



Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2013-2014


Jacques Smulevici

Sur quelques problèmes d'analyse globale en relativité générale

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2013-2014), Exposé n° XIV, 14 p.

<http://sisedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2013-2014____A14_0>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz,
École polytechnique, 2013-2014.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
<http://www.ihes.fr/>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
UMR 7640 CNRS/École polytechnique
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<http://www.math.polytechnique.fr/>

cedram

Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Sur quelques problèmes d'analyse globale en relativité générale

Jacques Smulevici*

Résumé

Le but de cet exposé est de présenter un certain nombre de problèmes et de résultats récents concernant l'analyse globale des solutions des équations d'Einstein. Après une présentation générale des équations et des résultats de stabilité des solutions triviales, nous aborderons la question de la stabilité des solutions de type trou noir à partir de l'équation des ondes linéaires associée à ces solutions.

1 Une brève introduction aux équations d'Einstein

La théorie de la relativité générale est l'un des piliers principaux de la physique théorique moderne. Mathématiquement, il s'agit de l'étude des variétés différentielles munies d'une métrique Lorentzienne g satisfaisant aux équations d'Einstein, un système d'équations aux dérivées partielles dans les composantes de g . Ces objets mathématiques sont au coeur de nombreux problèmes actuels de physique. A titre d'exemple, au centre de notre galaxie, se trouve un centre gravitationnel fort, modélisé par les astrophysiciens par une solution des équations d'Einstein, la solution dite du *trou noir de Kerr*.

1.1 Quelques rappels de géométrie Lorentzienne

Rappelons qu'une métrique Lorentzienne sur une variété différentielle M de dimension d est un tenseur symétrique covariant de dimension 2 ayant pour signature $(- + \dots +)$. Si U est un ouvert de M et (U, x^α) , $\alpha = 1, \dots, d$ désigne un système de coordonnées locales sur M , alors, dans ce système de coordonnées, g peut être identifiée avec une application de U dans l'ensemble des matrices symétriques ayant une valeur propre strictement négative et

*Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud 11, bât. 425, 91405 Orsay, France. Email : jacques.smulevici@math.u-psud.fr.

toutes ses autres valeurs propres strictement positives. L'objet d'étude est donc (localement)

$$\begin{aligned} g : U \subset M &\rightarrow M_d(\mathbb{R}) \\ p &\rightarrow (g_{\alpha\beta}(p))_{\alpha,\beta=1,\dots,d}, \end{aligned}$$

avec $\forall p \in U$, $g_{\alpha\beta}(p) = g_{\beta\alpha}(p)$ et $g_{\alpha\beta}(p)$ a signature $(- + \dots +)$. Dans le reste de l'exposé, on se consacrera au cas où la variété différentielle M a dimension 4 (1 dimension pour le temps, 3 dimensions d'espace).

Comme en géométrie Riemannienne, d'autres objets géométriques peuvent être canoniquement associés à toute métrique Lorentzienne. D'une part, il existe une unique connexion ∇ compatible avec g , i.e. satisfaisant $\nabla g = 0$, appelée connexion de Levi-Civita. Rappelons que si X est un champ de vecteur sur M , ayant X^β pour composantes en coordonnées locales (x^α) , alors la dérivée covariante de X dans la direction α est définie par

$$\nabla_\alpha X^\beta = \partial_\alpha X^\beta + \sum_{\gamma=1,\dots,4} \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta X^\gamma,$$

où $\partial_\alpha X^\beta = \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\alpha}$ et $\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta$ sont les coefficients de Christoffel en coordonnées locales associés à g . Rappelons que ces coefficients sont tous de la forme $\Gamma = \sum g^{-1} \partial g$. Cette connexion permet notamment de définir les géodésiques de (M, g) qui sont les courbes γ sur M telles que si $\dot{\gamma}$ dénote le vecteur tangent à la courbe γ , on ait $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$. On dira que γ est une géodésique isotrope si γ est une courbe géodésique telle que $g_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^\alpha \dot{\gamma}^\beta = 0$.

Un deuxième objet associé à g est l'opérateur d'onde \square_g . Pour une fonction scalaire $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\square_g \psi = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \left(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta \psi \right),$$

où $g^{\alpha\beta}$ dénote les composantes de l'inverse de g et $\sqrt{-g} = (-\det(g_{\alpha\beta}))^{1/2}$.

On vérifie facilement que le symbole principal de cet opérateur est donné par $\sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$. L'inverse de g ayant la même signature que g , la variété caractéristique locale $\{\xi : g^{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta = 0\}$ peut être identifiée avec un cône de \mathbb{R}^4 , d'où le nom d'opérateur d'onde.

En général, les dérivées covariantes associées à g ne commutent pas. Ce défaut de commutativité est mesuré par un autre tenseur géométrique appelé *tenseur de courbure de Riemann*. En coordonnées locales, on vérifie que si X^α

désigne un champ de vecteur, alors l'expression $\nabla_\gamma \nabla_\beta X^\alpha - \nabla_\beta \nabla_\gamma X^\alpha$ est linéaire dans les composantes de X . On peut donc noter

$$\nabla_\gamma \nabla_\beta X^\alpha - \nabla_\beta \nabla_\gamma X^\alpha = \sum_\delta R_{\gamma\beta\delta}^\alpha X^\delta.$$

Les coefficients $R_{\gamma\beta\delta}^\alpha$ forment les composantes du tenseur de Riemann. Finalement, on définit le *tenseur de Ricci* associé à g comme

$$Ric(g)_{\gamma\delta} = \sum_\alpha R_{\gamma\alpha\delta}^\alpha,$$

c'est à dire comme une trace partielle du tenseur de Riemann.

1.2 Les équations d'Einstein

Les équations d'Einstein s'énoncent alors simplement sous la forme

$$Ric(g) = \Lambda g, \tag{1}$$

où g est une métrique Lorentzienne, $Ric(g)$ est le tenseur de Ricci associé à g et Λ est une constante réelle. Les équations (1) sont souvent appelées équations d'Einstein dans le vide, pour les différencier des équations d'Einstein couplées avec des champs de matières (voir [8], III.5 et III.6 pour une présentation des systèmes couplés).

Localement, on peut voir $Ric(g)$ comme un opérateur différentiel non-linéaire en g , ∂g et $\partial\partial g$. Pour comprendre d'avantage la structure des équations, il est nécessaire de faire un choix de jauge, c'est à dire de faire un choix particulier de coordonnées ou de projeter (1) sur une base de champ de vecteurs bien choisis. On peut considérer par exemple un système de coordonnées d'onde, c'est à dire un système de coordonnées locales (x^α) tels que chaque fonction x^α du système de coordonnées soit elle même une solution de l'équation des ondes associées à g , $\square_g x^\alpha = 0$. Dans un tel système de coordonnées, l'expression de $Ric(g)$ se simplifie et on a

$$Ric(g)_{\alpha\beta} = \square_g g_{\alpha\beta} + Q_g(\partial g, \partial g)_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

où $Q_g(\partial g, \partial g)_{\alpha\beta}$ sont des formes quadratiques dans les premières dérivées de g dont les coefficients dépendent de g .

Au vu de (1) et (2), les équations d'Einstein forment donc un système d'équations d'ondes quasilineaires du second ordre dans les composantes de g .

1.3 Le problème aux données initiales

Pour un système aux dérivées partielles de la form

$$\square_g g_{\alpha\beta} + Q_g(\partial g, \partial g)_{\alpha\beta} = \Lambda g_{\alpha\beta},$$

on s'attend à ce que les données initiales soient de la forme

$$(g, \partial_t g)(t = 0) \in H^s \times H^{s-1}. \quad (3)$$

Si en pratique, on se ramène essentiellement à des données initiales de la forme (3), les données sont en fait prescrites de manière géométrique, alors que dans (3), on a du introduire un système de coordonnées pour pouvoir définir t et ∂_t . De plus, si on projette les équations d'Einstein sur une hypersurface Σ , on trouve que la métrique induite h par g sur Σ et la deuxième forme fondamentale K de Σ doivent satisfaire aux équations

$$R^{(3)} - |K|^2 + (\text{tr} K)^2 = 0, \quad (4)$$

$$\nabla^{(3)j} K_{ij} - \nabla_i^{(3)} \text{tr} K = 0, \quad (5)$$

où $R^{(3)}$ et $\nabla_i^{(3)}$ dénotent respectivement la courbure scalaire et les dérivées covariantes associées à h .

Les données initiales pour les équations d'Einstein sont donc de la forme (Σ, h, K) où (Σ, h) est une variété Riemannienne et K un tenseur symétrique d'ordre 2 tels que les équations (4)-(5) soient satisfaites. Des données de la forme (3) peuvent alors être reconstruites, modulo un choix de jauge correspondant essentiellement au choix de la fonction de temps t (Voir [8] Chap. VI pour une présentation détaillée du problème aux données initiales pour les équations d'Einstein).

Etant donné des données initiales (Σ, h, K) suffisamment régulières, un théorème de Choquet-Bruhat [9] assure alors l'existence d'une solution locale aux équations d'Einstein. De nombreux travaux se sont consacrés à la construction de solutions locales pour des données ayant des régularités de plus en plus faibles. Les meilleurs résultats actuels sont ceux récemment obtenus dans la série d'articles [32, 38, 39, 40, 41, 42] et qui permettent essentiellement ¹ de construire des solutions des équations pour des données initiales dans $H^2 \times H^1$. Voir aussi [31] pour une présentation générale de la preuve ainsi qu'un historique sur le problème aux données initiales à faible régularité.

1. La régularité des données est en fait imposée de manière géométrique. Comme le tenseur de Riemann dépend des dérivées secondes de la métrique, au lieu de $g \in H^2$, on impose que le tenseur de Riemann soit dans L^2 .

2 La stabilité des solutions stationnaires : les solutions triviales

Les solutions des équations d'Einstein peuvent être classifiées selon leur degré de symétrie. Les solutions les plus simples de (1), c'est à dire ayant le degré maximal de symétrie, sont alors, en fonction du signe de Λ :

- $\Lambda = 0$, (\mathbb{R}^{1+3}, η) avec η la métrique de Minkowski $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.
- $\Lambda > 0$, $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3, g_{dS})$, où g_{dS} est la métrique dite de de-Sitter (voir [8] Chap 4. pour une introduction à cette géométrie).
- $\Lambda < 0$, $(\mathbb{R}^{1+3}, g_{AdS})$, où g_{AdS} est la métrique dite d'Anti-de-Sitter, laquelle peut-être écrite, en utilisant des coordonnées sphériques sur \mathbb{R}^3 , sous la forme

$$g_{AdS} = -\left(1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2\right) dt \otimes dt + \left(1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 d\sigma_{\mathbb{S}^2},$$

où $t \in \mathbb{R}$, $r \in [0, +\infty)$, $d\sigma_{\mathbb{S}^2}$ est la métrique unitaire sur la sphère \mathbb{S}^2 et l est une constante telle que $l^2 = -\frac{3}{\Lambda}$.

Chacune de ses solutions est invariante en temps et on peut naturellement se poser la question de la stabilité de ces solutions, c'est à dire, étant donné g une métrique solution de (1) provenant de données initiales suffisamment proches de celles induites par l'une des solutions stationnaires, on souhaite savoir si g reste proche et éventuellement converge vers la métrique de la solution stationnaire.

Pour démontrer un résultat de stabilité, on considère typiquement en premier lieu les équations linéarisées autour de la solution stationnaire et on essaye de démontrer à l'aide d'estimations robustes que les solutions des équations linéarisées décroissent en temps suffisamment vite.

Dans le cas de la métrique de Minkowski sur \mathbb{R}^{1+3} , on obtient au niveau linéaire une décroissance polynomiale en temps, qui permet, après une longue analyse des non-linéarités, de démontrer la stabilité de l'espace de Minkowski [10] (voir aussi [33] pour une preuve alternative).

Dans le cas de la métrique de de-Sitter, on obtient au niveau linéaire une décroissance exponentielle en temps qui permet facilement de démontrer la stabilité de l'espace de de-Sitter (voir [22] pour une preuve de la stabilité de de-Sitter ainsi que [36] pour la stabilité de solutions possédant des propriétés similaires à de-Sitter).

Le cas de la métrique d'Anti-de-Sitter est assez différent. Considérons d'abord l'équation des ondes scalaires sur Anti-de-Sitter $\square_{g_{AdS}} \psi = 0$. Après quelques manipulations, cette équation peut être réécrite sous la forme

$$-\partial_{tt}\psi + H(\psi) = 0,$$

où $t \in \mathbb{R}$ et H est un opérateur elliptique indépendant de t . Depuis les travaux de [30] et [4] (voir aussi [24, 46, 45] pour des généralisations aux espaces asymptotiquement Anti-de-Sitter), on sait qu'il existe des espaces de Sobolev à poids, dénotés ici H_{AdS}^s (voir [24] pour une définition précise de ces espaces) tels que H est autoadjoint sur $H_{AdS}^2(\mathbb{R}^3)$ avec le produit Hilbertien standard sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ et le spectre de H est discret. Les solutions de l'équation des ondes peuvent donc s'écrire sous la forme d'une somme de solutions périodiques et il n'y a donc aucune dispersion, ce qui est naturellement un obstacle important à la stabilité d'Anti-de-Sitter. En fait, on a la conjecture suivante (due initialement à M. Anderson et indépendamment Dafermos-Holzegel)

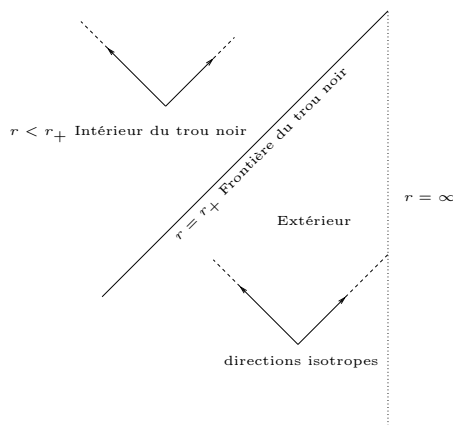
Conjecture 1. *L'espace d'Anti-de-Sitter est instable dans les espaces H_{AdS}^s .*

Notons qu'à l'aide d'une transformation conforme, on peut transformer l'équation $\square_{g_{AdS}} \psi = 0$ en une équation d'onde sur un domaine borné. L'appartenance à un espace de type H_{AdS}^1 est alors traduite en condition de type Dirichlet pour les solutions. D'autres conditions peuvent être considérées (Neumann, absorbante, etc.) pour lesquelles les propriétés de stabilité ou d'instabilité d'Anti-de-Sitter pourraient être très différentes. La conjecture 1 a récemment été au centre de nombreux travaux en physique théorique à la suite de résultats numériques et heuristiques pour un modèle en symétrie sphérique [5].

3 La stabilité des solutions de type trou noir

Une des prédictions les plus intéressantes de la relativité générale est l'existence de trous noirs. Un trou noir est une solution des équations d'Einstein ayant des propriétés géométriques particulières. Plus précisément (voir [15] pour une introduction détaillée), un trou noir est une variété Lorentzienne (\mathcal{M}, g) telle que \mathcal{M} peut être divisée en deux parties, l'intérieur et l'extérieur du trou noir. Pour simplifier, on va supposer l'existence d'une fonction scalaire r sur \mathcal{M} telle $r < r_+$ correspond à l'intérieur du trou noir, $r > r_+$ correspond à l'extérieur, la frontière du trou noir étant donnée par $r = r_+$, où $r_+ \in \mathbb{R}$. D'un point de vue géométrique, on caractérise l'intérieure de la manière suivante. Toute géodésique future isotrope commençant dans l'intérieur reste dans l'intérieure. L'extérieur est quant à lui caractérisé comme l'ensemble des points p de \mathcal{M} tel qu'on peut trouver une géodésique

isotrope γ commençant en p et telle $r(\gamma(s)) \rightarrow +\infty$, as $s \rightarrow +\infty$.



Par rapport aux solutions triviales (et à leurs perturbations), une solution de l'équation des ondes dans l'extérieur d'une solution de type trou noir peut maintenant rayonner de l'énergie à travers la frontière du trou noir. En revanche, il n'y a pas de mécanisme clair de décroissance à l'intérieur du trou noir. Pour cette raison, on imagine classiquement qu'uniquement l'extérieur du trou noir est stable comme solution des équations d'Einstein². Dans la section suivante, nous présenterons des métriques de solutions de types trous noirs dans la région extérieure.

3.1 Les trous noirs de Schwarzschild et Kerr

Les solutions de type Schwarzschild forment une famille à 1 paramètre, $m \in \mathbb{R}$ la masse du trou noir, des équations d'Einstein (1) avec $\Lambda = 0$. L'extérieur (frontière incluse) du trou noir peut être identifié avec la variété $\mathbb{R} \times [2m, +\infty) \times \mathbb{S}^2$ sur laquelle on considère la métrique

$$g_{Schw} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr \otimes dr + r^2 d\sigma_{\mathbb{S}^2},$$

où $t \in \mathbb{R}$, $r \in [2m, +\infty)$ et $d\sigma_{\mathbb{S}^2}$ est la métrique unitaire sur \mathbb{S}^2 . Il s'agit d'une solution stationnaire (la métrique écrite en coordonnée ci-dessus est indépendante de t) et à symétrie sphérique. Cette famille a un paramètre est une sous-famille d'une famille à deux paramètres, la famille des solutions de

². Notons qu'on peut étudier l'équation des ondes uniquement sur l'extérieur du trou noir car la frontière entre l'intérieur et l'extérieur est une variété caractéristique de l'opérateur des ondes.

type Kerr. Les deux paramètres sont alors la masse m et le moment angulaire par unité de masse $a \in \mathbb{R}$. Les solutions de type Schwarzschild peuvent être identifiées comme celles pour lesquelles $a = 0$. Pour des questions de régularité de la variété Lorentzienne, la condition $|a| < m$ est nécessaire³. La métrique d'une solution de type Kerr a la structure suivante

$$g_{Kerr} = g_{tt}dt \otimes dt + g_{rr}dr \otimes dr + g_{\phi\phi}d\phi \otimes d\phi + g_{\theta\theta}d\theta \otimes d\theta + 2g_{t\phi}dt \otimes d\phi,$$

où $t \in \mathbb{R}$, $r \in [r_+(a, m), +\infty)$ et (θ, ϕ) est un système de coordonnées standard sur \mathbb{S}^2 et tous les coefficients sont indépendants de t et ϕ . Il s'agit donc aussi d'une solution stationnaire, mais uniquement axisymétrique. Une source de nombreuses difficultés dans l'analyse est que le coefficient g_{tt} n'est pas partout négatif. Il est strictement positif dans une région de l'extérieur proche de $r_+(a, m)$. Ceci implique que l'énergie conservée due à l'invariance en temps de la métrique n'est a priori pas coercive! Voir [15] pour une introduction détaillée à la géométrie des solutions de type Kerr.

3.2 Les trous noirs de Schwarzschild-(A)dS et Kerr-(A)dS

Les trous noirs de Schwarzschild et Kerr sont des solutions de (1) avec $\Lambda = 0$ asymptotiquement plates (ou Minkowskienne), c'est à dire que lorsque $r \rightarrow +\infty$, ces métriques approchent la métrique de Minkowski. Il existe des analogues pour $\Lambda \neq 0$ de ces solutions, les solutions de Schwarzschild-de-Sitter et Kerr-de-Sitter si $\Lambda > 0$ et Schwarzschild-Anti-de-Sitter et Kerr-Anti-de-Sitter lorsque $\Lambda < 0$. Par exemple, la métrique de Schwarzschild-Anti-de-Sitter est une solution de (1) avec $\Lambda < 0$ donnée (sur l'extérieur) par

$$g_{SchAdS} = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \left(\frac{r}{l}\right)^2\right)dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2m}{r} + \left(\frac{r}{l}\right)^2\right)^{-1}dr \otimes dr + r^2d\sigma_{\mathbb{S}^2},$$

où $l^2 = -\frac{3}{\Lambda}$, m est la masse du trou noir, $t \in \mathbb{R}$ et $r \in [r_+(m, l) + \infty[$ avec $r_+(m, l)$ solution strictement positive de $1 - \frac{2m}{r} + \left(\frac{r}{l}\right)^2 = 0$.

Les solutions de types Kerr-(A)dS dépendent d'un paramètre de plus, dénoté a et la frontière du trou noir se trouve en $r = r_+$, avec r_+ dépendant de a, m et Λ (ou l). Comme dans le cas de Schwarzschild et Kerr, ces solutions ont une grande importance en physique théorique.

3. Le cas limite $|a|=m$ peut aussi être étudié, voir [3].

3.3 Décroissance des ondes sur l'extérieur des trous noirs

Si la question de la stabilité non-linéaire de Schwarzschild ou Kerr est encore largement ouverte, de nombreux travaux récents se sont consacrés à l'étude de la décroissance des ondes linéaires sur l'extérieur des solutions. Typiquement, le problème central est la démonstration de la décroissance de l'énergie locale, à partir de laquelle on peut démontrer de nombreuses estimations dispersives classiquement recherchées. Dans le cas de Kerr, on a notamment le résultat récent suivant, faisant suite à de nombreux travaux spécialisés aux cas $|a| \ll m$ (c'est à dire proche de Schwarzschild) [14, 15, 1, 44, 34] .

Theorem 1 ([11, 18]). *Soit $a, m \in \mathbb{R}$ tels que $|a| < M$. Soit $R_1 > R_0 > r_+(a, m)$ avec $\{r = r_+(a, m)\}$ la frontière d'un trou noir de Kerr de paramètres (a, m) . Il existe $C(a, m, R) > 0$ tel que pour toute solution ψ suffisamment régulière de l'équation des ondes $\square_{g_{\text{Kerr}}} \phi = 0$ sur l'extérieur d'un trou noir de Kerr de paramètres (a, m) , on a une estimation de la forme*

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{[R_0, R_1] \times \mathbb{S}^2} \chi |\partial \phi|^2 \leq C(a, m, R) E_1(\phi)(t=0) \quad (6)$$

où $E_1(\phi)(t=0)$ est une énergie ne dépendant que des données initiales $\psi(t=0)$ et $\partial \psi(t=0)$ et où χ est une fonction de cutt-off de la forme

$$\chi = \chi(r) = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^2 \left(1 - \mathbb{I}_{[3M-s_+, 3M-s_-]}\right)$$

avec $s_+ = s_+(a, m)$ et $s_- = s_-(a, m)$.

La fonction de cutt-off χ est nécessaire dans l'estimation ci-dessus à cause de la présence de trajectoire captées, c'est à dire de géodésiques isotropes qui ne terminent ni dans le trou noir, ni vers $r = +\infty$. Pour Schwarzschild, l'ensemble de ces trajectoires restent en $r = 3M$ et on peut prendre $s_+ = s_- = 0$ tandis que la structure des trajectoires est plus complexe dans le cas de Kerr (d'où la présence de s_+ et s_- non-nulles dans (6)) et ne peut être décrite correctement que dans l'espace cotangent à la variété. A partir de l'estimation (6), on peut alors démontrer des estimations de décroissances polynomiales en temps [13, 43, 35].

Quel sont les résultats de décroissance connus pour les trous noirs asymptotiquement de-Sitter ou Anti-de-Sitter ? Dans le cas de Schwarzschild-de-Sitter, on a des résultats analogue à (6) [12], ainsi que des résultats décrivant les solutions à l'aide de la théorie des résonances [7]. La décroissance des

ondes et les résonances de Kerr-de-Sitter avec $|a| \ll \epsilon(m, \Lambda)$ [19, 20] sont aussi bien comprises et des estimations hautes fréquences sont aussi disponibles dans le cas général [21]. Comme dans le cas de de-Sitter, on obtient des estimations de décroissance en temps fortes sur les solutions (plus vite que tout polynôme ou exponentielle en t).

Le cas d'Anti-de-Sitter est assez différent. Dans [27], nous avons démontré le théorème suivant

Theorem 2. *Soit $a, m, l \in \mathbb{R}$ tel que $|a|l < r_+(a, m, l)^2$ avec $\{r = r_+(a, m)\}$ la frontière d'un trou noir de Kerr-Anti-de-Sitter de paramètres (a, m, l) et $|a| < l$. Soit $R > r_+$. Il existe $C(a, m, l, R) > 0$ tel que pour toute solution ψ dans H_{AdS}^2 de l'équation des ondes $\square_{g_{KerrAdS}} \phi = 0$ sur l'extérieur d'un trou noir de Kerr-AdS de paramètres (a, m, l) , on a l'estimation, $\forall t \geq 0$,*

$$E_1_{[R, +\infty) \times \mathbb{S}^2}(\phi) \leq C(a, m, R) \frac{1}{\log(t+2)} E_2(\phi)(t=0), \quad (7)$$

où $E_1_{[R, +\infty) \times \mathbb{S}^2}(\phi)$ est une énergie du premier ordre ne dépendant que de $\partial\phi$ dans $[R, +\infty) \times \mathbb{S}^2$ et $E_2(\phi)(t=0)$ est une énergie du deuxième ordre ne dépendant que des données initiales $\psi(t=0), \partial\psi(t=0)$ et $\partial\partial\psi(t=0)$.

De plus dans [28], nous avons construit une famille de quasimodes (des solutions localisées approchées à haute fréquence) permettant de montrer que l'estimation (7) est optimale. Le taux de décroissance des ondes dans Kerr-AdS est donc très faible, comparé à celui sur les variétés asymptotiquement plates ou de-Sitter. Ceci est dû à un phénomène de trajectoires captées stables tandis que dans le cas de Kerr et Kerr-dS le flot géodésique proche des trajectoires captées possède une propriété d'instabilité (le flot est normalement hyperbolique). Les résonances de Schwarzschild-AdS ont été étudiés dans [23]. Notons aussi que (2) nécessite une borne uniforme sur l'énergie des solutions, démontrée dans [25] et [26].

Au vue des résultats présentés dans la section précédente, le problème de la décroissance des ondes scalaires sur l'extérieur des solutions de type trou noir est maintenant bien compris. Pour cette raison, la plupart des équipes de recherche actuelles sur le sujet se concentrent maintenant soit sur des problèmes non-linéaires modèles soit sur des équations tensorielles (Maxwell, gravitation linéarisée etc.). En plus des résultats [6, 2, 37] concernant la décroissance des ondes pour les champs de Maxwell dans Schwarzschild et Kerr avec $|a| \ll m$, signalons en particulier qu'une preuve de la stabilité linéaire de Schwarzschild a récemment été annoncée [17], ainsi que des résultats concernant un problème modèle en symétrie axiale [29]. Finalement, mentionnons aussi les résultats récents obtenus dans [16] démontrant

l'existence d'une famille de solutions convergeant asymptotiquement vers des solutions de type Kerr.

Références

- [1] ANDERSSON L., BLUE P. Hidden symmetries and decay for the wave equation on the Kerr spacetime (2009). [arXiv:0908.2265](#).
- [2] ANDERSSON L., BLUE P., Uniform energy bound and asymptotics for the Maxwell field on a slowly rotating Kerr black hole exterior. [arXiv:1310.2664](#).
- [3] ARETAKIS S. Horizon Instability of Extremal Black Holes. [arXiv:1206.6598](#).
- [4] BACHELOT A. The Dirac System on the Anti-de-Sitter Universe. *Commun. Math. Phys.* **283** (2008), 127–167.
- [5] BIZON P., ROSTWOROWSKI A. On weakly turbulent instability of anti-de-Sitter space. *Phys.Rev.Lett.* *107* (2011), 031102, [arXiv:1104.3702](#).
- [6] BLUE P., Decay of the Maxwell field on the Schwarzschild manifold. [arXiv:0710.4102](#).
- [7] BONY, J.-F., HÄFNER, D. Decay and non-decay of the local energy for the wave equation in the De Sitter-Schwarzschild metric. *Comm. Math. Phys.* **282** (2008), 697–719.
- [8] CHOQUET-BRUHAT Y., General relativity and the Einstein equations. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2009.
- [9] FOURES-BRUHAT Y., Théorèmes d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires, *Acta Mathematica* *88* (1952), 141–225.
- [10] CHRISTODOULOU D., KLAINERMAN S. *The global nonlinear stability of the Minkowski space* Princeton University Press, 1993
- [11] DAFERMOS M., RODNIANSKI I., Decay for solutions of the wave equation on Kerr exterior spacetimes I-II : The cases $|a| \ll M$ or axisymmetry (2010). [arXiv:1010.5132](#).
- [12] DAFERMOS M., RODNIANSKI I., The wave equation on Schwarzschild-de-Sitter spacetimes [arXiv:0709.2766](#).
- [13] DAFERMOS M., RODNIANSKI I., A new physical-space approach to decay for the wave equation with applications to black hole spacetimes.

- XVI International Congress on Mathematical Physics, P. Exner (ed), World Scientific, London (2009).*
- [14] DAFERMOS M., RODNIANSKI I., A proof of the uniform boundedness of solutions to the wave equation on slowly rotating Kerr backgrounds. *Invent. Math.* **185 (3)** (2011), 467–559. [arXiv:0805.4309](#).
 - [15] DAFERMOS M., RODNIANSKI I., Lectures on black holes and linear waves. *Institut Mittag-Leffler Report no. 14, 2008/2009* (2008), [arXiv:0811.0354](#).
 - [16] DAFERMOS M., HOLZEGEL G., RODNIANSKI I., A scattering theory construction of dynamical vacuum black holes. [arXiv:1306.5364](#).
 - [17] DAFERMOS M., HOLZEGEL G., RODNIANSKI I., Linear Stability of the Schwarzschild Solution, présentation donnée par G. Holzegel lors de la conférence Initial Data and Evolution Problems in General Relativity, MSRI, Berkeley.
 - [18] DAFERMOS M., RODNIANSKI I., SHLAPENTOKH-ROTHMAN Y. Decay for solutions of the wave equation on Kerr exterior spacetimes III : The full subextremal case $|a| < M$. [arXiv:1402.7034](#).
 - [19] DYATLOV S. Asymptotic distribution of quasi-normal modes for Kerr-de-Sitter black holes (2011). *Annales Henri Poincaré* July 2012, Volume 13, Issue 5, pp 1101-1166
 - [20] DYATLOV S. Quasi-normal modes and exponential energy decay for the Kerr-de Sitter black hole. *Comm. Math. Phys.* **306** (2011), 119–163.
 - [21] DYATLOV S., ZWORSKI M. Trapping of waves and null geodesics for rotating black holes. [arXiv:1305.4603](#).
 - [22] FRIEDRICH H. *The existence of n -geodesically complete or future complete solutions of Einstein's field equations with smooth asymptotic structure* *Comm. Math. Phys.* **107** (1986), no. 4, 587–609
 - [23] GANNOT O. Quasinormal modes for Schwarzschild-AdS black holes : exponential convergence to the real axis [arXiv:1212.1907](#).
 - [24] HOLZEGEL G. Well-posedness for the massive wave equation on asymptotically anti-de-Sitter spacetimes. *J. Hyperbolic Differ. Equ.* **9** (2012), 239–261.
 - [25] HOLZEGEL G. On the massive wave equation on slowly rotating Kerr-AdS spacetimes. *Comm. Math. Phys.* **294** (2010), 169–197.
 - [26] HOLZEGEL G., WARNICK C. Boundedness and growth for the massive wave equation on asymptotically anti-de-Sitter black holes (2012).

- [27] HOLZEGEL G., SMULEVICI J. Decay properties of Klein-Gordon fields on Kerr-AdS spacetimes. *Communications on Pure and Applied Mathematics* Volume 66, Issue 11, p. 1751-1802, November 2013.
- [28] HOLZEGEL G., SMULEVICI J. Quasimodes and a Lower Bound on the Uniform Energy Decay Rate for Kerr-AdS Spacetimes. [arXiv:1303.5944](#).
- [29] IONESCU A., KLAINERMAN S., SZEFTTEL J., On the reality of Black holes. Présentation donnée par S. Klainerman lors de la conférence Nonlinear Wave Equations and General Relativity Workshop, Oxford University.
- [30] ISHIBASHI, A., WALD R. M. Dynamics in non-globally hyperbolic static spacetimes. III : anti-de Sitter spacetime. *Class. Quant. Grav.* **21** (2004), 2981–3014, [arXiv:hep-th/0402184](#).
- [31] KLAINERMAN S., RODNIANSKI I., SZEFTTEL J. Overview of the proof of the Bounded L^2 Curvature Conjecture. [arXiv:1204.1772](#).
- [32] KLAINERMAN S., RODNIANSKI I., SZEFTTEL J., The bounded L^2 curvature conjecture. [arXiv:1204.1767](#), 91 pp.
- [33] LINDBLAD H. AND RODNIANSKI I., *The global stability of Minkowski space-time in harmonic gauge*, *Ann. of Math.* p 1401-1477 Volume 171 (2010), Issue 3
- [34] MARZUOLA J., METCALFE J., TATARU D., TOHANEANU M., Strichartz Estimates on Schwarzschild Black Hole Backgrounds. *Comm. Math. Phys.* **293** (2010). [arXiv:0802.3942](#).
- [35] METCALFE J., TATARU D., TOHANEANU M., Price's Law on Nonstationary Spacetimes. *Advances in Mathematics* Volume 230, Issue 3, p 995-1028.
- [36] H. RINGSTRÖM *Future stability of the Einstein-non linear scalar field system* *Invent. Math.* **173** (2008), no. 1, 123–208
- [37] STERBENZ J., TATARU D. Local energy decay for Maxwell fields part I : Spherically symmetric black-hole backgrounds. [arXiv:1305.5261](#).
- [38] J. SZEFTTEL, Parametrix for wave equations on a rough background I : regularity of the phase at initial time. [arXiv:1204.1768](#), 145 pp.
- [39] J. SZEFTTEL, Parametrix for wave equations on a rough background II : control of the parametrix at initial time. [arXiv:1204.1769](#), 84 pp.
- [40] J. SZEFTTEL, Parametrix for wave equations on a rough background III : space-time regularity of the phase. [arXiv:1204.1770](#), 276 pp.

- [41] J. SZEFTTEL, Parametrix for wave equations on a rough background IV : Control of the error term. [arXiv:1204.1771](#), 284 pp.
- [42] J. SZEFTTEL, Sharp Strichartz estimates for the wave equation on a rough background. [arXiv:1301.0112](#), 30 pp.
- [43] TATARU D., Local decay of waves on asymptotically flat stationary space-times. *Amer. J. Math.* 135 (2013), no. 2, 361-401.
- [44] TATARU D., TOHANEANU M. Local energy estimate on Kerr black hole backgrounds. *Int. Math. Res. Not.* **2011** (2011), 248–292.
- [45] VASY, A. The wave equation on asymptotically Anti-de-Sitter spaces. *Analysis and PDE*. Vol. 5 (2012), No. 1, 81-144
- [46] WARNICK, C. The massive wave equation in asymptotically AdS spacetimes. *to appear in Comm. Math. Phys.* (2012), [arXiv:1202.3445](#).