THEORIE DES NOMBRES
BESANCON

Années 1986/87-1987/88
Fascicule 1

REDUCTION DE DECOMPOSITIONS NUMERIQUES DE CLASSES DE COHOMOLOGIE

Richard MASSY

INTRODUCTION .

Soient K un corps, $\tilde{K}$ une clôture séparable de K et $\Omega_K = Gal(\tilde{K}/K)$ le groupe de Galois de $\tilde{K}$ sur K. Soit ν un entier inversible dans K. On suppose que K contient le groupe μ_ν de racines ν-ièmes de l'unité. Si $a \in K^\times$, on note (a) l'élément de $H^1(\Omega_K, \mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z})$ défini par

$$w(a^{1/\nu})/a^{1/\nu} = \zeta_\nu^{(a)(w)} \qquad w \in \Omega_K$$

où $\zeta_\nu \in \mu_\nu$ est la racine primitive par laquelle on identifie μ_ν à $\mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$. On déduit d'un théorème de Merkurjev et Suslin (cf. [M-S] (11.5) ou [So] I. 3) que pour tout élément ε du noyau $Br_\nu(K)$ de la multiplication par ν dans le groupe de Brauer de K, il existe des éléments a_i, b_i, $i=1, \ldots, n$, dans K tels que l'on ait

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$$

avec

$$(a, b) = (a) \cup (b) \qquad a, b \in K^\times$$

où $\cup$ désigne le cup-produit

$$H^1(\Omega_K, \mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}) \times H^1(\Omega_K, \mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}) \to H^2(\Omega_K, \mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} Br_\nu(K)$$

induit par la multiplication dans $\mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$.

On se pose ici la question suivante : qu'advient-il quand on remplace $\tilde{K}/K$ par une extension galoisienne finie E/K de groupe de Galois G ? Les éléments de $H^2(G, \mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z})$ s'écrivent-ils en fonction des éléments de K, et comment ? Plus généralement, si p divise ν, comment les éléments de $H^2(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ se décomposent-ils ? Nous allons répondre à cette question lorsque ν est la puissance d'un nombre premier p quelconque, $\nu = p^m$, $m \geq 1$, et G un p-groupe abélien d'exposant p^m.

Dans les sections 1 et 2, on considère un tel groupe G en tant que groupe abstrait. A toute classe $\varepsilon \in H^2(G, \mathbb{F}_p)$, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on associe deux applications ε_* et ε^* qui caractérisent ε : la donnée de ε équivaut à celle de ε_* et ε^* (cf. (2. 3. 1)). La méthode consiste alors à étudier les propriétés de ε_* et ε^* puis à les traduire au niveau des cocycles. A partir de la section 3, G est réalisé comme groupe de Galois d'une p-extension abélienne E/K. On prouve que chaque classe ε de $H^2(G, \mathbb{F}_p)$ se décompose en sommes de cup-produits définis par des éléments de K qui sont des puissances p-ièmes dans E. Mais à la différence du résultat précité pour $\tilde{K}/K$, ces décompositions mettent en jeu deux cup-produits distincts au lieu d'un seul dans le groupe de Brauer de K. Les trois premières sections fournissent en particulier les démonstrations de plusieurs assertions énoncées dans le chapitre 5 de [My 1] ou dans [My 2]. La

section 4 est la plus originale de cet article : on y met en lumière une notion d'unicité non observée jusqu'alors : les décompositions numériques d'une classe donnée se réduisent toutes à un unique type parmi seulement quatre types possibles de décompositions (ce ne sont pas ceux de [My 1] p. 102). Ceci permet de parler "d'espèce" de classes de cohomologie. Toute classe $\mathfrak{c}$ a une espèce et une seule.

1. LES APPLICATIONS $\mathfrak{c}_*$ et $\mathfrak{c}^*$.

Dans toute la suite, p désigne un nombre premier quelconque et G un p-groupe abélien d'exposant p^m, $m \geq 1$, de nombre minimal de générateurs d.

1.1. Les applications bilinéaires $\mathfrak{c}_*$.

Pour toute classe $\mathfrak{c} \in H^2(G, \mathbb{F}_p)$ posons

$$\mathfrak{c}_* = z - {}^t z$$

où z est l'un quelconque des 2-cocycles représentant $\mathfrak{c}$, et ${}^t z$ le 2-cocycle défini par $({}^t z)(\sigma, \tau) = z(\tau, \sigma)$, $(\sigma, \tau) \in G^2$. Soit $\mathscr{L}^2_{alt}(G)$ le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel des applications bilinéaires alternées sur G. On sait que $\mathfrak{c}_* \in \mathscr{L}^2_{alt}(G)$. Notons $Ext^1(G, \mathbb{F}_p)$ le sous-espace de $H^2(G, \mathbb{F}_p)$ constitué des classes représentées par un 2-cocycle z symétrique, i.e., tel que ${}^t z = z$. On a la suite exacte scindée

$$0 \to Ext^1(G, \mathbb{F}_p) \hookrightarrow H^2(G, \mathbb{F}_p) \to \mathscr{L}^2_{alt}(G) \to 0 \qquad (1.1.1)$$
$$\mathfrak{c} \mapsto \mathfrak{c}_*$$

Les dimensions sur $\mathbb{F}_p$ sont les suivantes

$$\dim H^2(G, \mathbb{F}_p) = \frac{d(d+1)}{2} \text{ (cf. [J] p. 169)}, \quad \dim \mathscr{L}^2_{alt}(G) = \frac{d(d-1)}{2} \qquad (1.1.2)$$

$$\dim Ext^1(G, \mathbb{F}_p) = d. \qquad (1.1.2a)$$

1.2. Les applications $\mathfrak{c}^*_n$.

Lemme 1. Soit H un groupe abélien (non nécessairement un p-groupe) opérant trivialement sur $\mathbb{F}_p$.

(i) Si p = 2, on a, quel que soit un 2-cocycle $z \in Z^2(H, \mathbb{F}_2)$,

$$z(\sigma^2, \tau^2) = z(\sigma, \sigma) + z(\tau, \tau) + z(\sigma\tau, \sigma\tau) + z(\sigma, \tau) + z(\tau, \sigma),$$

et pour tout $\nu \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$z(\sigma^{4\nu}, \tau^{4\nu}) = \sum_{\mu=1}^{4\nu-1} z(\sigma^\mu, \sigma) + \sum_{\mu=1}^{4\nu-1} z(\tau^\mu, \tau) + \sum_{\mu=1}^{4\nu-1} z(\sigma^\mu \tau^\mu, \sigma\tau) \qquad (\sigma, \tau) \in H^2.$$

(ii) Quels que soient p et un 2-cocycle symétrique $f \in Z^2(H, \mathbb{F}_p)$, on a pour tout $\nu \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$(2\nu+1) f(\sigma, \tau) + \sum_{\mu=0}^{2\nu} f(\sigma^\mu \tau^\mu, \sigma\tau) = f(\sigma^{2\nu+1}, \tau^{2\nu+1}) + \sum_{\mu=1}^{2\nu} f(\sigma^\mu, \sigma) + \sum_{\mu=0}^{2\nu} f(\tau^\mu, \tau) \qquad \sigma, \tau \in H.$$

Démonstration : (i) De l'identité de définition d'un 2-cocycle, on déduit que pour tous $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $\sigma, \tau \in H$

$$z(\sigma^r, \tau^r) + z(\sigma^r \tau^r, \sigma\tau) = z(\tau^r, \sigma\tau) + z(\sigma^r, \sigma\tau^{r+1})$$

$$z(\tau^r, \tau) + z(\tau^{r+1}, \sigma) = z(\tau, \sigma) + z(\tau^r, \sigma\tau).$$

Soit ε la classe de cohomologie de z. Comme $\varepsilon_* \in \mathcal{L}^2_{alt}(G)$

$$z(\tau^{r+1}, \sigma) + z(\sigma, \tau^{r+1}) = (r+1)\, \varepsilon_*(\tau, \sigma)$$

i. e.,

$$z(\tau^{r+1}, \sigma) = z(\sigma, \tau^{r+1}) + (r+1)\, z(\tau, \sigma) + (r+1)\, z(\sigma, \tau).$$

D'autre part,

$$z(\sigma^r, \sigma) + z(\sigma^{r+1}, \tau^{r+1}) = z(\sigma, \tau^{r+1}) + z(\sigma^r, \sigma\tau^{r+1}).$$

La sommation des deux premières égalités conduit alors à la relation

$$z(\sigma^{r+1}, \tau^{r+1}) = z(\sigma^r, \sigma) + z(\tau^r, \tau) + z(\sigma^r \tau^r, \sigma\tau) + z(\sigma^r, \tau^r) + r\, z(\tau, \sigma) + (r+1)\, z(\sigma, \tau).$$

Les égalités cherchées s'obtiennent directement à partir de là en faisant $r = 1$ pour la première, et en raisonnant par récurrence sur ν pour la seconde.

(ii) On a toujours

$$(0) \quad f(\sigma, \tau) + f(1, \sigma\tau) = f(1, \tau) + f(\sigma, \tau).$$

De l'identité de définition d'un 2-cocycle et de la symétrie de f, on déduit que

$$(r) \quad f(\sigma, \tau) + f(\sigma^r \tau^r, \sigma\tau) = f(\sigma^r \tau^r, \tau) + f(\tau^{r+1} \sigma^r, \sigma) \qquad r \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

Sommons membres à membres les égalités (0) et (r) pour r variant de 1 à 2ν. Le membre de gauche est directement celui de l'énoncé. Pour obtenir celui de droite, il suffit d'utiliser à chaque pas la relation

$$f(\rho, \rho') + f(\rho\rho', \rho'') = f(\rho', \rho'') + f(\rho'\rho'', \rho) \qquad (\rho, \rho', \rho'') \in H^3.$$

q. e. d.

Revenons au p-groupe abélien G d'exposant p^m. Notons $G^{(n)}$ le sous-groupe de G des éléments d'ordre divisant p^n, $n = 1, \ldots, m$. Pour toute classe de cohomologie $\varepsilon \in H^2(G, \mathbb{F}_p)$, soit ε_n^* l'application de $G^{(n)}$ dans $\mathbb{F}_p$ définie par

$$\varepsilon_n^*(\gamma) = \sum_{\mu \bmod p^n} z(\gamma^\mu, \gamma) \qquad \gamma \in G^{(n)} \qquad n = 1, \ldots, m$$

où z est l'un quelconque des 2-cocycles représentant ε.

Proposition 1 : Lorsque $p = 2$, ε_1^* est une forme quadratique du 2-espace vectoriel $G^{(1)}$. Dans tous les autres cas, c'est-à-dire si $p = 2$ et $n = 2 \ldots m$ ou si $p \neq 2$ et $n = 1, \ldots, m$, on a $\varepsilon_n^* \in H^1(G^{(n)}, \mathbb{F}_p)$.

Démonstration : Pour un 2-cocycle $z \in Z^2(G, \mathbb{F}_p)$, on sait que $z(1, 1) = z(1, \gamma)$, $\gamma \in G$. Quand $p = 2$, il suffit donc d'utiliser le lemme 1(i). Quand $p \neq 2$, on a la décomposition en somme directe

$$Z^2(G, \mathbb{F}_p) = \{f \in Z^2(G, \mathbb{F}_p) / \ {}^t f = f\} \oplus \mathcal{L}^2_{alt}(G).$$

La proposition dans ce cas résulte alors directement du lemme 1(ii) q. e. d.

Du point de vue des extensions de groupes, l'interprétation des formes ε_* et ε_n^* est la suivante. Fixons-nous une racine primitive ζ_p dans le groupe μ_p des racines p-ièmes de l'unité (cas particulier de (3.2a)). Le groupe $\iota(\mathbb{F}_p)$ s'identifiant à μ_p, on peut convenir que les extensions de G par $\mathbb{F}_p$ s'écrivent

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{F}_p & \xrightarrow{\iota} & U & \xrightarrow{\pi} & G \longrightarrow 0 \\ & & \nu & \longmapsto & \zeta_p^{\nu} & & \end{array}$$

Soient $\{u_\gamma \in U / \pi(u_\gamma) = \gamma, \ \gamma \in G\}$ une section de G dans U, z le 2-cocycle qu'elle définit par $u_\sigma u_\tau = \zeta_p^{z(\sigma, \tau)} u_{\sigma\tau}$ $(\sigma, \tau) \in G^2$, et ε la classe de z dans $H^2(G, \mathbb{F}_p)$. On a :

$$u v u^{-1} v^{-1} = \zeta_p^{\varepsilon_*(\pi(u), \pi(v))} \qquad (u, v) \in U^2. \qquad (1.2.1)$$

On en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_p \xrightarrow{\iota} Z(U) \xrightarrow{\pi \mid Z(U)} \operatorname{rad} \varepsilon_* \longrightarrow 0 \qquad (1.2.1a)$$

où $Z(U)$ désigne le centre de U et $\operatorname{rad}\varepsilon_*$ le sous-groupe de G des éléments σ tels que $\varepsilon_*(\sigma, \gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in G$; on dira que $\operatorname{rad}\varepsilon_*$ est le "radical" de ε_*. D'autre part, si $u \in U$ est tel que $\pi(u) \in G^{(n)}$ on a

$$u^{p^n} = \zeta_p^{\varepsilon_n^*(\pi(u))} \qquad n = 1, \ldots, m. \qquad (1.2.2)$$

1.3. Définition des applications ε^*.

Nous dirons qu'un p-groupe est "p^m-abélien élémentaire", $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, si et seulement s'il est abélien et se décompose en produit direct de groupes cycliques de même ordre p^m.

Lorsque notre groupe G est p^m-abélien élémentaire, on pose simplement

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*_m \qquad\qquad \varepsilon \in H^2(G, \mathbb{F}_p).$$

Dans le cas général, on sait que tout p-groupe abélien se décompose en produit direct de groupes p^{m_i}-abéliens élémentaires G_i. En indexant les G_i par exposant croissant, on a pour G d'exposant p^m

(1. 3. 1) $G = \overset{g}{\underset{i=1}{\times}} G_i$, $\quad 1 \leq m_i < m_j \leq m_g = m$ si $\quad 1 \leq i < j \leq g$.

Les nombres g et m_i, $i = 1, \ldots, g$, ne dépendent que de G. Par contre, il y a en général plusieurs choix possibles des groupes p^{m_i}-abéliens élémentaires G_i. Aussi nous fixons-nous une fois pour toutes la décomposition (1. 3. 1) ; ce sera la "décomposition de référence de G".

Définition 1 : Pour toute classe $\varepsilon \in H^2(G, \mathbb{F}_p)$, on pose

$$\varepsilon^* = \sum_{i=1}^{g} \inf_{G_i, G} [(\mathrm{res}_{G, G_i} \varepsilon)^*].$$

Dans cette somme, res_{G, G_i} désigne la restriction cohomologique. D'après la proposition 1 pour $G_i = G_i^{(m_i)}$, on a $(\mathrm{res}_{G, G_i} \varepsilon)^* \in H^1(G_i, \mathbb{F}_p)$ sauf si $p = 2$ et $m_1 = 1$. L'inflation $\inf_{G_i, G}$ est donc clairement définie, sauf dans ce dernier cas où elle a le sens suivant.

Notons $\mathfrak{Q}(G)$ le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel des applications Q de G dans $\mathbb{F}_2$ telles que

$$Q(\sigma\tau) = Q(\sigma) + Q(\tau) + Q_*(\sigma, \tau) \qquad\qquad \sigma, \tau \in G$$

où Q_* est une forme bilinéaire alternée sur G. De même soit $\mathfrak{Q}(G_1)$ l'espace des formes quadratiques du 2-espace vectoriel $G^{(1)}$. Nous définissons l'inflation de G_1 à G d'une forme quadratique $Q \in \mathfrak{Q}(G_1)$ en posant

$$(\inf_{G_1, G} Q)(\gamma) = Q(\gamma \bmod \hat{G}_1) \qquad\qquad \gamma \in G, \ \hat{G}_1 = \overset{g}{\underset{i=2}{\times}} G_i,$$

ce qui induit l'application linéaire injective

$$\inf_{G_1, G} : \mathfrak{Q}(G_1) \longrightarrow \mathfrak{Q}(G). \qquad\qquad (1. 3. 2)$$
$$Q \longmapsto \inf_{G_1, G} Q$$

La définition 1 est maintenant complète. En vertu de la proposition 1,

(1. 3. 3) Si $p = 2$ et $m_1 = 1$, on a $\varepsilon^* \in \mathfrak{Q}(G)$; sinon $\varepsilon^* \in H^1(G, \mathbb{F}_p)$.

Remarquons cependant que si $\eta \in \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{F}_p)$, on a toujours $(\mathrm{res}_{G, G_1} \eta)^* \in H^1(G_1, \mathbb{F}_p)$ d'où $\eta^* \in H^1(G, \mathbb{F}_p)$. En fait

Proposition 2 : Quel que soit le p-groupe abélien G, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\sim} & H^1(G, \mathbb{F}_p) \\ \eta & \longmapsto & \eta^* \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels.

Nous allons utiliser le résultat général annexe suivant

(1. 3. 4) Soient H un groupe produit direct de h de ses sous-groupes H_i : $H = \underset{i=1}{\overset{h}{\times}} H_i$, et A un H-module trivial. Pour les restrictions et inflations cohomologiques usuelles, on a

$$\mathrm{res}_{H, H_i} \circ \mathrm{inf}_{H_j, H} = \delta_{ij}\, \mathrm{id}_{H^n(H_i, A)} \qquad 1 \leq i, j \leq h \qquad n = 1, 2$$

où le deuxième membre est le produit du delta de Kronecker par l'identité de $H^n(H_i, A)$. De même si H est un 2-groupe abélien

$$\mathrm{res}_{H, H_i} \circ \mathrm{inf}_{H_j, H} = \delta_{ij}\, \mathrm{id}_{\Omega(H_i)}$$

où l'espace $\Omega(H_i)$ et l'inflation $\mathrm{inf}_{H_j, H}$ sont définis comme ci-dessus.

Démonstration de la proposition 2 : D'après (1. 1. 2a), on a l'égalité des dimensions sur $\mathbb{F}_p$ des deux espaces de l'énoncé. Il suffit donc de prouver que l'application est injective. Dans le cas particulier où G est cyclique, cela se fait sans difficulté en utilisant (1. 2. 2). Lorsque G est p^m-abélien élémentaire, on le décompose en produit direct de groupes cycliques H_i d'ordre p^m : $G = \underset{i=1}{\overset{d}{\times}} H_i$. On déduit de (1. 3. 4) que tout système de classes non nulles $\eta_i \in \mathrm{Ext}^1(H_i, \mathbb{F}_p) - \{0\}$, $i = 1, \ldots, d$, induit les bases $\{\mathrm{inf}_{H_i, G} \eta_i\}_{1 \leq i \leq d}$ et $\{\mathrm{inf}_{H_i, G} (\eta_i^*)\}_{1 \leq i \leq d}$ de $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{F}_p)$ et $H^1(G, \mathbb{F}_p)$ respectivement. La conclusion dans ce cas résulte alors de ce que

$$\eta^* = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{inf}_{H_i, G}[(\mathrm{res}_{G, H_i} \eta)^*]$$

et de (1. 3. 4). Enfin dans le cas général, on suit la même démarche en se ramenant cette fois au résultat pour un groupe p^m-abélien élémentaire. q. e. d.

2. DECOMPOSITION EN SOMME DIRECTE DE $H^2(G,\mathbb{F}_p)$.

Considérons le cup-produit $\smile : H^1(G,\mathbb{F}_p) \times H^1(G,\mathbb{F}_p) \to H^2(G,\mathbb{F}_p)$ obtenu via la multiplication dans $\mathbb{F}_p$. Quels que soient $f, g \in H^1(G,\mathbb{F}_p)$, $f \smile g$ est la classe du 2-cocycle $f.g$ où (cf. [W] p. 144)

$$(f.g)(\sigma,\tau) = f(\sigma)\, g(\tau) \qquad (\sigma,\tau) \in G^2. \tag{2.1}$$

On en déduit que pour tout $n = 1, \ldots, m$

$$(f \smile g)^*_n(\gamma) = \frac{(p^n-1)\,p^n}{2} f(\gamma)\, g(\gamma) \qquad \gamma \in G^{(n)}. \tag{2.2}$$

Donc :

(2.2a) Si $p=2$ et $n=1$, on a $(f \smile g)^*_1 = f g$; sinon $(f \smile g)^*_n = 0$.

D'autre part, pour le produit extérieur $\wedge$,

$$(f \smile g)_* = f \wedge g. \tag{2.3}$$

Soit $\langle \mathrm{Im} \smile \rangle$ le sous-espace de $H^2(G,\mathbb{F}_p)$ engendré par l'image du cup-produit $\smile$. D'après (1.1.2), la dimension sur $\mathbb{F}_p$ de $\langle \mathrm{Im} \smile \rangle$ vérifie l'inégalité

$$\dim \langle \mathrm{Im} \smile \rangle \geq \frac{d(d-1)}{2}. \tag{2.4}$$

Dans la suite, nous allons devoir traiter séparément les situations distinguées par (1.3.3). Si $p=2$ et $m_1 = 1$, autrement dit lorsqu'une décomposition de G en groupes cycliques comporte un groupe d'ordre 2, nous dirons que l'on est "dans le cas quadratique", et sinon que l'on est "dans le cas linéaire".

2.1. Cas linéaire.

Comme $p \neq 2$ ou $m_1 \neq 1$, il vient par la définition 1 et (2.2a)

$$(f \smile g)^* = 0 \qquad f, g \in H^1(G,\mathbb{F}_p). \tag{2.1.1}$$

On en déduit par la proposition 2, (2.4) et (1.1.2a), la décomposition en somme directe

$$H^2(G,\mathbb{F}_p) = \mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{F}_p) \oplus \langle \mathrm{Im} \smile \rangle. \tag{2.1.2}$$

La suite exacte (1.1.1) conduit alors à l'isomorphisme de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Im} \smile \rangle &\xrightarrow{\sim} \mathscr{L}^2_{\mathrm{alt}}(G). \\ \lambda &\longmapsto \lambda_* \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Donc ici (2.4) est une égalité

$$\dim \langle \mathrm{Im} \smile \rangle = \frac{d(d-1)}{2} . \qquad (2.1.4)$$

D'autre part, pour toute classe $\varepsilon = \eta + \lambda$ où $\eta \in \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{F}_p)$ et $\lambda \in \langle \mathrm{Im} \smile \rangle$, on a

$$\varepsilon^* = \eta^* , \quad \varepsilon_* = \lambda_* . \qquad (2.1.5)$$

2.2. Cas quadratique .

Comme $p = 2$ et $m_1 = 1$, la décomposition de référence (1.3.1) de G comporte un (et un seul) facteur 2-abélien élémentaire : le sous-groupe G_1. Soit

$$\hat{G}_1 = G/G_1 \text{ ou } \hat{G}_1 = \overset{g}{\underset{i=2}{\times}} G_i \qquad \text{si } g \geq 2 .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on a la décomposition en somme directe suivante

$$H^2(G, \mathbb{F}_2) = \inf_{G_1, G} H^2(G_1, \mathbb{F}_2) \oplus \inf_{\hat{G}_1, G} H^2(\hat{G}_1, \mathbb{F}_2) \oplus$$
$$\oplus \langle \inf_{G_1, G} H^1(G_1, \mathbb{F}_2) \smile \inf_{\hat{G}_1, G} H^1(\hat{G}_1, \mathbb{F}_2) \rangle \qquad (2.2.1)$$

dans laquelle les deux premiers facteurs désignent les images des inflations $\inf_{G_1, G}$, $\inf_{\hat{G}_1, G}$ respectivement, et le troisième le sous-espace de $H^2(G, \mathbb{F}_2)$ engendré par l'ensemble

$$\{\inf_{G_1, G} f \smile \inf_{\hat{G}_1, G} \hat{f} / f \in H^1(G_1, \mathbb{F}_2), \ \hat{f} \in H^1(\hat{G}_1, \mathbb{F}_2)\}$$

où $\smile$ est le cup-produit explicité par (2.1).

Le cas de $\hat{G}_1$ étant linéaire, on sait d'après (2.1.2) que

$$H^2(\hat{G}_1, \mathbb{F}_2) = \mathrm{Ext}^1(\hat{G}_1, \mathbb{F}_2) \oplus \langle \mathrm{Im} \hat{\smile} \rangle \qquad (2.2.2)$$

où $\hat{\smile}$ est le cup-produit précédent quand on remplace G par $\hat{G}_1$. Donc toute classe $\varepsilon \in H^2(G, \mathbb{F}_2)$ s'écrit

$$\varepsilon = \inf_{G_1, G} \varepsilon_1 + \inf_{\hat{G}_1, G} \hat{\eta} + \inf_{\hat{G}_1, G} \hat{\lambda} + \sum_{j=1}^{n} \inf_{G_1, G} f_j \smile \inf_{\hat{G}_1, G} \hat{f}_j \qquad (2.2.3)$$

avec $\varepsilon_1 \in H^2(G_1, \mathbb{F}_2)$, $\hat{\eta} \in \mathrm{Ext}^1(\hat{G}_1, \mathbb{F}_2)$, $\hat{\lambda} \in \langle \mathrm{Im} \hat{\smile} \rangle$, et $f_j \in H^1(G_1, \mathbb{F}_2)$ $\hat{f}_j \in H^1(\hat{G}_1, \mathbb{F}_2)$, $j = 1, \ldots, n$.

On vérifie que

$$(\inf_{G_1, G} \varepsilon_1)^* = \inf_{G_1, G} (\varepsilon_1^*) \qquad (2.2.4)$$

où le second membre est défini comme en (1. 3. 2) ; de même

$$(\inf_{\hat{G}_1, G} \hat{\eta})^* = \inf_{\hat{G}_1, G}(\hat{\eta}^*). \qquad (2.\,2.\,4a)$$

Il résulte alors de (2. 2. 3), (2. 2a) et (1. 3. 4) que

$$\varepsilon^* = \inf_{G_1, G}(\varepsilon_1^*) + \inf_{\hat{G}_1, G}(\hat{\eta}^*). \qquad (2.\,2.\,5)$$

D'autre part, si G s'écrit comme produit direct de deux de ses sous-groupes H et $\hat{H}$, définissons l'inflation de H à G d'une forme bilinéaire alternée $f \in \mathscr{L}^2_{alt}(H)$ en posant

$$(\inf_{H, G} f)(\sigma, \tau) = f(\sigma \bmod \hat{H}, \tau \bmod \hat{H}) \qquad (\sigma, \tau) \in G^2$$

ce qui induit l'application linéaire injective

$$\inf_{H, G} : \mathscr{L}^2_{alt}(H) \longrightarrow \mathscr{L}^2_{alt}(G). \qquad (2.\,2.\,6)$$
$$f \longmapsto \inf_{H, G} f$$

On vérifie que

$$(\inf_{G_1, G} \varepsilon_1)_* = \inf_{G_1, G}(\varepsilon_{1*}), \quad (\inf_{\hat{G}_1, G} \hat{\lambda})_* = \inf_{\hat{G}_1, G}(\hat{\lambda}_*). \qquad (2.\,2.\,7)$$

Il résulte alors de (2. 2. 3), (2. 3) et (1. 1. 1) que

$$\varepsilon_* = \inf_{G_1, G}(\varepsilon_{1*}) + \inf_{\hat{G}_1, G}(\hat{\lambda}_*) + \sum_{j=1}^{n} \inf_{G_1, G} f_j \wedge \inf_{\hat{G}_1, G} \hat{f}_j. \qquad (2.\,2.\,8)$$

2. 3. Condition nécessaire et suffisante d'égalité de deux classes de $H^2(G, \mathbb{F}_p)$.

(2. 3. 1) Quel que soit le p-groupe abélien G, une classe ε de $H^2(G, \mathbb{F}_p)$ est nulle si et seulement si $\varepsilon^* = 0$ et $\varepsilon_* = 0$.

Dans le cas linéaire cette équivalence se déduit de (2. 1. 5), de la proposition 2, et de (2. 1. 3) ; dans le cas quadratique, elle se déduit de (2. 2. 5), (2. 2. 8), et de l'injectivité des inflations $\inf_{G_1, G}$, $\inf_{\hat{G}_1, G}$.

Les classes ε sont donc caractérisées par leurs applications associées ε^* et ε_*.

3. DECOMPOSITION NUMERIQUE DE $H^2(G, \mathbb{F}_p)$.

On suppose maintenant que le p-groupe abélien G d'exposant p^m est le groupe de Galois d'une p-extension abélienne E/K, où K est un corps de caractéristique différente de p contenant le groupe μ_{p^m} des racines p^m-ièmes de l'unité.

Pour chaque facteur G_i de la décomposition de référence (1. 3. 1) de G, posons $\hat{G}_i = G/G_i$ $i=1,\ldots,g$; lorsque $g \geq 2$, on identifie $\hat{G}_i$ au sous-groupe $\times_{1 \leq j \neq i \leq g} G_j$.

Soit $E_i = E^{\hat{G}_i}$ le corps des invariants de $\hat{G}_i$. On a la décomposition en somme directe

$$(K^\times \cap E^{\times p})/K^{\times p} = \bigoplus_{i=1}^{g} (K^\times \cap E_i^{\times p})/K^{\times p}. \qquad (3.1)$$

Fixons-nous une fois pour toutes une racine primitive $\zeta_{p^m} \in \mu_{p^m}$ dans K ; d'où l'identification

$$lg_m : \mu_{p^m} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}. \qquad (3.2)$$

$$\zeta_{p^m}^n \longmapsto n$$

On note

$$\zeta_p n = \zeta_{p^m}^{p^{m-n}} \qquad n = 1, \ldots, m. \qquad (3.2a)$$

Si a est un élément du groupe de Kummer $(K^\times \cap E^{\times p})/K^{\times p}$ (ou de $K^\times \cap E^{\times p}$), on désigne par $(a)_E$ l'élément de $H^2(G, \mathbb{F}_p)$ défini par

$$\gamma(a^{1/p})/a^{1/p} = \zeta_p^{(a)_E(\gamma)} \qquad \gamma \in G.$$

3. 1. Le symbole $(.,.)_E$.

Quels que soient $a, b \in (K^\times \cap E^{\times p})/K^{\times p}$, posons

$$(a, b)_E = (a)_E \smile (b)_E$$

où $\smile$ est le cup-produit du début de la section 2. L'inflation commutant au cup-produit, on a pour toute sous-extension E'/K telle que $a, b \in (K^\times \cap E'^{\times p})/K^{\times p}$

$$(a, b)_E = \inf_{Gal(E'/K), G} (a, b)_{E'}. \qquad (3.1.1)$$

D'autre part, avec (2. 3)

$$\big((a, b)_E\big)_* = (a)_E \wedge (b)_E. \qquad (3.1.2)$$

De (2. 1. 1) puis (2. 3. 1) on déduit ensuite que

(3. 1. 3) Dans le cas linéaire

$$\big((a, b)_E\big)^* = 0 \ , \quad (c, c)_E = 0 \ , \quad a, b, c \in (K^\times \cap E^{xp})/K^{xp}.$$

Mais

(3. 1. 4) Dans le cas quadratique

$$\big((a, b)_E\big)^*(\gamma) = (a_1)_{E_1}(\gamma \bmod \hat{G}_1)(b_1)_{E_1}(\gamma \bmod \hat{G}_1) \qquad \gamma \in G$$

où a_1 et b_1 sont les composantes respectives de a et b dans $(K^\times \cap E_1^{xp})/K^{xp}$ (cf. (3. 1)). En particulier, si $m = 1$,

$$\big((a, b)_E\big)^*(\gamma) = (a)_E(\gamma)\,(b)_E(\gamma) \qquad \gamma \in G.$$

Cela résulte de la définition 1, de (2. 2a), et de la définition de l'inflation d'une forme quadratique précédant (1. 3. 2).
La valeur de $(c, c)_E$ dans le cas quadratique est donnée en (3. 2. 9).

3. 2. Le symbole $((\,.\,))_E$.

Donnons d'abord la définition dans le
Cas d'un groupe G p^m-abélien élémentaire (cf. 1. 3). En décomposant G en produit direct de groupes cycliques d'ordre p^m, on montre par la théorie de Kummer que

$$(K^\times \cap E^{xp})/K^{xp} = (K^\times \cap E^{xp^m})/K^{xp}. \qquad (3.\,2.\,1)$$

Pour tout $r \in K^\times \cap E^{xp^m}$, soit $(r)_{m,E} \in H^1(G, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$, l'application définie par

$$\gamma(r^{1/p^m})/r^{1/p^m} = \zeta_{p^m}^{(r)_{m,E}(\gamma)} \qquad \gamma \in G.$$

Prenons l'image du caractère $\frac{1}{p^m}(r)_{m,E}$ de G par le composé du cobord $\delta : H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^2(G, \mathbb{Z})$ et de l'homomorphisme canonique $\pi : H^2(G, \mathbb{Z}) \to H^2(G, \mathbb{F}_p)$. En identifiant la classe obtenue à l'un de ses cocycles, on a pour $\sigma, \tau \in G$

$$\pi\delta\Big(\frac{1}{p^m}(r)_{m,E}\Big)(\sigma, \tau) = \pi\Big(\frac{1}{p^m}\big((\tilde{r})_{m,E}(\sigma) + (\tilde{r})_{m,E}(\tau) - (\tilde{r})_{m,E}(\sigma\tau)\big)\Big) \qquad (3.\,2.\,2)$$

où $(\tilde{r})_{m,E}$ est un relèvement de $(r)_{m,E}$ à $\mathbb{Z}$. On en déduit en particulier, avec la compatibilité $\zeta_p = \zeta_{p^m}^{p^{m-1}}$ (cf. (3. 2a)), que

$$\Big(\pi\delta\Big(\frac{1}{p^m}(r)_{m,E}\Big)\Big)^* = (r)_E \qquad r \in K^\times \cap E^{xp^m} \qquad (3.\,2.\,3)$$

Définition 2 : Lorsque G est un groupe p^m-abélien élémentaire, on pose pour toute classe $c \in \left(K^\times \cap E^{\times p^m}\right)/K^{\times p}$

$$((c))_E = \pi\,\delta\left(\frac{1}{p^m}(r)_{m,E}\right)$$

où r est l'un quelconque des représentants de c appartenant à $K^\times \cap E^{\times p^m}$ (cf. (3. 2. 1)).

Cette définition a bien un sens car d'après (3. 2. 3), (3. 2. 2) avec (1. 1. 1), et (2. 3. 1), on a $\pi\,\delta\left(\frac{1}{p^m}(k^p)_{m,E}\right) = 0$ pour tout $k^p \in K^\times \cap E^{\times p^m}$. On donne dans [My 1] p. 104 une expression des classes $((c))_E$ en termes de cup-produits.

Dans les notations de la définition 2, on obtient immédiatement par fonctorialité de l'inflation que pour l'extension $M = K(r^{1/p^m})$

$$((c))_E = \inf_{Gal(M/K),\,G} ((c))_M. \qquad (3.2.4)$$

D'autre part, il est clair avec (3. 2. 2) que $((c))_E \in Ext^1(G,\mathbb{F}_p)$; en particulier $\left(((c))_E\right)_* = 0$. Ensuite par (3. 2. 3)

$$\left(((c))_E\right)^* = (c)_E. \qquad (3.2.5)$$

Avec (1. 1. 2a), on en déduit l'isomorphisme de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels

$$(K^\times \cap E^{\times p})/K^{\times p} \xrightarrow{\sim} Ext^1(G,\mathbb{F}_p). \qquad (3.2.6)$$

$$c \longmapsto ((c))_E$$

Revenons maintenant au

Cas général : G est un p-groupe abélien quelconque. D'après (3. 1), tout $c \in (K^\times \cap E^{\times p})/K^{\times p}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$c = \prod_{i=1}^{g} c_i \quad , \quad c_i \in (K^\times \cap E_i^{\times p})/K^{\times p} \qquad i = 1, \ldots, g, \qquad (3.2.7)$$

et par la définition 2, on sait associer à chaque c_i une classe $((c_i))_{E_i} \in Ext^1(G_i,\mathbb{F}_p)$.

Définition 2a : On pose

$$((c))_E = \sum_{i=1}^{g} \inf_{G_i,\,G} ((c_i))_{E_i} \qquad c \in (K^\times \cap E^{\times p})/K^{\times p}$$

où $\inf_{G_i,\,G}$ désigne l'inflation de G_i à G.

Clairement

$$\inf_{G_i, G}((c_i))_{E_i} = ((c_i))_E \quad i = 1, \ldots, g, \quad ((c))_E = \sum_{i=1}^{g} ((c_i))_E . \qquad (3.2.8)$$

De plus si $M_i = K\left(r_i^{1/p^{m_i}}\right)$ où r_i est un représentant de c_i dans $K^x \cap E_i^{xp^{m_i}}$, on a

$$((c_i))_E = \inf_{Gal(M_i/K), G}((c_i))_{M_i} \quad i = 1, \ldots, g. \qquad (3.2.4a)$$

(3.2.9) Dans le cas quadratique, on a $(c, c)_E = ((c_1))_E$ pour tout $c \in (K^x \cap E^{x2})/K^{x2}$ où c_1 est la composante de c dans $(K^x \cap E_1^{x2})/K^{x2}$.

En effet, soit $\hat{E}_1$ le corps des invariants du sous-groupe G_1 : $\hat{E}_1 = E^{G_1}$. Ecrivons $c = c_1 \hat{c}_1$ avec $\hat{c}_1 \in (K^x \cap \hat{E}_1^{x2})/K^{x2}$. Par la bilinéarité du cup-produit et sa symétrie pour $p = 2$, on obtient $(c, c)_E = (c_1, c_1)_E + (\hat{c}_1, \hat{c}_1)_E$. Il résulte de (3.1.3) appliqué à $\hat{G}_1 = G/G_1$, puis de (3.1.1), que $(\hat{c}_1, \hat{c}_1)_E = 0$. D'autre part avec (3.1.4) et (3.2.5)

$$\left((c_1, c_1)_{E_1}\right)^* = (c_1)_{E_1} = \left(((c_1))_{E_1}\right)^* .$$

On déduit alors de (2.3.1) que $(c_1, c_1)_{E_1} = ((c_1))_{E_1}$ (cf. [My 2], remarque du 2.1.). Ainsi par (3.2.8)

$$(c, c)_E = \inf_{G_1, G}(c_1, c_1)_{E_1} = ((c_1))_E$$

ce qui établit (3.2.9).

Par ailleurs d'après (1.3.4)

$$\mathrm{res}_{G, G_i}((c))_E = ((c_i))_{E_i} \quad i = 1, \ldots, g. \qquad (3.2.10)$$

Donc par la définition 1 et (3.2.5)

$$\left(((c))_E\right)^* = (c)_E \qquad c \in (K^x \cap E^{xp})/K^{xp}. \qquad (3.2.5a)$$

Avec (1.1.2a), on obtient l'isomorphisme de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels

$$(K^x \cap E^{xp})/K^{xp} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{F}_p). \qquad (3.2.6a)$$

$$c \longmapsto ((c))_E$$

3.3. Décompositions numériques de classes de cohomologie.

Proposition 3 : Pour toute classe $\varepsilon \in H^2(G, \mathbb{F}_p)$, il existe dans $(K^x \cap E^{xp})/K^{xp}$ un élément a_o, unique dans le cas linéaire, et une famille a_i, b_i $a_i \neq b_i$, $i = 1, \ldots, n$, tels que l'on ait

$$\varepsilon = ((a_o))_E + \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i)_E .$$

Une telle décomposition sera dite "décomposition numérique de ε".

Démonstration : Dans le cas linéaire, il suffit d'utiliser la décomposition en somme directe (2. 1. 2), l'isomorphisme (3. 2. 6a), et l'isomorphisme (2. 1. 3) avec (3. 1. 2). Dans le cas quadratique, on écrit ε sous la forme

$$\varepsilon = \inf_{G_1, G} \varepsilon_1 + \inf_{\hat{G}_1, G} (\hat{\eta}+\hat{\lambda}) + \sum_{j=1}^{n} \inf_{G_1, G} f_j \smile \inf_{\hat{G}_1, G} \hat{f}_j$$

où les notations sont celles de (2. 2. 3). Le sous-groupe G_1 étant abélien élémentaire, on sait par la proposition 1 de [My 2] que ε_1 admet une décomposition numérique dans $H^2(G_1, \mathbb{F}_2)$; et il en est de même de $\hat{\eta}+\hat{\lambda} \in H^2(\hat{G}_1, \mathbb{F}_2)$ puisque le cas de $\hat{G}_1$ est linéaire. La conclusion s'obtient alors en procédant par inflation à l'aide de (3. 2. 8) et de (3. 1. 1). q. e. d.

Remarques : 1. Si G est un 2-groupe abélien élémentaire, on a par (3. 2. 9)

$$((a))_E = (a, a)_E \qquad\qquad a \in (K^{\times} \cap E^{\times p})/K^{\times p} .$$

Mais cette identité n'est pas vraie en général car dans le cas linéaire $(a, a)_E = 0$ (cf. (3. 1. 3)).

2. On sait d'après Merkurjev et Suslin que les classes (a, b), obtenues en étendant la définition des $(a, b)_E$ à une clôture séparable de K, engendrent le noyau $Br_p(K)$ de la multiplication par p dans le groupe de Brauer de K (voir introduction). Mais d'après la proposition 3, les classes $(a, b)_E$ n'engendrent pas $H^2(G, \mathbb{F}_p)$ en général.

4. ESPECES DE CLASSES DE COHOMOLOGIE .

D'après la proposition 3, chaque classe $\mathfrak{c} \in H^2(G,\mathbb{F}_p)$ admet une décomposition numérique, mais il n'y a pas en général unicité de celle-ci. On va voir cependant que les différentes décompositions numériques d'une classe donnée se réduisent toutes à un seul type de décomposition, d'où une notion d'espèce de classe de cohomologie. Il n'y a dans notre situation que quatre de ces espèces.

Les notations sont celles de la section 3.

4. 1. Le cas m = 1 .

Le p-groupe G est donc ici abélien élémentaire.

Définition 3 : Nous disons qu'une classe $\mathfrak{c} \in H^2(G,\mathbb{F}_p)$ est de première [resp. de seconde ; resp. de troisième] espèce si et seulement s'il existe des éléments a_i $(i=0,\ldots,r)$, b_i quand $r \neq 0$ $(i=1,\ldots,r)$ [resp. $a_i, b_i, i=1,\ldots,r$] linéairement indépendants dans $(K^\times \cap E^{xp})/K^{xp}$ tels que l'on ait

$$\mathfrak{c} = ((a_o))_E \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{c} = ((a_o))_E + \sum_{i=1}^{r} (a_i, b_i)_E$$

[resp. $\mathfrak{c} = \sum_{i=1}^{r} (a_i, b_i)_E$;

$$\text{resp. } \mathfrak{c} = \begin{cases} ((a_1))_E + \sum_{i=1}^{r} (a_i, b_i)_E & \text{si } p \neq 2 \\ ((a_1 b_1))_E + \sum_{i=1}^{r} (a_i, b_i)_E & \text{si } p = 2 \end{cases}].$$

Théorème 1 : Lorsque G est un p-groupe abélien élémentaire, tout élément non nul de $H^2(G,\mathbb{F}_p)$ est de l'une, et d'une seule, des trois espèces de la définition 3.

Démonstration : Que toute classe $\mathfrak{c} \in H^2(G,\mathbb{F}_p) - \{0\}$ soit de l'une des trois espèces précédentes est démontré dans le théorème 1 de [My 2] ou de [My 1] p. 59. Il reste à prouver que $\mathfrak{c}$ ne peut pas être à la fois de deux espèces différentes. Si $r = 0$, il est clair par définition que $\mathfrak{c}$ est toujours de première espèce. Supposons donc $r \geq 1$. Quelle que soit son espèce, $\mathfrak{c}$ s'écrit alors

$$\mathfrak{c} = ((c))_E + \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1}, c_{2n})_E$$

où la famille $\{c_i\}_{1 \leq i \leq 2r}$ est libre dans $(K^\times \cap E^{xp})/K^{xp}$. Complétons cette famille en une $\mathbb{F}_p$-base $\{c_i\}_{1 \leq i \leq d}$ de $(K^\times \cap E^{xp})/K^{xp}$. Via l'isomorphisme sur le dual de G

$$(K^\times \cap E^{xp})/K^{xp} \xrightarrow{\sim} G^*$$
$$a \longmapsto (a)_E$$

les c_i induisent la base $\{\sigma_i\}_{1\le i\le d}$ du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel G définie par

$$(c_i)_E(\sigma_j) = \delta_{ij} \qquad 1 \le i, j \le d$$

où δ_{ij} désigne le delta de Kronecker. D'après (3. 1. 2), on a

$$\varepsilon_* = \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1})_E \wedge (c_{2n})_E .$$

Il est clair que la matrice de ε_* dans la base $\{\sigma_i\}_{1\le i\le d}$ est de rang 2r. Donc la dimension sur $\mathbb{F}_p$ du radical de ε_* vaut d-2r. Précisément, ce radical est le sous-espace engendré par les σ_i pour $i = 2r+1, \ldots, d$:

$$\operatorname{rad} \varepsilon_* = \langle \{\sigma_{2r+1}, \ldots, \sigma_d\} \rangle .$$

Soit $0 \to \mathbb{F}_p \xrightarrow{\iota} U \xrightarrow{\pi} G \to 0$ une extension de G par $\mathbb{F}_p$ de classe ε.

$$\nu \longmapsto \zeta_p^{\nu}$$

D'après (1. 2. 2) appliqué avec $n = m = 1$, on a

$$u^p = \zeta_p^{\varepsilon^*(\pi(u))} \qquad u \in U .$$

Distinguons maintenant chacune des trois espèces.

1. Quand ε est de première espèce, on peut écrire

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1}, c_{2n})_E + ((c_{2r+1}))_E$$

Il résulte de (3. 1. 3) si $p \neq 2$, de (3. 1. 4) si $p = 2$, et de (3. 2. 5) que

$$\varepsilon^*(\sigma_{2r+1}) = (c_{2r+1})_E(\sigma_{2r+1}) = 1 .$$

Soit alors $u \in U$ tel que $\pi(u) = \sigma_{2r+1}$. On a $u^p = \zeta_p$ et, par (1. 2. 1a), $u \in Z(u)$ puisque $\sigma_{2r+1} \in \operatorname{rad} \varepsilon_*$. Le centre de U n'est donc pas d'exposant p.

2. Quand ε est de seconde espèce, écrivons $\varepsilon = \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1}, c_{2n})_E$. Si $p \neq 2$, on a directement $\varepsilon^* = 0$ par (3. 1. 3). Si $p = 2$, on déduit de (3. 1. 4) que $\varepsilon^* = \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1})_E (c_{2n})_E$, d'où $\varepsilon^*(\sigma_i) = 0$ $(i = 2r+1, \ldots, d)$, de sorte que la restriction de ε^* au radical de ε_* est nulle. On voit donc que dans ce cas le centre de U est d'exposant p.

3. Quand ε est de troisième espèce, le centre de U est aussi d'exposant p. En effet, si $p \neq 2$, on écrit $\varepsilon = ((c_1))_E + \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1}, c_{2n})_E$ d'où $\varepsilon^* = (c_1)_E$, et

par restriction $\mathrm{res}_{G,\,\mathrm{rad}\,\mathfrak{c}_*}(\mathfrak{c}^*) = 0$; si $p = 2$, on écrit $\mathfrak{c} = ((c_1 c_2))_E + \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1}, c_{2n})_E$ d'où $\mathfrak{c}^* = (c_1)_E + (c_2)_E + \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1})_E (c_{2n})_E$, et comme pour la seconde espèce $\mathrm{res}_{G,\,\mathrm{rad}\,\mathfrak{c}_*}(\mathfrak{c}^*) = 0$.

Le raisonnement étant valable pour toute extension de G par $\mathbb{F}_p$ de classe $\mathfrak{c}$, on a montré que $\mathfrak{c}$ ne peut être à la fois, ni de première et de seconde espèce, ni de première et de troisième espèce. Reste à prouver que $\mathfrak{c}$ ne peut être simultanément de seconde et de troisième espèce.

- C'est clair si $p \neq 2$ d'après ce qui précède, car ou bien $\mathfrak{c}^* = 0$ et le groupe U est d'exposant p, ou bien $\mathfrak{c}^*(\sigma_1) = (c_1)_E(\sigma_1) = 1$ et U est d'exposant p^2.

- Si $p = 2$, les arguments précédents ne suffisent plus. La conclusion résulte de la classification des 2-groupes extraspéciaux. En effet, U s'écrit comme produit direct du noyau $\mathrm{Ker}(\mathrm{res}_{G,\,\mathrm{rad}\,\mathfrak{c}_*}(\mathfrak{c}^*)) = \mathrm{rad}\,\mathfrak{c}_*$ et d'un groupe U' qui, d'après la proposition 2 de [My 2] ou de [My 1] p. 63, s'écrit comme produit central de r copies du groupe diédral d'ordre 8 si $\mathfrak{c}$ est de seconde espèce, ou de r-1 copies de ce groupe et d'un groupe quaternionien d'ordre 8 si $\mathfrak{c}$ est de troisième espèce. Avoir $\mathfrak{c}$ de seconde et de troisième espèce impliquerait un isomorphisme entre ces produits centraux, ce qui n'est pas possible en vertu de [H] p. 355, Satz 13. 8. q. e. d.

Remarque : Au moyen des résultats de la classification des formes quadratiques non dégénérées sur $\mathbb{F}_2$ (cf. [Di] chap. I § 16, et [Dy]), il est possible de donner une autre démonstration du théorème 1 dans le cas $p = 2$ n'utilisant pas la classification des 2-groupes extraspéciaux.

4. 2. Le cas général .

Le p-groupe G est maintenant abélien quelconque. Par définition, $\hat{G}_g = G/G_g$ et $E_g = E^{\hat{G}_g}$ (cf. début de la section 3). Posons $\hat{E}_g = E^{G_g}$. Soit $((\hat{E}_g))$ le sous-espace des classes $((a))_E$ dont $a \in (K \cap \hat{E}_g^{xp})/K^{xp}$, autrement dit l'inflation de $\hat{G}_g$ à G de $\mathrm{Ext}^1(\hat{G}_g, \mathbb{F}_p)$

$$((\hat{E}_g)) := \{((a))_E \in \mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{F}_p)/a \in (K^x \cap \hat{E}_g^{xp})/K^{xp}\} = \inf_{\hat{G}_g,\,G} \mathrm{Ext}^1(\hat{G}_g, \mathbb{F}_p).$$

Définition 4 : Nous disons qu'une classe $\mathfrak{c} \in H^2(G, \mathbb{F}_p)$ est de première [resp. de seconde ; resp. de troisième] espèce si et seulement s'il existe des éléments a_i $(i=0,\ldots,r)$, b_i quand $r \neq 0$ $(i=1,\ldots,r)$ [resp. a_i, b_i, $i=1,\ldots,r$] linéairement

indépendants dans $(K^{\times} \cap E^{xp})/K^{xp}$ tels que l'on ait

$$\mathfrak{c} \equiv ((a_o))_E \bmod((\hat{E}_g)) \quad \text{ou} \quad \mathfrak{c} \equiv ((a_o))_E + \sum_{i=1}^{r} (a_i, b_i)_E \bmod((\hat{E}_g))$$

avec, dans les deux cas, $a_o \in (K^{\times} \cap E_g^{xp})/K^{xp}$

[resp. $\mathfrak{c} \equiv \sum_{i=1}^{r} (a_i, b_i)_E \bmod((\hat{E}_g))$;

resp. $\mathfrak{c} \equiv \begin{cases} ((a_1))_E + \sum_{i=1}^{r} (a_i, b_i)_E \bmod((\hat{E}_g)) \text{ avec } a_1 \in (K^{\times} \cap E_g^{xp})/K^{xp} \text{ si } p \neq 2 \text{ ou } m \neq 1 \\ ((a_1 b_1))_E + \sum_{i=1}^{r} (a_i, b_i)_E \bmod(((\hat{E}_g)) = \{0\}) \quad \text{si } p = 2 \text{ et } m = 1 \end{cases}$].

En outre, les classes de $((\hat{E}_g))$ sont dites d'espèce nulle.

Remarque : Lorsque G est un p-groupe abélien élémentaire, la définition 4 coïncide avec la définition 3 car $G = G_g$ donc $((\hat{E}_g)) = \{0\}$, et les congruences deviennent des égalités. En particulier, la classe nulle est dans ce cas la seule classe d'espèce nulle.

Théorème 2 : Tout élément de $H^2(G, \mathbb{F}_p)$ est de l'une, et d'une seule, des quatre espèces de la définition 4.

Démonstration : Le résultat est vrai pour $m = 1$ en vertu du théorème 1 et de la remarque ci-dessus. On peut donc se placer dans le cas $m \geq 2$.

1. Montrons d'abord que toute classe $\mathfrak{c} \in H^2(G, \mathbb{F}_p)$ est de l'une des quatre espèces annoncées.

Si $\mathfrak{c} \in \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{F}_p)$, on sait par l'isomorphisme (3. 2. 6a) qu'il existe e dans $(K^{\times} \cap E^{xp})/K^{xp}$ tel que $\mathfrak{c} = ((e))_E$. Comme

$$(K^{\times} \cap E^{xp})/K^{xp} = (K^{\times} \cap \hat{E}_g^{xp})/K^{xp} \oplus (K^{\times} \cap E_g^{xp})/K^{xp},$$

on a $\mathfrak{c} \equiv ((e_g))_E \bmod((\hat{E}_g))$ où e_g désigne la composante de e dans $(K^{\times} \cap E_g^{xp})/K^{xp}$. Les classes de $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{F}_p)$ sont donc d'espèce nulle ou de première espèce.

Ceci étant, soit $\mathfrak{c} = ((e))_E + \sum_i (e_i, e_i')_E$ où la somme finie sur i est une classe n'appartenant pas à $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{F}_p)$. Soit F le corps des invariants du sous-groupe de Frattini G^p de G : $F = E^{G^p}$. On a l'égalité des groupes de Kummer

$$(K^{\times} \cap E^{xp})/K^{xp} = (K^{\times} \cap F^{xp})/K^{xp}.$$

Donc par (3. 1. 1)

$$\sum_i (e_i, e_i')_E = \inf_{G/G^p,\, G} \left(\sum_i (e_i, e_i')_F \right).$$

D'après le théorème 1 appliqué à G/G^p, il existe une famille $\{c_{2n-1}, c_{2n}\}_{1\le n\le r}$, libre dans $(K^\times \cap E^{\times p})/K^{\times p}$, telle que l'on ait

$$\sum_i (e_i, e_i')_F = ((c))_F + \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1}, c_{2n})_F .$$

L'inflation de G/G^p à G de $((c))_F$ n'est pas égale à $((c))_E$ en général, mais c'est une classe de $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{F}_p)$ qui s'écrit donc $((a))_E$ pour un certain $a \in (K^\times \cap E^{\times p})/K^{\times p}$. Ainsi $\varepsilon = ((ea))_E + \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1}, c_{2n})_E$, d'où

$$\varepsilon \equiv ((a_g))_E + \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1}, c_{2n})_E \mod((\hat{E}_g))$$

a_g désignant la composante de ea dans $(K^\times \cap E_g^{\times p})/K^{\times p}$.

Deux cas se présentent selon que la famille $\{a_g\} \cup \{c_{2n-1}, c_{2n}\}_{1\le n\le r}$ est libre ou liée dans $(K^\times \cap E^{\times p})/K^{\times p}$. Quand elle est libre, ε est de première espèce. Quand elle est liée, on peut écrire

$$a_g = \prod_{n=1}^{r} c_{2n-1}^{m_{2n-1}} c_{2n}^{m_{2n}} \qquad m_{2n-1}, m_{2n} \in \mathbb{F}_p \ , \ n = 1, \dots, r,$$

d'où

$$\varepsilon \equiv \Big(\Big(\prod_{n=1}^{r} c_{2n-1}^{m_{2n-1}} c_{2n}^{m_{2n}}\Big)\Big)_E + \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1}, c_{2n})_E \mod((\hat{E}_g)).$$

Adoptons les notations suivantes pour tout $n = 1, \dots, r$:

- si $m_{2n-1} = m_{2n} = 0$, soit $\alpha_n = c_{2n-1}$ et $\beta_n = c_{2n}$;
- si $m_{2n-1} \neq 0$ ou $m_{2n} \neq 0$, soit $\alpha_n = c_{2n-1}^{m_{2n-1}} c_{2n}^{m_{2n}}$ et $\beta_n = c_{2n-1}^{\ell_{2n-1}} c_{2n}^{\ell_{2n}}$

où l'on choisit les entiers ℓ_{2n-1}, ℓ_{2n} de $\mathbb{F}_p$ tels que l'on ait

$$m_{2n-1} \ell_{2n} - m_{2n} \ell_{2n-1} = 1.$$

On vérifie que la famille $\{\alpha_n, \beta_n\}_{1\le n\le r}$ est libre comme l'est $\{c_{2n-1}, c_{2n}\}_{1\le n\le r}$.

On a $(\alpha_n, \beta_n)_E = (c_{2n-1}, c_{2n})_E$ quand $m_{2n-1} = m_{2n} = 0$, et par la bilinéarité du cup-produit

$$(\alpha_n, \beta_n)_E = m_{2n-1} \ell_{2n-1} (c_{2n-1}, c_{2n-1})_E + m_{2n} \ell_{2n} (c_{2n}, c_{2n})_E + (c_{2n-1}, c_{2n})_E$$

si $m_{2n-1} \neq 0$ ou $m_{2n} \neq 0$.

Dans le cas linéaire, il en résulte par (3. 1. 3) que

$$(\alpha_n, \beta_n)_E = (c_{2n-1}, c_{2n})_E \qquad n = 1, \dots, r.$$

Dans le cas quadratique, on a $G_g \leq \hat{G}_1$ puisque $m \geq 2$, d'où $E_1 \leq \hat{E}_g$ et par (3.2.9)

$$(c, c)_E \equiv 0 \bmod((\hat{E}_g)) \qquad c \in (K^\times \cap E^{\times 2})/K^{\times 2},$$

de sorte que

$$(\alpha_n, \beta_n)_E \equiv (c_{2n-1}, c_{2n})_E \bmod((\hat{E}_g)) \qquad n = 1, \ldots, r.$$

Donc dans tous les cas

$$\epsilon \equiv \Big(\Big(\prod_{n=1}^{r} c_{2n-1}^{m_{2n-1}} c_{2n}^{m_{2n}}\Big)\Big)_E + \sum_{n=1}^{r} (\alpha_n, \beta_n)_E \bmod((\hat{E}_g)).$$

De plus, quitte à renuméroter les c, on peut supposer que les indices n tels que $m_{2n-1} \neq 0$ ou $m_{2n} \neq 0$ sont les s premiers. Si $s = 0$, la classe

$$\epsilon \equiv \sum_{n=1}^{r} (\alpha_n, \beta_n)_E \bmod((\hat{E}_g))$$

est de seconde espèce. Si $1 \leq s \leq r$, écrivons

$$\epsilon \equiv ((\alpha_1 \cdots \alpha_s))_E + \sum_{n=1}^{s} (\alpha_n, \beta_n)_E + \sum_{n=s+1}^{r} (\alpha_n, \beta_n)_E \bmod((\hat{E}_g))$$

où $\alpha_1 \cdots \alpha_s = a_g \in (K^\times \cap E_g^{\times p})/K^{\times p}$. Lorsque $s = 1$, ϵ est directement de troisième espèce. Lorsque $2 \leq s \leq r$, on a

$$\epsilon \equiv ((\alpha_1 \cdots \alpha_s))_E + (\alpha_1 \cdots \alpha_s, \beta_1)_E + \sum_{n=2}^{s} (\alpha_n, \beta_1^{-1}\beta_n)_E + \sum_{n=s+1}^{r} (\alpha_n, \beta_n)_E \bmod((\hat{E}_g)).$$

Pour que ϵ soit de troisième espèce, il suffit donc que la famille

$$\{\alpha_1 \cdots \alpha_s, \beta_1\} \cup \{\alpha_n, \beta_1^{-1}\beta_n\}_{2 \leq n \leq s} \cup \{\alpha_n, \beta_n\}_{s+1 \leq n \leq r}$$

soit libre dans $(K^\times \cap E^{\times p})/K^{\times p}$, ce qui est bien le cas.

2. A montrer maintenant qu'une classe ϵ donnée ne peut être de deux espèces différentes. C'est clair par définition lorsque $\epsilon \equiv 0 \bmod((\hat{E}_g))$, ou $\epsilon \equiv ((a_o))_E \bmod((\hat{E}_g))$. En vertu du 1., on peut donc supposer que

$$\epsilon \equiv ((c))_E + \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1}, c_{2n})_E \bmod((\hat{E}_g))$$

où la famille $\{c_i\}_{1 \leq i \leq 2r}$ est libre dans $(K^\times \cap E^{\times p})/K^{\times p}$. Complétons cette famille en une $\mathbb{F}_p$-base $\{c_i\}_{1 \leq i \leq d}$ de $(K^\times \cap E^{\times p})/K^{\times p}$. Via les isomorphismes

$$(K^\times \cap E^{\times p})/K^{\times p} = (K^\times \cap F^{\times p})/K^{\times p} \xrightarrow{\sim} H^1(G/G^p, \mathbb{F}_p) = (G/G^p)^* \xleftarrow{\sim} G/G^p$$

$$c_i \longmapsto (c_i)_F = \bar{\sigma}_i^* \longleftarrow \bar{\sigma}_i$$

les c_i induisent la base $\{\bar\sigma_i\}_{1\le i\le d}$ du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel G/G^p définie par

$$(c_i)_F(\bar\sigma_j) = \bar\sigma_i^*(\bar\sigma_j) = \delta_{ij} \qquad 1\le i,j\le d$$

où les σ_i, $i=1,\dots,d$, engendrent G. Or pour tout $c\in(K^\times\cap E^{xp})/K^{xp}$, $(c)_E(\gamma) = (c)_F(\bar\gamma)$ $\gamma\in G$; d'où

$$(c_i)_E(\sigma_j) = \delta_{ij} \qquad 1\le i,j\le d.$$

Soit $\bar\varepsilon_*$ la forme bilinéaire de G/G^p obtenue par le passage au quotient de ε_* : $\bar\varepsilon_*(\bar\sigma,\bar\tau) = \varepsilon_*(\sigma,\tau)$ $\bar\sigma,\bar\tau\in G/G^p$. De $\varepsilon_* = \sum_{n=1}^{r}(c_{2n-1})_E\wedge(c_{2n})_E$ résulte que le rang de $\bar\varepsilon_*$ est égal à $2r$. Donc la dimension du radical de $\bar\varepsilon_*$ vaut $d-2r$. Précisément, ce radical est le sous-espace de G/G^p engendré par les $\bar\sigma_i$ pour $i=2r+1,\dots,d$:

$$\operatorname{rad}\bar\varepsilon_* = \langle\{\bar\sigma_{2r+1},\dots,\bar\sigma_d\}\rangle.$$

De plus, il est évident que $\operatorname{rad}\bar\varepsilon_* = \operatorname{rad}\varepsilon_*/G^p$ où $\operatorname{rad}\varepsilon_*$ désigne le radical de ε_*, de sorte que

$$\operatorname{rad}\varepsilon_* = \langle\{\sigma_{2r+1},\dots,\sigma_d\}\rangle G^p.$$

D'autre part, en appliquant (1. 3. 4) à la définition 1, il vient

$$\operatorname{res}_{G,G_g}(\varepsilon^*) = (\operatorname{res}_{G,G_g}\varepsilon)^*.$$

Donc

$$(\operatorname{res}_{G,G_g}(\varepsilon^*))(\gamma) = \varepsilon_m^*(\gamma) \qquad \gamma\in G_g.$$

Soit alors $0\to\mathbb{F}_p\xrightarrow{\iota}U\xrightarrow{\pi}G\to 0$ une extension de classe ε.

$$\nu\longmapsto\zeta_p^\nu$$

Comme $G^{(m)}=G$, on déduit de (1. 2. 2) que sous la condition $\gamma\in G_g$ on a

$$u^{p^m} = \zeta_p^{\varepsilon^*(\gamma)}$$

pour tout $u\in U$ tel que $\pi(u)=\gamma$.

Par ailleurs, il est clair à partir de (1. 3. 1) que $G/G^p = \times_{i=1}^{g}(G_i/G_i^p)$. Si l'on pose $F_i = F^{\hat{G_i}/G_i^p}$ où $\hat{G_i}/G_i^p = \times_{1\le j\ne i\le g}(G_j/G_j^p)$ $i=1,\dots,g$, on vérifie que

$$F_i = E_i^{G_i^p},\quad (K^\times\cap E_i^{xp})/K^{xp} = (K^\times\cap F_i^{xp})/K^{xp},\qquad i=1,\dots,g.$$

Distinguons maintenant chacune des trois espèces non nulles.

2. 1. Quand ε est de première espèce, on peut écrire

$$\varepsilon = ((a))_E + \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1}, c_{2n})_E + ((c_{2r+1}))_E$$

où $a \in (K^\times \cap \hat{E}_g^{xp})/K^{xp}$ et $c_{2r+1} \in (K^\times \cap E_g^{xp})/K^{xp} = (K^\times \cap F_g^{xp})/K^{xp}$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K(c_{2r+1}^{1/p})/K)$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(F_g/K) = G_g/G_g^p \leq G/G^p$, et il est engendré par σ_{2r+1} puisque $(c_{2r+1})_F(\bar{\sigma}_{2r+1}) = 1$. On peut donc choisir le représentant σ_{2r+1} dans G_g. En particulier $(a)_E(\sigma_{2r+1}) = 0$. Notons u_{2r+1} un élément de U tel que $\pi(u_{2r+1}) = \sigma_{2r+1}$.

2. 1. 1. Cas linéaire . Il résulte de **(3. 1. 3)** et **(3. 2. 5)** que

$$\varepsilon^* = (a)_E + (c_{2r+1})_E .$$

Comme $\sigma_{2r+1} \in G_g$, on a donc

$$u_{2r+1}^{p^m} = \zeta_p^{\varepsilon^*(\sigma_{2r+1})} = \zeta_p .$$

2. 1. 2. Cas quadratique . Comme $m \geq 2$, on a $g \geq 2$, d'où $G_g \leq \hat{G}_1$ et σ_{2r+1} est congru à l'identité modulo $\hat{G}_1$. Il résulte alors de **(3. 1. 4)** et **(3. 2. 5)** que

$$\varepsilon^*(\sigma_{2r+1}) = (c_{2r+1})_E(\sigma_{2r+1}) = 1 ;$$

donc à nouveau $u_{2r+1}^{p^m} = \zeta_p$.

Ainsi pour ε de première espèce, l'exposant de l'image réciproque $\pi^{-1}(G_g)$ est égal à p^{m+1}.

2. 2. Quand ε est de seconde espèce, écrivons

$$\varepsilon = ((a))_E + \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1}, c_{2n})_E \quad , \quad a \in (K^\times \cap \hat{E}_g^{xp})/K^{xp} .$$

2. 2. 1. Cas linéaire . On a cette fois $\varepsilon^* = (a)_E$, donc pour tout $u \in U$ tel que $\pi(u) \in G_g$

$$u^{p^m} = \zeta_p^{(a)_E(\pi(u))} = 1 .$$

2. 2. 2. Cas quadratique . Comme au 2.1.2., les éléments de G_g sont congrus à l'identité modulo $\hat{G}_1$, de sorte que $\mathfrak{c}^*(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in G_g$.

Ainsi pour $\mathfrak{c}$ de seconde espèce, l'exposant de $\pi^{-1}(G_g)$ est égal à p^m.

2. 3. Quand $\mathfrak{c}$ est de troisième espèce, on peut écrire

$$\mathfrak{c} = ((a))_E + ((c_1))_E + \sum_{n=1}^{r} (c_{2n-1}, c_{2n})_E$$

où $a \in (K^\times \cap \hat{E}_g^{xp})/K^{xp}$ et $c_1 \in (K^\times \cap E_g^{xp})/K^{xp} = (K^\times \cap F_g^{xp})/K^{xp}$. En répétant avec c_1 et $\bar{\sigma}_1$ le raisonnement fait au début du 2. 1. avec c_{2r+1} et $\bar{\sigma}_{2r+1}$, on montre que le représentant σ_1 peut être choisi dans G_g. Donc en particulier $(a)_E(\sigma_1)=0$. Notons u_1 un élément de U tel que $\pi(u_1) = \sigma_1$. En répétant avec c_1, σ_1 et u_1 le raisonnement fait en 2. 1. 1. et 2. 1. 2. avec c_{2r+1}, σ_{2r+1} et u_{2r+1}, on établit que pour $\mathfrak{c}$ de troisième espèce, l'exposant de $\pi^{-1}(G_g)$ est égal à p^{m+1}.

Tout ceci valant pour une extension quelconque de G par $\mathbb{F}_p$ de classe $\mathfrak{c}$, on a prouvé que $\mathfrak{c}$ ne peut être à la fois de première et de seconde espèce, ni de seconde et de troisième espèce. Reste à montrer que $\mathfrak{c}$ ne peut être simultanément de première et de troisième espèce. Cela résulte de ce que $\operatorname{rad} \mathfrak{c}_* = \langle \{\sigma_{2r+1}, \ldots, \sigma_d\} \rangle$. En effet, dans la situation du 2. 1. on a $\sigma_{2r+1} \in G_g \cap \operatorname{rad} \mathfrak{c}_*$, de sorte que $\pi^{-1}(G_g \cap \operatorname{rad} \mathfrak{c}_*)$ est d'exposant p^{m+1} ; alors qu'au 2. 3., $\sigma_1 \notin \operatorname{rad} \mathfrak{c}_*$, donc cette image réciproque est seulement d'exposant p^m. Q. E. D.

Remarque : Le théorème 2 induit en particulier une classification des extensions d'un p-groupe abélien par un groupe d'ordre p.

Références

[Di] J. Dieudonné,
La géométrie des groupes classiques, 3ème édition, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[Dy] R.H. Dye,
On the Arf invariant, J. Algebra 53 (1978), 36-39.

[H] B. Huppert,
Endliche Gruppen I, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[J] D.L. Johnson,
Presentation of groups, L.M.S. Lecture Note Series 22, Cambridge, 1976.

[My1] R. Massy,
Sur la construction à noyau d'ordre p des p-extensions galoisiennes, Thèse d'Etat, Bordeaux, 1986.

[My2] R. Massy,
Formules de construction de p-extensions galoisiennes, C.R. Acad. Sc. Paris, série I, 303 (1986), 591-594.

[My3] R. Massy,
Construction de p-extensions galoisiennes d'un corps de caractéristique différente de p, J. Algebra 109 (1987), 508-535.

[M-S] A.S. Merkurjev and A.A. Suslin,
K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism, Izv. Akad. Nauk SSSR 46 (1982), 1011-1046. English transl. Math. USSR Izv. 21 (1983), 307-340.

[So] C. Soulé,
K_2 et le groupe de Brauer [d'après A.S. Merkurjev et A.A. Suslin], Sém. Bourbaki, 1982/83, exp. 601.

[W] E. Weiss,
Cohomology of groups, Academic Press, New York, 1969.

Richard MASSY
Université de Bordeaux I
U.A. CNRS n°040226
Département de Mathématiques
351, Cours de la Libération
F - 33405 TALENCE Cedex