan and F. W. Warner. Curvature functions for compact 2-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 99:14–47, 1974.

[KW74b] Jerry L. Kazdan and F. W. Warner. Curvature functions for open 2-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 99:203–219, 1974.

[KW75a] Jerry L. Kazdan and F. W. Warner. Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures. *Ann. of Math. (2)*, 101:317–331, 1975.

[KW75b] Jerry L. Kazdan and F. W. Warner. Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure. *J. Differential Geometry*, 10:113–134, 1975.

[LeB86] Claude LeBrun. On the topology of self-dual 4-manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 98(4):637–640, 1986.

[LeB95] Claude LeBrun. Einstein metrics and Mostow rigidity. *Math. Res. Lett.*, 2(1):1–8, 1995.

[Li93] Yan Yan Li. Prescribing scalar curvature on S^3, S^4 and related problems. *J. Funct. Anal.*, 118(1):43–118, 1993.

[Li95] Yan Yan Li. Prescribing scalar curvature on S^n and related problems. I. *J. Differential Equations*, 120(2):319–410, 1995.

[Li96] Yanyan Li. Prescribing scalar curvature on S^n and related problems. II. Existence and compactness. *Comm. Pure Appl. Math.*, 49(6):541–597, 1996.

[Li99] Yan Yan Li. Harnack type inequality: the method of moving planes. *Comm. Math. Phys.*, 200(2):421–444, 1999.

[Li00a] Peter Li. Curvature and function theory on Riemannian manifolds. In *Surveys in differential geometry*, Surv. Differ. Geom., VII, pages 375–432. International Press, Somerville, MA, 2000.

[Li00b] Yan Yan Li. Best Sobolev inequalities on Riemannian manifolds. In *Differential equations and mathematical physics (Birmingham, AL, 1999)*, volume 16 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 273–278. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[Lic58] André Lichnerowicz. *Géométrie des groupes de transformations.* Travaux et Recherches Mathématiques, III. Dunod, Paris, 1958.

[Lie83] Elliott H. Lieb. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities. *Ann. of Math. (2)*, 118(2):349–374, 1983.

[Lin98] Chang-Shou Lin. A classification of solutions of a conformally invariant fourth order equation in $\mathbf{R}^n$. *Comment. Math. Helv.*, 73(2):206–231, 1998.

[Lin00] Chang-Shou Lin. Topological degree for mean field equations on S^2. *Duke Math. J.*, 104(3):501–536, 2000.

[Lio85] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(1):145–201, 1985.

[LP87] John M. Lee and Thomas H. Parker. The Yamabe problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 17(1):37–91, 1987.

[Mal] Andrea Malchiodi. Compactness of solutions to some geometric fourth-order equations. *J. Reine Angew. Math., to appear.*

[Mar98] Christophe Margerin. A sharp characterization of the smooth 4-sphere in curvature terms. *Comm. Anal. Geom.*, 6(1):21–65, 1998.

[Mos71] J. Moser. A sharp form of an inequality by N. Trudinger. *Indiana Univ. Math. J.*, 20:1077–1092, 1970/71.

[MP49] S. Minakshisundaram and AA. Pleijel. Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds. *Canadian J. Math.*, 1:242–256, 1949.

[MP94] Carlo Marchioro and Mario Pulvirenti. *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*, volume 96 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[MS67] H. P. McKean, Jr. and I. M. Singer. Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. *J. Differential Geometry*, 1(1):43–69, 1967.

[Oki95a] Kate Okikiolu. The Campbell-Hausdorff theorem for elliptic operators and a related trace formula. *Duke Math. J.*, 79(3):687–722, 1995.

[Oki95b] Kate Okikiolu. The multiplicative anomaly for determinants of elliptic operators. *Duke Math. J.*, 79(3):723–750, 1995.

[Oki01] K. Okikiolu. Critical metrics for the determinant of the Laplacian in odd dimensions. *Ann. of Math. (2)*, 153(2):471–531, 2001.

[Ono82] E. Onofri. On the positivity of the effective action in a theory of random surfaces. *Comm. Math. Phys.*, 86(3):321–326, 1982.

[OPS88a] B. Osgood, R. Phillips, and P. Sarnak. Compact isospectral sets of surfaces. *J. Funct. Anal.*, 80(1):212–234, 1988.

[OPS88b] B. Osgood, R. Phillips, and P. Sarnak. Extremals of determinants of Laplacians. *J. Funct. Anal.*, 80(1):148–211, 1988.

[Pan83] S. Paneitz. A quartic conformally covariant diferential operator for arbitrary pseudo-riemannian manifolds. *Préprint*, 1883.

[Pol81] A. M. Polyakov. Quantum geometry of bosonic strings. *Phys. Lett. B*, 103(3):207–210, 1981.

[Pol96] Alexander Polden. Curves and surfaces of least total curvature and fourth-order flows. *Dissertation - Universität Tubingen*, 1996.

[Ric94] Ken Richardson. Critical points of the determinant of the Laplace operator. *J. Funct. Anal.*, 122(1):52–83, 1994.

[Ros97] Steven Rosenberg. *The Laplacian on a Riemannian manifold*, volume 31 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. An introduction to analysis on manifolds.

[RS71] D. B. Ray and I. M. Singer. R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds. *Advances in Math.*, 7:145–210, 1971.

[Sch84] Richard Schoen. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *J. Differential Geom.*, 20(2):479–495, 1984.

[Sch89] Richard M. Schoen. Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics. In *Topics in calculus of variations (Montecatini Terme, 1987)*, volume 1365 of *Lecture Notes in Math.*, pages 120–154. Springer, Berlin, 1989.

[Sch91a] Richard M. Schoen. On the number of constant scalar curvature metrics in a conformal class. In *Differential geometry*, volume 52 of *Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math.*, pages 311–320. Longman Sci. Tech., Harlow, 1991.

[Sch91b] Richard M. Schoen. A report on some recent progress on nonlinear problems in geometry. In *Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990)*, pages 201–241. Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991.

[Sob38] S.L. Sobolev. Sur un théorème d'analyse fonctionnelle. *Math. Sb.*, 46:471–496, 1938.

[ST98] Michael Struwe and Gabriella Tarantello. On multivortex solutions in Chern-Simons gauge theory. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8)*, 1(1):109–121, 1998.

[Str88] Michael Struwe. The existence of surfaces of constant mean curvature with free boundaries. *Acta Math.*, 160(1-2):19–64, 1988.

[Str90] Michael Struwe. *Variational methods.* Springer-Verlag, Berlin, 1990. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.

[SY79a] R. Schoen and S. T. Yau. On the structure of manifolds with positive scalar curvature. *Manuscripta Math.*, 28(1-3):159–183, 1979.

[SY79b] Richard Schoen and Shing Tung Yau. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 65(1):45–76, 1979.

[SY79c] Richard Schoen and Shing Tung Yau. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 65(1):45–76, 1979.

[SY79d] Richard Schoen and Shing Tung Yau. Positivity of the total mass of a general space-time. *Phys. Rev. Lett.*, 43(20):1457–1459, 1979.

[SY79e] Richard M. Schoen and Shing Tung Yau. Complete manifolds with nonnegative scalar curvature and the positive action conjecture in general relativity. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 76(3):1024–1025, 1979.

[SY81] Richard Schoen and Shing Tung Yau. Proof of the positive mass theorem. II. *Comm. Math. Phys.*, 79(2):231–260, 1981.

[SY88] R. Schoen and S.-T. Yau. Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature. *Invent. Math.*, 92(1):47–71, 1988.

[SY94] R. Schoen and S.-T. Yau. *Lectures on differential geometry.* Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, I. International Press, Cambridge, MA, 1994. Lecture notes prepared by Wei Yue Ding, Kung Ching Chang [Gong Qing Zhang], Jia Qing Zhong and Yi Chao Xu, Translated from the Chinese by Ding and S. Y. Cheng, Preface translated from the Chinese by Kaising Tso.

[SZ96] Richard Schoen and Dong Zhang. Prescribed scalar curvature on the n-sphere. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 4(1):1–25, 1996.

[Tal76] Giorgio Talenti. Best constant in Sobolev inequality. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 110:353–372, 1976.

[Tar96] Gabriella Tarantello. Multiple condensate solutions for the Chern-Simons-Higgs theory. *J. Math. Phys.*, 37(8):3769–3796, 1996.

[Tru67] Neil S. Trudinger. On imbeddings into Orlicz spaces and some applications. *J. Math. Mech.*, 17:473–483, 1967.

[Tru68] Neil S. Trudinger. Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 22:265–274, 1968.

[UV00] Karen K. Uhlenbeck and Jeff A. Viaclovsky. Regularity of weak solutions to critical exponent variational equations. *Math. Res. Lett.*, 7(5-6):651–656, 2000.

[Via00] Jeff A. Viaclovsky. Conformal geometry, contact geometry, and the calculus of variations. *Duke Math. J.*, 101(2):283–316, 2000.

[WX99] Juncheng Wei and Xingwang Xu. Classification of solutions of higher order conformally invariant equations. *Math. Ann.*, 313(2):207–228, 1999.

[Yam60] Hidehiko Yamabe. On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Osaka Math. J.*, 12:21–37, 1960.

[Yan00] Yisong Yang. On a system of nonlinear elliptic equations arising in theoretical physics. *J. Funct. Anal.*, 170(1):1–36, 2000.

[YY80] Paul C. Yang and Shing Tung Yau. Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 7(1):55–63, 1980.

Zindine DJADLI
Université de Cergy-Pontoise - Département de Mathématiques
Site de Saint-Martin, 2 avenue Adolphe Chauvin 95302 Cergy-Pontoise Cedex - France
`zindine.djadli@math.u-cergy.fr`