THEORIE DES NOMBRES

BESANCON

Année 1988/1989

Fascicule 1

SUR DES DEVELOPPEMENTS DE FONCTIONS ELLIPTIQUES

Raouf CHOUIKHA

Sur des développements de fonctions elliptiques

Raouf CHOUIKHA

Résumé :
Dans ce travail, on améliore certains résultats annoncés dans la Note [1]. On montre en particulier que les développements se généralisent. Des expressions trigonométriques, on déduit des équations modulaires pour les coefficients.

On the expansions for elliptic functions

Abstract :
In this paper, we improve some results announced in the Note [1]. In particular we show the generalization of the expansions. From trigonometric expression we deduce some modular equations of the coefficients.

§1 - Dans une Note précédente [1], on a mis en évidence un développement de la fonction $\wp(z)$ de Weierstrass relative à $g_2 = \frac{1}{12}$, le résultat suivant montre qu'en fait ce développement est encore valable dans le cas où g_2 est un complexe quelconque.

Théorème (1.1) :

La fonction $\wp(z)$ de Weierstrass relative à g_2 et g_3 admet le développement suivant :

$$\wp(z) = e_3 - \frac{\pi^2}{4\omega^2 \sum\limits_{p\geq 1} \beta_{2p}\left(\sin \frac{\pi z}{2\omega}\right)^{2p}}$$

Les coefficients β_{2p} étant définis par la relation de récurrence :

$$(1.2) \qquad (2p+2)(2p+1)\beta_{2p+2} = [4p^2 + 12e_3\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2]\,\beta_{2p} - \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2 6\,a_2 \sum_{0<r<p} \beta_{2r}\,\beta_{2p-2r}$$

où $(2\omega, 2\omega')$ sont les périodes primitives, avec $e_3 = \wp(\omega')$, $\beta_2 = 1$ et $a_2 = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 \left(g_2 - 12\,e_3^2\right)$.

Démonstration :

On considère pour cela les solutions périodiques complexes de l'équation différentielle :

$$(1) \qquad \begin{cases} u'' + u^2 - u + \alpha = 0 \\ u(0) = 1 + s \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

où s et α sont des complexes.

Ces solutions peuvent s'écrire : $\varphi(z) = \frac{1}{2} - 6\,\wp(z+\omega')$

où $\wp(z)$ est la fonction de Weierstrass relative à $g_2 = \frac{1}{12} - \frac{\alpha}{4}$

et $g_3 = 6^{-3}[1 - 4\,s^3 - 6\,s^2 - \frac{\alpha}{24}(s + \frac{1}{2})]$.

Lemme (1.3) :

Lorsque les coefficients β_{2p}, $p \in \mathbb{N}^*$ vérifient les conditions suivantes :

$$(2p+2)(2p+1)\beta_{2p+2} = [4\,p^2 - \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2 (2s+1)]\beta_{2p} - \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2 6\,a_2 \sum_{0<r<p} \beta_{2r}\,\beta_{2p-2r}$$

avec $\beta_2 = 1$, $a_2 = -\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 \frac{(1+2s)^2 + 3\alpha - 1}{12}$

alors, les solutions périodiques de l'équation (1) sont de la forme :

$$\varphi(z) = 1+s+6\,a_2 \sum_{p\geqq 1} \beta_{2p}\left(\sin \frac{\pi z}{2\omega}\right)^{2p}$$

La démonstration de ce lemme reprend celle du théorème (1.1) de [1], en précisant que les coefficients a_{2p} s'écrivent : $a_{2p} = a_2\,\beta_{2p}$. Plus exactement, on montre que la série converge au voisinage d'un point z_o, puis on utilise le prolongement analytique (les détails seront donnés dans une prochaine publication).

Remarque (1.4) :

a) Compte tenu de l'homogénéité des g_2 et des e_i, on déduit que $a_2(\omega,\omega')=\omega^{-2}a_2(1,\tau)$ où $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ est le rapport des périodes. La relation (1.2) montre qu'en fait les β_{2p} ne dépendent que du rapport τ.

b) La fonction de Weierstrass peut s'écrire également :

$$\wp(z) = e_2 - \frac{\pi^2}{4\omega^2 \sum \beta_{2p}(e_2)\left(\sin \frac{\pi z}{2\omega}\right)^{2p}} = e_1 - \frac{\pi^2}{4\omega'^2 \sum \beta_{2p}(e_1)\left(\sin \frac{\pi z}{2\omega'}\right)^{2p}}$$

car l'action du groupe modulaire fait permuter les e_i, ainsi que les fonctions $a_2(e_i)$ qui vérifient :

$$g_2 = -\frac{1}{3}\,\frac{\pi^2}{\omega^2}\left(a_2'(e_1)+a_2(e_2)+a_2(e_3)\right) \;;\; \Delta = -16\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^6 a_2'(e_1)\,a_2(e_2)\,a_2(e_3)$$

et
$$J = \frac{4}{27}\,\frac{a_2'^3(e_1)+a_2^3(e_2)+a_2^3(e_3)}{a_2'(e_1)\,a_2(e_2)\,a_2(e_3)} - \frac{4}{9} \;;\; \text{avec} \quad a_2'(e_1) = \frac{1}{\tau^2}\,a_2(e_1).$$

§2 - On sait que la fonction s_n de Jacobi est reliée à $\wp(z)$ par :

$$\wp(z) - e_3 = \frac{e_1-e_3}{sn^2(z\sqrt{e_1-e_3},k)} \quad \text{où} \quad k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$$

Les périodes primitives de sn étant : $4K = 4\omega\sqrt{e_1-e_3}$, $2iK' = 2\omega'\sqrt{e_1-e_3}$.

Proposition (2.1) :

La fonction sn(4K, 2iK') relative à $k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$ admet le développement suivant :

$$sn(u,k) = \frac{2K}{\pi}\sin\frac{\pi u}{2k}\left[1+\sum_{p\geqq 1}\gamma_{2p+2}\left(\sin\frac{\pi u}{2K}\right)^{2p}\right]$$

Les coefficients γ_{2p} étant définis par les relations de récurrence :

$$(2.2) \qquad 2 \sum_{r+m=2p} \gamma_{2r}\, \gamma_{2m} = \beta_{4p-2} \quad ; \quad \gamma_{2p+2}^2 + 2 \sum_{r+m=2p+1} \gamma_{2r}\, \gamma_{2m} = \beta_{4p}$$

avec $\gamma_2=1$ et les β_{2p} définis par (1.2).

Ce résultat se déduit du théorème (1.1) et d'un calcul qui donne

$$\frac{\pi}{\sqrt{\wp(z)-e_3}} = 2\omega \sin \frac{\pi z}{2\omega} \left[1 + \sum_{p \geq 1} \gamma_{2p+2} \left(\sin \frac{\pi z}{2\omega}\right)^{2p}\right].$$

Corollaire (2.3) :

Soit $q = e^{i\pi\tau}$, alors sous les hypothèses de la proposition (2.1), on a les relations suivantes :

$$\frac{(-1)^n\, q^{n+\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n+1}} = \frac{\omega}{\pi} \sqrt{-a_2} \sum_{p \geq n+1} \frac{\gamma_{2p+2}}{2^{2p}} \binom{2p+1}{p-n} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

d'où la relation modulaire sur les coefficients γ_{2p}

$$(-1)^m \sqrt{-a_2(\tau)} \sum_{p \geq m} \frac{\gamma_{2p+2}(\tau)}{2^{2p}} \binom{2p+1}{p-m} = \sqrt{-a_2(n\tau)} \sum_{p \geq 1} \frac{\gamma_{2p+2}(n\tau)}{2^{2p}} \binom{2p+1}{p}$$

avec $n = 2m+1$ un entier positif.

$\left(\text{On note } \binom{q}{r} = \frac{q!}{r!(q-r)!}\right)$.

Démonstration :

Du fait que $2^{2p} \sin^{2p+1} x = \sum_{n \leq p-1} (-1)^n \binom{2p+1}{p-n} \sin(2n+1)x$ et en vertu du développement trigonométrique classique de la fonction sn (voir [2]) :

$$\operatorname{sn} u = \frac{2\pi}{kK} \sum \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sin(2n+1)\frac{\pi u}{2K}$$

on déduit alors les relations par identification.

§3 - On a vu dans [1] que la fonction thêta peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\theta_4(v) = \theta_4(0)\ \mathrm{Exp}\Big[\frac{2}{3}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 \sum_{p\geq 1} c_{2p}(\sin \pi v)^{2p}\Big]$$

(on écrit $\theta_4 = \theta_{01}$ et $\theta(v) = \theta(v,\tau)$ avec $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$).

Les coefficients c_{2p} vérifiant la relation de récurrence

$$(3.1) \qquad (2p+2)(2p+1)\, c_{2p+2} - 4p^2\, c_{2p} = a_{2p}$$

et les a_{2p} sont définis par :

$$(3.2) \qquad (2p+2)(2p+1)a_{2p+2} = \Big[4p^2 + 12\, e_3\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2\Big]\, a_{2p} - \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2 \sum_{0<r<p} a_{2r}\, a_{2p-2r}$$

avec $a_2 = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 (g_2 - 12\, e_3^2)$. De plus, on a : $\omega^2\, c_{2p}(\omega,\omega') = c_{2p}(\tau)$.

Des formules déduites de la transformation d'ordre impair sur $\theta(nv, n\tau)$, on trouve le résultat suivant (voir [2]) :

Proposition (3.3) :
Soit n un entier impair . Lorsque les coefficients c_{2p} vérifient la relation (3.1), alors on a l'égalité :

$$n^2 \sum_{p\geq 1} c_{2p}(n\tau)(\sin n\pi v)^{2p} = \sum_{p\geq 1} c_{2p}(\tau) \sum_{r=0}^{n-1} \Big[(\sin \pi(v+\frac{r}{n}))^{2p} - (\sin \pi\frac{r}{n})^{2p}\Big]$$

Une autre relation modulaire peut être déduite grâce aux expressions trigonométriques de la fonction thêta.

Proposition (3.4) :
Lorsque les coefficients c_{2p} vérifient (3.1), alors pour tout entier m non nul, on a l'égalité :

$$\frac{(-1)^m q^m}{1-q^{2m}} = -\frac{m}{3\pi^2} \sum_{p\geq m} \frac{c_{2p}(\tau)}{2^{2p-1}} \binom{2p}{p-m}$$

d'où l'équation modulaire pour les coefficients c_{2p} :

$$m(-1)^{m+1} \sum_{p\geq m} \frac{c_{2p}(\tau)}{2^{2p-1}} \binom{2p}{p-m} = \sum_{p\geq 1} \frac{c_{2p}(m\tau)}{2^{2p-1}} \binom{2p}{p-1}$$

satisfaite pour tout $m \geq 1$.

Ceci résulte des deux types de développement de la fonction thêta, à savoir :

$$\log \frac{\theta_4(\nu)}{\theta_4(0)} = 2 \sum_{m\geq 1} \frac{q^m}{m(1-q^{2m})} - 2 \sum_{m\geq 1} \frac{q^m}{m(1-q^{2m})} \cos(2m\pi v)$$

$$= \frac{2}{3\pi^2} \sum_{p\geq 1} c_{2p}(\tau)(\sin \pi v)^{2p}.$$

Remarque (3.5) :

Pour les transformations d'ordre 2, comme la transformation de Landen, en utilisant $\theta_4(2v,2\tau) = \dfrac{\theta_3(v)\,\theta_4(v)}{\theta_4(0,2\tau)}$ où $\theta_i(v) = \theta_i(v,\tau)$, on trouve l'égalité suivante :

$$(3.6) \qquad 4 \sum_{p\geq 1} c_{2p}(\tau)\left(\sin^{2p} v + \cos^{2p} v - 1\right) = \sum_{p\geq 1} c_{2p}(2\tau) \sin^{2p} 2v.$$

Les formules de trigonométrie permettent d'identifier les coefficients :

$$(3.7) \qquad \sum_{n\geq\frac{p}{2}} 2^{2n} c_{2n}(2\tau)\,(-1)^{p-n} \binom{n}{p-n} = 4\,c_{2p} + 4\,(-1)^p \sum_{m\geq p} c_{2m}(\tau) \binom{m}{p}.$$

§4 - Dans cette partie, on va mettre en évidence quelques propriétés des coefficients a_{2p} du développement de la fonction $\wp(z)$. On verra en particulier que les a_{2p} vérifient des équations modulaires identiques à celles des coefficients c_{2p}.

Proposition (4.1) :

Soit n un entier impair. Les coefficients du développement de $\wp(z;2,2\tau)$ sont définis par la relation (3.2). Alors on a l'égalité :

$$n^2 \sum_{p\geq 1} a_{2p}(n\tau)\left(\sin\frac{n\pi u}{2}\right)^{2p} = \sum_{p\geq 1} a_{2p}(\tau) \sum_{\mu=0}^{n-1} \left[\left[\sin \pi\left(\frac{u}{2}-\frac{\mu}{n}\right)\right]^{2p} - \left(\sin \pi\frac{\mu}{n}\right)^{2p}\right].$$

Démonstration :

Ce résultat se déduit du théorème (1.1) ainsi que de la démonstration de la fonction de Weierstrass ([2] page 310).

Proposition (4.2) :

Soit $a_2(\tau)=\frac{1}{\pi^2}\left(g_2-12\,e_3^2\right)$, alors pour n impair, on a : $n^4\,a_2(n\tau)=\sum_{p\geq 2}\alpha_{2p,n}\,a_{2p}(\tau)$

où la valeur des $\alpha_{2p,n}$ est donnée par : $\alpha_{2p,n}=\lim_{u\to 0}\sum_{\mu=0}^{n-1}\dfrac{\left(\sin\pi(\frac{u}{2}-\frac{\mu}{n})\right)^{2p}-\left(\sin\frac{\pi\mu}{n}\right)^{2p}}{\sin^2\frac{\pi u}{2}}$

On a aussi :

$$a_2(n\tau)=a_2^n(\tau)\left[\frac{1}{n}\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}}\sum_{p\geq 1}\frac{2\beta_{2p}(\tau)}{\pi}\left(\sin\frac{\pi\mu}{n}\right)^{2p}\right]^4 .$$

Remarque (4.3) :

En utilisant la transformation de Landen, on trouve l'égalité suivante :

$$4\sum_{p\geq 1}a_{2p}(\tau)\left(\left(\sin\frac{\pi v}{2}\right)^{2p}+\left(\cos\frac{\pi v}{2}\right)^{2p}-1\right)=\sum_{p\geq 1}a_{2p}(2\tau)\sin^{2p}\pi v.$$

Ainsi, les coefficients a_{2p} vérifient une égalité identique à (3.7).
Par ailleurs, des expressions trigonométriques de la fonction $\wp(z)$, on peut déduire une relation modulaire entre les coefficients.

Proposition (4.4) :

Lorsque les coefficients a_{2p} vérifient la relation (3.2), alors pour tout entier m non nul, on a :

$$\frac{(-1)^m\,m\,q^m}{1-q^{2m}}=\frac{1}{12\pi^2}\sum_{p\geq m}\frac{a_{2p}(\tau)}{2^{2p-1}}\binom{2p}{p-m}$$

d'où l'équation modulaire :

$$(-1)^{m+1}\sum_{p\geq m}\frac{a_{2p}(\tau)}{2^{2p-1}}\binom{2p}{p-m}=m\sum_{p\geq 1}\frac{a_{2p}(m\tau)}{2^{2p-1}}\binom{2p}{p-1}.$$

Démonstration :

Ce résultat se déduit du théorème (1.1) et de l'expression

$$\wp(z+\tau\,;\,2,2\tau)=e_3(\tau)+4\pi^2\sum_{m\geq 1}\frac{(-1)^m\,m\,q^m}{1-q^{2m}}\sin^2\frac{m\pi z}{2}.$$

§5 - Remarques :

Il est intéressant de préciser qu'en général une fonction développable en série de Fourier, n'est pas toujours développable en série de puissances de fonctions circulaires.

En effet, soit par exemple une fonction f qui s'écrit $f(x) = \sum_{p \geq 0} a_p \cos^p x$; d'après les formules d'Euler-Fourier, on trouve :

$$\int_o^{2\pi} \cos^n x \cos px\, dx = \frac{\pi}{2^{n-1}} \binom{n}{\frac{n-p}{2}} \quad \text{si n-p est pair et positif}$$

d'où l'expression des coefficients de Fourier de f :

$$\alpha_p = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} a_n \int_o^{2\pi} \cos^n x \cos px\, dx = \sum_{n \geq p} \frac{a_n}{2^{n-1}} \binom{n}{\frac{n-p}{2}}.$$

Cette technique se heurte souvent à la difficulté de montrer la convergence de la série $\sum_{p \geq 0} a_p \cos^p x$. Ce type de développement a été signalé par Lebesgue ([3] p. 29).

Le fait que la fonction de Weierstrass $\wp(z+\tau\,;2,2\tau)$ soit développable en série de Fourier était bien connu (voir [2]) ; cepepdant le théorème (1.1) précise qu'une fonction elliptique peut s'écrire sous la forme d'une série de puissances de fonctions circulaires.

REFERENCES

[1] R. CHOUIKHA
C.R. Acad. Sci., série 1, p. 655-658, Paris 1988.

[2] R. FRICKE
Elliptische Funktionen, Encycl. der Math. Wissensch. t. II, B. 3, Teubner, Leipzig 1924.

[3] H. LEBESGUE
Leçons sur les séries trigonométriques.
Rééd. A. Blanchard, Paris 1975.

[4] R. CHOUIKHA
Méthode de développement de fonctions elliptiques.
(en préparation)

Université de Franche-Comté
UFR des Sciences et Techniques
Laboratoire de Mathématiques
U.A. CNRS 741
25030 BESANCON CEDEX