Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2011-2012

Sylvie Benzoni-Gavage, Jean-François Coulombel, et Nikolay Tzvetkov

Ondes de surface faiblement non-linéaires

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2011-2012), Exposé n° XXXVIII, 13 p.

<http://slsedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2011-2012____A38_0>

Séminaire Laurent-Schwartz — EDP et applications
Institut des hautes études scientifiques, 2011-2012
Exposé n° XXXVIII, 1-13

Ondes de surface faiblement non-linéaires

Sylvie Benzoni-Gavage[⋆], Jean-François Coulombel[†] & Nikolay Tzvetkov[‡]

⋆ Université de Lyon, Université Lyon 1 & CNRS UMR 5208,
Institut Camille Jordan, 43 boulevard du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne cedex, France
† CNRS UMR 6629 & Université de Nantes, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray,
2 rue de la Houssinière, BP 92208, 44322 Nantes Cedex 3, France
‡ Université de Cergy-Pontoise & UMR CNRS 8088, Département de Mathématiques,
2 avenue Adolphe Chauvin, 95302 Cergy-Pontoise Cedex, France
e-mails : benzoni@math.univ-lyon1.fr, jean-francois.coulombel@univ-nantes.fr
nikolay.tzvetkov@u-cergy.fr

1 Introduction

Cet exposé concerne l'approximation faiblement non-linéaire de problèmes aux limites invariants par changement d'échelles. Le domaine spatial devant lui-même être invariant par changement d'échelles, on supposera qu'il s'agit d'un demi-espace, par exemple et sans perte de généralité, l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $x_d > 0$.

Deux classes de problèmes abstraits sont visés. Le premier est particulièrement adapté à la théorie de l'élasticité, qui se trouve être à l'origine des travaux dans le domaine des ondes de surface dont les ondes de Rayleigh sont l'archétype. Il se définit au moyen d'une fonctionnelle d'énergie

$$\mathscr{E}[u] := \int_{x_d>0} E(u, \nabla u)\,\mathrm{d}x\,,$$

où l'inconnue u est a priori vectorielle, à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ pour fixer les idées. Les états critiques (suffisamment réguliers) de $\mathscr{E}$ sont caractérisés par la condition au premier ordre :

$$\forall h \in \mathscr{C}^1_c(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^N)\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\mathscr{E}[u+\theta\,h]_{|\theta=0} = 0,$$

qui revient au problème aux limites stationnaire

$$\delta\mathscr{E}[u] = 0\,,\; x_d > 0\,, \quad \delta_d\mathscr{E}[u] = 0\,,\; x_d = 0\,,$$

où $\delta\mathscr{E}[u]$ est le gradient variationnel de $\mathscr{E}$ et $\delta_d\mathscr{E}[u]$ correspond aux termes de bord dans la dérivée de $\mathscr{E}[u+\theta\,h]$. Les composantes de $\delta\mathscr{E}[u]$ sont, pour $\alpha \in \{1,\dots,N\}$,

$$\delta\mathscr{E}[u]_\alpha := \frac{\partial E}{\partial u_\alpha}(u,\nabla u) \;-\; D_j\left(\frac{\partial E}{\partial u_{\alpha,j}}(u,\nabla u)\right),$$

tandis que celles de $\delta_d\mathscr{E}[u]$ sont

$$\delta_d\mathscr{E}[u]_\alpha := -\frac{\partial E}{\partial u_{\alpha,d}}(u,\nabla u),$$

où D_j désigne la dérivée totale par rapport à x_j et $u_{\alpha,j}$ la dérivée partielle de la composante u_α de u par rapport à x_j. On utilise partout la convention de sommation des indices répétés. On fera l'hypothèse minimale que $\mathscr{E}$ est rang 1-convexe par rapport à ∇u, c'est-à-dire qu'elle vérifie la condition de Legendre–Hadamard

$$\forall u\in\mathbb{R}^N\,,\ \forall F\in\mathbb{R}^{N\times d}\,,\ \forall v\in\mathbb{R}^N\,,\ \forall \xi\in\mathbb{R}^d\,,\quad \sum_{\alpha,\beta,j,\ell}\frac{\partial^2 E}{\partial u_{\alpha,j}\partial u_{\beta,\ell}}(u,F)\,v_\alpha\,v_\beta\,\xi_j\,\xi_\ell\ \geq\ 0\,,$$

qui assure l'ellipticité de l'équation intérieure $\delta\mathscr{E}[u]=0$ dans le problème stationnaire. En fait, nous allons nous intéresser aux problèmes d'évolution de la forme

$$\partial_t u = J\,\delta\mathscr{E}[u]\,,\ x_d>0\,,\quad \delta_d\mathscr{E}[u]=0\,,\ x_d=0\,, \tag{1}$$

où J est une matrice $N\times N$ réelle anti-symétrique inversible. Les équations de l'élastodynamique avec traction nulle au bord (ce qui est le cas en général pour une surface libre) en dimension d s'écrivent naturellement sous cette forme avec $N=2d$ et

$$u^T=(\chi,p:=\partial_t\chi)\,,\ J=\begin{pmatrix}0_d & I_d\\ -I_d & 0_d\end{pmatrix}\,,\ E=\frac{1}{2}\|p\|^2+W(\nabla\chi)\,,$$

où χ est le déplacement (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) et l'énergie W peut être quadratique (dans la théorie de l'élasticité linéaire) ou une fonction rang 1-convexe plus générale. Par ailleurs, les équations d'Euler de la dynamique des gaz isentropique ou isotherme en dimension 3 avec vitesse normale nulle au bord (condition naturelle sur une paroi étanche) s'écrivent aussi sous cette forme, pourvu que le champ de vitesse $\mathbf{v}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}^3$) soit décomposé en coordonnées de Clebsch ($\mathbf{v}=\nabla\varphi+\frac{\Lambda}{\rho}\nabla\mu$) : il suffit alors de poser

$$u^T=(\rho,\Lambda,\varphi,\mu)\,,\ J=\begin{pmatrix}0_2 & I_2\\ -I_2 & 0_2\end{pmatrix}\,,\quad E=F(\rho)+\tfrac{1}{2}\,\rho\,\|\nabla\varphi+\tfrac{\Lambda}{\rho}\,\nabla\mu\|^2\,,$$

où F est l'énergie (interne dans le cas isentropique, libre dans le cas isotherme) par unité de volume du gaz (la fonction $\rho\mapsto F(\rho)$ étant supposée convexe, ce qui assure l'hyperbolicité des équations d'Euler). L'invariance par changement d'échelles requiert l'existence d'exposants θ_α tels que le changement de variables et d'inconnues

$$(t,x,u_1,\ldots,u_N)\mapsto(kt,kx,k^{\theta_1}u_1,\ldots,k^{\theta_N}u_N)$$

laisse le problème (1) invariant. Elle est évidente pour l'élasticité ou la dynamique des gaz, avec pour la première

$$(t,x,\chi,p)\mapsto(kt,kx,k\chi,p)$$

et pour la seconde

$$(t,x,\rho,\Lambda,\varphi,\mu)\mapsto(kt,kx,\rho,\Lambda,k\varphi,k\mu)\,.$$

L'autre cadre abstrait correspond plus naturellement à la dynamique des gaz [1]. Contrairement à (1), il ne concerne que des équations aux dérivées partielles d'ordre 1 en temps *et* en espace, mais il autorise des conditions au bord plus générales. On l'écrit

$$A_0(u)\partial_t u = A_j(u)\partial_j u\,,\ x_d > 0\,,\quad B(u)u = 0\,,\ x_d = 0\,, \tag{2}$$

où l'inconnue u est à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ avec $N = 2n$, $A_j(u)$ est une matrice $N \times N$ réelle pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$, $A_0(u)$ et $A_d(u)$ étant supposées inversibles pour tout u, et $B(u)$ est une matrice $n \times N$ de rang n pour tout u. Ce choix est dicté par le fait qu'on suppose le système $A_0(u)\partial_t u = A_j(u)\partial_j u$ hyperbolique [2], et qu'il admet n caractéristiques rentrantes [3] dans le domaine $\{x_d > 0\}$. Le problème aux limites hyperbolique (2) est clairement invariant par le changement d'échelles

$$(t, x, u) \mapsto (kt, kx, u)$$

(c'est-à-dire avec $\theta_\alpha = 0$ quel que soit α, dans les notations introduites précédemment). Il est à noter que l'élastodynamique à surface libre peut aussi se mettre sous la forme (2), avec

$$u^T = (p := \partial_t\chi, F_{.1} := \partial_1\chi, \dots, F_{.d} := \partial_d\chi)\,,$$

mais à condition d'imposer des contraintes supplémentaires ($\partial_k F_{\alpha j} = \partial_j F_{\alpha k}$) et au prix de perdre la structure variationnelle, ou plus exactement ici la structure Hamiltonnienne de (1).

Que ce soit pour (1) ou (2), considérons le problème linéarisé autour d'un état $\underline{u}$, que l'on écrit sous une forme unifiée

$$\partial_t u = Lu\,,\ x_d > 0\,,\quad Cu = 0\,,\ x_d = 0\,. \tag{3}$$

Les opérateurs L et C sont des opérateurs différentiels en espace (même si C est en fait d'ordre zéro dans le cas de (2)), que l'on notera respectivement $L(\partial_1, \dots, \partial_d)$ et $C(\partial_1, \dots, \partial_d)$ lorsque ce sera utile. L'hypothèse de départ est que ce problème aux limites linéaire admet des *ondes de surface*, c'est-à-dire des solutions de la forme

$$u(t,x)\ =\ \mathrm{e}^{i(\tau t + \eta\cdot y)}\,U(z)\,,\ \text{où } y = (x_1, \dots, x_{d-1})\,,\ z = x_d\,,\ \tau \in \mathbb{R}\,,\ \eta \in \mathbb{R}^{d-1}\,,\ U \in L^2(\mathbb{R}^+)\,,$$

par définition oscillantes en temps et dans la direction du bord $\{x_d = 0\}$, et « localisées » près du bord (en étudiant le système d'équations différentielles satisfait par le profil U, on voit qu'il est de carré intégrable seulement s'il tend exponentiellement vite vers zéro lorsque z tend vers $+\infty$). L'idée est ensuite d'étudier l'approximation faiblement non-linéaire (de (1) ou (2)) autour de ces ondes de surface. Pour cela on cherche des solutions du problème non-linéaire (1) ou (2) admettant un développement asymptotique de la forme

$$u_\varepsilon(t,x) = \underline{u} + \varepsilon\, u_1(\varepsilon\, t, \tau\, t + \eta\cdot y, x_d) + \varepsilon^2\, u_2(\varepsilon\, t, \tau\, t + \eta\cdot y, x_d) + O(\varepsilon^3)\,.$$

(On utilise ici et dans la suite les notations u_1 et u_2 pour les termes d'ordre respectivement un et deux du développement asymptotique, à ne pas confondre avec des composantes de u.) En

1. À première vue seulement, car on va considérer des problèmes non caractéristiques, ce qui exclut le problème avec paroi.
2. C'est-à-dire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et tout $u \in \mathbb{R}^N$, la matrice $\xi_j A_0(u)^{-1} A_j(u)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
3. Autrement dit, les valeurs propres de la matrice $A_0(u)^{-1}A_d(u)$, qui sont non nulles puisque $A_d(u)$ est inversible, sont scindées entre n valeurs positives et n valeurs négatives.

injectant ce développement dans le problème non-linéaire (1) ou (2), et en égalant à zéro les termes d'ordre 1 en ε on obtient

$$\tau\partial_\xi u_1 \;=\; L(\eta_1\partial_\xi,\ldots,\eta_{d-1}\partial_\xi,\partial_z)\,u_1\,,\ z>0\,,\ C(\eta_1\partial_\xi,\ldots,\eta_{d-1}\partial_\xi,\partial_z)\,u_1 \;=\; 0\,,\ z=0\,,$$

où ξ désigne la seconde variable $(\tau\, t+\eta\cdot y)$ de u_1 (et de u_2). Dans la suite on simplifie quelque peu les notations en

$$L(\eta;\partial_\xi,\partial_z) := L(\eta_1\partial_\xi,\ldots,\eta_{d-1}\partial_\xi,\partial_z)\,,\ C(\eta;\partial_\xi,\partial_z) := C(\eta_1\partial_\xi,\ldots,\eta_{d-1}\partial_\xi,\partial_z)\,,$$

de sorte que le problème à l'ordre un s'écrive

$$\left\{\begin{aligned} \tau\partial_\xi u_1 - L(\eta;\partial_\xi,\partial_z)u_1 = 0, &\quad z>0,\\ C(\eta;\partial_\xi,\partial_z)u_1 = 0, &\quad z=0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

À l'ordre suivant en ε, on trouve un problème de la forme

$$\left\{\begin{aligned} \tau\partial_\xi u_2 - L(\eta;\partial_\xi,\partial_z)u_2 &= -\partial_s u_1 + M(\eta;\partial_\xi,\partial_z)(u_1,u_1), && z>0,\\ C(\eta;\partial_\xi,\partial_z)u_2 &= D(\eta;\partial_\xi,\partial_z)(u_1,u_1), && z=0, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

où s désigne le « temps lent », première variable de u_1 (et de u_2), et $M(\eta;\partial_\xi,\partial_z)(u_1,u_1)$ et $D(\eta;\partial_\xi,\partial_z)(u_1,u_1)$ sont des raccourcis pour désigner des opérateurs quadratiques appliqués à u_1 et ses dérivées par rapport à ξ et z, dépendant du paramètre η. Sous des hypothèses que l'on précisera plus loin, l'existence de solutions u_2 de carré intégrable au problème (5) demande, *via* une condition de type Fredholm, que u_1 soit de la forme

$$u_1(s,\cdot,z) = w(s,\cdot) *_\xi r(\cdot,z)\,,$$

où l'*amplitude* w vérifie une équation d'amplitude *non-locale*, s'écrivant en variable de Fourier (c'est-à-dire après transformation de Fourier par rapport à ξ)

$$a(k)\,\partial_s\widehat{w}(s,k) \;+\; \int_{\mathbb{R}} b(k-\ell,\ell)\,\widehat{w}(s,k-\ell)\,\widehat{w}(s,\ell)\,\mathrm{d}\ell \;=\; 0\,, \tag{6}$$

le coefficient $a(k)$ et le noyau $b(k,\ell)$ s'exprimant à l'aide de r, M, D et de la solution d'un « problème dual » à (4). L'objectif de l'exposé est multiple :

- expliquer plus en détail comment l'on obtient l'équation d'amplitude (6),
- caractériser les équations de ce type pour lesquelles le problème de Cauchy associé est (localement) bien posé,
- montrer quelles propriétés de (6) on peut déduire de celles du problème non-linéaire de départ (1) ou (2), et en particulier préciser les cas où le problème de Cauchy est bien posé pour l'équation de d'amplitude.

Les résultats sur lesquels il s'appuie sont parus dans [2, 6, 5].

2 Obtention et nature des équations d'amplitude

Étant donnés $\tau\in\mathbb{R}$ et $\eta\in\mathbb{R}^{d-1}$, une fonction de la forme

$$u(t,x) \;=\; \mathrm{e}^{i(\tau t+\eta\cdot y)}\,U(z)$$

est solution du problème linéaire (3) si et seulement si

$$i\tau U = L(\eta;i,\partial_z)U\,,\ z>0\,,\quad C(\eta;i,\partial_z)U(0)=0\,. \tag{7}$$

L'hypothèse de travail principale, en plus de l'invariance par le changement d'échelles

$$(t,x,u_1,\ldots,u_N)\mapsto(kt,kx,k^{\theta_1}u_1,\ldots,k^{\theta_N}u_N)\,,$$

est la suivante.

(H1) Pour $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$, il existe $\tau \in \mathbb{R}$ tel que l'espace des solutions de (7) dans $L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}z)$ soit de dimension un.

Par transformation de Fourier en ξ, le problème (4) équivaut à

$$\left\{\begin{aligned} ik\,\tau\,\widehat{u}_1 - L(\eta; ik, \partial_z)\widehat{u}_1 = 0, &\quad z > 0,\\ C(\eta; ik, \partial_z)\widehat{u}_1 = 0, &\quad z = 0.\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Pour $k = 1$ on reconnaît en (8) le problème (7) ci-dessus, dont on sait qu'il admet exactement une droite de solutions de carré intégrable, engendrée par un certain U. Par ailleurs, l'hypothèse d'invariance par changement d'échelles montre que, pour $k > 0$, l'espace des solutions de carré intégrable de (8) est aussi une droite, engendrée par

$$z \mapsto \widehat{r}(k, z) := \Theta(k)^{-1} U(kz)\,,$$

où $\Theta(k)$ est la matrice diagonale de coefficients $k^{\theta_1}, \ldots, k^{\theta_N}$. Afin d'obtenir une fonction à valeurs réelles par transformation de Fourier inverse on définit pour la suite

$$\widehat{r}(k, z) := \overline{\widehat{r}(-k, z)}\,, k < 0\,.$$

Autrement dit, si $\widehat{u}_1(s, k, \cdot)$ est une solution de carré intégrable de (8), il existe un nombre complexe noté $\widehat{w}(s, k)$ tel que

$$\widehat{u}_1(s, k, z) = \widehat{w}(s, k)\,\widehat{r}(k, z)\,,\ z > 0\,.$$

Il s'agit maintenant d'obtenir une équation sur l'amplitude w afin que le problème (5) admette une solution de carré intégrable. Pour cela on commence par introduire un problème adjoint pour (8). Par intégrations par parties, on définit les opérateurs $L^*(\eta; ik, \partial_z)$ et $C^*(\eta; ik, \partial_z)$ de sorte que l'on ait l'identité

$$\int_0^{+\infty} \Psi(z) \cdot L(\eta; ik, \partial_z)\Phi(z)\,\mathrm{d}z \,+\, (\Psi(z) \cdot C(\eta; ik, \partial_z)\Phi(z))_{|z=0} \,=$$

$$\int_0^{+\infty} \Phi(z) \cdot L^*(\eta; ik, \partial_z)\Psi(z)\,\mathrm{d}z \,+\, (\Phi(z) \cdot C^*(\eta; ik, \partial_z)\Psi(z))_{|z=0}\,,$$

quelles que soient Ψ, $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^N)$, et l'on considère le problème

$$\left\{\begin{aligned} ik\,\tau\,\widehat{h} - L^*(\eta; ik, \partial_z)\widehat{h} = 0, &\quad z > 0,\\ C^*(\eta; ik, \partial_z)\widehat{h} = 0, &\quad z = 0.\end{aligned}\right. \tag{9}$$

Ci-dessus et dans la suite, le point $\cdot$ représente le produit bilinéaire (et non sesquilinéaire)

$$X \cdot Y = X_\alpha Y_\alpha\,, \quad X\,,\ Y \in \mathbb{C}^N\,.$$

Alors l'existence d'une solution de carré intégrable à (5) est caractérisée par la condition

$$\int_0^{+\infty} \widehat{h}(k, z) \cdot (\partial_s \widehat{u}_1 \,-\, \widehat{M(\eta; \partial_\xi, \partial_z)(u_1}, u_1))\,\mathrm{d}z \,+\, (\widehat{h}(k, z) \cdot \widehat{D(\eta; \partial_\xi, \partial_z)(u_1}, u_1))_{|z=0} \,=\, 0\,, \tag{10}$$

quelle que soit $\widehat{h}(k, \cdot)$, solution de (9) tendant suffisamment vite vers zéro à l'infini : en pratique, il y a une droite de telles solutions $\widehat{h}$, comme pour les solutions du problème direct (8). En substituant $\widehat{u}_1(s, k, z) = \widehat{w}(s, k)\,\widehat{r}(k, z)$ dans (10) et en développant les termes quadratiques

$$\widehat{M(\eta; \partial_\xi, \partial_z)(u_1}, u_1)\,,\ \widehat{D(\eta; \partial_\xi, \partial_z)(u_1}, u_1)$$

grâce notamment à la formule $2\pi\widehat{uv} = \widehat{u} * \widehat{v}$, on en déduit une équation de la forme (6) avec

$$a(k) = \int_0^{+\infty} \widehat{h}(k,z) \cdot \widehat{r}(k,z)\,\mathrm{d}z\,,$$

et une expression plus compliquée pour le noyau b que l'on ne détaillera pas ici. Citons quelques références où sont obtenues de telles équations d'amplitude. Il y a d'abord la littérature relative à l'élastodynamique [11, 15, 13, 14], puis un premier article de Hunter [9] concernant les problèmes hyperboliques abstraits, un autre de Alì et Hunter à propos de la magnétohydrodynamique [1], ainsi que [3] pour les chocs et transitions de phase. Pour (1) ou (2) le détail des calculs se trouve dans [5].

Une fois établie l'équation d'amplitude (6), plusieurs questions se posent naturellement. La première d'entre elles est de savoir s'il s'agit bien d'une équation d'évolution, c'est-à-dire si le facteur $a(k)$ de $\partial_s\widehat{w}$ est non nul. Il s'avère que c'est bien le cas sous une hypothèse quelque peu renforcée par rapport à **(H1)**, demandant que le *déterminant de Lopatinskiĭ* du problème aux limites linéaire (3) s'annule exactement à l'ordre un. Par définition, le 'déterminant de Lopatinskiĭ' est en fait une fonction $(\tau,\eta) \mapsto \Delta(\tau,\eta)$ dont les zéros caractérisent l'existence d'ondes de surface. Pour le définir rigoureusement, on doit considérer le problème (7) pour $\tau \in \mathbb{C}$ de partie imaginaire strictement négative, récrire le système intérieur $i\tau U = L(\eta; i, \partial_z)U$ comme un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre, qui se trouve être hyperbolique si le système de départ l'est au sens des équations aux dérivées partielles [8], puis prolonger le sous-espace stable de ce système aux valeurs réelles de τ. Il faut ensuite chercher les ondes de surface comme les fonctions appartenant au sous-espace ainsi obtenu et vérifiant la condition au bord $C(\eta; i, \partial_z)U = 0$ en $z = 0$. La mise en œuvre pratique de cette démarche est classique pour les problèmes hyperboliques du type (2) (voir par exemple [4]). Pour les problèmes hamiltonniens du type (1) elle demande quelques hypothèses supplémentaires de nature algébrique, voir [5]. Lorsqu'on dispose du déterminant de Lopatinskiĭ, l'hypothèse **(H1)** modifiée s'exprime de la façon suivante.

(H1+) Pour $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$, il existe $\tau \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta(\tau,\eta) = 0$ *et* $\partial_\tau\Delta(\tau,\eta) \neq 0$.

On montre qu'elle est strictement plus forte que **(H1)** en général. Par ailleurs, le calcul montre que pour tout $k \neq 0$, $a(k)$ est égal à $\partial_\tau\Delta(\tau,\eta)$ à un facteur non nul près dépendant de k (voir à nouveau [5], ou encore [12]). Par suite, l'hypothèse **(H1+)** assure que l'équation d'amplitude (6) est bien une équation d'évolution.

La question suivante concerne les propriétés d'homogénéité de l'équation d'amplitude. L'invariance par changement d'échelles assure en effet que la fonction

$$(k,\ell) \mapsto \frac{b(k,\ell)}{a(k+\ell)}$$

est positivement homogène de degré un [5]. C'est pourquoi on peut voir, par transformation de Fourier inverse, l'équation d'amplitude (6) comme une équation de *Burgers non locale*

$$\partial_s w + \partial_\xi \mathscr{Q}[w] = 0\,, \tag{11}$$

$$\widehat{\mathscr{Q}[w]}(k) := \int q(k-\ell,\ell)\widehat{w}(k-\ell)\widehat{w}(\ell)\mathrm{d}\ell, \quad q(k,\ell) := \frac{b(k,\ell)}{i(k+\ell)a(k+\ell)}\,, \tag{12}$$

car alors le nouveau noyau q est positivement homogène de degré zéro. S'il était constant on aurait affaire à une équation de Burgers ordinaire. Cependant, ce n'est pas le cas pour les équations d'amplitude associées aux ondes de surface, pour lesquelles le noyau q est seulement constant par secteurs du plan $\{(k,\ell)\}$, avec des discontinuités à travers les axes et la seconde bissectrice en général.

3 Équations de Burgers non locales

Dans ce paragraphe on s'intéresse aux équations de la forme (11) avec

$$\widehat{\mathscr{Q}[w]}(k) = \int q(k-\ell,\ell)\widehat{w}(k-\ell)\widehat{w}(\ell)\mathrm{d}\ell \tag{13}$$

pour un noyau q régulier par morceaux, positivement homogène de degré zéro, et vérifiant

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{R}^2\,,\ q(-k,-\ell) = \overline{q(k,\ell)}$$

pour que l'opérateur quadratique $\mathscr{Q}$ préserve l'espace des fonctions à valeurs réelles. Sans perte de généralité on le supposera également symétrique. Parmi les exemples « académiques » que l'on peut trouver dans la littérature, citons

- $q \equiv 1/4\pi$ pour l'équation de Burgers ordinaire,
- $q(k,\ell) = 1 + \mathrm{sgn}(k)\,\mathrm{sgn}(\ell)$, considéré dans [9],
- $q(k,\ell) = -\frac{i}{2}\,(\mathrm{sgn}(k) + \mathrm{sgn}(\ell))$, associé aux équations quasi-géostrophiques d'après [7],
- $q(k,\ell) = 1 + i\,\mathrm{sgn}(k)\,\mathrm{sgn}(\ell)\,\mathrm{sgn}(k+\ell)$, autre exemple considéré dans [9].

Dans la suite, on utilise surtout l'exemple $q(k,\ell) = \mathrm{sgn}(k)\,\mathrm{sgn}(\ell)$.

Le cas de l'équation de Burgers ordinaire est bien connu. Pour cette loi de conservation scalaire du premier ordre, le problème de Cauchy est localement bien posé dans $H^\sigma(\mathbb{R})$ avec $\sigma > 3/2$, et les solutions locales ainsi obtenues ne sont pas globales en général, en raison de la formation d'ondes de choc. Pour les équations de Burgers non locales, sans parler de la formation des singularités, l'existence locale de solutions régulières n'est pas évidente en soi. Si l'on suit la méthode habituelle on a besoin d'estimations a priori sans pertes de dérivées, du type

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|w\|^2_{H^\sigma} \lesssim \|w\|^3_{H^\sigma}\,.$$

Pour l'équation de Burgers ordinaire et pour les valeurs entières de σ ces estimations s'obtiennent simplement à l'aide d'intégrations par parties : on obtient même plus précisément

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|w\|^2_{H^2} \leq 5\|\partial_\xi w\|_{L^\infty}\,\|w\|^2_{H^2}\,.$$

Cependant cela devient plus délicat si l'on cherche ces estimations en variables de Fourier via le théorème de Plancherel, c'est-à-dire si l'on considère l'équation

$$\partial_s\widehat{w} + \tfrac{ik}{4\pi}(\widehat{w} * \widehat{w}) = 0\,,$$

et que l'on cherche à contrôler $\|(1+k^2)\widehat{w}\|_{L^2}$. On obtient une estimation un peu moins fine que par intégrations par parties, à savoir :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|w\|^2_{H^2} \lesssim \|\widehat{\partial_\xi w}\|_{L^1}\,\|w\|^2_{H^2}\,.$$

Pour une équation de Burgers non locale, cette estimation a priori est fausse en général. En fait on montre qu'elle est vraie si et seulement si la condition suivante, mise en évidence par Hunter [9], est satisfaite.

Condition de stabilité (H) $\quad q(1,0+) = q(-1,0+)\,.$

Dans la liste d'exemples ci-dessus, $q(k,\ell) = 1 + i\,\mathrm{sgn}(k)\,\mathrm{sgn}(\ell)\,\mathrm{sgn}(k+\ell)$ est le seul noyau non constant vérifiant cette condition. Une situation remarquable dans laquelle la condition de Hunter est satisfaite est lorsque le noyau q a la propriété de symétrie supplémentaire suivante, assurant que l'opérateur $\mathscr{Q}$ est la dérivée variationnelle de la fonctionnelle trilinéaire

$$\mathscr{T}[w] = \tfrac{1}{3}\iint q(k,\ell)\widehat{w}(k)\widehat{w}(\ell)\widehat{w}(-k-\ell)\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\ell\,.$$

Condition de structure (S) $\quad \forall (k,\ell)\in\mathbb{R}^2\,,\ q(k,\ell) = q(-k-\ell,\ell)\,.$

Une façon de vérifier cette condition de structure est de montrer que q est une fonction symétrique de $(k,\ell,-k-\ell)$. C'est bien sûr le cas pour l'exemple rappelé ci-dessus.

Théorème 1. *Soit q un noyau régulier par morceaux, symétrique, positivement homogène de degré zéro, préservant les fonctions à valeurs réelles.*

i). S'il vérifie en outre la condition de stabilité de Hunter $q(1,0+) = q(-1,0+)$ alors, quel que soit $w_0 \in H^2(\mathbb{R})$ il existe $T > 0$ et une unique solution $w \in \mathscr{C}(-T,T;H^2(\mathbb{R})) \cap \mathscr{C}^1(-T,T;H^1(\mathbb{R}))$ de (11)(13) telle que $w(0) = w_0$. De plus, l'application

$$\begin{array}{lll} H^2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}(0,T;H^2(\mathbb{R})) \\ w_0 & \mapsto & w \end{array}$$

est continue.

ii). Si au contraire $q(1,0+) \neq q(-1,0+)$ alors pour tout entier $\sigma \geq 2$ il existe une suite bornée (u_n) dans $H^\sigma(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} |\langle \partial_\xi^\sigma u_n, \partial_\xi^{\sigma+1}\mathscr{Q}[u_n]\rangle_{L^2}| = +\infty\,.$$

Esquisse de démonstration. i) Les détails se trouvent dans [2]. Donnons une idée de l'obtention des estimations a priori. L'estimation L^2 est facile et demande seulement que le noyau q soit borné. En effet, si w est une solution de (11)(13) tendant suffisamment vite vers zéro à l'infini,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int \tfrac{1}{2}w^2\mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int \tfrac{1}{4\pi}|\widehat{w}|^2\mathrm{d}k =$$

$$-\,\mathsf{Re}\Big(\iint i\,k\;q(k-\ell,\ell)\widehat{w}(k-\ell)\widehat{w}(\ell)\widehat{w}(-k)\,\mathrm{d}\ell\mathrm{d}k\Big)$$

$$\leq \|q\|_{L^\infty}\,\|\widehat{\partial_\xi w}\|_{L^1}\,\|\widehat{w}\|_{L^2}^2$$

par les théorèmes de Plancherel, Fubini et Cauchy-Schwarz.

On a recours à la condition de stabilité Hunter dès l'estimation H^1, car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int \tfrac{1}{2}(\partial_\xi w)^2\mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int \tfrac{1}{4\pi}k^2|\widehat{w}|^2\mathrm{d}k =$$

$$-\,\mathsf{Re}\Big(\iint i\,k^3\;q(k-\ell,\ell)\widehat{w}(k-\ell)\widehat{w}(\ell)\widehat{w}(-k)\,\mathrm{d}\ell\mathrm{d}k\Big) =$$

$$-2\;\mathsf{Re}\Big(\iint i\,k^2\,(k-\ell)\;q(k-\ell,\ell)\widehat{w}(k-\ell)\widehat{w}(\ell)\widehat{w}(-k)\,\mathrm{d}\ell\mathrm{d}k\Big)\,,$$

et en coupant en deux cette intégrale on a bien

$$\left| \iint_{|k|\le|\ell|} i\,k^2\,(k-\ell)\;q(k-\ell,\ell)\widehat{w}(k-\ell)\widehat{w}(\ell)\widehat{w}(-k)\,\mathrm{d}\ell\mathrm{d}k \right| \le \|q\|_{L^\infty}\;\|\widehat{\partial_\xi w}\|_{L^1}\;\|\widehat{\partial_\xi w}\|_{L^2}^2$$

mais l'autre morceau demande plus de travail. En l'écrivant

$$\begin{aligned} & i \iint_{|k|>|\ell|} k^2(k-\ell)\;q(k-\ell,\ell)\widehat{w}(k-\ell)\widehat{w}(\ell)\widehat{w}(-k)\,\mathrm{d}\ell\mathrm{d}k \\ & -i \iint_{|k|>|\ell|} k^2(k-\ell)\;q(\ell-k,-\ell)\widehat{w}(\ell-k)\widehat{w}(-\ell)\widehat{w}(k)\,\mathrm{d}\ell\mathrm{d}k \\ = \; & i \iint_{|k|>|\ell|} k(k-\ell)\,((k-\ell)q(k,-\ell)\;-kq(\ell-k,-\ell))\widehat{w}(\ell-k)\widehat{w}(-\ell)\widehat{w}(k)\,\mathrm{d}\ell\mathrm{d}k\,, \end{aligned}$$

on voit que

$$2\,\mathsf{Re}\left| \iint_{|k|>|\ell|} i\,k^2\,(k-\ell)\;q(k-\ell,\ell)\widehat{w}(k-\ell)\widehat{w}(\ell)\widehat{w}(-k)\,\mathrm{d}\ell\mathrm{d}k \right| \lesssim \|\widehat{\partial_\xi w}\|_{L^1}\;\|\widehat{\partial_\xi w}\|_{L^2}^2$$

pourvu que l'on dispose d'une estimation du type

$$\text{(14)} \qquad \exists C\in\mathbb{R}^+,\ \forall(k,\ell)\in\mathbb{R}^2\,,\ |k|>|\ell|\ \Rightarrow |q(k,-\ell)\;-q(\ell-k,-\ell)|\;\le\;C\,|\ell/k|\,.$$

Cette dernière est une conséquence, *via* le théorème des accroissements finis, de la condition de stabilité de Hunter **(H)** et de la régularité par morceaux de q.

On procède de façon analogue pour les estimations *a priori* d'ordre plus élevé, qui reviennent à montrer que

$$\text{(15)} \qquad |\langle \partial_\xi^\sigma w\,,\,\partial_\xi^{\sigma+1}\mathscr{Q}[w]\rangle_{L^2}|\;\lesssim\;\|\widehat{\partial_\xi w}\|_{L^1}\,\|w\|_{H^\sigma}^2$$

ii) Si la condition de stabilité **(H)** n'est pas satisfaite, il s'avère que les estimations a priori (15) sont fausses dès que $\sigma\ge 2$. Pour le démontrer, l'idée est de construire une suite (u_n), bornée dans $H^\sigma(\mathbb{R})$, avec un spectre basse fréquence et un spectre haute fréquence qui « résonnent » suffisamment pour que $|\langle \partial_\xi^\sigma u_n\,,\,\partial_\xi^{\sigma+1}\mathscr{Q}[u_n]\rangle_{L^2}$ ne soit pas borné. Lorsque $q(k,\ell)=q_0(k,\ell):=\mathrm{sgn}(k)\,\mathrm{sgn}(\ell)$ par exemple, on peut construire u_n explicitement en variable de Fourier. En effet, si l'on pose

$$\widehat{u_n}(k)\;=\;\begin{cases} i\,\mathrm{sgn}(k)\,, & \text{if } |k|\in[0,1/n]\,,\\ i\,\mathrm{sgn}(k)\,n^{-2\sigma+1/2}\,, & \text{if } |k|\in[n^2,n^2+1/n]\,,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

on voit qu'à un facteur 2π près

$$\langle \partial_\xi^\sigma u_n,\partial_\xi^{\sigma+1}\mathscr{Q}_0[u_n]\rangle_{L^2}\;=\;\iint i\,k^{2\,\sigma+1}\,\widehat{u_n}(-k)\,\mathrm{sgn}(k-\ell)\,\mathrm{sgn}(\ell)\,\widehat{u_n}(k-\ell)\,\widehat{u_n}(\ell)\,\mathrm{d}\ell\,\mathrm{d}k\;\le\;-n\,,$$

et $\|(1+k^2)^{\sigma/2}\widehat{u_n}\|_{L^2}$ est borné indépendamment de n. Pour un noyau général, on montre *grosso modo* que

$$|\langle \partial_\xi^\sigma w\,,\,\partial_\xi^{\sigma+1}\mathscr{Q}[w]\rangle_{L^2}|\;\ge\;|\lambda\,\langle \partial_\xi^\sigma w\,,\,\partial_\xi^{\sigma+1}\mathscr{Q}_0[w]\rangle_{L^2}|\;-\;C\,\|w\|_{H^\sigma}^3\,,$$

où $\lambda:=q(1,0+)-q(-1,0+)$ et $C>0$ ne dépend pas de w, voir [6] pour les détails. □

Remarque 1. *En supposant directement* (14)*, Marcou [12] a démontré un résultat analogue à i) pour les solutions périodiques, qui généralise celui démontré par Hunter [10] sous la condition de structure hamiltonnienne.*

On peut préciser le résultat *ii)* en montrant que le problème de Cauchy pour une équation de Burgers non locale ne satisfaisant pas la condition de stabilité **(H)** est mal posé dans les espaces de Sobolev $H^\sigma(\mathbb{R})$, aussi grand soit σ.

Théorème 2. *Soit q un noyau régulier par morceaux, symétrique, positivement homogène de degré zéro, préservant les fonctions à valeurs réelles, continu à travers $\{k+\ell=0\}$, et tel que $q(1,0+)\neq q(-1,0+)$. Alors pour tout $\sigma\geq 4$ il existe une partie dense $\mathscr{O}\subset H^\sigma(\mathbb{R})$ telle que pour tout $T>0$, pour tout $w_0\in\mathscr{O}$, l'équation* (11)(13)*n'admette aucune solution dans $\mathscr{C}([-T,T];H^m(\mathbb{R}))$ telle que $w(0)=w_0$.*

Étapes de démonstration. i). On applique un théorème de type Cauchy-Kovalevskaya [16] pour montrer qu'étant donnée une fonction *analytique* w_0 l'équation (11)(13) admet une unique solution locale w qui soit analytique en espace et telle que $w(0)=w_0$.

ii). On identifie la « partie principale » de l'opérateur $\mathscr{Q}$ comme étant l'opérateur $\mathscr{R}$ tel que

$$\partial_\xi(\mathscr{R}[w]) \;=\; -\,\mathsf{Im}(\lambda\, z)\,|\partial_\xi| w \;+\; \mathsf{Re}(\mu\, z)\,\partial_\xi w\,,$$

avec $\lambda=q(1,0+)-q(-1,0+)$, $\mu:=q(1,0+)+q(-1,0+)$, $z:=w\,+\,i\,\mathsf{H}[w]$, où $\mathsf{H}[w]$ est la transformée de Hilbert de w, définie par

$$\widehat{\mathsf{H}[w]}(k) \;:=\; -\,i\,\mathrm{sgn}(k)\,\widehat{w}(k)\,.$$

iii). Dès que λ est non nul, l'équation réduite $\partial_s w+\partial_\xi\mathscr{R}[w] \;=\; 0$ est *elliptique* en $(s,\xi)=(0,0)$ sous une condition pour $w(0,\cdot)$ satisfaite sur un sous-ensemble dense de $H^\sigma(\mathbb{R})$.

La démonstration détaillée se trouve dans [6]. □

Remarque 2. *Dans le cas particulier $\lambda=\mu$ (c'est-à-dire $q(-1,0+)=0$, comme par exemple pour le cas $q(k,\ell)\;=\;1+sgn(k)\,sgn(\ell)$ considéré par Hunter, ou $q(k,\ell)\;=\;-\frac{i}{2}\,(sgn(k)+sgn(\ell))$ dans [7]) on constate que l'équation réduite mentionnée ci-dessus n'est autre que l'équation de Burgers complexe appliquée à $z=w\,+\,i\,\mathsf{H}[w]$:*

$$\partial_s z \;+\; \lambda\,\partial_\xi(\tfrac{1}{2}z^2) \;=\; 0\,.$$

Remarque 3. *La question de savoir s'il existe une suite d'instants $(s_n)\searrow 0$ et une suite de données initiales analytiques, bornée dans $H^\sigma(\mathbb{R})$, telle que les solutions analytiques associées w_n vérifient*

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n(s_n)\|_{H^\sigma} \;=\; +\infty$$

reste ouverte.

4 Équations d'amplitude pour les ondes de surface

À première vue il n'est pas évident de déterminer si le noyau obtenu dans (12) pour l'approximation faiblement non-linéaire d'ondes de surface vérifie la condition de stabilité de Hunter. Cependant, la structure du problème non-linéaire (1) permet de montrer assez facilement cette propriété du noyau.

Proposition 1. *Le noyau* (12) *associé au problème aux limites hamiltonnien* (1) *vérifie la condition de stabilité* **(H)**.

Éléments de démonstration. Le point clé réside dans le fait que les solutions tendant vers zéro à l'infini du problème adjoint (9) sont engendrées par $\widehat{h}(k,\cdot) = J^{-1}\widehat{r}(-k,\cdot)$. Grâce à cette forme « explicite » simple de $\widehat{h}$, on observe que a est impaire et que $b(k,\ell)$ est une fonction symétrique de $(k,\ell,-k-\ell)$, voir [5] pour les détails. On déduit aisément de ces deux propriétés que

$$q(1,0+) = \frac{b(1,0+)}{ia(1)} = \frac{b(-1,0+)}{-ia(-1)} = q(-1,0+)\,.$$

□

On peut naturellement se demander si en fait, pour les problèmes aux limites hamiltonniens, la condition de structure **(S)** n'est pas automatiquement satisfaite. Or ce n'est pas le cas car le numérateur de

$$q(k,\ell) = \frac{b(k,\ell)}{i(k+\ell)a(k+\ell)} \tag{16}$$

est une fonction symétrique de $(k,\ell,-k-\ell)$ mais pas le dénominateur. On peut cependant dans les cas « classiques » ramener l'équation d'amplitude correspondante à une équation ayant une structure hamiltonnienne. Plus précisément, on peut faire la manipulation suivante.

Proposition 2. *Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{Q}$, $a_0 \in \mathbb{R}^*$ tels que*

$$a(k) \;=\; i\,\mathrm{sgn}(k)\,|k|^{-m}\,a_0\,, \quad \forall k \neq 0\,. \tag{17}$$

Alors l'équation (11)(12) *est formellement équivalente à*

$$\partial_s v \;+\; \mathsf{H}\mathscr{P}[v] \;=\; 0\,, \tag{18}$$

où $v := |\partial_\xi|^{-m/2}w$, H désigne la transformée de Hilbert et $\mathscr{P}$ est l'opérateur quadratique non local défini par

$$\widehat{\mathscr{P}[v]}(k) = \int_{\mathbb{R}} p(k-\ell,\ell)\,\widehat{v}(k-\ell)\,\widehat{v}(\ell)\,\mathrm{d}\ell\,,\ p(k,\ell) := \frac{b(k,\ell)}{a_0}\,|k+\ell|^{m/2}\,|k|^{m/2}\,|\ell|^{m/2}\,. \tag{19}$$

Contrairement à q, le noyau modifié p vérifie la condition de structure **(H)** puisque $p(k,\ell)$ est clairement une fonction symétrique de $(k,\ell,-k-\ell)$. Rappelons que cette condition assure que l'opérateur quadratique $\mathscr{P}$ associé au noyau p est la dérivée variationnelle d'une fonctionnelle trilinéaire. Comme par ailleurs la transformée de Hilbert H est un opérateur anti-autoadjoint, l'équation (18) peut ainsi être vue comme un système hamiltonnien de dimension infinie.

Notons que le noyau modifié p est positivement homogène de degré $1+m/2$. La proposition 2 s'applique notamment aux équations de l'élastodynamique avec $m = 2$. Dans ce cas p est positivement homogène de degré 2 : on peut ainsi voir l'équation (18) comme une équation de *Hamilton-Jacobi non locale*. Une équation analogue a été obtenue en magnétohydrodynamique par Alì et Hunter [1].

Terminons par un résultat sur les noyaux associés aux problèmes aux limites hyperboliques du type (2). Il fait appel au déterminant de Lopatinskiĭ associé aux problèmes linéarisés autour des états u voisins de $\underline{u} = 0$ (ici), que l'on notera $\Delta(u;\tau,\eta)$.

Théorème 3. *Sous les hypothèses déjà formulées pour le problème aux limites hyperbolique* (2)*, notamment* **(H1+)***, on suppose de plus que* $\Delta(u;\tau,\eta) \neq 0$ *pour tout* u *voisin de* 0 *tel que* $B(u)u = 0$*, quels que soient* τ *de partie imaginaire strictement négative et* $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$*. Alors le noyau* q (12) *vérifie la condition de stabilité* **(H)***.*

Points clé de la démonstration. On remarque tout d'abord, comme dans [3], que la condition **(H)** revient à ce qu'une certaine forme linéaire φ sur $\mathbb{C}^N$ prenne des valeurs réelles sur les parties réelle et imaginaire du vecteur $U(0)$ (où U engendre la droite d'ondes de surface). Puis on démontre par le calcul que

$$\forall X \in \mathbb{R}^N\,,\ \mathrm{d}_u\Delta(0;\tau,\eta)\cdot X = \varphi(X)\,\partial_\tau\Delta(0;\tau,\eta)\,.$$

Par un argument perturbatif (*via* le théorème des fonctions implicites), on en déduit que pour tout vecteur $X \in \ker B(0) \subset \mathbb{R}^N$ (c'est-à-dire tangent à la variété d'équation $B(u)u = 0$ en 0), $\varphi(X)$ est réel. Ceci s'applique notamment à $X = \mathsf{Re}\,U(0)$ et $X = \mathsf{Im}\,U(0)$. Les calculs détaillés se trouvent dans [5]. $\square$

Rappelons que la condition de Lopatinskiĭ ($\Delta(\tau,\eta) \neq 0$ pour $\mathsf{Im}\,\tau < 0$) est une condition nécessaire pour qu'un problème aux limites soit bien posé. Ainsi, conjugué au théorème 1*i)*, le théorème 3 montre que d'une certaine façon le problème de Cauchy pour l'équation d'amplitude hérite du caractère bien-posé du problème aux limites [4]. Grâce au travail de Marcou [12], le développement asymptotique formel dont on n'a ici considéré que les deux premiers termes se trouve justifié rigoureusement.

Remarque 4. *Dans un cadre variationnel qui s'applique notamment à l'élastodynamique, Serre a montré que l'existence même d'ondes de surface était en fait équivalente à la condition de Lopatinskiĭ [17].*

Références

[1] G. Alì and J. K. Hunter. Nonlinear surface waves on a tangential discontinuity in magnetohydrodynamics. *Quart. Appl. Math.*, 61(3) :451–474, 2003.

[2] S. Benzoni-Gavage. Local well-posedness of nonlocal Burgers equations. *Differential Integral Equations*, 22(3-4) :303–320, 2009.

[3] S. Benzoni-Gavage and M. Rosini. Weakly nonlinear surface waves and subsonic phase boundaries. *Comput. Math. Appl.*, 57(3-4) :1463–1484, 2009.

[4] S. Benzoni-Gavage, D. Serre. *Multidimensional hyperbolic partial differential equations.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 2007.

[5] Sylvie Benzoni-Gavage and Jean-François Coulombel. On the amplitude equations for weakly nonlinear surface waves. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2012.

[6] Sylvie Benzoni-Gavage, Jean-François Coulombel, and Nikolay Tzvetkov. Ill-posedness of nonlocal Burgers equations. *Adv. Math.*, 227(6) :2220–2240, 2011.

[7] A. Castro and D. Córdoba. Global existence, singularities and ill-posedness for a nonlocal flux. *Adv. Math.*, 219(6) :1916–1936, 2008.

4. On a en revanche montré par un exemple dans [5] que le problème aux limites pouvait ne pas satisfaire la condition de Lopatinskiĭ et pour autant conduire à une équation d'amplitude stable.

[8] R. Hersh. Mixed problems in several variables. *J. Math. Mech.*, 12 :317–334, 1963.

[9] J. K. Hunter. Nonlinear surface waves. In *Current progress in hyberbolic systems : Riemann problems and computations (Brunswick, ME, 1988)*, volume 100 of *Contemp. Math.*, pages 185–202. Amer. Math. Soc., 1989.

[10] J. K. Hunter. Short-time existence for scale-invariant Hamiltonian waves. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 3(2) :247–267, 2006.

[11] R. W. Lardner. Nonlinear surface waves on an elastic solid. *Internat. J. Engrg. Sci.*, 21(11) :1331–1342, 1983.

[12] A. Marcou. Rigorous weakly nonlinear geometric optics for surface waves. *Asymptotic Anal.*, 69(3-4) :125–174, 2010.

[13] D. F. Parker. Waveform evolution for nonlinear surface acoustic waves. *Int. J. Engng Sci.*, 26(1) :59–75, 1988.

[14] D. F. Parker and J. K. Hunter. Scale invariant elastic surface waves. In *Proceedings of the IX International Conference on Waves and Stability in Continuous Media (Bari, 1997)*, number 57, pages 381–392, 1998.

[15] D. F. Parker and F. M. Talbot. Analysis and computation for nonlinear elastic surface waves of permanent form. *J. Elasticity*, 15(4) :389–426, 1985.

[16] M. V. Safonov. The abstract Cauchy-Kovalevskaya theorem in a weighted Banach space. *Comm. Pure Appl. Math.*, 48(6) :629–637, 1995.

[17] D. Serre. Second order initial boundary-value problems of variational type. *J. Funct. Anal.*, 236(2) :409–446, 2006.