Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2015-2016

Anne-Sophie de Suzzoni

Sur les systèmes de fermions à grand nombre de particules : un point de vue probabiliste

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2015-2016), Exposé n° XII, 12 p.

<http://slsedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2015-2016____A12_0>

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
http://www.ihes.fr/

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
UMR 7640 CNRS/École polytechnique
F-91128 PALAISEAU CEDEX
http://www.math.polytechnique.fr/

Séminaire Laurent-Schwartz — EDP et applications
Institut des hautes études scientifiques, 2015-2016
Exposé n$^{\text{o}}$ XII, 1-12

Sur les systèmes de fermions à grand nombre de particules : un point de vue probabiliste

Anne-Sophie de Suzzoni*

Résumé

On cherche à démontrer le caractère globalement bien posé pour l'équation de Hartree, avec un potentiel d'interaction égal au delta de Dirac, c'est-à-dire

$$i\partial_t \gamma = [-\triangle + \rho_\gamma, \gamma]$$

où γ est un opérateur intégral, $[\cdot,\cdot]$ est le commutateur et ρ_γ est la diagonale du noyau intégral de γ. On étudie cette équation autour de certains de ses états stationnaires. La difficulté principale vient du fait que les états stationnaires ne sont pas de classe trace alors que l'espace naturel pour la résolution de l'équation est l'espace des opérateurs positifs tels que $\operatorname{Tr}((1-\triangle)\gamma) < \infty$. Pour s'affranchir de cette difficulté, on prend un point de vue probabiliste : on introduit une équation sur des processus aléatoires puis on traduit les résultats qu'on obtient pour cette équation en résultats pour l'équation de Hartree. Ce manuscrit résume partiellement [12].

We prove global well-posedness for the Hartree equation with an interaction potential equal to the Dirac delta, that is

$$i\partial_t \gamma = [-\triangle + \rho_\gamma, \gamma]$$

where γ is an integral operator, $[\cdot,\cdot]$ is the commutator and ρ_γ is the diagonal of the integral kernel of γ. We study this equation around some of its stationary states. The main difficulty comes from the fact that the stationary states are not trace class whereas the natural space to solve the equation is the space of positive operators such that $\operatorname{Tr}((1-\triangle)\gamma) < \infty$. To solve this problem, we take a probabilistic point of view : we introduce an equation on random processes before translating results on this equation into results on the Hartree equation. This paper is a partial summary of [12].

Table des matières

*Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS (UMR 7539), 99, avenue Jean-Baptiste Clément, F-93430 Villetaneuse, France - email: adesuzzo@math.univ-paris13.fr

1 Motivations

1.1 Dérivation de l'équation de Hartree

On considère un système de N particules représenté par une fonction d'onde $\psi : M^N \to \mathbb{C}$ où M est le tore, la sphère ou l'espace euclidien en dimension inférieure à 3, et évoluant selon l'énergie :

$$\mathcal{E}_N = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{M^N}\overline{\psi}\,\triangle_i\,\psi + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\int_{M^N} w(x_i - x_j)\overline{\psi}\psi.$$

Cette énergie contient une partie cinétique $-\frac{1}{2}\sum_i \int \overline{\psi}\,\triangle_i\,\psi$ qui correspond à l'évolution libre du système, et une partie d'interaction $\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\int w(x_i - x_j)\overline{\psi}\psi$ qui correspond à une interaction deux à deux des particules selon le potentiel d'interaction w.

On suppose que ces particules sont indiscernables et échangeables, c'est-à-dire que pour toute permutation σ,

$$\psi(x_{\sigma(1)}, \dots x_{\sigma(n)}) = \psi(x_1, \dots x_n).$$

On pose ψ :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{\sigma}\prod_i u_{\sigma(i)}(x_i)$$

où les u_i sont orthonormés.

On obtient l'énergie suivante en termes des u_j :

$$\mathcal{E}_N = \mathcal{E}_{kin} + \mathcal{E}_{mf} + \mathcal{E}_{exch}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{kin} &= -\frac{1}{2}\sum_i u_i \triangle u_i \\
\mathcal{E}_{mf} &= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\int w * |u_i|^2 |u_j|^2 \\
\mathcal{E}_{exch} &= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\int w * (\overline{u}_i u_j)\overline{u}_j u_i.
\end{aligned}$$

La première partie de l'énergie est l'énergie cinétique. La deuxième est une énergie dite de champ moyen, la particule u_j voit le champ moyen formé par les autres particules $\sum_{i\neq j}|u_i|^2$. La troisième est un terme d'échange d'énergie entre les particules. Notons que si w est un delta de Dirac alors $\mathcal{E}_{exch} = \mathcal{E}_{mf}$.

Dans un cadre fermionique, les particules satisfont le principe d'exclusion de Pauli, c'est-à-dire que pour toute permutation σ

$$\psi(x_{\sigma(1)}, \dots x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\psi(x_1, \dots x_n)$$

où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.

On considère alors ψ :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_i u_{\sigma(i)}(x_i)$$

où les u_i sont orthonormés. On parle de déterminant de Slater. En effet,

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{pmatrix} u_1(x_1) & \dots & u_1(x_N) \\ \vdots & & \vdots \\ u_N(x_1) & \dots & u_N(x_N) \end{pmatrix}.$$

Notons que dans ce cas,

$$\mathcal{E}_{exch} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int w * (\bar{u}_i u_j) \bar{u}_j u_i.$$

Cependant, la fonction d'onde Ψ contient uniquement la partie spatiale du système de particules, l'antisymétrie peut apparaître au moins en partie au sein de la partie spinorielle (ou tout autre couplage) non représentée ici.

En supposant $\mathcal{E}_{exch} + \mathcal{E}_{mf} \sim C\mathcal{E}_{mf}$ et $\mathcal{E}_{mf} \sim \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int w * |u_i|^2 |u_j|^2$, on obtient, quitte à renormaliser, le système d'équations pour tout $j = 1, \dots, N$,

$$i\partial_t u_j = - \triangle u_j + w * \Big(\sum_k |u_k|^2 \Big) u_j.$$

Cette équation a été dérivée des équations de mécanique quantiques dans une limite de champ moyen ou limite semi-classique pour différents potentiels d'interaction w, voir [1, 2, 3, 13, 16].

1.2 Le point de vue des opérateurs de densité, résultats

Prenons $\gamma = \sum_k |u_k\rangle\langle u_k|$ où $|u_k\rangle\langle u_k|$ est la projection orthogonale sur $\mathbb{C}u_k$. Notons que $\mathrm{Tr}\, \gamma = N$ est le nombre de particules. Cet opérateur vérifie

$$i\partial_t \gamma = [- \triangle + w * \rho_\gamma, \gamma] \qquad (1)$$

où $[\cdot, \cdot]$ est le commutateur et ρ_γ est la diagonale du noyau intégral de γ, c'est-à-dire

$$\rho_\gamma(x) = \tilde{\gamma}(x, x)$$

avec

$$(\gamma v)(x) = \int \tilde{\gamma}(x, y) v(y) dy.$$

Cette équation a été étudiée, par exemple, dans [5, 6, 10, 20].

Pour la suite, on étend l'étude de cette équation aux opérateurs auto-adjoints intégraux, positifs et inférieurs à l'identité.

Sur $\mathbb{R}^n$, les multiplicateurs de Fourier $\gamma^{|f|^2}$ par $|f|^2$ sont des solutions stationnaires de cette équation mais elles ne sont pas de classe trace. En effet, elles commutent avec $\triangle$ et $\rho_{\gamma^{|f|^2}} = \int |f(k)|^2 dk$ est une constante.

Lewin et Sabin, dans [17, 18], ont étudié l'équation (1) autour de certains états stationnaires $\gamma^{|f|^2}$, en regardant l'équation

$$i\partial_t Q = [-\triangle, Q] + [w * \rho_{\gamma^{|f|^2}+Q}, \gamma^{|f|^2} + Q].$$

On a posé $\gamma = \gamma^{|f|^2} + Q$ et dérivé l'équation sur Q à partir de (1).

Ils ont montré, entre autres, le caractère bien posé autour des gaz de Fermi à température nulle ($\gamma^{|f|^2} = 1_{-\triangle \leq \mu}$) pour Tr $((-\triangle - \mu)Q(t=0))$ positif et fini et sous certaines hypothèses pour w.

Ils ont aussi démontré la stabilité de $\gamma^{|f|^2}$ dans des espaces de Schatten.

Ces travaux s'appuient sur des inégalités de dispersion pour les opérateurs de densité par Frank, Lewin, Lieb et Seiringer [14, 15].

On peut aussi mentionner le travail de Chen, Hong et Pavlović, [11] dans le cas $w = \delta$.

On veut obtenir le résultat suivant pour l'équation :

$$i\partial_t \gamma = [-\triangle + \rho_\gamma, \gamma]. \tag{2}$$

Théorème 1.

– *Soit* $M \in \{\mathbb{S}^2, \mathbb{T}^2, \mathbb{S}^3, \mathbb{T}^3, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\}$. *Il existe un espace métrique* Σ, d *(voir Définition 10) d'opérateurs intégraux positifs de* $L^2(M)$ *tel que pour toute donnée initiale* γ_0 *dans* Σ *l'équation* (2) *admette une unique solution* $\psi(t)(\gamma_0)$ *dans* $C(\mathbb{R}, \Sigma)$. *De plus, le flot* $\psi(t)$ *ainsi défini est continu en la donnée initiale.*

– *Soit* $n = 2, 3$. *Soit* f *une fonction bornée de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{C}$ *vérifiant* $\int (1+k^2)|f(k)|^2 < \infty$. *Soit* $\gamma^{|f|^2}$ *le multiplicateur de Fourier par* $|f|^2$, *solution stationnaire de* (2). *Il existe un espace métrique* Σ_f, d *(voir Définition 11) d'opérateurs intégraux positifs de* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *contenant* $\gamma^{|f|^2}$ *tel que pour toute donnée initiale* γ_0 *dans* Σ_f *l'équation* (2) *admette une unique solution* $\psi_f(t)(\gamma_0)$ *dans* $C(\mathbb{R}, \Sigma)$. *De plus, le flot* $\psi_f(t)$ *ainsi défini est continu en la donnée initiale.*

L'idée de la preuve est la suivante. Pour un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on introduit une équation

$$i\partial_t X = -\triangle X + \mathbb{E}(|X|^2)X \tag{3}$$

sur des processus aléatoires, où $\mathbb{E}$ est l'espérance. Cette équation est similaire à l'équation de Schrödinger cubique défocalisante ce qui permet d'obtenir son caractère globalement bien posé dans son espace d'énergie $L^2(\Omega, H^1)$ en reproduisant des preuves déjà connues. Il s'agit par la suite d'introduire une correspondance entre les solutions de (2) et une classe de solutions de (3). Cette classe de solutions sont les solutions gaussiennes. On montre que si γ est une solution de (2) alors il existe une solution gaussienne de (3) et réciproquement.

Pour la perturbation autour de $\gamma^{|f|^2}$, il s'agit de voir que pour chaque f, il existe une solution gaussienne correspondante Y_f de (3) dont la loi ne dépend pas du temps et de perturber (3) autour de Y_f.

Les résultats sur (3) se traduisent alors en résultats sur (2) à condition de choisir des espaces métriques appropriés pour les opérateurs, voir les Définitions 10, 11.

1.3 Le point de vue probabiliste

Soit X un processus aléatoire. Considérons l'équation :

$$i\partial_t X = - \triangle X + w * \mathbb{E}(|X|^2)X. \tag{4}$$

On définit $\gamma_X = \mathbb{E}(|X\rangle\langle X|)$, c'est-à-dire γ est l'opérateur intégral de noyau $\mathbb{E}(\overline{X(y)}X(x))$. En particulier, $\rho_{\gamma_X} = \mathbb{E}(|X|^2)$.

Proposition 2. *Si X satisfait* (4)*, alors γ_X vérifie* (1)*, c'est-à-dire*

$$i\partial_t \gamma_X = [- \triangle + w * \rho_{\gamma_X}, \gamma_X].$$

Démonstration. En effet, soit v dans le domaine de définition de $\gamma_X(t)$. Dérivons $\gamma_X(t)(v)$. On a

$$i\partial_t \gamma_X(t)(v) = \mathbb{E}(\langle -i\partial_t X, v\rangle X) + \mathbb{E}(\langle X, v\rangle i\partial_t X).$$

En remplaçant $i\partial_t X$ par sa valeur, on obtient

$$i\partial_t \gamma_X(t)(v) = \mathbb{E}(\langle \triangle X - w * \mathbb{E}(|X|^2)X, v\rangle X) + \mathbb{E}(\langle X, v\rangle(- \triangle X + w * \mathbb{E}(|X|^2)X)).$$

Comme $\triangle$ et la multiplication par $w * \mathbb{E}(|X|^2)$ sont auto-adjoints, on en déduit

$$\mathbb{E}(\langle \triangle X - w * \mathbb{E}(|X|^2)X, v\rangle X) = \mathbb{E}(\langle X, (\triangle - w * \mathbb{E}(|X|^2)v\rangle X) = \gamma((\triangle - w * \mathbb{E}(|X|^2))v).$$

Puisque $\langle X, v\rangle$ dépend uniquement de la variable probabiliste, on a

$$\langle X, v\rangle(- \triangle X + w * \mathbb{E}(|X|^2)X) = (- \triangle + w * \mathbb{E}(|X|^2))\big(\langle X, v\rangle X\big)$$

et comme $- \triangle + w * \mathbb{E}(|X|^2)$ n'agit pas sur la variable probabiliste,

$$\mathbb{E}\Big(- \triangle + w * \mathbb{E}(|X|^2))\big(\langle X, v\rangle X\big)\Big) = (- \triangle + w * \mathbb{E}(|X|^2))\mathbb{E}(\langle X, v\rangle X) = (- \triangle + w * \mathbb{E}(|X|^2))(\gamma_X(t)(v)).$$

On obtient alors

$$i\partial_t \gamma_X(t)(v) = [- \triangle + w * \mathbb{E}(|X|^2), \gamma_X(t)](v).$$

Enfin, le noyau intégral de $\gamma_X(t)$ est $\mathbb{E}(\overline{X}(y)X(x))$ et donc $\rho_\gamma(x) = \mathbb{E}(|X(x)|^2)$ ce qui donne le résultat. □

Remarque 1. *Notons que $\Omega = \{1, \ldots, N\}$ et $P(\{i\}) = \frac{1}{N}$ redonne un système d'équations de Hartree.*

En effet, dans ce contexte, on peut écrire

$$X(\omega) = \sum_j v_j \delta_j^\omega$$

où v_j ne dépend pas de ω et $\delta_j^\omega = 1$ si $j = \omega$, 0 sinon. On a alors

$$i\partial_t X + \triangle X = \sum_j (i\partial_t v_j + \triangle v_j)\delta_j^\omega$$

ainsi que

$$\mathbb{E}(|X|^2) = \frac{1}{N} \sum_j |v_j|^2.$$

On en déduit que pour tout j

$$i\partial_t v_j + \triangle v_j = \frac{1}{N}\sum_k |v_k|^2 v_j$$

et avec $u_j = v_j/\sqrt{N}$,

$$i\partial_t u_j + \triangle u_j = \sum_k |u_k|^2 u_j.$$

Pour tout ce qui suit, on prend $w = \pm\delta$, où δ est le delta de Dirac, de sorte que (4) est similaire à l'équation de Schrödinger cubique focalisante ou défocalisante.

2 Propriétés analytiques de l'équation

2.1 Caractère globalement bien posé, scattering, cas focalisant

En utilisant les mêmes méthodes que pour l'équation de Schrödinger, on obtient que (4) avec $w = \delta$ (cas défocalisant) est globalement bien-posée dans l'espace d'énergie pour $M = \mathbb{T}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n$, avec $n = 2, 3$. Pour les sphères et tores, on s'appuie sur les travaux de Burq-Gérard-Tzvetkov [7, 8, 9], et Bourgain [4].

Proposition 3. *Soit $M = \mathbb{T}^n, \mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{R}^n$, avec $n = 2$ ou 3. L'équation* (4) *est globalement bien posée dans $L^2(\Omega, H^1(M))$ dans le sens où pour toute donnée initiale $X_0 \in L^2(\Omega, H^1(M))$ le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} i\partial_t X = -\triangle X + \mathbb{E}(|X|^2)X \\ X(t=0) = X_0 \end{cases}.$$

admet une unique solution dans $C(\mathbb{R}, L^2(\Omega, H^1(M)))$, de plus, le flot de (4) *ainsi défini est continu en X_0.*

La preuve du caractère localement bien posé consiste à reprendre les preuves du caractère localement bien posé dans $H^1(M)$ pour l'équation de Schrödinger cubique. Le passage à un temps global utilise des méthodes d'énergie.

L'énergie conservée utilisée est :

$$-\frac{1}{2}\int_M \mathbb{E}(\overline{X}\triangle X) + \frac{1}{4}\int_M \mathbb{E}(|X|^2)^2$$

et la masse

$$\frac{1}{2}\int_M \mathbb{E}(|X|^2).$$

De plus, la solution vérifie une propriété de scattering dans $L^2(\Omega, H^1(\mathbb{R}^3))$.

Proposition 4. *Si X est une solution de* (4) *dans $C(\mathbb{R}, L^2(\Omega, H^1(\mathbb{R}^3)))$ alors il existe une solution $X_{\pm\infty}$ de*

$$i\partial_t u = -\triangle u$$

telle que

$$\|X(t) - X_{\pm\infty}(t)\|_{L^2,H^1} \to 0$$

quand $t \to \pm\infty$.

En particulier, X vérifie une estimée de Morawetz : $X \in L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3, L^2(\Omega))$.

Remarque 2. *A propos du cas focalisant,lorsque $w = -\delta$, l'équation est localement bien posée dans $L^2(\Omega, H^1(M))$.*

Avec des méthodes de viriel, on peut également prouver l'existence de solutions explosives dans $\mathbb{R}^n$. Le viriel est donné par

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathbb{E}(|X|^2).$$

2.2 Équilibres

L'équation (3) admet des équilibres dans le sens où elle admet des solutions dont la loi ne dépend pas du temps. De plus, ces équilibres correspondent à des solutions stationnaires pour (2).

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telle que $\int (1 + |k|^2)|f(k)|^2 < \infty$. Soit W un processus gaussien sur $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\mathbb{E}(\overline{W}(k)W(l)) = \begin{cases} \prod_i \min(|k_i|, |l_i|) & \text{si pour tout } i,\ k_i l_i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce processus satisfait $W(0) = 0$ et

$$\mathbb{E}(\overline{dW(k)}dW(l)) = \delta(k - l)dkdl.$$

Soit $m = \int |f(k)|^2$ et

$$Y_f(t, x) = \int e^{-it(k^2+m)} e^{ikx} dW(k).$$

Proposition 5. *On a $E(|Y_f|^2) = m$ et Y_f est une solution de* (4) *dont la loi ne dépend pas du temps t.*

Démonstration. Le processus aléatoire Y_f satisfait

$$i\partial_t Y_f = - \triangle Y_f + mY_f.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|Y_f(t, x)|^2) &= \mathbb{E}\Big(\Big| \int e^{-i(k^2+m)t} f(k) e^{ikx} dW(k) \Big|^2\Big) \\ &= \int |e^{-i(k^2+m)t} f(k) e^{ikx}|^2 dk \\ &= \int |f(k)|^2 dk = m. \end{aligned}$$

Donc Y_f satisfait (4). La loi de Y_f ne dépend pas du temps car les lois gaussiennes sont invariantes par rotations. □

Par ailleurs, $\gamma_{Y_f} = \gamma^{|f|^2}$ est le multiplicateur de Fourier par $|f|^2$.

Remarque 3. *De plus, Y_f n'est pas dans l'espace d'énergie, où l'on a résolu* (4)*, c'est-à-dire $Y_f \notin L^2(\Omega, H^1(\mathbb{R}^n))$. Ceci est dû au fait que la loi de Y_f est invariante par translations. De surcroît, si $Y_f \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3))$ alors Y_f rentre dans le cadre du scattering et donc*

$$\|Y_f\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3, L^2(\Omega))} < \infty.$$

Donc, si la loi de Y_f ne dépend pas du temps, sa norme $L^2(\Omega)$ non plus et donc la seule solution de

$$\|Y_f\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3, L^2(\Omega))} < \infty$$

est $Y_f = 0$.

Des équilibres similaires existent pour $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{T}^n$ mais ceux-là sont dans $L^2(\Omega, H^1(M))$.

2.3 Le caractère globalement bien posé autour des équilibres

Proposition 6. *L'équation défocalisante* (4) *perturbée autour de Y_f, c'est-à-dire*

$$i\partial_t Z = (m - \triangle)Z + \mathbb{E}(|Z|^2 + 2Re\ (\overline{Y}_f Z))(Y_f + Z)$$

est globalement bien posée dans $L^2(\Omega, H^1(\mathbb{R}^n))$, $n \leq 3$.

La caractère localement bien posé est dû au fait que $\mathbb{E}(|Y(t,x)|^2)$ et $\mathbb{E}(|\nabla Y(t,x)|^2)$ ne dépendent ni du temps ni de x. La preuve est donc similaire à celle du caractère localement bien posé de l'équation déterministe :

$$i\partial_t u = (m - \triangle)u + (|u|^2 + 2\mathrm{Re}\ (\overline{g}u))(g + u)$$

avec g et ∇g dans $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Le caractère globalement bien posé est dû à des inégalités de Gronwall sur la quantité :

$$\mathcal{E}(Z) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}(\overline{Z}(m - \triangle)Z) + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}(|Z|^2)^2 + \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}\ \mathbb{E}(\overline{Y}_f Z)\mathbb{E}(|Z|^2) + m\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}(|Z|^2)$$

qui contrôle la norme $L^2(\Omega, H^1(\mathbb{R}^n))$.

Les deux premiers termes de $\mathcal{E}(Z)$ correspondent à l'énergie de l'équation non perturbée. Si on différencie en temps ces deux premiers termes, on obtient des termes quintiques en Z. Pour palier à cette difficulté, on ajoute le troisième terme

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}\ \mathbb{E}(\overline{Y}_f Z)\mathbb{E}(|Z|^2).$$

Cependant, l'ajout de ce terme empêche de contrôler la norme $L^2(\Omega, H^1(\mathbb{R}^n))$ de Z. C'est pourquoi on rajoute le dernier terme.

3 Propriétés probabilistes

On veut à présent transformer les informations que l'on a obtenu sur (3) en informations sur l'équation (2). En particulier, on veut obtenir le caractère globalement bien posé de (2) autour de ses solutions stationnaires. Pour cela, on doit travailler sur les propriétés probabilistes des solutions de (3), et notamment, discuter leurs lois.

3.1 Unicité de la loi

Dans cette sous-section, on explique pourquoi si deux solutions de (3) ont la même loi initialement, alors elles ont la même loi en tout temps.

Proposition 7. *Soit $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i$ deux espaces probabilisés. Soit $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux solutions de* (4) *dans $C(\mathbb{R}, L^2(\Omega_i, H^1(M)))$, $i = 1, 2$. On suppose qu'initialement $X_1(t = 0) = X_{1,0}$ et $X_2(t = 0) = X_{2,0}$ ont la même loi. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X_1(t)$ et $X_2(t)$ ont la même loi*

L'idée de la preuve est de se ramener au cas où initialement les $\omega \mapsto X_i(\omega)$ sont injectives. On pourra alors écrire $X_{2,0} = X_{1,0} \circ g$ où $g : \Omega_2 \to \Omega_1$ est une variable aléatoire satisfaisant pour tout $A \in \mathcal{A}_1$,

$$P_2(g^{-1}(A)) = P_1(A).$$

Autrement dit, g est compatible avec la structure d'espace probabilisé. Par unicité de la solution de (3), on en déduira $X_2(t) = X_1(t) \circ g$ et vu les propriétés de g, ceci assure que pour tout B dans la tribu topologique de $H^1(M)$, on a

$$P_2(X_2(t)^{-1}(B)) = P_2(g^{-1}(X_1(t)^{-1}(B))) = P_1(X_1(t)^{-1}(B)).$$

Montrons que si $X(t)$ est une solution de (3) alors il existe un processus aléatoire injectif en la variable aléatoire solution de (3) et de même loi que $X(t)$.

Soit $X(t)$une solution de (4) dans l'espace d'énergie.

On peut montrer que la relation d'équivalence dans Ω

$$\omega_1 \sim_t \omega_2 \Leftrightarrow X(t)(\omega_1) = X(t)(\omega_2)$$

ne dépend pas du temps, en effet $X(t)(\omega_i)$ satisfait

$$i\partial_t u = - \triangle u + \varphi u$$

avec $\varphi = \mathbb{E}(|X|^2)$ dont les solutions sont uniques pour une même donnée initiale.

On peut alors quotienter l'espace de probabilité par cette relation d'équivalence pour obtenir des processus aléatoires injectifs.

Prenons $X_{1,0}$ et $X_{2,0}$ injectifs de même loi et $g = X_{1,0}^{-1} \circ X_{2,0}$.

On a que $X_1(t) \circ g$ est la solution de (4) avec pour condition initiale $X_{2,0}$, il s'agit donc de $X_2(t)$.

Montrons que pour tout $A \in \mathcal{A}_1$, $P_2(g^{-1}(A)) = P_1(A)$. En effet, En remplaçant g par sa valeur et comme $X_{1,0}$ est injective,

$$P_2(g^{-1}(A)) = P_2(X_{2,0}^{-1}(X_{1,0}(A))).$$

Comme $X_{1,0}$ et $X_{2,0}$ ont la même loi,

$$P_2(X_{2,0}^{-1}(X_{1,0}(A))) = P_1(X_{1,0}^{-1}(X_{1,0}(A)))$$

et comme $X_{1,0}$ est injective,

$$P_2(g^{-1}(A)) = P_1(A).$$

Ceci assure que $X_2(t)$ et $X_1(t)$ ont la même loi.

Un argument similaire existe pour l'équation perturbée sur Z mais $\sim_t$ est remplacée par

$$\omega_1 \sim_t' \omega_2 \Leftrightarrow (Z(t), Y_f(t))(\omega_1) = (Z(t), Y_f(t))(\omega_2).$$

On obtient alors la proposition suivante :

Proposition 8. *Soit $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux solutions de* (4) *dans $Y_{f,i} + C(\mathbb{R}, L^2(\Omega_i, H^1(\mathbb{R}^n)))$, $i = 1, 2$. On suppose qu'initialement $X_1(t = 0)$ et $X_2(t = 0)$ ont la même loi. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X_1(t)$ et $X_2(t)$ ont la même loi*

Remarque 4. *On peut aussi utiliser un argument considérant une métrique sur les mesures de probabilités pour l'équation non perturbée.*

3.2 Persistance des gaussiennes

Dans cette sous-section, on montre que si initialement $X(t=0)$ est une gaussienne alors en tout temps $X(t)$ est aussi une gaussienne. Par gaussienne, on désigne un champ gaussien ou processus gaussien au sens du premier chapitre de [19]. Une gaussienne X d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans un espace de Hilbert H est caractérisée par sa matrice (ou opérateur) de covariance M, satisfaisant pour tout $A, B \in H$,

$$\mathbb{E}(\langle A, X\rangle\langle X, B\rangle) = \langle A, MB\rangle.$$

Dans notre cas, la matrice de covariance de X est γ_X.

Proposition 9. *Soit X une solution de* (4) *dans $C(\mathbb{R}, L^2(\Omega, H^1(M)))$. Si $X(t=0) = X_0$ est un processus aléatoire gaussien, alors $X(t)$ aussi.*

En effet, $X(t)$ est égal à $U(t)X_0$ où $U(t)$ est le flot de

$$i\partial_t u = -\triangle u + \varphi u$$

avec $\varphi = \mathbb{E}(|X|^2)$.

D'où

$$\mathbb{E}(e^{i\langle\lambda, X(t)\rangle}) = \mathbb{E}(e^{i\langle U^*(t)\lambda, X_0\rangle}) = e^{-\langle U(t)\gamma_0 U^*(t)\lambda,\lambda\rangle}$$

où γ_0 est la covariance de X_0.

On peut obtenir le même résultat pour l'équation perturbée.

3.3 Existence de gaussiennes

On cherche maintenant à établir une correspondance entre les solutions de (2) et une classe de solutions de (3). La classe de solutions pour (3) est la classe des solutions gaussiennes.

De plus, pour établir le caractère globalement bien posé de (2), il s'agit de spécifier un espace métrique. On choisit un espace métrique adapté à la correspondance entre les solutions de (2) et les solutions gaussiennes de (3).

Définition 10. Soit $M \in \{\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3, \mathbb{T}^2, \mathbb{T}^3, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\}$. Soit Σ, d l'ensemble des opérateurs intégraux positifs γ de $L^2(M)$ tels que $\mathrm{Tr}\,((1-\triangle)\gamma) < \infty$ muni de la distance

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \inf_{X_i \sim \gamma_i} \|X_1 - X_2\|_{L^2(\Omega, H^1(M))}$$

où $\sim$ signifie « est une gaussienne de covariance ».

Ceci est comparable à une norme pour la classe des racines carrée $\gamma^{1/2}$.

On montre le caractère globalement bien posé de (2) non perturbé autour d'une solution stationnaire dans cet espace.

Définition 11. Soit $n = 2, 3$. Soit f une fonction bornée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\int (1+|k|^2)|f(k)|^2 dk < \infty.$$

On définit $\gamma^{|f|^2}$ et γ^f comme les multiplicateurs de Fourier par respectivement $|f|^2$, f.

Soit Σ_f, d l'ensemble des opérateurs positifs γ tels que γ admette au moins une racine carrée $\gamma^{1/2}$ vérifiant $\mathrm{Tr}\,((\gamma^{1/2}-\gamma^f)(1-\triangle)(\gamma^{1/2}-\gamma^f)) < \infty$ muni de la distance

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \inf_{X_i \sim \gamma_i} \|X_1 - X_2\|_{L^2(\Omega, H^1(M))}.$$

Cette distance est bien définie sur Σ_f. De plus, $\gamma^{|f|^2} \in \Sigma_f$.

On montre le caractère globalement bien posé de (2) perturbé autour d'une solution stationnaire $\gamma^{|f|^2}$ dans cet espace.

Proposition 12. *Soit $\gamma \in C(\mathbb{R}, \Sigma)$ une solution de* (2) *avec donnée initiale γ_0. Il existe une solution gaussienne X de* (4) *dans $C(\mathbb{R}, L^2(\Omega, H^1(M)))$ telle que $\gamma_X = \gamma$.*

Soit $X(t)$ la solution de

$$i\partial_t X = - \triangle X + \rho_\gamma X$$

avec pour donnée initiale une gaussienne de covariance γ_0.

Alors $X(t)$ est une gaussienne de covariance γ_X satisfaisant la même équation (linéaire) que γ avec la même donnée initiale, donc $\gamma_X = \gamma$ et donc $\rho_\gamma = \mathbb{E}(|X|^2)$.

On peut obtenir le même résultat pour l'équation perturbée.

Proposition 13. *Soit $\gamma \in C(\mathbb{R}, \Sigma_f)$ une solution de* (2) *avec donnée initiale γ_0. Il existe une solution gaussienne X de* (4) *dans $Y_f + C(\mathbb{R}L^2(\Omega, H^1(M)))$ telle que $\gamma_X = \gamma$.*

4 Conséquence au niveau des opérateurs

Dans cette section, on esquisse la preuve du Théorème 1, c'est-à-dire le caractère globalement bien posé de (2) dans Σ, d et Σ_f, d.

L'existence découle de l'existence de processus gaussiens $X_0 \in L^2(\Omega, H^1(M))$ de covariance γ_0 lorsque $\gamma_0 \in \Sigma$. Soit γ_0 in Σ. Soit X_0 une gaussienne de covariance γ_0. Soit $X(t)$ la solution de (4) avec donnée initiale X_0. L'opérateur γ_X vérifie (2) avec donnée initiale γ_0.

La continuité en temps provient de la continuité en temps de $X(t)$.

L'unicité provient d'une combinaison des Propositions 7, 12.

Soit γ_1 et γ_2 deux solutions de (2) avec pour condition initiale γ_0. Il existe deux solutions X_1 and X_2 de (3) gaussiennes de covariance respectives γ_1 et γ_2.

Comme $X_1(t = 0)$ et $X_2(t = 0)$ sont deux gaussiennes de covariance γ_0, elles ont la même loi, donc en tout temps, $X_1(t)$ et $X_2(t)$ ont la même loi, d'où $\gamma_1 = \gamma_2$.

La continuité en la donnée initiale est due à la continuité de $X(t)$.

Le schéma de preuve pour l'équation perturbée est similaire.

Remarque 5. *En considérant le cas focalisant, on peut également montrer l'existence de solutions explosives pour l'équation sur les opérateurs dans le cas focalisant.*

Références

[1] C. Bardos, L. Erdős, F. Golse, N. Mauser, and Horng-Tzer Yau, *Derivation of the Schrödinger-Poisson equation from the quantum N-body problem*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **334** (2002), no. 6, 515–520.

[2] C. Bardos, F. Golse, Alex D. Gottlieb, and N. J. Mauser, *Mean field dynamics of fermions and the time-dependent Hartree-Fock equation*, J. Math. Pures Appl. (9) **82** (2003), no. 6, 665–683.

[3] N. Benedikter, M. Porta, and B. Schlein, *Mean–field evolution of fermionic systems*, Communications in Mathematical Physics **331** (2014), no. 3, 1087–1131 (English).

[4] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), no. 2, 107–156.

[5] A. Bove, G. Da Prato, and G. Fano, *An existence proof for the Hartree-Fock time-dependent problem with bounded two-body interaction*, Comm. Math. Phys. **37** (1974), 183–191.

[6] A. Bove, G. Da Prato, and G. Fano, *On the Hartree-Fock time-dependent problem*, Comm. Math. Phys. **49** (1976), no. 1, 25–33.

[7] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov, *Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds*, vol. 126, 2004, pp. 569–605.

[8] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov, *Bilinear eigenfunction estimates and the nonlinear Schrödinger equation on surfaces*, Invent. Math. **159** (2005), no. 1, 187–223.

[9] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov, *Multilinear eigenfunction estimates and global existence for the three dimensional nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 2, 255–301.

[10] J. M. Chadam, *The time-dependent Hartree-Fock equations with Coulomb two-body interaction*, Comm. Math. Phys. **46** (1976), no. 2, 99–104.

[11] T. Chen, Y. Hong and N. Pavlović, *Global well-posedness of the NLS system for infinitely many fermions*, ArXiv e-prints (2015).

[12] A.-S. de Suzzoni, *An equation on random variables and systems of fermions*, ArXiv e-prints (2015).

[13] A. Elgart, L. Erdős, B. Schlein, and H.-T. Yau, *Nonlinear Hartree equation as the mean field limit of weakly coupled fermions*, J. Math. Pures Appl. (9) **83** (2004), no. 10, 1241–1273.

[14] R. L. Frank, M. Lewin, E. H. Lieb, and Robert Seiringer, *Strichartz inequality for orthonormal functions*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **16** (2014), no. 7, 1507–1526.

[15] R. L. Frank, M. Lewin, E. H. Lieb, and Robert Seiringer, *A positive density analogue of the Lieb-Thirring inequality*, Duke Math. J.,**162**, (2013), no. 3, 435–495.

[16] J. Fröhlich and A. Knowles, *A microscopic derivation of the time-dependent Hartree-Fock equation with Coulomb two-body interaction*, J. Stat. Phys. **145** (2011), no. 1, 23–50.

[17] M. Lewin and J. Sabin, *The Hartree equation for infinitely many particles, I : Well-posedness theory*, Comm. Math. Phys. **334** (2015), no. 1, 117–170.

[18] M. Lewin and J. Sabin, *The Hartree equation for infinitely many particles, II : Dispersion and scattering in 2D*, Anal. PDE **7** (2014), no. 6, 1339–1363.

[19] B. Simon, *The $P(\phi)_2$ Euclidean (quantum) field theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974, Princeton Series in Physics.

[20] S. Zagatti, *The Cauchy problem for Hartree-Fock time-dependent equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **56** (1992), no. 4, 357–374.