



# Séminaire Laurent Schwartz

## EDP et applications

Année 2013-2014

Oana Ivanovici, Gilles Lebeau, et Fabrice Planchon

**Estimations de Strichartz pour les ondes dans le modèle de Friedlander en dimension 3**

*Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications* (2013-2014), Exposé n° III, 12 p.

<[http://sersedp.cedram.org/item?id=SLSEDP\\_2013-2014\\_\\_\\_\\_A3\\_0](http://sersedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2013-2014____A3_0)>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 2013-2014.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

Institut des hautes études scientifiques  
Le Bois-Marie • Route de Chartres  
F-91440 BURES-SUR-YVETTE  
<http://www.ihes.fr/>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz  
UMR 7640 CNRS/École polytechnique  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<http://www.math.polytechnique.fr/>

**cedram**

*Exposé mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## ESTIMATIONS DE STRICHARTZ POUR LES ONDES DANS LE MODÈLE DE FRIEDLANDER EN DIMENSION 3

OANA IVANOVICI, GILLES LEBEAU, FABRICE PLANCHON

RÉSUMÉ. On se propose dans cet exposé d'établir des estimations de Strichartz pour l'équation des ondes dans un domaine strictement convexe de  $\mathbb{R}^3$ .

### 1. INTRODUCTION

Les estimations dispersives dites "de Strichartz" mesurent la taille et la dispersion des solutions de l'équation des ondes linéaire sur un domaine  $\Omega$  avec bord  $\partial\Omega$  (possiblement vide) :

$$(1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u(t, x) = 0, & x \in \Omega \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1, \\ Bu = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Ici  $\Delta$  désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $\Omega$ . Si  $\partial\Omega \neq \emptyset$ , on considère ou bien la condition de Dirichlet sur le bord ( $B =$  l'opérateur identité) :  $u|_{\partial\Omega} = 0$  ou bien la condition de Neumann ( $B = \partial_\nu$ ), où  $\nu$  est le vecteur unitaire normal au bord.

Pour pouvoir perturber ces équations et étudier les problèmes non-linéaires associés, avoir un contrôle de la "taille" du flot linéaire en termes de la taille des données initiales s'avère crucial. Pour l'équation des ondes non-linéaires, les normes mixtes  $L_t^q L^r(\Omega)$  sont particulièrement utiles : au prix d'une moyenne en temps on gagne de l'intégrabilité en espace, parfois jusqu'à  $r = \infty$ .

Quant aux équations linéaires, une estimation (locale) de base indique que sur toute variété riemannienne sans bord, la solution linéaire de (1) vérifie (pour  $T < \infty$ )

$$(2) \quad h^\beta \|\chi(hD_t)u\|_{L^q([0,T], L^r(\mathbb{R}^d))} \leq C \left( \|u(0, x)\|_{L^2} + \|hD_t u\|_{L^2} \right),$$

où  $\chi \in C_0^\infty$  est une fonction lisse à support inclus dans un voisinage de 1. Si  $d$  désigne la dimension de la variété, on a  $\beta = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{q}$ , où le couple  $(q, r)$  est admissible pour l'équation des ondes, c.a.d. :

$$(3) \quad \frac{2}{q} + \frac{d-1}{r} \leq \frac{d-1}{2}, \quad q > 2.$$

Lorsque l'égalité a lieu dans (3), la paire  $(q, r)$  est dite strictement admissible. Si (2) a lieu pour  $T = \infty$ , on parle d'inégalité de Strichartz globale en temps.

Ces estimations ont été étudiées depuis bien longtemps dans l'espace de Minkowski (métrique plate) : si  $\Omega$  désigne l'espace  $\mathbb{R}^d$  avec la métrique euclidienne  $g_{i,j} = \delta_{i,j}$ , la solution  $u_{\mathbb{R}^d}(t, x)$  de (1) dans  $\mathbb{R}^d$  avec  $(u_0 = \delta_a, u_1 = 0)$  est donnée par la formule

$$u_{\mathbb{R}^d}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \cos(t|\xi|) e^{i(x-a)\xi} d\xi$$

et elle vérifie les estimations de dispersion usuelles :

$$(4) \quad \|\chi(hD_t)u_{\mathbb{R}^d}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C(d)h^{-d} \min\{1, (h/t)^{\frac{d-1}{2}}\}.$$

L'interpolation entre (4) et l'estimation de l'énergie, suivie d'un argument classique de dualité dit  $TT^*$ , permet d'obtenir facilement les estimations (2). Ces estimations peuvent être généralisées à tout  $(\Omega, g)$  sans bord grâce à leur caractère local (vitesse de propagation finie). Les estimations (2) sont optimales sur une telle variété riemannienne.

La motivation principale pour les estimations de type Strichartz vient de leurs applications en analyse harmonique et l'étude des problèmes non-linéaires dispersifs. Par exemple, (2) peut être utilisée pour montrer des résultats d'existence pour l'équation des ondes semi-linéaire.

Même si le cas sans bord est relativement bien compris depuis un certain temps, l'obtention de tels résultats sur des variétés à bord s'avère une tâche bien plus difficile. Pour des variétés à bord strictement concave, cette théorie a pu être établie grâce à la paramétrice de Melrose et Taylor près de rayons tangents au bord. Pourtant, dès que l'hypothèse de stricte concavité du bord est enlevée, la présence des rayons géodésiques multi-réfléchis et de leurs limites, les rayons glissants, ne permet plus d'avoir une telle paramétrice. En dehors du cas d'un bord concave, il n'y avait donc aucun résultat jusqu'à très récemment.

Dans cette note qui résume les idées importantes de [7], le but est d'obtenir des estimations de Strichartz à l'intérieur d'un domaine, meilleures que celles obtenues directement à partir du résultat (optimal) de dispersion de [7], : avant d'énoncer notre résultat principal, on va introduire le modèle de Friedlander d'un demi-espace  $\Omega_d = \{(x, y) | x > 0, y \in \mathbb{R}^{d-1}\}$  muni de la métrique  $g_F$  héritée de l'opérateur de Laplace suivant :  $\Delta_F = \partial_x^2 + (1+x)\Delta_{\mathbb{R}_y^{d-1}}$ . On s'aperçoit facilement que  $(\Omega_d, g_F)$  modélise localement un domaine strictement convexe : en effet,  $(\Omega_d, g_F)$  peut être regardé comme un modèle simplifié du disque unité  $D(0, 1)$  après le passage en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , avec  $r = 1 - x/2$ ,  $\theta = y$ .

**Théorème 1.** [7] *Les estimations de Strichartz restent vraies pour la solution de (1) dans  $(\Omega_d, g_F)$  avec  $\frac{1}{q} = \left(\frac{d-1}{2} - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)$ .*

**Remarque 1.1.** Ce résultat a été démontré en dimension  $d = 2$  par M.Blair, H.Smith et C.Sogge dans [1] pour des métriques arbitraires (i.e. sans l'hypothèse de convexité stricte). Notre théorème améliore tous les résultats connus jusqu'à présent pour  $d \geq 3$ . Le cas d'un strict convexe quelconque est

traité dans un travail en cours en collaboration avec G.Lebeau, F.Planchon et R.Lascar [5].

Une méthode habituelle pour démontrer (2) consiste à utiliser des inégalités de dispersion. Dans le travail récent [6], nous avons montré qu'une perte de dérivées par rapport à l'estimation de dispersion libre (4) est inévitable, et qu'elle apparaît en raison de la présence de caustiques de type queue d'aronde dans le support singulier de  $u$ .

**Théorème 2.** [6] *Il existe  $T > 0$  et il existe une constante  $C(d) > 0$  tels que pour tous  $a \in (0, 1]$ ,  $h \in (0, 1]$  et  $t \in (0, T]$  la solution  $u_a(t, x, y) = \cos(t\sqrt{|\Delta_F|})(\delta_{x=a, y=0})$  de (1) vérifie*

$$(5) \quad |\chi(hD_t)u(t, x)| \leq C(d)h^{-d} \min\{1, (h/t)^{\frac{d-2}{2}} \gamma(t, h, a)\},$$

où

$$\gamma(t, h, a) = \begin{cases} (\frac{h}{t})^{1/2} + a^{1/4}(\frac{h}{t})^{1/4}, & \text{si } a \geq h^{4/7-\epsilon} \\ (\frac{h}{t})^{1/3} + h^{1/4}, & \text{si } a \leq h^{1/2}. \end{cases}$$

De plus, il existe une suite de temps  $t_n = 4n\sqrt{a}\sqrt{1+a}$  pour lesquels on a égalité dans (5).

**Remarque 1.2.** L'estimation (5) nous dit que dans un domaine strictement convexe on perd une puissance  $\frac{1}{4}$  dans l'exposant de  $h$  par rapport à l'estimation (2) de l'espace libre, ce qui est due à des phénomènes micro-locaux comme les caustiques générées en temps arbitrairement petit près du bord. Ces caustiques apparaissent lorsque les rayons optiques envoyés d'une même source dans des directions différentes cessent de diverger.

**Remarque 1.3.** Le Théorème 2, optimal pour la dispersion, implique, en utilisant la méthode  $TT^*$  usuelle des estimations de type Strichartz sans perte (en termes d'échelle) mais avec des indices modifiés :  $\frac{1}{q} \leq \left(\frac{d-1}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)$ , ce que l'on résume en parlant de perte d'un quart. Pour réussir à faire mieux (obtenir un résultat qui correspondrait à une perte 1/6), il faut s'intéresser au lieu et à la fréquence de l'apparition des caustiques responsables de la perte et montrer qu'elles sont suffisamment exceptionnelles pour que l'effet d'une moyenne en temps présent dans les estimations de Strichartz puisse atténuer la perte. Il convient cependant de noter que les contre-exemples connus pour Strichartz ([3, 4]) dans un convexe strict correspondent à une perte moindre, égale à 1/12.

## 2. UNE PARAMÉTRICE POUR TOUT $a > 0$

### 2.1. Le Laplacien de Friedlander et sa décomposition spectrale.

Soient  $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y \in \mathbb{R}\}$  et  $\Delta_F$  le Laplacien de Friedlander défini dans l'introduction, avec la condition de Dirichlet sur le bord. En prenant la transformation de Fourier dans la variable transverse  $y$ ,  $-\Delta_F$  devient  $-\partial_x^2 + (1+x)\eta^2$ , qui, pour  $\eta \neq 0$  est auto-adjoint et positif sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$  avec

résolvante compacte. Il admet une base orthonormale dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$  de fonctions propres  $\{e_k(x, \eta)\}_{k \geq 0}$  associées aux valeurs propres  $\lambda_k(\eta) = \eta^2 + \omega_k \eta^{4/3}$ , où  $\{-\omega_k\}_{k \geq 1}$  désignent les zéros de la fonction d'Airy en ordre décroissant. On a une formule explicite

$$(6) \quad e_k(x, \eta) = f_k \frac{\eta^{1/3}}{k^{1/6}} \text{Ai}\left(\eta^{2/3}x - \omega_k\right),$$

où, pour tout  $k \geq 1$ ,  $f_k$  est tel que  $\|e_k(\cdot, \eta)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 1$ , c.a.d.

$$(7) \quad \int_0^\infty \text{Ai}^2(x - \omega_k) dx = \frac{k^{1/3}}{|f_k|^2}.$$

**Remarque 2.1.** Comme  $\int_{-\omega_k}^{-2} \text{Ai}^2(\omega) d\omega \simeq \frac{1}{4\pi} \int_{-\omega_k}^{-2} \frac{1}{|\omega|^{1/2}} (1 + O(\frac{1}{\omega})) d\omega$  et  $\omega_k \simeq (\frac{3}{2}\pi k)^{2/3} (1 + O(\frac{1}{k}))$ , la suite  $(f_k)_{k \geq 1}$  vérifie  $f_k \simeq (\frac{16^2}{\pi} 3)^{1/6} (1 + O(\frac{1}{k}))$  pour  $k$  assez grand.

Pour  $a > 0$ , soit  $\delta_{x=a}$  la distribution de Dirac sur  $\mathbb{R}_+$  : alors elle s'écrit comme une somme de modes  $e_k$  de la façon suivante

$$\delta_{x=a} = \sum_{k \geq 1} e_k(x, \eta) e_k(a, \eta).$$

On considère maintenant la donnée au temps  $t = s$  de la forme  $u_0(x, y) = \psi(hD_y) \delta_{x=a, y=b}$ , où  $h \in (0, 1]$  est un petit paramètre et où  $\psi \in C_0^\infty((\frac{1}{2}, 2))$ .

On rappelle la formule de la fonction de Green associée au temps  $t$  obtenue dans [6] à partir de la décomposition de la donnée  $u_0$  en somme de modes de galerie :

$$(8) \quad G((x, y, t), (a, b, s)) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} e^{\pm i(t-s)\sqrt{\lambda_k(\eta/h)}} e^{i(y-b)\eta/h} \psi(\eta) e_k(x, \eta/h) e_k(a, \eta/h) d\eta.$$

**Remarque 2.2.** La fonction  $G$  est une paramétrice pour l'équation  $i\partial_t u \pm \sqrt{-\Delta} u = 0$  (et donc de l'équation des ondes (1)) avec donnée au temps  $t = s$  égale à  $u_0$ . Elle est valable pour toute distance initiale  $a > 0$  au bord.

**Lemme 1.** Soit  $\chi \in C_0^\infty((0, +\infty))$  valant 1 sur  $(1/2, 3/2)$ ,  $0 \leq \chi \leq 1$ ,  $\chi = 1$  près de 1. On pose  $\lambda := \frac{a^{3/2}}{h}$ . Alors il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $a \in (0, h^{1/2}]$  on ait

$$\left| \sum_{k \geq 1} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} e^{\pm it\sqrt{\lambda_k(\eta/h)}} e^{i\frac{y\eta}{h}} \psi(\eta) (1-\chi) \left(\frac{\omega_k}{\lambda^{2/3}}\right) e_k\left(x, \frac{\eta}{h}\right) e_k\left(a, \frac{\eta}{h}\right) d\eta \right| \leq \frac{C}{h^2} \left(\frac{h}{t}\right)^{1/3}.$$

**Remarque 2.3.** En utilisant le Lemme 1, pour  $0 < a \leq h^{1/2}$  fixé, seule la somme pour des valeurs  $k \simeq \frac{a^{3/2}}{h}$  reste à être évaluée. Cela implique aussi que seules les valeurs  $h^{2/3} \lesssim a < h^{1/2}$  sont à considérer, car  $a < h^{2/3}$  équivaut à  $\frac{a^{3/2}}{h} < 1$ .

*Démonstration.* (preuve du Lemme 1) Sur le support de  $1 - \chi$  il y a deux situations : soit  $\omega_k \geq \frac{3}{2}\lambda^{2/3}$ , situation dans laquelle on applique [6, Proposition 3.6.] pour tout  $a \in (0, h^{1/2}]$  et  $x \in [0, a]$  pour obtenir tout de suite l'estimation du Lemme 1 ; soit  $\omega_k \leq \frac{1}{2}\lambda^{2/3}$ , auquel cas on a l'estimation suivante de la somme pour  $2\omega_k \leq \lambda^{2/3}$  :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{2\omega_k \leq \lambda^{2/3}} \frac{1}{k^{1/3}} \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} - \omega_k\right) \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} \frac{x}{a} - \omega_k\right) \right| &\lesssim \sum_{\omega_k \leq \lambda^{2/3}} \frac{1}{k^{1/3}} e^{-\frac{2}{3}\eta\lambda\left(1 - \frac{\omega_k}{(\eta\lambda)^{2/3}}\right)^{3/2}} \\ &\lesssim (\eta\lambda)^{2/3} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1/3}} e^{-\frac{2}{3}\eta\lambda(1-t^{2/3})^{3/2}} dt \leq \frac{3}{2}(\eta\lambda)^{2/3} \int_0^{1/2} e^{-\frac{2}{3}\eta\lambda(1-s)^{3/2}} ds \\ &\leq \frac{3}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}} dt < \infty. \end{aligned}$$

Ainsi, la somme pour  $\omega_k \leq \lambda^{2/3}$  dans la formule de  $G$  est bornée par  $C\frac{h^{1/3}}{h^2}$  et ceci achève la preuve du lemme.  $\square$

On va désormais noter  $G_\chi$  la partie de la somme qui définit  $G$  correspondant aux indices  $k$  tels que  $\chi\left(\frac{\omega_k}{\lambda^{2/3}}\right) \neq 0$ .

- Pour de petites valeurs de la distance initiale au bord  $a$ ,  $h^{2/3} \lesssim a \ll h^{22/39}$ , on va utiliser directement la formule explicite de  $G_\chi$  pour estimer la solution de l'équation des ondes dans  $\Omega$  en norme  $L^\infty$ . Dans [3, Théorème 1.8.(2)], on a démontré que si la donnée est un mode de galerie, i.e. de la forme

$$(9) \quad u_0^k(x, y) = \frac{1}{h} \int e^{iy\eta/h} \psi(\eta) e_k(x, \eta/h) e_k(a, \eta/h) d\eta,$$

avec  $k \geq 1$  fixé, alors on n'obtient pas de perte dans les estimations de Strichartz par rapport à l'espace  $\mathbb{R}^d$  avec métrique plate (mais la constante dépend bien sûr de  $k$ ). On va utiliser la même méthode pour montrer que si  $a$  est assez petit, étant donné la somme définissant  $G_\chi$  il n'y a pas "trop" de termes, on peut obtenir la dispersion avec une perte d'au plus  $1/3$  dans la puissance de  $h$ .

- Pour  $a \gg h^{4/7}$  on obtient une paramétrice sous la forme d'une somme indexée selon le nombre de réflexions au bord. Chaque terme dans la somme est une intégrale dont la phase admet des points critiques dégénérés et il se trouve que si  $a > h^{1/3}$ , la perte correspondante dans l'estimation  $L^\infty$  est bien plus importante pour qu'on puisse espérer appliquer un argument  $TT^*$  classique pour obtenir des Strichartz optimales. Dans ce régime, il faudra localiser la fonction de Green près de points où une singularité de type queue d'aronde va se former et obtenir des estimations plus raffinées dans de très petits voisinages autour de ces points.

**Remarque 2.4.** Les deux régimes se recouvrent bien car  $h^{4/7} \ll h^{22/39}$ .

**Remarque 2.5.** Notons que la paramétrice qu'on utilise dans cette partie est identique à celle de [6], mais la technique de construction est, en apparence, complètement différente de la précédente et représente un élément nouveau très important (en particulier dans l'optique des résultats analogues dans un convexe strict quelconque). La nouvelle approche consiste en une analyse raffinée de la somme des modes de galerie, technique inspirée des méthodes utilisées pour estimer les sommes exponentielles. Outre une simplification substantielle de la construction de paramétrice de [6], elle apporte une compréhension plus profonde du comportement de ces solutions près du bord.

**Théorème 3.** *Dans le régime  $a > h^{4/7-\epsilon}$ ,  $\epsilon > 0$ , le facteur  $h^{1/4}$  du Théorème 2 apparaît seulement près d'une suite de points  $t_n$ , avec une estimation (optimale) de  $\gamma(t, h, a)$  pour  $t$  dans l'intervalle  $I_n = (t_n(1-a), t_n(1+a))$  :*

$$(10) \quad \gamma(t, h, a) \leq \left(\frac{h}{t}\right)^{1/2} + h^{1/3} + \frac{a^{1/8}h^{1/4}}{n^{1/4} + h^{-1/12}a^{-1/24}|t^2 - t_n^2|^{1/6}}.$$

Notons aussi que pour  $t \notin I_n$ , le dernier facteur est  $\leq (h/t)^{1/3}$ . Ce raffinement de  $\gamma(t, h, a)$  est donné par une analyse soignée de la dégénérescence des arguments de phase stationnaire autour de  $t_n$  dans [6].

**2.2. Le régime des modes de galerie**  $h^{2/3} \lesssim a \lesssim h^{2/3(1-\epsilon)}$ ,  $0 < \epsilon < 2/13$ . D'après la Remarque 2.3, dans ce régime on peut introduire la troncature  $\chi$  dans le support de  $G$ . Il reste à estimer :

$$(11) \quad G_\chi(x, y, t, a, 0, 0) := \frac{1}{h^2} h^{1/3} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{|f_k|^2}{k^{1/3}} \int e^{i\eta(y+t\sqrt{1+\omega_k h^{2/3}/\eta^{2/3}})} \eta^{2/3} \psi(\eta) \chi\left(\frac{\omega_k}{\lambda^{2/3}}\right) \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} - \omega_k\right) \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} \frac{x}{a} - \omega_k\right) d\eta.$$

Notons que dans la formule (11) inclure la troncature  $\chi$  dans le symbole revient à restreindre la somme aux indices  $k \simeq \lambda = \frac{a^{3/2}}{h} \lesssim h^{-\epsilon}$ .

**Lemme 2.** [6, Lemme 3.5.] *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour  $L \geq 1$  on ait l'estimation suivante*

$$\sup_{b \in \mathbb{R}} \left( \sum_{1 \leq k \leq L} k^{-1/3} \text{Ai}^2(b - \omega_k) \right) \leq CL^{1/3}.$$

En utilisant le Lemme 2 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient tout de suite l'estimation de dispersion voulue pour  $t \lesssim h^\epsilon = \frac{1}{\lambda}$ . Dans la suite on ne considère que les valeurs  $t > h^\epsilon$ . On va estimer séparément chaque intégrale dans la somme sur  $k$  et on va utiliser de façon essentielle le fait que pour  $k \simeq \lambda$  pas trop grand, même si les facteurs d'Airy vont osciller, leur contribution va pouvoir rester dans le symbole car ils oscillent en fait moins vite que la phase

elle-même. Pour  $z = y/t$ ,  $t > h^\epsilon \gg h$ , on pose alors

$$J_{k,h}\left(z, \frac{x}{a}, \lambda, h\right) = \int e^{i\frac{t}{h}(z\eta + \sqrt{\eta^2 + \omega_k h^{2/3} \eta^{4/3}})} \eta^{2/3} \psi(\eta) \\ \times \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} \frac{x}{a} - \omega_k\right) \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} - \omega_k\right) d\eta.$$

Le point critique vérifie  $z + 1 + \frac{1}{6}(\omega_k h^{2/3})\eta^{-2/3} + O((kh)^{4/3}) = 0$  et la dérivée seconde de la phase est égale à  $-\frac{1}{9}(\omega_k h^{2/3})\eta^{-5/3}(1 + O((kh)^{2/3})) \simeq a$ . On pose  $z = -1 - (\omega_k h^{2/3})w$ . La nouvelle phase devient

$$\varphi(\eta, w, \omega_k h^{2/3}) = -w\eta + \frac{\eta^{1/3}}{1 + \sqrt{1 + (\omega_k h^{2/3})\eta^{-2/3}}} = w\eta + \frac{1}{2}\eta^{1/3} + O(a)$$

et le grand paramètre est maintenant  $\frac{t}{h}\omega_k h^{2/3} > h^{\epsilon-1/3} \gg 1$  (car  $\epsilon < 1/3$ ). La dérivée seconde vérifie  $|\varphi''| \simeq \frac{1}{9}\eta^{-5/3}$  et reste bornée inférieurement par une constante fixe, positive car  $\eta$  appartient au support de  $\psi$  (donc près de 1). Pour appliquer la phase stationnaire [2, Thm.7.7.5] avec symbole

$$\eta^{2/3} \psi(\eta) \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} \frac{x}{a} - \omega_k\right) \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} - \omega_k\right)$$

il suffit de vérifier la condition suivante :

$$(12) \quad \left(\frac{t}{h}\omega_k h^{2/3}\right)^{-1} \partial_{\eta,\eta}^2 \left(\eta^{2/3} \psi(\eta) \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} \frac{x}{a} - \omega_k\right) \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} - \omega_k\right)\right) \ll 1.$$

La contribution principale de la dérivée seconde dans (12) est alors majorée par

$$\left| \lambda^{4/3} \frac{x}{a} \text{Ai}'\left((\eta\lambda)^{2/3} \frac{x}{a} - \omega_k\right) \text{Ai}'\left((\eta\lambda)^{2/3} - \omega_k\right) \right| \\ + \left| \lambda^{4/3} \left(\frac{x}{a}\right)^2 \left((\eta\lambda)^{2/3} \frac{x}{a} - \omega_k\right) \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} \frac{x}{a} - \omega_k\right) \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} - \omega_k\right) \right| \\ + \left| \lambda^{4/3} \left((\eta\lambda)^{2/3} - \omega_k\right) \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} \frac{x}{a} - \omega_k\right) \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} - \omega_k\right) \right|$$

et on utilise alors le comportement asymptotique de la fonction d'Airy :

$$|\text{Ai}(z)| \leq \frac{C}{(1 + |z|)^{1/4}}, \quad |\text{Ai}'(z)| \leq C(1 + |z|)^{1/4};$$

on déduit que le terme à gauche dans (12) vaut au plus

$$\left(\frac{t}{h}\omega_k h^{2/3}\right)^{-1} \lambda^{4/3} \lambda^{1/2} \simeq \frac{h^{1/3}}{t} \lambda^{7/6} \lesssim h^{1/3 - \frac{13}{6}\epsilon} \ll 1$$

pour  $t > \frac{1}{\lambda} > h^\epsilon$  si  $\epsilon < 2/13$ ; on a utilisé ici le fait qu'on regarde uniquement des valeurs  $\omega_k \simeq \lambda^{2/3}$ . On obtient alors :

$$(13) \quad |G_\chi| \leq C \frac{h^{1/3}}{h^2} \sum_{k \simeq \lambda} \frac{1}{k^{1/3}} \left(\frac{t}{h}\omega_k h^{2/3}\right)^{-1/2} = C \frac{1}{h^2} \left(\frac{h}{t}\right)^{1/2} \lambda^{1/3} \lesssim \frac{1}{h^2} \left(\frac{h}{t}\right)^{1/3},$$

pour  $t > \frac{1}{\lambda} \geq h^\epsilon$  et  $\epsilon < 2/13$ .

**Remarque 2.6.** Il faut noter que la condition  $\epsilon < 2/13$  apparaît uniquement lorsqu'on applique la phase stationnaire. Cette méthode marche et implique des estimations de dispersion avec  $1/3$  de perte pour le régime  $h^{2/3} \lesssim a \ll h^{2/3(1-2/13)} = h^{22/39}$ .

Soit  $\epsilon_0 = \frac{1}{273}$  qui vérifie  $\frac{4}{7} - \epsilon_0 = \frac{22}{39} + \epsilon_0$ . On résume la situation :

- Dans le régime  $h^{2/3} \lesssim a \lesssim h^{22/39+\epsilon_0} \ll h^{22/39}$ , les calculs de la Section 2.2 permettent d'obtenir l'estimation suivante

$$(14) \quad |G_\chi| \leq \frac{C}{h^2} \left(\frac{h}{t}\right)^{1/3}, \quad \text{où } C > 0 \text{ est une constante,}$$

en utilisant le Lemme 2 pour  $t \leq 1/\lambda$  et l'estimation de la somme des modes de galeries (13) pour  $t > 1/\lambda$ .

- Dans le régime  $h^{4/7} \ll h^{4/7-\epsilon_0} = h^{22/39+\epsilon_0} \lesssim a \lesssim h^{1/3}$ , le Théorème 2 du [6] nous donne lui aussi la bonne estimation (14) car dans ce régime on a, pour tout  $0 < t \leq 1$  :

$$a^{1/4}(h/t)^{1/4} \leq (h/t)^{1/3}.$$

- Il reste à étudier le régime "des queues d'arondes"  $h^{1/3} \lesssim a \leq 1$ , le seul pour lequel la géométrie joue un rôle essentiel dans l'estimation de la paramétrice.

**2.3. Le régime des queues d'arondes,**  $h^{1/3} \lesssim a < 1$ . Comme dans la section précédente, il reste à estimer  $G_\chi$  donnée par (11) cette fois pour des valeurs  $h^{1/3} \lesssim a < 1$ .

En utilisant de nouveau le Lemme 2 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient tout de suite pour des temps  $t \leq \frac{1}{L}$ , avec  $L \simeq \lambda$ , l'estimation de dispersion pour  $G_\chi$  avec borne  $\frac{1}{h^2} \left(\frac{h}{t}\right)^{1/3}$ . Il reste à étudier le cas  $\frac{1}{\lambda} \lesssim t$ .

**2.3.1. Formule d'Airy-Poisson.** On pose  $A_\pm(z) = e^{\mp i\pi/3} \text{Ai}(e^{\mp i\pi/3} z)$ . On introduit la fonction suivante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  :

$$L(\omega) = \pi + i \log \left( \frac{A_-(\omega)}{A_+(\omega)} \right).$$

**Lemme 3.** *La fonction  $L$  est à valeurs réelles, analytique, strictement croissante et vérifie :*

$$L(0) = \pi/3, \quad \lim_{\omega \rightarrow -\infty} L(\omega) = 0, \quad L(\Omega) \sim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{4}{3} \omega^{3/2},$$

et pour tout  $k \geq 1$  on a

$$L(\omega_k) = 2\pi k \Leftrightarrow \text{Ai}(-\omega_k) = 0, \quad L'(\omega_k) = \int_0^\infty \text{Ai}^2(x - \omega_k) dx.$$

Le lemme se démontre en utilisant les expansions asymptotiques associées à  $A_\pm$  et des calculs élémentaires.

**Proposition 1.** *On a l'égalité suivante dans l'espace des distributions  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_\omega)$  :*

$$(15) \quad \sum_{N \in \mathbb{Z}} e^{-iNL(\omega)} = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{L'(\omega_k)} \delta_{\omega=\omega_k}.$$

**Remarque 2.7.** Notons que l'égalité précédente résulte simplement de la classique formule de Poisson reliant la somme des  $\exp(-iNx)$  au peigne de Dirac, suivi d'un changement de variable  $x = L(\omega)$ , qui permet d'indexer la somme de droite sur les zéros d'Airy et non pas sur les nombres naturels (ce qui va rendre nos calculs ultérieurs beaucoup plus limpides).

En utilisant la formule d'Airy-Poisson (15) dans la somme qui définit  $G_\chi$  et le Lemme 3, on trouve

$$(16) \quad G_\chi = \frac{1}{h^2} h^{1/3} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{L'(\omega_k)} \int e^{\frac{i}{h}\eta(y+t\sqrt{1+\omega_k h^{2/3}/\eta^{2/3}})} \chi\left(\frac{\omega_k}{\lambda^{2/3}}\right) \eta^{2/3} \psi(\eta) \\ \times \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} - \omega_k\right) \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} \frac{x}{a} - \omega_k\right) d\eta \\ = \frac{1}{2\pi h^2} h^{1/3} \sum_{N \in \mathbb{Z}} e^{-iN\pi} \int \int e^{\frac{i}{h}\eta(y+t\sqrt{1+\omega h^{2/3}/\eta^{2/3}})} \chi\left(\frac{\omega}{\lambda^{2/3}}\right) \eta^{2/3} \psi(\eta) \\ \times \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} - \omega\right) \text{Ai}\left((\eta\lambda)^{2/3} \frac{x}{a} - \omega\right) \left(\frac{A_-(\omega)}{A_+(\omega)}\right)^N d\omega d\eta.$$

**Remarque 2.8.** Dans la suite on va travailler uniquement avec la paramétrice donnée par la somme indexée sur le nombre de réflexions au bord  $N$ . La condition au bord est bien sûr satisfaite grâce à l'égalité (15), car elle est vérifiée par les modes  $e_k(x, \eta)$  (pas de terme de reste!). Notons également que cette somme indexée par rapport au nombre de réflexions  $N$  coïncide avec la paramétrice construite dans [6] dans le régime  $a > h^{4/7-\epsilon}$ , sachant qu'on vérifie que seuls les  $N \geq 0$  contribuent significativement à la somme (ceci résulte du choix de signe dans le demi-opérateur d'ondes qu'on considère).

On utilise la formule intégrale de la fonction d'Airy,  $\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(sz+s^3/3)} ds$ , la formule  $A_-(\omega)/A_+(\omega) = e^{-2i(\chi(\omega)-\pi/3)}$ , ainsi que le changement de variable  $\omega = (\eta\lambda)^{2/3} \xi^{2/3}$  pour écrire, pour  $\lambda = \frac{a^{3/2}}{h}$  :

$$(17) \quad G_\chi = \frac{\lambda^{4/3}}{(2\pi)^3 h^2} h^{1/3} \sum_{N \in \mathbb{Z}} e^{-iN\pi/3} \iint e^{\frac{i}{h}\eta(y+t\sqrt{1+a})} e^{i\eta\lambda\Phi_N} \tilde{\chi}\left(\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{2/3}\right) \tilde{\psi}(\eta) ds d\sigma d\omega d\eta,$$

avec  $\tilde{\psi}(\eta) = \eta^2 \psi(\eta)$ ,  $\tilde{\chi}(\xi^{2/3}) = \frac{2}{3} \xi^{-1/3} \chi(\xi^{2/3})$  et  $\Phi_N$  donnée par

$$\Phi_N = t(\sqrt{1+a\xi^{2/3}} - \sqrt{1+a})/a^{3/2} + s(1 - \xi^{2/3}) + s^3/3 \\ + \sigma\left(\frac{x}{a} - \xi^{2/3}\right) + \sigma^3/3 - \frac{4}{3} N \xi(1 + B(\eta\lambda\xi)),$$

où  $B$  vérifie  $\chi(\omega) = \frac{2}{3}\omega^{3/2}(1 + B(\omega^{3/2}))$ ,  $B(z) \simeq \sum_{j \geq 1} e_j z^{-j}$ ; notons que la somme asymptotique  $B(\eta\lambda\xi)$  de petit paramètre  $1/(\eta\lambda)$  apparaît aussi dans [6, Section 2.2.] comme partie de la phase dans le régime  $a > h^{4/7-\epsilon}$ .

**Remarque 2.9.** Pour simplifier les calculs on va utiliser le fait que lorsque  $h^{1/2} \ll a$  on peut “effacer” la partie asymptotique  $B(\eta\lambda\xi)$  de la phase et l’introduire dans le symbole. Cela a été démontré dans [3] et repose sur le fait que dans ce cas on a  $\frac{\lambda}{N} \gg 1, \forall N \leq 1/\sqrt{a}$  (il s’agit d’adapter la preuve du [3, Lemme 4.2.]). Notons que sans ce terme  $B(\cdot)$ , la phase est indépendante de  $\eta$ .

On note  $\phi_N$  la nouvelle phase où l’on a éliminé le terme  $B$ . La phase stationnaire usuelle s’applique en  $\xi$ , avec point critique non-dégénéré donné par :

$$\xi_c^{1/3} = \frac{1}{2N} \left( T \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a\xi_c^{2/3}}} - s - \sigma \right), \quad T = \frac{t}{2\sqrt{a}\sqrt{1+a}},$$

et comme  $\xi/\eta$  doit être proche de 1 (car sur le support de  $\chi$ ), on obtient une nouvelle condition :  $|2N - T| \leq cT$  (en dehors de laquelle la contribution de l’intégrale est triviale).

$$G_\chi = C \frac{\lambda^{5/6} h^{1/3}}{h^2} \sum_{|2N-T| \leq cN} \frac{1}{N^{1/2}} \int e^{\frac{i}{h}\eta(y+t\sqrt{1+a})+i\eta\lambda\phi_N} \rho_N(s, \sigma, \eta\lambda) ds d\sigma d\eta,$$

où la phase  $\phi_N$  dans les nouvelles variables est donc

$$\begin{aligned} \phi_N(s, \sigma, T, x, a) = & \left( T \frac{2\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a\xi_c^{2/3}} + \sqrt{1+a}} - s - \sigma \right) (\xi_c^{2/3} - 1) \\ & - \frac{4}{3} N \xi_c^3 + s^3/3 + \sigma^3/3 + \sigma \left( \frac{x}{a} - 1 \right). \end{aligned}$$

**Lemme 4.** *Pour chaque  $N$  il existe un changement de variable qui permet de transformer l’intégrale en  $s, \sigma$  en une intégrale de type Pearcey, avec un unique point critique d’ordre 3 en  $T = 2N$ . L’intégrale en  $\eta$  ne donnant aucune perte, on obtient, à  $N$  fixé et si  $\frac{\lambda}{N^3} > 1$ , pour  $T/N \in [2 - \frac{\epsilon}{N}, 2 + \frac{\epsilon}{N}]$ ,  $\epsilon > 0$  petit,*

$$\left| \frac{1}{N^{1/2}} \int e^{\frac{i}{h}\eta(y+t\sqrt{1+a})+i\eta\lambda\phi_N} \rho_N ds d\sigma d\eta \right| \lesssim \frac{\lambda^{-3/4}}{N^{1/4} + h^{-1/12} a^{1/8} |T^2 - 4N^2|^{1/6}}.$$

*De plus, dans ce régime les supports en  $y$  des termes dans la somme en  $N$  sont essentiellement disjoints. Notons que la condition  $\frac{\lambda}{N^3} > 1$  est satisfaite pour tout  $N \lesssim \frac{1}{\sqrt{a}}$  dans le régime  $a > h^{1/3}$ . On obtient ainsi le Théorème 3.*

### 3. LES ESTIMATIONS DE STRICHARTZ OPTIMALES DANS LE RÉGIME DES QUEUES D’ARONDES

Pour simplifier on se restreint au cas de la dimension  $d = 3$ . On considère la fonction de Green  $G(t, x, y, a) = \chi(hD_t) e^{it\sqrt{|\Delta_F|}} (\delta_{x=a, y=0})$  et pour  $f$  à support

compact dans les variables  $(s, a \geq 0, b)$ , on pose

$$A(f)(t, x, y) = \int G(t - s, x, y - b, a) f(s, a, b) ds da db.$$

L'exposant dispersif est dans ce cas  $\alpha_d := \frac{d-1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ . Il s'agit d'estimer la norme de Strichartz  $L^{12/5}([0, 1], L^\infty(\Omega_3))$  (donc  $r = \infty$  et  $q = 12/5$ ) :

$$h^{2\beta} \|A(f)\|_{L_{t \in [0,1]}^{12/5} L_{x,y}^\infty} \leq C \|f\|_{L_s^{12/7} L_{a,b}^1}, \quad 2\beta = (d - \alpha_d) = 3 - 5/6 = 13/6.$$

On résume la situation : les singularités de type queue d'aronde apparaissent seulement en  $t_n = 4n\sqrt{a}\sqrt{1+a}$ ,  $x = a$  ; elles ont un effet sur les intervalles de temps  $I_n := (t_n(1-a), t_n(1+a))$ . En dehors de  $I_n$  on ne voit que des cusps qui font perdre  $(\frac{h}{t})^{-1/6}$  dans la dispersion et induisent donc les estimations de Strichartz avec  $q = 12/5$ . L'estimation de  $\gamma(t, h, a)$  dans (10) permet de se localiser précisément là où l'argument usuel de type  $TT^*$  ne s'applique plus.

On écrit  $G(t, x, y, a) = G_0(t, x, y, a) + G_s(t, x, y, a)$  où  $G_s$  dénote la partie singulière, associée à une localisation en espace - temps de  $G$  dans des boules centrées aux points où les queues d'arondes apparaissent, i.e. en

$$|x - a| \leq \frac{a}{n^2}, \quad |t - 4n\sqrt{a}\sqrt{1+a}| \leq a^{3/2}n.$$

En utilisant la section précédente, on obtient les estimations raffinées suivantes :

**Proposition 2.**

$$h^{2\beta} \sup_{x,y} |G_0(t, x, y, a)| \leq C |t|^{-5/6};$$

$$h^{2\beta} \sup_{x,y} |G_s(t, x, y, a)| \leq D(t, a, h), \quad \sup_{a,h} \int_{-1}^1 |D(t, a, h)|^p dt < \infty, \quad \forall p < 3.$$

Soit  $A = A_0 + A_s$ , le découpage correspondant à la décomposition précédente. L'estimation pour  $A_0$  en découle facilement, car la convolution par  $|t|^{-5/6}$  envoie  $L^{12/7}$  dans  $L^{12/5}$ . En utilisant la Proposition 2 on déduit que  $h^{2\beta} A_s$  est borné de  $L_s^1 L_{a,b}^1$  dans  $L_t^{3-\epsilon} L_{x,y}^\infty$  : remarquons qu'il est indispensable de faire la convolution ( $L^p * L^1 \rightarrow L^p$ ) avant d'intégrer en  $a$  :

$$\begin{aligned} \|A_s(f)(t, x, y)\|_{L_{x,y}^\infty} &\leq \int \sup_{x,y} |G_s(t-s, x, y-b, a)| \times |f(s, a, b)| ds da db \\ &\lesssim \int h^{-2\beta} D(t-s, a, h) \|f(s, a, b)\| ds da db \end{aligned}$$

$$\|A_s(f)(t, x, y)\|_{L_t^p L_{x,y}^\infty} \lesssim h^{-2\beta} \int \|D(t-s, a, h)\|_{L_t^p} \|f(s, a, b)\|_{L_s^1} da db$$

$$\|A_s(f)(t, x, y)\|_{L_t^p L_{x,y}^\infty} \lesssim h^{-2\beta} \sup_{a,h} \|D(t, a, h)\|_{L_t^p} \|f(s, a, b)\|_{L_{s,a,b}^1}.$$

Comme on travaille avec des normes locales en temps, on en déduit immédiatement l'estimation souhaitée puisque  $1 < 12/7$  et  $12/5 < 3$ .

RÉFÉRENCES

- [1] M.D. Blair, H.F. Smith, and C.D. Sogge. Strichartz estimates for the wave equation on manifolds with boundary. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(5) :1817–1829, 2009.
- [2] L. Hormander, *The analysis of linear partial differential operators III*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften vol. 274, Springer, Berlin 1985
- [3] O. Ivanovici. Counterexamples to Strichartz estimates for the wave equation in domains. *Math. Ann.*, 347(3) :627–673, 2010.
- [4] O. Ivanovici. Counterexamples to the Strichartz inequalities for the wave equation in general domains with boundary. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 14(5) :1357–1388, 2012.
- [5] O. Ivanovici, G. Lebeau, R. Lascar, F. Planchon. Dispersion for the wave equation inside strictly convex domains II : the general case, en préparation, 2014.
- [6] O. Ivanovici, G. Lebeau, F. Planchon. Dispersion for the wave equation inside strictly convex domains I : the Friedlander model case,2012, to appear in *Annals of Math.*.
- [7] O. Ivanovici, G. Lebeau, F. Planchon. Strichartz inequalities for the wave equation in a model strictly convex domain, prépublication, 2014.

UNIVERSITÉ NICE SOPHIA-ANTIPOLIS, LABORATOIRE J.A.DIEUDONNÉ, UMR CNRS 7351, 06108 NICE CEDEX 2