# Séminaire Laurent Schwartz

## EDP et applications

### Année 2018-2019

Denis Serre

**Divergence et déterminant des tenseurs symétriques positifs**

*Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications* (2018-2019), Exposé n° V, 14 p.

<http://slsedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2018-2019____A5_0>



Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
http://www.ihes.fr/

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS, Université Paris-Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
http://www.math.polytechnique.fr/

cedram

*Exposé mis en ligne dans le cadre du*
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
http://www.cedram.org/

Séminaire Laurent-Schwartz — EDP et applications
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2018-2019
Exposé n$^{o}$ V, 1-14

# Divergence et déterminant des tenseurs symétriques positifs

Denis Serre
École Normale Supérieure de Lyon*

**Abstract**

Ce compte-rendu de séminaire présente notamment de nouveaux gains d'intégrabilité pour les tenseurs du type déjà étudié dans [7] et [8]. Nous résumons également les résultats obtenus en collaborations avec L. Silvestre [5], sur l'équation de Burgers multi-dimensionnelle.

**Notations.** Soit $d \geq 2$ un entier. La boule unité de $\mathbb{R}^d$ est notée $B^d$, son bord étant la sphère unité $S^{d-1}$. L'espace des mesures finies sur un domaine $\Omega$ est $\mathcal{M}(\Omega)$ et la masse totale d'une mesure $\mu$ est $\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$. La même notation est employée pour les mesures à valeurs vectorielles, avec toutefois

$$\|\vec{\mu}\|_{\mathcal{M}(\Omega)} := \|\nu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}, \qquad \nu := \sqrt{\mu_1^2 + \cdots + \mu_d^2},$$

ou $\nu$ est elle-même une mesure finie, par rapport à laquelle les $\mu_j$ sont absolument continues.

Le cube unité de $\mathbb{R}^n$ est noté $K_n$.

La matrice hessienne d'une fonction $\theta$, notée $\mathrm{D}^2\theta$, est bien entendu symétrique. Si $M$ est une matrice carrée, la matrice des cofacteurs est notée $\widehat{M}$. Si $M$ est $d \times d$, on a $\det \widehat{M} = (\det M)^{d-1}$. Si $M$ est symétrique semi-définie positive, il en est de même de $\widehat{M}$. Si $m \in \mathbb{R}^n$, $m \otimes m \in \mathbf{Sym}_n^+$ désigne la matrice de coefficients $m_i m_j$.

Certaines inégalités fonctionnelles utilisent des constantes $c_d$ qui ne dépendent que de la dimension. Celles-ci peuvent varier d'une inégalité à une autre.

# 1 Tenseurs symétriques, positifs et à divergence mesure (TPDM)

Nous considérons des tenseurs $T : \Omega \to \mathbf{Sym}_d^+$, définis sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans les matrices symétriques semi-définies positives. Les coefficients $t_{ij}$ sont *a priori* des distributions,

*U.M.P.A., UMR CNRS–ENSL # 5669. 46 allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07. France. denis.serre@ens-lyon.fr

mais l'hypothèse de positivité, qui dit que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$T_\xi := \sum_{i,j} \xi_i \xi_j t_{ij}$$

est positive, assure que les $t_{ij}$ sont en fait des mesures localement finies. Elles sont absolument continues par rapport à la trace $\sum_i t_{ii} \geq 0$.

Pour un tel tenseur, nous définissons une divergence par ligne

$$\mathrm{Div} T = \left( \sum_{j=1}^d \partial_j t_{ij} \right)_{1 \leq i \leq d},$$

qui est une distribution à valeur vectorielle. La majuscule dans l'opérateur Div est réservé à ce contexte ; pour un champ de vecteur $\vec{q}$, on note plutôt $\mathrm{div}\, \vec{q}$ la divergence usuelle.

Nous dirons que $T$, symétrique positif, est à divergence mesure si les coordonnées de $\mathrm{Div}\, T$ sont également des mesures localement finies[1]. L'acronyme pour cette notion est TPDM. Dans le cas particulier où $\mathrm{Div}\, T = 0$, l'acronyme est DPT, pour *divergence-free positive symmetric tensor.*

Pour un tenseur symétrique positif $T$, la trace $\mathrm{Tr}\, T$ est évidemment une mesure positive. L'expression

$$(\det T)^{1/d},$$

qui est homogène de degré 1 en $T$, définit une mesure positive. L'inégalité arithmético-géométrique (ci-après notée IAG)

$$(\det T)^{1/d} \leq \frac{1}{d} \mathrm{Tr}\, T$$

montre qu'elle est absolument continue par rapport à la trace.

L'objet de cet article, qui poursuit le travail commencé en [7, 8], est l'étude du gain d'intégrabilité dont jouit la mesure $(\det T)^{1/d}$ lorsque $T$ est un TPDM. L'énoncé suivant permet de déduire tous ceux établis précédemment.

**Théorème 1.1** *Soit $T : \mathbb{R}^d \to \mathbf{Sym}_d^+$ un TPDM à support compact. Alors la mesure*

$$(\det T)^{1/d}$$

*est un élément de $L^{d/(d-1)}(\mathbb{R}^d)$ (donc en fait une fonction). De plus, on a l'inégalité fonctionnelle*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\det T)^{1/(d-1)} dx \leq \frac{1}{d|S^{d-1}|^{1/(d-1)}} \|\mathrm{Div}\, T\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}^{d/(d-1)}, \tag{1}$$

[1] Mais celles-ci ne sont pas signées en général.

**Commentaires.**

- Le déterminant de $T$ présente donc un gain d'intégrabilité. C'est un phénomène d'*intégrabilité par compensation*. Une situation analogue se présente dans le contexte du Lemme divergence-rotationnel [1], où le produit scalaire $u \cdot v$ de deux champs de vecteurs de carré intégrable est un élément de l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1$ ; en particulier, si $u \cdot v \geq 0$, c'est une fonction de classe $L \log L$.

- La constante dans le membre de droite de (1) est optimale. Si $T(x) = I_d$ dans une boule $B$ de $\mathbb{R}^d$, et vaut $0_d$ en dehors de celle-ci, alors (1) est une égalité. Plus généralement, si $T(x) = I_d$ dans un domaine $\Omega$ et vaut $0_d$ en dehors, (1) redonne l'inégalité isopérimétrique
$$\operatorname{vol} \Omega \leq \frac{1}{d|S^{d-1}|^{1/(d-1)}} \, (\operatorname{aire} \partial\Omega)^{d/(d-1)},$$
c'est-à-dire
$$\frac{\operatorname{vol} \Omega}{\operatorname{vol} B^d} \leq \left( \frac{\operatorname{aire} \partial\Omega}{\operatorname{aire} S^{d-1}} \right)^{d/(d-1)} .$$

- Les propriétés énoncées ci-dessus sont encore liées à un théorème fameux de Gagliardo [4]. Notons $\hat{x}_j \in \mathbb{R}^{d-1}$ le vecteur obtenu en supprimant la coordonnée $x_j$. Soient $f_j \in L^{d-1}(K_{d-1})$ des fonctions à valeurs positives. En prenant
$$T(x) = \operatorname{diag}(f_1(\hat{x}_1)^{d-1}, \ldots, f_d(\hat{x}_d)^{d-1})$$
si $x \in K_d$ et $T(x) = 0_d$ sinon, on obtient que la fonction
$$f(x) := \prod_{j=1}^{d} f_j(\hat{x}_j)$$
est intégrable, et
$$\|f\|_{L^1(K_d)} \leq c_d \prod_{j=1}^{d} \|f_j\|_{L^{d-1}(K_{d-1})}.$$
La constante optimale $c_d = 1$ peut s'obtenir en changeant de contexte, en considérant des TPDM périodique dans $\mathbb{R}^d$ ; voir [7].

- L'hypothèse de positivité est essentielle. En effet, si $h \in W^{2,d-1}(\mathbb{R}^d)$, on peut construire un tenseur symétrique intégrable et à divergence nulle en posant
$$T = \widehat{\mathrm{D}^2 h}. \tag{2}$$
On a $|\det T|^{1/(d-1)} = |\det \mathrm{D}^2 h|$, qui n'est pas nul en général. L'expression
$$\int_{\mathbb{R}^d} |\det T|^{1/(d-1)} \, dx$$
est strictement positive, alors que le second membre de (1) est nul.

  On peut montrer qu'un tenseur de la forme (2), positif et à support compact, est en fait identiquement nul ; voir la Proposition 2.3 de [7].

La preuve du théorème suit essentiellement celle présentée dans [8]. On considère une boule $B$ contenant le support de $T$. Si $g \in C^\infty(\overline{B})$ est une fonction à valeurs strictement positives, le Théorème de Brenier (voir le théorème 2.12 de [9], ou le théorème 3.1 de [3]) relatif au transport optimal à coût euclidien fournit une solution convexe $\theta \in C^\infty(\overline{B})$ de l'équation de Monge-Ampère

$$\det \mathrm{D}^2\theta = g \qquad \text{dans } B,$$

qui satisfait de plus la *seconde condition aux limites*

$$\nabla\theta(B) = B_r,$$

$B_r$ étant la boule de volume égal à $m_g := \int_B g(x)\,dx$. On écrit alors

$$(g \det T)^{1/d} = (\det(T\mathrm{D}^2\theta))^{1/d}.$$

Comme $T(x)$ et $\mathrm{D}^2\theta(x)$ sont symétriques et positives, leur produit (non symétrique en général) a ses valeurs propres réelles et positives ; voir [6], Proposition 6.1. L'IAG est donc applicable, qui donne

$$(g \det T)^{1/d} \leq \frac{1}{d}\,\mathrm{Tr}\,(T\mathrm{D}^2\theta) = \frac{1}{d}\,(\mathrm{div}(T\nabla\theta) - (\mathrm{Div}\,T)\cdot\nabla\theta).$$

En intégrant sur $B$, et puisque $T$ est à support compact, on en déduit

$$\int_B g^{1/d}(\det T)^{1/d} \leq -\frac{1}{d}\int_B \nabla\theta\cdot\mathrm{Div}\,T.$$

Comme $|\nabla\theta| \leq r$, il vient

$$\int_B g^{1/d}(\det T)^{1/d} \leq \frac{r}{d}\,\|\mathrm{Div}\,T\|_{\mathcal{M}} = \frac{1}{d}\left(\frac{m_g}{\mathrm{vol}\,B^d}\right)^{1/d}\|\mathrm{Div}\,T\|_{\mathcal{M}}.$$

Posant $\phi := g^{1/d}$, on obtient

$$\int_B \phi(\det T)^{1/d} \leq \frac{1}{d(\mathrm{vol}\,B^d)^{1/d}}\,\|\mathrm{Div}\,T\|_{\mathcal{M}}\|\phi\|_{L^d(B)},$$

pour toute fonction $\phi$ régulière et positive dans $B$. Ce qui permet de conclure, puisque $L^{d/(d-1)}(B)$ est isométriquement le dual de $L^d(B)$.

Lorsque $T : \Omega \to \mathbf{Sym}_d^+$ est un TPDM défini sur un domaine borné, à bord suffisamment régulier, on peut définir par dualité une trace normale $T\vec{n}$, qui est un élément du dual de $C^1(\partial\Omega)$. C'est donc une distribution plutôt sauvage. L'extension $\widetilde{T}$ de $T$ par $0_d$ hors de $\Omega$ est encore à valeur positives, et on a

$$\mathrm{Div}\,\widetilde{T} = \mathrm{Div}\,T + (T\vec{n})|_{\partial\Omega}.$$

Cette extension est donc encore un TPDM si et seulement si $T\vec{n}$ est une mesure bornée sur $\partial\Omega$. Dans ce cas, en appliquant (1) à $\widetilde{T}$, on obtient à nouveau que

$$(\det T)^{1/d} \in L^{d/(d-1)}(\Omega)$$

et

$$\int_\Omega (\det T)^{1/(d-1)} dx \leq \frac{1}{d|S^{d-1}|^{1/(d-1)}} \left( \|T\vec{n}\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)} + \|\operatorname{Div} T\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \right)^{d/(d-1)}. \tag{3}$$

Lorsque $\Omega$ n'est pas borné, on peut d'abord appliquer (3) à $\phi_R T$, où $\phi_R(x) = \phi(x/R)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ satisfait $0 \leq \phi \leq 1$ et $\phi \equiv 1$ sur la boule unité ; le domaine est alors $\Omega_R = \Omega \cap B_R$. Puis on fait tendre $R \to +\infty$. Comme

$$\operatorname{Div}(\phi_R T) = \phi_R \operatorname{Div} T + T\nabla\phi_R,$$

$\phi_R T$ est bien un TPDM dans $\Omega_R$.

Le cas le plus intéressant pour les applications est celui où $d = 1 + n$ et $x = (t, y)$ est une variable temps-espace, avec $t \in (0, \tau)$ et $y \in \mathbb{R}^n$. On obtient que si $T$ est un TPDM intégrable par rapport à $y$, uniformément en temps, alors

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^n} (\det T)^{1/n} dy\, dt \leq \frac{1}{(n+1)|S^n|^{1/n}} \left( 2 \sup_t \|T\vec{e}_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\operatorname{Div} T\|_{\mathcal{M}((0,\tau)\times\mathbb{R}^n)} \right)^{1+1/n}. \tag{4}$$

De nombreuses situations de tels tenseurs sont fournies par la mécanique des fluides, en l'absence de viscosité. Par exemple, pour un gaz de densité $\rho$, de vitesse $u$ et de pression $p \geq 0$, le tenseur

$$T = \begin{pmatrix} \rho & \rho u^T \\ \rho u & \rho u \otimes u + pI_n \end{pmatrix}$$

est symétrique, positif et à divergence nulle (on exprime la conservation de la masse et de la quantité de mouvement). Lorsque la masse $M_0$ et l'énergie $E_0$ sont finies, elles le restent par conservation (en tout cas pour les écoulements admissibles) ce qui, pour une loi d'état raisonnable, implique l'intégrabilité de $T$. On peut donc appliquer (4) et on obtient après quelques étapes l'estimation optimale

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^n} \rho^{1/n} p\, dy\, dt \leq c_n\, M_0^{1/n} \sqrt{M_0 E_0}, \tag{5}$$

où $c_n$ ne dépend que de la dimension et pas de $\tau$. On peut donc faire $\tau = +\infty$ si l'écoulement est global en temps. On peut même remplacer le produit $M_0 E_0$ par une expression analogue, mais invariante par changement de repère inertiel.

# 2 Autres gains d'intégrabilité

Les résultats de cette section ont été obtenus lors d'une visite à OxPDE (Oxford Center for Nonlinear Partial Differential Equations) à l'invitation de Gui-Qiang Chen et Luc Nguyen, que je remercie chaleureusement pour leur accueil.

## 2.1 Intégrer d'abord en temps

Considérons un TPDM sur le domaine $Q_\tau = (0,\tau)\times\mathbb{R}^n$ comme précédemment : intégrable en espace, uniformément en temps. Les coordonnées sont $x=(t,y)$. Écrivons ce tenseur par blocs

$$T = \begin{pmatrix} \rho & m^T \\ m & \Sigma \end{pmatrix}, \tag{6}$$

où $\rho$ est scalaire. On a donc $\rho\ge 0$, $\Sigma\in\mathbf{Sym}_n^+$ et $\rho\Sigma - m\otimes m\in\mathbf{Sym}_n^+$.

Soit $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction à valeurs positives. Alors

$$T_\phi := \begin{pmatrix} \rho+\phi(y) & m^T \\ m & \Sigma \end{pmatrix}$$

est encore un TPDM, avec $\operatorname{Div} T_\phi = \operatorname{Div} T$. Écrivant (4) pour $T_\phi$, nous avons

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^n} (\det T_\phi)^{1/n} dy\,dt \\ \le \frac{1}{(n+1)|S^n|^{1/n}}\left(2\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + 2\sup_t \|T\vec{e}_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\operatorname{Div} T\|_{\mathcal{M}((0,\tau)\times\mathbb{R}^n)}\right)^{1+1/n}.$$

La linéarité du déterminant par rapport à la première colonne donne

$$\det T_\phi = \phi\det\Sigma + \det T \ge \phi\det\Sigma.$$

On obtient donc

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^n} (\phi\det \Sigma)^{1/n} dy\,dt \\ \le \frac{1}{(n+1)|S^n|^{1/n}}\left(2\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + 2\sup_t \|T\vec{e}_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\operatorname{Div} T\|_{\mathcal{M}((0,\tau)\times\mathbb{R}^n)}\right)^{1+1/n}.$$

Remplaçons ci-dessus $\phi$ par $\lambda\phi$, où $\lambda>0$ est un paramètre. Choisissons la valeur qui équilibre le second membre:

$$2\lambda\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 2\sup_t \|T\vec{e}_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\operatorname{Div} T\|_{\mathcal{M}((0,\tau)\times\mathbb{R}^n)}.$$

Il vient alors

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^n} (\phi \det \Sigma)^{1/n} dy\, dt$$
$$\leq \frac{2}{(n+1)|S^n|^{1/n}} \left(2\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/n} \left(2 \sup_t \|T\vec{e}_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathrm{Div}\, T\|_{\mathcal{M}((0,\tau)\times\mathbb{R}^n)}\right).$$

Définissons ensuite

(7) $$\Pi(y) := \int_0^\tau (\det \Sigma)^{1/n} dt.$$

Avec $\psi = \phi^{1/n}$, l'inégalité ci-dessus peut être reformulée en

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\Pi(y)\, dy \leq \frac{2}{(n+1)|S^n|^{1/n}}\, 2^{1/n} \|\psi\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \left(2 \sup_t \|T\vec{e}_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathrm{Div}\, T\|_{\mathcal{M}((0,\tau)\times\mathbb{R}^n)}\right).$$

Ce qui conduit au résultat suivant

**Théorème 2.1** *Soit $\tau \in ]0, +\infty]$. Soit $T$ un TPDM dans la bande $Q_\tau$, intégrable en espace uniformément en temps, écrit par blocs sous la forme (6). Soit $\Pi$ la fonction (évidemment intégrable sur $\mathbb{R}^n$) définie par (7). Alors*

$$\Pi \in L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n),$$

*et on a*

(8) $$\|\Pi\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq c_n \left(2 \sup_t \|T\vec{e}_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathrm{Div}\, T\|_{\mathcal{M}((0,\tau)\times\mathbb{R}^n)}\right).$$

**Commentaires**

- Ici, $(\det \Sigma)^{1/(d-1)}$ est seulement une mesure bornée. On ne peut pas affirmer qu'elle soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Le gain d'intégrabilité ne concerne que sa projection sur les mesures sur $\mathbb{R}^n$.

- Si $\tau = +\infty$, on obtient que
$$\int_0^{+\infty} (\det \Sigma)^{1/n} < +\infty$$
pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$. C'est une propriété de dispersion.

- Pour la dynamique des gaz, on a $\Sigma = \rho u \otimes u + pI_n$ et $\det \Sigma = p^{n-1}(p + \rho|u|^2)$. L'inégalité (8) contient donc une estimation de la vitesse du fluide, contrairement à (5). Elle dit aussi que $p \in L_y^{n/(n-1)}(\mathcal{M}_t)$, alors que l'estimation d'énergie, et le fait que $p = O(\rho e)$ où $e$ est l'énergie interne spécifique, dit que $p \in L_t^\infty(L_y^1)$.

- Lorsque $n = 1$, on a donc $\Pi \in L^\infty(\mathbb{R})$. Pour la dynamique des gaz, on a donc
$$\rho u^2 + p \in L_t^\infty(L_y^1) \cap L_y^\infty(\mathcal{M}_t).$$

## 2.2 Estimation radiale

Soit $B_R$ la boule $B(0;R)$ et $S_R$ son bord. Si $x\in B_R$, nous notons $r=|x|$ et $e=x/r$.

Si $h:S^{d-1}\to\mathbb{R}_+$ est une fonction positive, nous définissons comme en [8]

$$T_h(x)=h(e)\frac{e\otimes e}{r^{d-1}}\,.$$

Le tenseur $T_h$ est un TPDM, et on a

$$\operatorname{Div}T_h=\delta_{x=0}\otimes V_h,\qquad V_h:=\int_{S^{d-1}}h(e)e\,ds(e).$$

Considérons un TPDM $T$ défini sur $B_R$. Alors $T+T_h$ est aussi un TPDM sur $B$. Comme $T_h$ est de rang un, on a

$$\det(T+T_h)=\det T+\frac{h(e)}{r^{d-1}}\,e^T\widehat{T}e\geq\frac{h(e)}{r^{d-1}}\,e^T\widehat{T}e\geq 0.$$

*A priori*, $(e^T\widehat{T}e)^{1/(d-1)}$ est une mesure bornée sur $B_R$. Cependant, l'intégrabilité de $(\det(T+T_h))^{1/(d-1)}$ entraine celle de

$$\frac{1}{r}\,\left(h(e)\,e^T\widehat{T}e\right)^{1/(d-1)}.$$

L'inégalité fonctionnelle donne alors, si la trace normale $T\vec{n}$ est une mesure bornée sur $S_R$,

$$\begin{aligned}\int_{B_R}\frac{1}{r}\,(h(e)\,e^T\widehat{T}e)^{1/(d-1)}&\\ &\leq c_d\left(\|T\vec{n}\|_{\mathcal{M}(S_R)}+\|T_h\vec{n}\|_{\mathcal{M}(S_R)}+\|\operatorname{Div}T\|_{\mathcal{M}(B_R)}+\|\operatorname{Div}T_h\|_{\mathcal{M}(B_R)}\right)^{d/(d-1)}\\ &\leq c_d\left(\|T\vec{n}\|_{\mathcal{M}(S_R)}+\|\operatorname{Div}T\|_{\mathcal{M}(B_R)}+2\|h\|_{L^1(S^{d-1})}\right)^{d/(d-1)}.\end{aligned}$$

À nouveau, remplaçons ci-dessus $h$ par $\lambda h$ où $\lambda>0$ est un paramètre, choisissant

$$2\lambda\|h\|_{L^1(S^{d-1})}=\|T\vec{n}\|_{\mathcal{M}(S_R)}+\|\operatorname{Div}T\|_{\mathcal{M}(B_R)},$$

on obtient

$$\int_{B_R}\frac{1}{r}\,\left(h(e)\,e^T\widehat{T}e\right)^{1/(d-1)}\leq c_d\left(\|T\vec{n}\|_{\mathcal{M}(S_R)}+\|\operatorname{Div}T\|_{\mathcal{M}(B_R)}\right)\,\|h\|_{L^1(S^{d-1})}^{1/(d-1)}.$$

Avec $\phi=h^{1/(d-1)}$ et

$$\Gamma(e):=\int_0^R r^{d-2}\,\left(e^T\widehat{T}e\right)^{1/(d-1)},\tag{9}$$

cela se réécrit

$$\int_{S^{d-1}}\Gamma(e)\phi(e)\,ds(e)\leq c_d\left(\|T\vec{n}\|_{\mathcal{M}(S_R)}+\|\operatorname{Div}T\|_{\mathcal{M}(B_R)}\right)\,\|\phi\|_{L^{d-1}(S^{d-1})}.$$

On en déduit comme précédemment l'énoncé suivant.

**Théorème 2.2** *Soit $T$ un TPDM défini sur $B_R$, dont la trace normale $T\vec{n}$ est une mesure bornée sur $S_R$. Alors $\Gamma$, défini par (9), est une fonction de $L^{(d-1)/(d-2)}(S^{d-1})$. On a l'inégalité fonctionnelle*

$$\|\Gamma\|_{L^{(d-1)/(d-2)}(S^{d-1})} \leq c_d \left(\|T\vec{n}\|_{\mathcal{M}(S_R)} + \|\mathrm{Div}\, T\|_{\mathcal{M}(B_R)}\right). \tag{10}$$

**Commentaires.**

- À nouveau, si $d = 2$, c'est une estimation $L^\infty$ de $\Gamma$.
- De même, la mesure bornée $\left(e^T\widehat{T}e\right)^{1/(d-1)}$ n'est pas nécessairement une fonction. Le gain d'intégrabilté ne porte que sur ses moyennes radiales $\Gamma(e)$.
- Le théorème implique que la singularité $x \mapsto \frac{1}{r}$ est intégrable par rapport à $\left(e^T\widehat{T}e\right)^{1/(d-1)}$. C'est ce qu'on obtient en prenant $h \equiv 1$.
- La condition sur la trace normale n'est pas nécessaire sur le plan qualitatif, car on peut appliquer le théorème au produit $T' := \psi T$ où $\psi \in \mathcal{D}(B_R)$ vaut 1 au voisinage de l'origine.

## 2.3 Le cas périodique

Pour simplifier, nous considérons ici le cas du réseau $\Lambda_\tau := \tau\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n$. Le symbole $\sharp$ rappellera la $\Lambda$-périodicité des espaces de fonction. Par ailleurs l'expression $\fint f(z)\,dz$ désigne la moyenne d'une fonction périodique ; ici, $z$ peut être, selon les cas, $t$, $y$ ou $(t, y)$. Rappelons que si $T \in L^1_\sharp$ est un DPT, alors d'une part $(\det T)^{1/d} \in L^{d/(d-1)}_\sharp$, et d'autre part[2]

$$\fint (\det T)^{1/n} dy\, dt \leq \left(\det \fint T\, dy\, dt\right)^{1/n}. \tag{11}$$

On peut procéder à partir de (11) exactement comme on l'a fait précédemment, en remplaçant $T$ par $T_\phi$, où $\phi = \phi(y)$ est une fonction $\mathbb{Z}^n$-périodique positive arbitraire. On obtient le résultat suivant.

**Théorème 2.3** *Soit $\tau \in ]0, +\infty[$. Soit $T$ un DPT intégrable dans le tore $\mathbb{R}^d/\Lambda_\tau$, écrit par blocs sous la forme (6). Soit $\Xi$ la fonction (évidemment intégrable sur $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$) définie par*

$$\Xi(y) := \fint (\det \Sigma)^{1/n} dt.$$

*Alors*

$$\Xi \in L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n),$$

[2]Noter que la constante dans cette inégalité fonctionnelle vaut 1.

*et on a*

$$\fint \Xi(y)^{n/(n-1)} dy \leq \left(\det \fint \Sigma \, dy \, dt\right)^{1/(n-1)}. \tag{12}$$

**Remarque.** À nouveau, si $n = 1$, il faut lire $\Xi \in L^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ avec

$$\sup_y \fint \Sigma \, dt \leq \fint \Sigma \, dy \, dt.$$

Cela équivaut à dire que

$$y \longmapsto \fint \Sigma \, dt$$

est constante, ce qu'on pouvait établir directement puisqu'ici

$$\frac{d}{dy} \fint \Sigma \, dt = \fint (\partial_y \Sigma) \, dt = -\fint (\partial_t m) \, dt = 0.$$

En revanche, en dimension $n \geq 2$, le théorème 2.3 n'est pas trivial.

# 3 L'équation de Burgers multi-dimensionnelle

C'est la loi de conservation scalaire, où $d = 1 + n$ et $x = (t, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial y_n}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = 0, \tag{13}$$

qui se réduit à l'équation de Burgers classique lorsque $n = 1$.

Nous n'utilisons ici que les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$, dont les normes sont simplement notées $\| \cdot \|_p$.

Pour une donnée initiale $u_0$ mesurable et bornée, la théorie de Kruzhkov assure l'existence et l'unicité d'une solution entropique. L'application $S_t : u_0 \to u(t)$ définit un semi-groupe qui jouit de nombreuses propriétés. Par exemple, il envoie $L^\infty \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, pour tout $p \in [1, \infty]$. En outre, il est contractant pour la distance de $L^1(\mathbb{R}^n)$ :

$$\|S_t a - S_t b\|_1 \leq \|a - b\|_1. \tag{14}$$

Cette propriété permet d'étendre, de manière unique par continuité, la définition du semi-groupe à l'espace $L^1(\mathbb{R}^n)$. Mais alors, une question naturelle, soulevée par M. Crandall [2], concerne le sens à donner à (13) lorsque la donnée initiale $u_0$ est seulement intégrable et non bornée. Plus précisément, la solution abstraite définie par $u(t) = S_t u_0$, qui est *a priori* dans $C(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^n))$ est-elle une solution au sens des distributions ? Est-ce une solution entropique ?

Parce que $\|S_t a\|_p \leq \|a\|_p$ pour tout $p$, la réponse est évidemment positive dès lors que $u_0 \in L^1 \cap L^{n+1}(\mathbb{R}^n)$, car alors les monômes de l'équation sont localement intégrables. Mais un énoncé bien meilleur est possible. Il découle de propriétés de dispersion.

**Théorème 3.1 (D. S., L. Silvestre [5])** *Pour deux exposants $1 \leq p \leq q \leq \infty$, on définit*

$$h(p) = 2 + \frac{dn}{p}\,, \qquad \alpha(p,q) = \frac{h(q)}{h(p)}$$

*et*

$$\delta(p) := \frac{n}{2p + dn}\,, \qquad \beta(p,q) = h(q)(\delta(p) - \delta(q)).$$

*Le semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ satisfait alors l'estimation*

$$\|u(t)\|_q \leq c_{d,p,q}\, t^{-\beta(p,q)} \|u_0\|_p^{\alpha(p,q)}, \qquad \forall\, t > 0. \tag{15}$$

Dès que $q > p$, on a $\alpha(p,q) < 1$ et $\beta(p,q) > 0$.

**Corollaire 3.1 ([5])** *Pour $1 \leq p < \infty$, le semi-groupe $(S_t)_{t>0}$ s'étend de manière unique par continuité en un semi-groupe continu sur $L^p(\mathbb{R}^n)$. Pour $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, la solution abstraite $u(t) := S_t u_0$ est en fait une solution entropique (en particulier une solution distributionnelle) du problème de Cauchy pour (13).*

Une étape essentielle de la preuve du Théorème 3.1 est une inégalité *à la Strichartz*, qu'on établit en appliquant convenablement (4) :

$$\left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u^{p^*} dy dt\right)^{(d-1)/d} \leq c_d \left(\int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)^{p+n} dy\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)^p dy\right)^{1/2},$$

où

$$p^* := d\left(1 + \frac{p}{n}\right).$$

**Remarque** : pour $p = 1$ et $q = +\infty$, (15) donne un taux de décroissance $t^{-\beta(1,\infty)}$ où

$$\beta(1,\infty) = \frac{2n}{n^2 + n + 2}\,.$$

Contrairement à d'autres équations dispersives, telles que l'équation de la chaleur, celle des ondes ou celle de Schrödinger, cet exposant est une fonction décroissante de la dimension. La raison de cette différence est que les équations classiques dispersent de manière égale dans toutes les directions, tandis que l'équation de Burgers ne dissipe que par sa non-linéarité, qui est de moins en moins forte selon les coordonnées successives.

## 3.1 Sur l'existence d'une solution "fondamentale"

Puisque $S_t$ est contractant dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, il est naturel de se demander si le problème de Cauchy admet encore une solution lorsque la donnée initiale est seulement une mesure bornée.

Une autre motivation est de comprendre le comportement asymptotique d'une solution de masse finie. Si $u$ est la solution associée à une donnée $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$u^\lambda(t,y) = \lambda u(\lambda^{\alpha-1}t, \lambda^{\alpha-2}y_1, \dots, \lambda^{\alpha-d}y_n), \qquad \alpha := \frac{d(d+1)}{2n},$$

est la solution associée à la donnée

$$u_0^\lambda(y) = \lambda u_0(\lambda^{\alpha-2}y_1, \dots, \lambda^{\alpha-n-1}y_n).$$

Comme $\|u_0^\lambda\|_1 = \|u_0\|_1$, l'estimation (15) fournit

$$\|u^\lambda(t)\|_q \le c_{d,1,q}\, t^{-\beta(1,q)}\|u_0\|_1^{\alpha(1,q)}, \qquad \forall\, t>0,\ \lambda>0.$$

La suite $(u^\lambda)_\lambda$ est donc bornée dans $L^\infty(t^{\beta(1,q)}dt\,; L^q(\mathbb{R}^n))$, alors que la suite $(u_0^\lambda)_\lambda$ converge vaguement, quand $\lambda \to +\infty$, vers $m\,\delta_{y=0}$, où

$$m := \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)\,dy.$$

La suite $(u^\lambda)_{\lambda\to+\infty}$ admet donc une valeur d'adhérence $U$ pour une topologie faible-étoile, qui satisfait la même estimation

$$\|U(t)\|_q \le c_{d,1,q}\, t^{-\beta(1,q)}\|u_0\|_1^{\alpha(1,q)}, \qquad \forall\, t>0. \tag{16}$$

Si $U$ est la limite de toute la suite $u^\lambda$, et si cette convergence est assez forte, ce qui revient à dire que $t \mapsto u(t)$ a une asymptotique simple, alors $U$ est une solution entropique de l'équation de Burgers, qui est auto-similaire :

$$U(t,y) = t^{-1/(\alpha-1)}V(t^{-(\alpha-2)/(\alpha-1)}y_1, \dots, t^{-(\alpha-d)/(\alpha-1)}y_n).$$

On dit alors que $U$ est une *solution fondamentale* de masse $m$.

En une variable spatiale ($n=1$), on dispose d'une famille à deux paramètres de solutions fondamentales, données par

$$V(y) = \begin{cases} y & \text{pour} \quad a<y<b, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $a \le 0 \le b$ et $b^2 - a^2 = 2m$. La masse $m$ étant prescrite, les solutions fondamentales forment une famille à un paramètre (les "$N$-ondes"), dont une seule est de signe constant.

La situation est douteuse en revanche si $n \geq 2$. Supposons par exemple que $n = 2$, auquel cas $\alpha = 3$ et

$$U(t, y) = \frac{1}{\sqrt{t}} V\left(y_1/\sqrt{t}\,, y_2\right).$$

D'après (16), $V$ appartient à $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et on a

$$\|V\|_\infty \leq c\|V\|_1^{1/4}.$$

Mais alors, pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(y)U(t, y)\, dy &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\sqrt{t}\, z_1, y_2))V(z_1, y_2)\, dz_1 dy_2 \\ &\overset{t\to 0+}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(0, y_2))V(z_1, y_2)\, dz_1 dy_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(0, y_2)W(y_2)\, dy_2, \qquad W(s) := \int_{\mathbb{R}} V(\sigma, s)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Il est donc impossible que $U(0)$ tende, même vaguement, vers une masse de Dirac quand $t \to 0+$.

En conclusion, l'équation de Burgers semble ne pas admettre pas de solution fondamentale quand $n \geq 2$. Le comportement asymptotique d'une solution à donnée $L^1$ doit donc être significativement plus compliqué qu'en dimension 1.

# References


[1] R. Coifman, P.-L. Lions, Y. Meyer & S. Semmes. Compacité par compensation et espaces de Hardy. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **309** (1989), pp 945–949.

[2] M. Crandall. The semigroup approach to first order quasilinear equations in several space variables. *Israel J. Math.*, **12** (1972), pp 108–132.

[3] G. De Philippis, A. Figalli. The Monge–Ampère equation and its link to optimal transportation. *Bull. Amer. Math. Soc. (new series)*, **51** (2014), pp 527–581.

[4] E. Gagliardo. Proprietà di alcune di funzioni in più variabili. *Ricerche Mat.*, **7** (1958), pp 102–137.

[5] D. Serre, L. Silvestre. Multi-dimensional Burgers equation with unbounded initial data: well-posedness and dispersive estimates. *Soumis* (2018). `arXiv:1808.07467`.

[6] D. Serre. *Matrices.* GTM **216**, Springer-Verlag (2002–10).

[7] D. Serre. Divergence-free positive symmetric tensors and fluid dynamics. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (analyse non linéaire).* **35** (2018), pp 1209–1234. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2017.11.002.

[8] D. Serre. Compensated integrability. Applications to the Vlasov–Poisson equation and other models in mathematical physics. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.* To appear.

[9] C. Villani. *Topics in optimal transportation*. Graduate Studies in Mathematics **58**, Amer. Math. Society (2003).