THÉORIE DES NOMBRES

BESANÇON

Année 1983 - 1984

REPRÉSENTATIONS ℓ-ADIQUES
ET INVARIANTS CYCLOTOMIQUES

Jean-François JAULENT

REPRÉSENTATIONS ℓ-ADIQUES ET INVARIANTS CYCLOTOMIQUES

Par

Jean-François JAULENT
Université de Franche-Comté
Faculté des Sciences et des Techniques
25030 Besançon Cedex

Cet article explore un certain nombre de relations liées à la dualité :

- La première met en balance la ℓ-extension abélienne maximale ℓ-ramifiée M d'un corps de nombres K avec celle, C', qui est non ramifiée et ℓ-décomposée.
- La seconde relie l'extension C' à la sous-extension H de M, composée des ℓ-extensions cycliques de K qui peuvent se plonger dans une ℓ-extension cyclique de degré arbitrairement grand.
- La troisième s'appuie sur la réinterprétation par la K-théorie des radicaux associés aux extensions M et H.

Les relations obtenues proviennent de la comparaison de trois points de vue :

- La théorie du corps de classes, qui interprète les groupes de Galois des extensions considérées comme groupes de classes d'idéaux (au sens ordinaire dans le cas fini, au sens infinitésimal dans le cas infini) ;
- La théorie de Kummer, qui décrit le radical de ces extensions à l'aide du groupe multiplicatif du corps K, mais qui requiert l'existence dans K de racines de l'unité en nombre suffisant ;
- La théorie de Tate, qui présente le ℓ-Sylow du groupe $K_2(K)$ à l'aide des symboles universels associés aux racines de l'unité d'ordre ℓ-primaire.

Les trois dualités annoncées ne s'expriment donc pleinement qu'en présence de toutes les racines ℓ-primaires de l'unité, c'est-à-dire au sommet $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ de la tour cyclotomique engendrée sur K par ces mêmes racines. Cependant, elles se traduisent à chaque niveau fini K_n de la tour, par des relations précises entre certains sous-groupes ou quotients finis attachés aux groupes de classes, de radicaux, ou de symboles des corps K_n. Leur mise en évidence pose deux séries de problèmes :

- Le premier est dû aux limites mêmes de la théorie classique d'Iwasawa : les formules bien connues donnant l'ordre des quotients $X/(\gamma^{\ell^n}-1)X$ associés à un $\mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$-module noethérien X ne s'appliquent qu'aux $\mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$-modules de torsion pour lesquels ces quotients sont finis. Or, la plupart des groupes X_n étudiés ici ne peuvent pas être obtenus comme quotients $X/(\gamma^{\ell^n}-1)X$ associés à un tel module. Pour rendre compte de leur comportement, il est indispensable de sortir du cadre habituel donné par Iwasawa, en introduisant un paramètre supplémentaire : Nous disons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels est paramétrée par les entiers $\rho \geq 0$, λ, et μ, si et seulement si la quantité

$$u_n - [\rho\, n\, \ell^n + \mu\, \ell^n + \lambda\, n]$$

reste bornée indépendamment de n. Les groupes étudiés ici sont tous des modules paramétrés, au sens de cette définition.

- Le deuxième problème est galoisien : Pour obtenir les identités de dualité, il est nécessaire d'introduire les racines de l'unité d'ordre ℓ-primaire, et donc, si le corps de base F ne contient pas les racines d'ordre ℓ, de faire d'abord une extension abélienne K de degré $[K:F]$ étranger avec ℓ, avant de monter la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K. Pour retrouver les invariants attachés au corps F (ou à ses ℓ-extensions F_n) à partir de ceux attachés au corps K (ou à ses ℓ-extensions K_n) il convient de prendre en compte l'action du groupe de Galois $\Delta = \mathrm{Gal}\,(K/F)$ sur les $\mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$-modules étudiés. Le plus simple est de raisonner en termes de représentations ℓ-adiques, en convenant de dire qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules finis est paramétrée par les caractères virtuels $\rho \geq 0$, λ, et μ, lorsque, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{x_n^\varphi}$ de la φ-composante de X_n est donnée par la formule

$$x_n^\varphi \sim \langle \rho, \varphi \rangle\, n\, \ell^n + \langle \mu, \varphi \rangle\, \ell^n + \langle \lambda, \varphi \rangle\, n,$$

où nous écrivons $u_n \sim v_n$ pour exprimer que la différence $u_n - v_n$ est bornée.

Le résultat essentiel de cette étude est que les paramètres associés aux divers modules évoqués plus haut s'expriment tous en fonction des seuls paramètres λ_c et μ_c du groupe de Galois C' de la ℓ-extension abélienne non ramifiée ℓ-décomposée maximale du corps K_∞, et de quelques paramètres galoisiens très simples du schéma d'extensions.

Lorsque le corps F est totalement réel, nous montrons que les paramètres λ_c et μ_c vérifient un spiegelungssatz plus fort que celui de Leopoldt ; enfin, en appendice, nous illustrons les résultats obtenus en calculant explicitement le caractère de défaut d'une conjecture de Coates.

SOMMAIRE

1 - RESULTATS PRELIMINAIRES

§ a - Description de l'algèbre de Galois $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$:

Nous considérons, dans tout ce qui suit, le schéma de corps suivant : ℓ désigne un nombre premier impair, ζ une racine primitive ℓ-ième de l'unité, K/F une extension abélienne de corps de nombres, contenant ζ et de degré d étranger à ℓ (par exemple $K = F[\zeta]$), F_∞ enfin la tour cyclotomique construite sur F, et $K_\infty = KF_\infty$ celle construite sur K.

Nous nous intéressons au groupe de Galois $\Delta = \mathrm{Gal}(K/F)$, que nous identifions à son relèvement naturel $\mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty)$ dans $\mathrm{Gal}(K_\infty/F)$. Son ordre $d = [K:F]$ étant supposé inversible dans $\mathbb{Z}_\ell$, à chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ correspond un idempotent primitif

$$e_\varphi = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi(\tau)\tau^{-1}$$

de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$, et le facteur isotypique associé $Z_\varphi = \mathbb{Z}_\ell[\Delta]e_\varphi$ s'identifie à l'anneau local des entiers d'une extension cyclotomique non ramifiée de $\mathbb{Q}_\ell$, qui a pour degré le degré $d_\varphi = [Z_\varphi : \mathbb{Z}_\ell]$ du caractère φ. En particulier tout $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module noethérien sans $\mathbb{Z}_\ell$-torsion est somme directe d'exemplaires des Z_φ, donc $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-projectif.

Introduisons le semi-groupe $R^+_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ des caractères des $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules noethériens et projectifs, puis le groupe $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ des caractères virtuels du groupe Δ sur l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$. Le groupe $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ est muni d'un produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi(\tau)\psi(\tau^{-1})$$

(pour lequel les caractères irréductibles sont deux à deux orthogonaux, et de carré scalaire $\langle \varphi, \varphi \rangle = d_\varphi$), ainsi que d'une involution naturelle, que l'on peut définir comme suit : Pour chaque naturel n, notons K_n l'unique sous-corps de K_∞ qui est de degré ℓ^n sur K, écrivons $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(K_n/K)$ son groupe de Galois et μ_n le groupe des racines d'ordre ℓ-primaire de l'unité contenues dans K_n, puis notons $\mu_\ell = \varinjlim \mu_n$ la réunion des μ_n et $\mathbb{T}_\ell = \varprojlim \mu_n$ le module de Tate, qui est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module de dimension 1 sur $\mathbb{Z}_\ell$. Si ω désigne le caractère du module $\mathbb{T}_\ell$, l'application $\chi \mapsto \chi^*$, définie par

$$\chi^* = \omega\chi^{-1} \quad \text{(avec la convention } \chi^{-1}(\tau) = \chi(\tau^{-1})\text{, pour tout } \tau \text{ de } \Delta\text{)},$$

est une involution du groupe $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$, appelée involution du miroir. Nous disons que ω est le caractère cyclotomique et χ^* le reflet du caractère χ.

Plusieurs éléments de $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ nous intéressent plus particulièrement :

<u>PROPOSITION 1</u> : Pour chaque entier naturel n, le quotient $\left(\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_n\right)/\mu_n$ du tensorisé ℓ-adique du groupe E_n des unités de K_n par son sous-groupe de torsion μ_n est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module projectif de caractère $\ell^n \chi_\infty - 1$, où $\chi_\infty = \sum_{p_\infty} \chi_{p_\infty}$ désigne la somme, sur toutes les places à l'infini p_∞ du corps F, des induits à Δ des caractères unités de leurs sous-groupes de décomposition respectifs Δ_{p_∞} dans l'extension abélienne K/F.

<u>PROPOSITION 2</u> : Pour chaque n assez grand, le tensorisé ℓ-adique $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \left(E_n'/E_n\right)$ du quotient E_n'/E_n du groupe des ℓ-unités de K_n par le sous-groupe des unités est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module dont le caractère χ_ℓ, indépendant de n, est donné par la formule :

$$\chi_\ell = \sum_{\mathfrak{l} | \ell} g_{\mathfrak{l}} \chi_{\mathfrak{l}} .$$

Dans celle-ci, la sommation porte sur les places $\mathfrak{l}$ de F au-dessus de ℓ, l'entier $g_{\mathfrak{l}}$ est l'indice de décomposition de $\mathfrak{l}$ dans la tour cyclotomique F_∞/F, et $\chi_{\mathfrak{l}}$ est l'induit à Δ du caractère de la représentation unité du sous-groupe de décomposition $\Delta_{\mathfrak{l}}$ de la place $\mathfrak{l}$ dans l'extension K/F.

Démonstration des propositions : Le groupe $\left(\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_n\right)/\mu_n$ étant sans torsion, la première proposition résulte directement du théorème de représentation de Herbrand (cf. [5]). Commes les places à l'infini se décomposent complètement dans la tour cyclotomique, il vient en effet :

$$\mathbb{Z}_\ell \oplus \left(\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_n\right)/\mu_n \simeq \bigoplus_{p_\infty} \mathbb{Z}_\ell[\Gamma_n \times \Delta/\Delta_{p_\infty}].$$

Pour établir la seconde proposition, introduisons le sous-groupe $I_n(\ell)$ engendré dans le groupe I_n des idéaux de K_n par les idéaux premiers au-dessus de ℓ. Pour chaque $\mathfrak{l}$ de F au-dessus de ℓ, le groupe quotient $\Delta/\Delta_{\mathfrak{l}}$ opère fidèlement sur les places $\mathfrak{L}$ de K au-dessus de $\mathfrak{l}$, et il y a exactement $g_{\mathfrak{l}}$ places de K_n au-dessus de chaque $\mathfrak{L}$ dès que n est supérieur ou égal à $g_{\mathfrak{l}}$. Le quotient E_n'/E_n s'identifiant au sous-groupe d'indice fini des idéaux principaux de $I_n(\ell)$, il vient ainsi :

$$\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \left(E_n'/E_n\right) \simeq \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} I_n(\ell) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{l} | \ell} \mathbb{Z}_\ell[\Gamma_{g_{\mathfrak{l}}} \times \Delta/\Delta_{\mathfrak{l}}],$$ comme

attendu.

§ b - Structure des $\Lambda[\Delta]$-modules noethériens :

Faisons choix d'un générateur topologique γ du groupe $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, écrivons $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$ ce groupe de Galois, et introduisons l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$. La décomposition directe $\mathbb{Z}_\ell[\Delta] = \oplus \mathbb{Z}_\ell[\Delta]e_\varphi$ de l'algèbre de Galois $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ se propage en une décomposition directe $\Lambda[\Delta] = \oplus \Lambda[\Delta]e_\varphi$ de l'algèbre $\Lambda[\Delta]$, où chaque facteur isotypique $\Lambda_\varphi = \mathbb{Z}_\varphi[[\gamma-1]]$ est un anneau local régulier complet de dimension 2, et un Λ-module libre de dimension d_φ. Si donc M est un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien (noté additivement), les résultats de Serre (cf. [12], § 5) permettent d'affirmer que chaque composante isotypique $M_\varphi = e_\varphi M$ est pseudo-isomorphe en tant que Λ_φ-module noethérien à une somme directe finie de Λ_φ-modules élémentaires ; ce qui s'écrit :

$$M_\varphi \sim \Lambda_\varphi^{\rho_\varphi} \oplus \Big(\bigoplus_{i=0}^{s_\varphi} \Lambda_\varphi/\mathfrak{f}_{\varphi,i}\Lambda_\varphi\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i=0}^{t_\varphi} \Lambda_\varphi/\ell^{m_{\varphi,i}}\Lambda_\varphi\Big).$$

Dans cette formule, les $(\mathfrak{f}_{\varphi,i})_{i=0,\dots,s_\varphi}$ forment une suite décroissante de polynômes distingués de l'anneau $\mathbb{Z}_\varphi[\gamma-1]$, et les $(m_{\varphi,i})_{i=0,\dots,t_\varphi}$ sont des entiers naturels non nuls. La pseudo-décomposition est d'ailleurs essentiellement unique sous les conditions énoncées. Autrement dit :

THEOREME 1 : Tout $\Lambda[\Delta]$-module noethérien M est pseudo-isomorphe à une somme directe finie de $\Lambda[\Delta]$-modules isotypiques élémentaires. Plus précisément, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, il existe un unique triplet d'entiers naturels $(\rho_\varphi, s_\varphi, t_\varphi)$, une unique suite décroissante $(\mathfrak{f}_{\varphi,i})_{i=0,\dots,s_\varphi}$ de polynômes distingués de l'anneau $\mathbb{Z}_\varphi[\gamma-1]$, et une unique suite décroissante $(m_{\varphi,i})_{i=0,\dots,t_\varphi}$ d'entiers naturels non nuls, tels que la φ-composante $M_\varphi = e_\varphi M$ du module M soit $\Lambda[\Delta]$ pseudo-isomorphe à la somme directe :

$$M_\varphi \sim \Lambda_\varphi^{\rho_\varphi} \oplus \Big(\bigoplus_{i=0}^{s_\varphi} \Lambda_\varphi/\mathfrak{f}_{\varphi,i}\Lambda_\varphi\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i=0}^{t_\varphi} \Lambda_\varphi/\ell^{m_{\varphi,i}}\Lambda_\varphi\Big).$$

L'entier ρ_φ est la dimension $\dim_{\Lambda_\varphi} M_\varphi$ du Λ_φ-module M_φ, et le polynôme $P_\varphi = \prod_{i=0}^{t_\varphi} \ell^{m_{\varphi,i}} \cdot \prod_{i=0}^{s_\varphi} \mathfrak{f}_{\varphi,i}$ est le polynôme caractéristique de son sous-module de Λ_φ-torsion.

DEFINITION 1 : Nous appelons paramètres d'un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien M les caractères ℓ-adiques du groupe Δ définis à partir des invariants d'Iwasawa des composantes isotypiques de M par les formules

$$\rho = \sum_{\varphi} \rho_{\varphi} \varphi \quad , \quad \lambda = \sum_{\varphi} \lambda_{\varphi} \varphi \quad , \quad \text{et} \quad \mu = \sum_{\varphi} \mu_{\varphi} \varphi ,$$

où, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ, les entiers $\rho_{\varphi}, \lambda_{\varphi}$, et μ_{φ} mesurent respectivement la dimension $\dim_{\Lambda_{\varphi}} M_{\varphi}$ de la φ-composante de M, ainsi que le degré $\sum_{i=0}^{s_{\varphi}} \deg f_{\varphi,i}$ et la ℓ-valuation $\sum_{i=0}^{t_{\varphi}} m_{\varphi,i}$ du polynôme caractéristique de son sous-module de Λ_{φ}-torsion.

L'algèbre Λ_{φ} étant elle-même un Λ-module libre de dimension $d_{\varphi} = \langle \varphi, \varphi \rangle$, un calcul direct montre ainsi que les invariants d'Iwasawa d'un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien M, considéré comme Λ-module, ne sont autres que les degrés respectifs des paramètres de sa $\Lambda[\Delta]$-structure. Ainsi :

$$\dim_{\Lambda} M = \sum_{\varphi} \dim_{\Lambda} \Lambda_{\varphi}^{\rho_{\varphi}} = \sum_{\varphi} \rho_{\varphi} d_{\varphi} = \deg \rho ,$$

et un résultat analogue vaut pour les paramètres λ et μ.

§ c - Suites paramétrées de $\mathbb{Z}_{\ell}[\Delta]$-modules finis :

DEFINITION 2 : Nous disons qu'une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}_{\ell}[\Delta]$-modules finis est paramétrée par les caractères ℓ-adiques virtuels $\rho = \sum_{\varphi} \rho_{\varphi} \varphi$, $\lambda = \sum_{\varphi} \lambda_{\varphi} \varphi$, et $\mu = \sum_{\varphi} \mu_{\varphi} \varphi$, lorsque, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{o_{\varphi}(n)}$ de la φ-composante $e_{\varphi} M_n$ du module M_n est donné asymptotiquement par la formule

$$o_{\varphi}(n) \sim \langle \rho, \varphi \rangle n \ell^n + \langle \mu, \varphi \rangle \ell^n + \langle \lambda, \varphi \rangle n = \rho_{\varphi} d_{\varphi} n \ell^n + \mu_{\varphi} d_{\varphi} \ell^n + \lambda_{\varphi} d_{\varphi} n ,$$

où l'identité $u_n \sim v_n$ signifie ici que la différence $(u_n - v_n)$ est bornée indépendamment de n.

EXEMPLES :

1. La suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des groupes de racines de l'unité d'ordre ℓ-primaire contenues dans les corps K_n, et la suite des quotients $(\mu_n / \mu_n^{\ell^n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites paramétrées par les caractères $\rho = 0$, $\lambda = \omega$, $\mu = 0$.

2. D'après la proposition 1, la suite $(E_n / E_n^{\ell^n})_{n \in \mathbb{N}}$, construite à partir

des groupes d'unités des corps K_n, est paramétrée par les caractères $\rho = \chi_\infty$, $\lambda = \omega - 1$, $\mu = 0$. En particulier son paramètre λ n'est pas dans $R^+_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$, lorsque le corps F ne contient pas ζ.

3. D'après la proposition 2, la suite $\left(E'_n/E'^{\ell^n}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, construite à partir des groupes de ℓ-unités des corps K_n, est paramétrée par les caractères $\rho = \chi_\infty$, $\lambda = \omega + \left(\chi_\ell - 1\right)$, $\mu = 0$.

Cela étant, le lien entre les deux définitions des paramètres est assuré par le théorème fondamental suivant :

<u>THEOREME 2</u> : Pour chaque naturel n, désignons par ω_n le polynôme $\left(\gamma^{\ell^n} - 1\right)$, et notons ∇_n l'idéal de l'algèbre d'Iwasawa Λ, engendré par ℓ^n et ω_n (i. e. $\nabla_n = \ell^n\Lambda + \omega_n\Lambda$). Alors, si M est un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien de paramètres ρ, λ, et μ, la suite des quotients $\left(M/\nabla_n M\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est paramétrée par les mêmes caractères ρ, λ, et μ.

<u>Démonstration</u> : Remarquons d'abord que les ∇_n forment une suite strictement décroissante d'idéaux d'indice fini de l'algèbre Λ, et que l'identité $\left(\gamma^{\ell^n} - 1\right) = \left(\gamma^{\ell^{n-1}} - 1\right)^\ell + \ell\left(\gamma^{\ell^{n-1}} - 1\right)R\left(\gamma^{\ell^{n-1}}\right)$ (pour un polynôme convenable R de $\mathbb{Z}[X]$) permet de montrer par récurrence que ∇_n est contenu dans la puissance n-ième $\mathfrak{M}^n$ de l'idéal maximal $\mathfrak{M} = \ell\Lambda + \omega_o\Lambda$ de l'algèbre d'Iwasawa. La première constatation nous prouve que, pour tout Λ-module noethérien M, les sous-modules $\nabla_n M$ sont bien d'indice fini ; la seconde nous assure que, si M est fini, le sous-module $\nabla_n M$ est réduit à 0, dès que n est assez grand.

Supposons maintenant que M soit $\Lambda[\Delta]$-pseudo-isomorphe à un module noethérien M'. De la suite exacte de $\Lambda[\Delta]$-modules (à noyau et conoyau finis)

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow M \xrightarrow{h} M' \longrightarrow C \longrightarrow 1,$$

nous déduisons alors, pour chaque naturel n, une suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules finis :

$$1 \longrightarrow N_n \longrightarrow M/\nabla_n M \longrightarrow M'/\nabla_n M' \longrightarrow C_n \longrightarrow 1,$$

Dans celle-ci, le conoyau $C_n = C/\nabla_n C$ coincide avec C dès que n est assez grand, et le noyau $N_n = {}^{-1}h[h(M) \cap \nabla_n M']/\nabla_n M$ a un ordre borné : En effet, pour n assez grand, nous avons $\nabla_n M' \subset h(M)$, car $\nabla_n C$ est alors nul, donc $|N_n| = \left({}^{-1}h(\nabla_n M') : \nabla_n M\right) \leq |N| \left(\nabla_n M' : \nabla_n h(M)\right) \leq |N|\, |C|^2$, puisque $\nabla_n M' / \nabla_n h(M)$ s'interprète comme quotient de la somme directe $\left(\ell^n M' / \ell^n h(M)\right) \oplus \left(\omega_n M' / \omega_n h(M)\right)$, donc finalement de $C \oplus C$.

Cela étant, le théorème 1 nous permet de resteindre notre démonstration au cas où M est un $\Lambda[\Delta]$-module isotypique élémentaire. Distinguons les trois éventualités :

(i) Pour $M = \Lambda_\varphi$, nous avons directement $M / \nabla_n M \simeq \left(Z_\varphi / \ell^n Z_\varphi\right)[\Gamma_n]$, avec $\Gamma_n \simeq \mathbb{Z} / \ell^n \mathbb{Z}$, ce qui nous donne :

$$\left(M : \nabla_n M\right) = \ell^{d_\varphi n \ell^n}.$$

(ii) Pour $M = \Lambda_\varphi / \ell^m \Lambda_\varphi$, et $n \geq m$, nous obtenons $M / \nabla_n M \simeq \left(Z_\varphi / \ell^m Z_\varphi\right)[\Gamma_n]$, d'où :

$$\left(M : \nabla_n M\right) = \ell^{d_\varphi m \ell^n}.$$

(iii) Pour $M = \Lambda_\varphi / \mathfrak{f} \Lambda_\varphi$, avec $\mathfrak{f}$ distingué dans $Z_\varphi[\gamma - 1]$, un lemme facile (dont on peut trouver une démonstration dans [11], p. 18) montre que pour chaque m assez grand il existe des polynômes α_m et β_m de l'anneau $Z_\varphi[\gamma-1]$ tels que le polynôme cyclotomique $\xi_m = \dfrac{\omega_{m+1}}{\omega_m} = \gamma^{\ell^m(\ell-1)} + \ldots + \gamma^{\ell^m} + 1$ s'écrive encore $\xi_m = \ell(1 + \ell\alpha_m) + \beta_m \mathfrak{f}$. Comme $\mathfrak{f}$ annule M, et que $(1 + \ell\alpha_m)$ est inversible dans Λ_φ, il suit $\nabla_{m+1} M = \ell \nabla_m M$, d'où $\left(\nabla_m M : \nabla_{m+1} M\right) = \left(\nabla_m M : \ell \nabla_m M\right) = \ell^{d_\varphi . \deg \mathfrak{f}}$, car $\nabla_m M$, d'indice fini dans M, est un Z_φ-module libre de dimension $\deg \mathfrak{f}$. Ecrivant alors $(M : \nabla_n M) = \left(M : \nabla_{n_o} M\right) \prod_{m=n_o}^{n-1} \left(\nabla_m M : \nabla_{m+1} M\right)$, nous obtenons, comme attendu :

$$(M : \nabla_n M) = \left(M : \nabla_{n_o} M\right) \ell^{(n-n_o) d_\varphi \deg \mathfrak{f}} = c^{te} . \ell^{d_\varphi \deg \mathfrak{f} . n}.$$

2 - ETUDE DU GROUPE DE GALOIS DE LA ℓ-EXTENSION ABELIENNE NON RAMIFIEE ℓ-DECOMPOSEE MAXIMALE DE K_∞

§ a - Définition du groupe $\mathcal{C}\ell'$:

Désignons par C'_∞ le ℓ-corps des ℓ-classes de Hilbert de K_∞, i.e. la ℓ-extension abélienne maximale de K_∞ qui est non ramifiée et où les places au-dessus de ℓ se décomposent complètement. La notion d'extension non ramifiée, complètement décomposée en un nombre fini donné de places étant de caractère fini (cf. [12], §2), C'_∞ est la réunion des ℓ-corps des ℓ-classes de Hilbert respectifs C'_n des corps K_n, et le groupe de Galois $\mathcal{C}' = \mathrm{Gal}\left(C'_\infty/K_\infty\right)$ s'identifie ainsi, via l'isomorphisme du corps de classes, à la limite du système projectif (pour les applications normes)

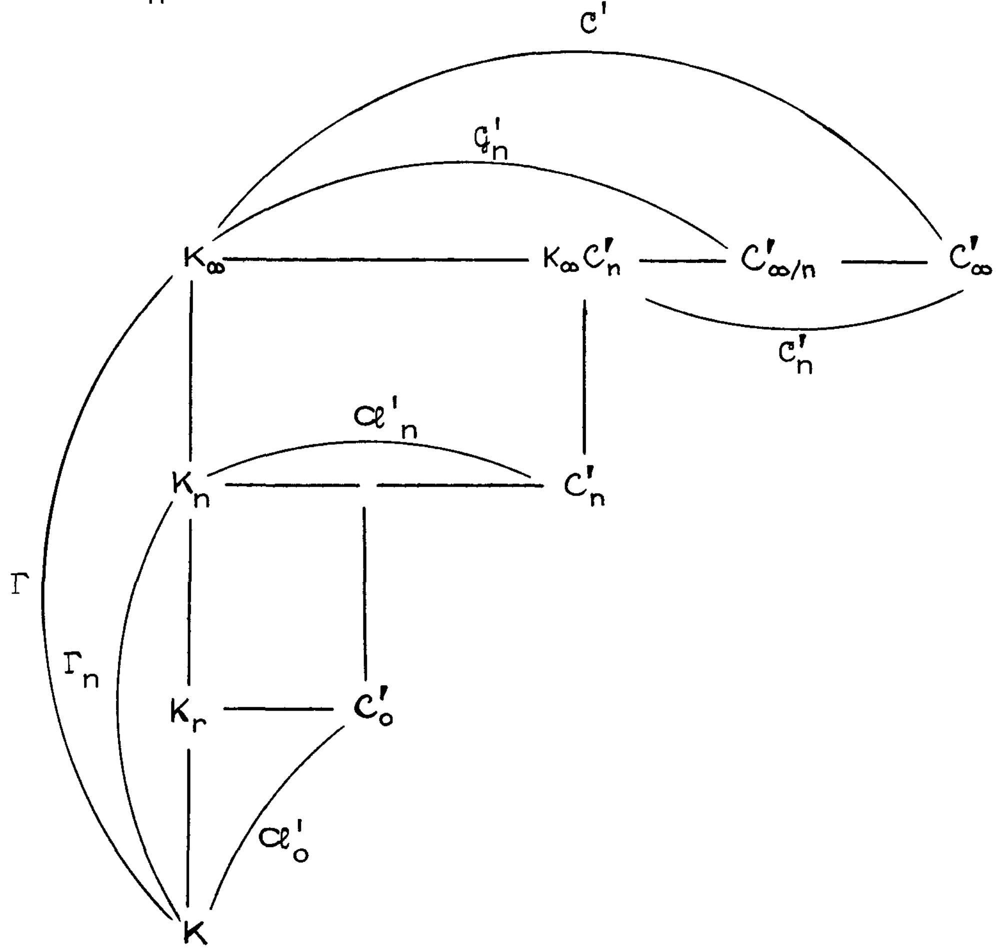
$$\mathcal{C}' = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_n$$

des ℓ-groupes de ℓ-classes des corps K_n (i. e. des quotients $\mathcal{C}\ell'_n$ des ℓ-groupes de classes d'idéaux au sens ordinaire des corps K_n, par leurs sous-groupes respectifs engendrés par les places au-dessus de ℓ).

<u>DEFINITION 3</u> : Par $\mathcal{C}'$ nous entendons le groupe de Galois $\mathrm{Gal}\left(C'_\infty/K_\infty\right)$ de la ℓ-extension abélienne non ramifiée ℓ-décomposée maximale de K_∞, qui s'identifie à la limite projective $\varprojlim \mathcal{C}\ell'_n$ des ℓ-groupes de ℓ-classes des corps K_n. Le groupe $\mathcal{C}'$ est un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien et de torsion, dont nous écrivons $\rho_{\mathcal{C}} = 0$, $\lambda_{\mathcal{C}}$, et $\mu_{\mathcal{C}}$ les paramètres dans $R^+_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$.

Naturellement, le premier problème de la théorie d'Iwasawa consiste à retrouver les groupes $\mathcal{C}\ell'_n$ à partir de leur limite projective $\mathcal{C}'$. Rappelons ce résultat classique (cf. [11], [12]) : Désignons par K_r l'intersection de K_∞ avec le ℓ-corps des ℓ-classes de Hilbert C'_o de K (de sorte que K_r est la sous-extension maximale de K_∞, qui est ℓ-décomposée sur K), puis, pour chaque naturel $n \geq r$, introduisons le ℓ-corps des ℓ-genres $C'_{\infty/n}$ de l'extension procyclique K_∞/K_n (i. e. la ℓ-extension abélienne maximale de K_n, qui est non ramifiée et ℓ-décomposée sur K_∞). Le quotient des ℓ-genres $\mathcal{G}'_n = \mathrm{Gal}\left(C'_{\infty/n}/K_\infty\right) = \mathcal{C}'/\mathcal{C}'^{\omega_n}$, plus grand quotient de $\mathcal{C}'$ fixé par Γ_n, est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module noethérien, qui admet $\mathcal{C}\ell'_n$ comme quotient :

Sous la condition $n \geq r$ en effet, l'extension ℓ-décomposée C'_n/K_n est disjointe de la tour cyclotomique K_∞/K_n, et le groupe $\mathcal{C}\ell'_n$ s'identifie fie par conséquent au groupe de Galois $\mathrm{Gal}\left(K_\infty C'_n/K_\infty\right)$ qui est bien un quotient de $\mathcal{G}'_n$.



Reste à évaluer le groupe $\mathrm{Gal}\left(C'_\infty/K_\infty C'_n\right)$ ou son quotient $\mathrm{Gal}\left(C'_{\infty/n}/K_\infty C'_n\right)$. Un argument de projectivité (cf. [6], th. 8 ; [11], prop. 4.3 ; ou [12], th. 4) montre que, dès que K_n contient le composé K_m des sous-corps de décomposition des places de K au-dessus de ℓ dans la tour K_∞/K, le sous-groupe $\mathcal{C}'_n = \mathrm{Gal}\left(C'_\infty/K_\infty C'_n\right)$, qui fixe $K_\infty C'_n$, est l'image par l'opérateur norme $\frac{\omega_n}{\omega_m}$ de celui $\mathcal{C}'_m$ qui fixe $K_\infty C'_m$. Il vient ainsi (pour $n \geq m$) :

$$\mathcal{C}\ell'_n \simeq \mathcal{C}'/\mathcal{C}'^{\,\omega_n/\omega_m}_m = \mathcal{C}\ell'/\left(\mathcal{C}\ell'^{\,\omega_m}\mathcal{C}'_m\right)^{\omega_n/\omega_m},$$

puisque $\mathcal{C}'_m$ contient le ℓ-groupe des ℓ-genres $\mathcal{C}\ell'^{\,\omega_m}$ de K_∞/K_m (le quotient $\mathcal{C}'_m/\mathcal{C}\ell'^{\omega_m} = \mathrm{Gal}\left(C'_{\infty/m}/K_\infty C'_m\right)$ étant d'ailleurs un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module de type fini).

En particulier, il suit : $\left(\mathcal{C}\ell'_n : \mathcal{C}\ell'^{\ell^n}_n\right) = \left(\mathcal{C}' : \mathcal{C}'^{\nabla_n}\mathcal{C}_m^{\omega_n/\omega_m}\right) =$ $\dfrac{\left(\mathcal{C}' : \mathcal{C}'^{\nabla_n}\right)}{\left(\mathcal{C}'^{\omega_n/\omega_m}_m \mathcal{C}'^{\nabla_n} : \mathcal{C}'^{\nabla_n}\right)}$; et le dénominateur $\left(\mathcal{C}'^{\omega_n/\omega_m}_m \mathcal{C}'^{\nabla_n} : \mathcal{C}'^{\nabla_n}\right)$ est constant à partir d'un certain rang, puisque les quotients $\left(\mathcal{C}'^{\omega_n/\omega_m}_m \mathcal{C}'^{\nabla_n}/\mathcal{C}'^{\nabla_n}\right)_{n\geq m}$, images successives les uns des autres par les applications normes $\xi_n = \dfrac{\omega_{n+1}}{\omega_n}$, forment une suite décroissante de groupes finis. D'après le théorème 2, nous avons donc :

<u>THEOREME 3</u> : La suite $\left(\mathcal{C}\ell'_n/\mathcal{C}\ell'^{\ell^n}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des quotients d'exposant ℓ^n des groupes de ℓ-classes d'idéaux respectifs des corps K_n est paramétrée par les caractères λ_c et μ_c attachés au groupe $\mathcal{C}' = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_n$. Autrement dit, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{c'_\varphi(n)}$ de la φ-composante $\left(\mathcal{C}\ell'_n/\mathcal{C}\ell'^{\ell^n}_n\right)^{e_\varphi}$ est donné asymptotiquement par la formule :

$$c'_\varphi(n) \sim \langle\mu_c, \varphi\rangle\,\ell^n + \langle\lambda_c, \varphi\rangle\, n.$$

<u>SCOLIE</u> : Dans une $\mathbb{Z}_\ell$-extension, les ℓ-groupes $\mathcal{C}\ell'^{\ell^n}_n$ ont un ordre borné indépendamment de n.

D'après le théorème 3, en effet, l'ordre $\ell^{c(n)}$ du quotient $\mathcal{C}\ell'_n/\mathcal{C}\ell'^{\ell^n}_n$ est donné asymptotiquement par la même formule que celui du groupe entier $\mathcal{C}\ell'_n$ (cf. [12], th. 8).

§ b - <u>Description kummérienne des ℓ-extensions non ramifiées ℓ-décomposées C'_n/K_n</u> :

Le corps K_n contenant les racines ℓ^n-ièmes de l'unité, la théorie de Kummer établit une bijection entre les ℓ-extensions abéliennes d'exposant ℓ^n de K_n et les sous-groupes finis du quotient $\mathcal{R}_n = \left(\ell^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)\otimes_{\mathbb{Z}} K_n^\times$, isomorphe à $K_n^\times/K_n^{\times\ell^n}$. Pour décrire celles de ces extensions qui sont ℓ-décomposées, il est commode de faire appel à la notion d'infinitésimal introduite dans [8] , et que l'on peut définir comme suit : Désignons par $\mathcal{K}_n$ le tensorisé ℓ-adique $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K_n^\times$ du groupe multiplicatif $K_n^\times$ (de sorte que nous avons un isomorphisme canonique $\mathfrak{R}_n \simeq \left(\ell^{-n}\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{K}_n$), par $\mathcal{U}_n = \bigoplus_{\mathfrak{L}_n|\ell} (1+\mathfrak{L}_n)$ le groupe des unités principales semi-locales de K_n, qui est le produit direct des groupes d'unités principales des complétés $K_{n,\mathfrak{L}_n}$ de K_n au-dessus de ℓ, par $\hat{\mathcal{K}}_n = \varprojlim_m \bigoplus_{\mathfrak{L}_n|\ell} \left(K^\times_{n,\mathfrak{L}_n} / K^{\times\ell^m}_{n,\mathfrak{L}_n}\right)$ enfin, le complété profini de K_n au-dessus de ℓ (si, pour chaque place $\mathfrak{L}_n$ de K_n au-dessus de ℓ, on fait choix d'une uniformisante $\pi_{\mathfrak{L}_n}$ dans $\mathfrak{L}_n$, le groupe $\hat{\mathcal{K}}_n$ s'écrit,comme $\mathbb{Z}_\ell$-module : $\hat{\mathcal{K}}_n = \mathcal{U}_n \oplus \left(\bigoplus_{\mathfrak{L}_n|\ell} \pi_{\mathfrak{L}_n}^{\mathbb{Z}_\ell}\right)$). Alors (cf. [8] , § 1) :

<u>DEFINITION 4</u> : Par groupe des <u>éléments infinitésimaux</u> du corps K_n, nous entendons le noyau $\mathcal{K}_n^\infty$ de la surjection continue s_n du tensorisé ℓ-adique $\mathcal{K}_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K_n^\times$ dans le complété profini $\hat{\mathcal{K}}_n$, induite par l'injection diagonale du groupe $K_n^\times$ dans le produit des groupes multiplicatifs $K^\times_{n,\mathfrak{L}_n}$ des complétés de K_n pour les places au-dessus de ℓ.

<u>PROPOSITION 3</u> : Le radical kummerien de l'extension abélienne maximale d'exposant ℓ^n de K_n qui est ℓ-décomposée est l'image dans $\mathfrak{R}_n = \left(\ell^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)\otimes_{\mathbb{Z}} K_n^\times \simeq \left(\ell^{-n}\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{K}_n$ du sous-groupe infinitésimal $\mathcal{K}_n^\infty$ de $\mathcal{K}_n$.

<u>Démonstration</u> : L'extension $K_n[\sqrt[\ell^n]{x}]/K_n$, définie par l'élément $\ell^{-n}\otimes x$ de $\mathfrak{R}_n$, est ℓ-décomposée si et seulement si x est puissance ℓ^n-ième locale en chaque place $\mathfrak{L}_n$ de K_n au-dessus de ℓ, c'est-à-dire si et seulement si l'image $s_n(x)$ de x dans $\hat{\mathcal{K}}_n$ tombe dans $\hat{\mathcal{K}}_n^{\ell^n}$. Ecrivons donc $s_n(x) = u^{\ell^n}$ dans $\hat{\mathcal{K}}_n$, et relevons u en un élément y de $\mathcal{K}_n$. L'élément $z = xy^{-\ell^n}$, qui vérifie $s_n(z) = u^{\ell^n} s_n(y)^{-\ell^n} = 1$, est infinitésimal et a même image que x dans $\mathfrak{R}_n$.

Considérons maintenant un élément $\ell^{-n}\otimes x$ de $\mathfrak{R}_n$. La proposition 3, ci-dessus, affirme que l'extension $K_n[\sqrt[\ell^n]{x}]/K_n$ est ℓ-décomposée si et seulement si x peut être pris infinitésimal. Il est bien connu, par ailleurs, qu'elle est ℓ-ramifiée (i.e. non ramifiée aux places en dehors de ℓ) si et seulement si l'idéal (x) de K_n est une puissance ℓ^n-ième en dehors de ℓ, mais ceci suppose que x soit pris dans $K_n^\times$. Pour parler de l'idéal principal engendré par un élément de $\mathcal{K}_n$, il est nécessaire d'étendre la définition du groupe des idéaux :

<u>PROPOSITION 4</u> : Désignons par $\mathcal{J}'_n$ le tensorisé ℓ-adique $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} J'_n$ du groupe des idéaux fractionnaires de l'anneau $\mathcal{O}'_n = \mathcal{O}_n[1/\ell]$, localisé en dehors de ℓ de l'anneau des entiers de K_n (le groupe J'_n s'identifie au sous-groupe des idéaux fractionnaires de $\mathcal{O}_n$ qui sont étrangers à ℓ), et convenons de noter $\mathcal{P}'_n$ le sous-module ℓ-principal de $\mathcal{J}'_n$, engendré par les images $(x)'$ des éléments de $\mathcal{K}_n$. Cela étant :

(i) Le groupe $\mathfrak{R}_n = \{\ell^{-n} \otimes x \in \mathcal{R}_n \mid (x)' \in \mathcal{J}'^{\ell^n}_n\}$ est le radical kummerien de la ℓ-extension $M_n^{(\ell^n)}$ abélienne maximale de K_n qui est d'exposant ℓ^n et ℓ-ramifiée.

(ii) Le groupe $\mathfrak{D}_n = \{\ell^{-n} \otimes x \in \mathcal{R}_n \mid x \in \mathcal{K}_n^\infty \text{ et } (x)' \in \mathcal{J}'^{\ell^n}_n\}$ est le radical kummerien de la ℓ-extension $C_n'^{(\ell^n)}$ abélienne maximale de K_n qui est d'exposant ℓ^n, non ramifiée, et ℓ-décomposée.

Cela étant, le comportement asymptotique du groupe $\mathfrak{D}_n$ est déterminé par le théorème 3, puisque l'application bilinéaire $(\ell^{-n} \otimes x, \sigma) \mapsto x^{\sigma-1}$ de $\mathfrak{D}_n \times \mathrm{Gal}(C_n'^{(\ell^n)}/K_n)$ dans μ_n, donnée par la théorie de Kummer, induit un isomorphisme, compatible avec l'action de Δ, de $\mathfrak{D}_n$ sur le groupe $\mathrm{Hom}\left(\mathrm{Gal}(C_n'^{(\ell^n)}/K_n), \mu_n\right)$. Compte tenu de l'isomorphisme du corps de classes $\mathrm{Gal}(C_n'^{(\ell^n)}/K_n) \simeq \mathcal{C}\ell'_n / \mathcal{C}\ell'^{\ell^n}_n$, nous pouvons donc énoncer :

<u>PROPOSITION 5</u> : La suite $(\mathfrak{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des radicaux respectifs des ℓ-extensions $C_n'^{(\ell^n)}/K_n$ (sous-extensions d'exposant ℓ^n des ℓ-corps des ℓ-classes de Hilbert des corps K_n) est paramétrée par les reflets dans l'involution du miroir des caractères λ_C et μ_C attachés au groupe $\mathcal{C}'$. Autrement dit, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{c^*_\varphi(n)}$ de la φ-composante $\mathfrak{D}_n^{e_\varphi}$ est donné asymptotiquement par la formule :

$$c^*_\varphi(n) \sim \langle \mu^*_C, \varphi \rangle \, \ell^n + \langle \lambda^*_C, \varphi \rangle \, n.$$

§ c - Interprétation des facteurs cyclotomiques :

Revenons sur la description $\mathcal{C}\ell'_n = \mathcal{C}'/\mathcal{C}'^{\omega_n/\omega_m}_m$ des groupes de ℓ-classes $\mathcal{C}\ell'_n$, donnée dans la section (a). Puisque $\mathcal{C}'_m$ est un sous-module de $\mathcal{C}'$, les groupes $\mathcal{C}'/\mathcal{C}'^{\omega_n/\omega_m}$ sont des quotients de $\mathcal{C}\ell'_n$, pour chaque $n \geq m$, donc finis, ce qui signifie que les polynômes caractéristiques Pc_φ des φ-composantes du $\Lambda[\Delta]$-module $\mathcal{C}'$ sont étrangers à chacun des $\frac{\omega_n}{\omega_m}$, c'est-à-dire à chacun des polynômes cyclotomiques $\xi_i = \Sigma_{j=0}^{\ell-1}\gamma^{j\ell^i}$, pour $i \geq m$ un résultat bien connu de la théorie d'Iwasawa). Qu'en est-il pour $i < m$? La définition $\mathcal{G}'_n = \mathcal{C}'/\mathcal{C}'^{\omega_n}$ du quotient des ℓ-genres montre que la participation des ξ_i dans les polynômes caractéristiques Pc_φ mesure la dimension des φ-composantes de ces quotients :

PROPOSITION 6 : Pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, écrivons $Pc_\varphi = \omega_0^{r_\varphi(o)} \prod_{i=0}^{m-1} \xi_i^{r_\varphi(i+1)} . Pc'_\varphi$ la factorisation dans l'anneau $Z_\varphi[\gamma-1]$ du polynôme caractéristique du $\Lambda[\Delta]$-module isotypique $\mathcal{C}'^{e_\varphi}$. Alors :

(i) Le polynôme Pc_φ est étranger à tous les ω_i, pour $i > m$ (et l'entier m est l'indice du composé K_m des sous-corps de décomposition des places de k au-dessus de ℓ dans la tour K_∞/K).

(ii) La dimension $\partial_\varphi(n) = \dim_{Z_\varphi} \mathcal{G}'^{e_\varphi}_n$ de la φ-composante du quotient des ℓ-genres est donnée, pour chaque naturel n, par la formule :

$$\partial_\varphi(n) = r_\varphi(o) + (\ell-1) \sum_{i=1}^{\inf(m,n)} r_\varphi(i)\ \ell^{i-1} .$$

Cela étant, comme un résultat de Greenberg (cf. [3]) affirme la finitude des groupes $\mathcal{G}'_n$ lorsque le corps k est abélien sur $\mathbb{Q}$, le problème se pose de décider pour quels corps k, les polynômes caractéristiques Pc_φ sont étrangers à tous les ω_n. Cette condition, qui équivaut à la finitude des groupes $\mathrm{Gal}\left(\mathbf{C}'_{\infty/n}/K_\infty \mathbf{C}'_n\right)$, s'interprète par la théorie des genres : Désignons par $\mathcal{E}'_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_n$ le tensorisé du groupe des ℓ-unités de k_n, et par $\mathcal{N}_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigcap_{p \geq m} N_{K_p/K_n}(K_p^\times)\right)$ celui du groupe des normes cyclotomiques ; pour chaque place $\mathfrak{L}_n$ de K_n au-dessus de ℓ, introduisons son groupe de décomposition $D_{\mathfrak{L}_n}(\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n)$ dans l'extension abélienne $\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n$; puis formons le sous-groupe $\widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{L}_n|\ell} D_{\mathfrak{L}_n}(\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n)$ de la somme directe des $D_{\mathfrak{L}_n}(\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n)$ constitué par les familles $(\sigma_{\mathfrak{L}_n})_{\mathfrak{L}_n}$ dont la restriction à K_∞ vérifie la formule du produit $\prod_{\mathfrak{L}_n|\ell} \sigma_{\mathfrak{L}_n}\big|_{K_\infty} = 1$.

D'après [7], th. 4, la famille $\mathfrak{h}'_n$ des symboles de Hasse $\left(\frac{\ ,\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n}{\mathfrak{L}_n}\right)_{\mathfrak{L}_n}$ et la formule du produit p'_n (prise dans $\mathrm{Gal}(\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n)$), donnent naissance à la suite exacte courte (dite des ℓ-genres) :

$$1 \longrightarrow \mathcal{E}'_n/\mathcal{E}'_n \cap \mathcal{N}_n \xrightarrow{\mathfrak{h}'_n} \widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{L}_n|\ell} D_{\mathfrak{L}_n}(\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n) \xrightarrow{p'_n} \mathrm{Gal}(\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_\infty\mathcal{C}'_n) \longrightarrow 1.$$

Il suit :

<u>PROPOSITION 7</u> : Pour chaque caractère irréductible φ du groupe Δ, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le polynôme caractéristique Pc_φ de la φ-composante du $\Lambda[\Delta]$-module $\mathcal{C}'$ est étranger à tous les ω_i.

(ii) La dimension asymptotique $\partial_\varphi = \dim_{Z_\varphi} \mathcal{G}_n'^{e_\varphi}$ de la φ-composante du quotient des ℓ-genres est nulle.

(iii) Pour chaque naturel n, la φ-composante $\mathcal{G}_n'^{e_\varphi} = (\mathcal{Cl}'/\mathcal{Cl}'^{\omega_n})^{e_\varphi}$ du quotient des ℓ-genres est un ℓ-groupe fini dont l'ordre $\ell^{g_\varphi(n)}$ est donné asymptotiquement par la même formule que celui du groupe $\mathcal{Cl}_n'^{e_\varphi}$.

(iv) Pour chaque naturel n, l'image $\mathfrak{h}'_n(\mathcal{E}'_n)$ du tensorisé ℓ-adique $\mathcal{E}'_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_n$ du groupe des ℓ-unités du corps k_n, par la famille $\mathfrak{h}'_n = \left(\frac{\ ,\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n}{\mathfrak{L}_n}\right)_{\mathfrak{L}_n}$ des symboles de Hasse attachés aux places de K_n au-dessus de ℓ, est d'indice fini dans la somme $\widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{L}_n|\ell} D_{\mathfrak{L}_n}(\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n)$ des groupes de décomposition de ces places, restreinte aux familles $(\sigma_{\mathfrak{L}_n})_{\mathfrak{L}_n|\ell}$ dont la restriction à K_∞ vérifie la formule du produit

$$\prod_{\mathfrak{L}_n|\ell} \sigma_{\mathfrak{L}_n}\big|_{K_\infty} = 1.$$

<u>DEFINITION 5</u> : Nous disons que le caractère $\partial = \sum_{\varphi} \partial_{\varphi}\varphi$, défini à partir de la dimension asymptotique $\partial_{\varphi} = \dim_{Z_{\varphi}} \mathcal{G}_n'^{\,e_{\varphi}}$ du quotient des ℓ-genres, est le <u>caractère de défaut de la théorie des genres</u> dans la tour cyclotomique K/k.

D'après la proposition 7, le caractère de défaut ∂ mesure l'écart entre le groupe des ℓ-classes $\mathcal{C}\ell_n'$ et le quotient des ℓ-genres $\mathcal{G}_n'$. Lorsque K est une $\mathbb{Z}_{\ell}$-extension qui n'est pas cyclotomique, les résultats de [7] montrent qu'il est généralement non nul. En revanche :

<u>THEOREME 4</u> : Supposons que le corps K satisfasse les deux conditions suivantes :

(i) K est une extension galoisienne du corps des rationnels (de degré g, de groupe de Galois G).

(ii) Les groupes de décomposition des places de K au-dessus de ℓ sont distingués, et contiennent le sous-groupe dérivé G'.
Alors les conditions équivalentes de la proposition 7 sont vérifiées dans la tour cyclotomique K_{∞}/K.

<u>Démonstration</u> : Les hypothèses du théorème se propageant le long de la tour, il nous suffit de faire la démonstration pour $n = 0$, i.e. de montrer que l'image $\mathfrak{h}(\mathcal{E}')$ du tensorisé du groupe des ℓ-unités de K est d'indice fini dans la somme restreinte $\widetilde{\bigoplus_{\mathfrak{L}|\ell}} D_{\mathfrak{L}}$ des groupes de décomposition des places de K au-dessus de ℓ dans l'extension abélienne $C'_{\infty/0}/K$.

Notons D le sous-groupe de décomposition de ℓ dans l'extension $/\mathbb{Q}$ (qui est indépendant par hypothèse de la place de K au-dessus de ℓ), d son ordre, 1_D^G l'induit à G du caractère unité de D, puis $e = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in D} \tau$ l'idempotent central de l'algèbre $\mathbb{Q}_{\ell}[G]$ qui lui correspond, et $\tilde{e} = e(1 - \frac{1}{g} \sum_{\tau \in G} \tau)$ celui correspondant au caractère $1_D^G - 1_G$. Par un argument déjà utilisé (cf. prop. 1 et 2), le groupe $\bigoplus_{\mathfrak{L}|\ell} D_{\mathfrak{L}}$ est un $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$-module de caractère 1_D^G, et le sous-groupe restreint $\widetilde{\bigoplus_{\mathfrak{L}|\ell}} D_{\mathfrak{L}}$ est donc un $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$-module de caractère $1_D^G - 1_G$. Le groupe $\bigoplus_{\mathfrak{L}|\ell} D_{\mathfrak{L}}$ est, d'autre part, l'image par les symboles locaux de reste normique du complété profini $\mathcal{K}$ de K (défini dans la section(b)).

Comme les éléments de $\mathcal{K}$ annulés par le logarithme ℓ-adique Log_ℓ sont des normes cyclotomiques, cette dernière application se factorise par le logarithme Log_ℓ, de sorte que le sous-groupe $\mathrm{Log}_\ell\, \mathcal{K}^{g\tilde{e}}$ de la somme directe $\mathcal{C}(k) = \bigoplus_{\mathfrak{L}|\ell} k_{\mathfrak{L}}$ des complétés de K au-dessus de ℓ s'envoie dans $\bigoplus_{\mathfrak{L}|\ell} D_{\mathfrak{L}}$ avec un indice fini.

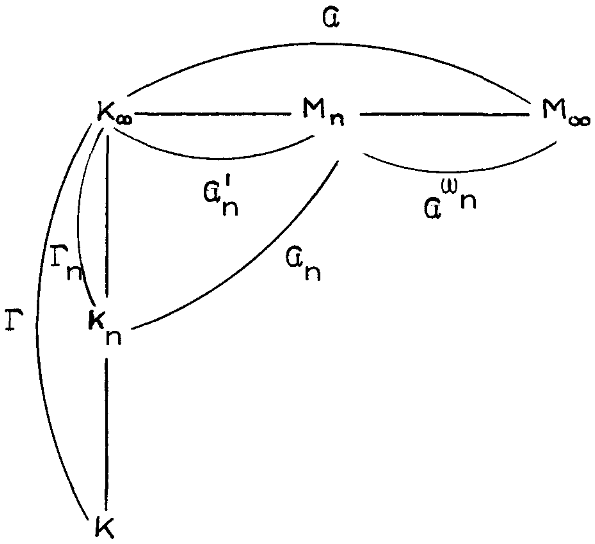
Choisissons maintenant un générateur $x \in E'$ d'une puissance principale $(x) = \mathfrak{L}^q$ de l'une quelconque des places $\mathfrak{L}$ de K au-dessus de ℓ. Posons $y = x^{g\tilde{e}}$, et considérons le sous-module $\mathfrak{Y}$ de $\mathcal{E}'$ engendré par y et ses conjugués. Il est clair que c'est un $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module de caractère $1_D^G - 1_G$. Cela étant, pour chaque caractère ℓ-adique absolument irréductible ψ représenté dans $1_D^G - 1_G$ (à valeurs dans une extension algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$), le nombre $\varepsilon_\psi = \sum_{\tau \in G} \psi(\tau^{-1}) \mathrm{Log}_\ell \circ s(y^\tau)$ ne peut être nul, en vertu du théorème de Baker-Brumer. Comme $1_D^G - 1_G$ est la somme des caractères absolument irréductibles qui le divisent (puisque le quotient G/D est supposé abélien), l'application logarithme Log_ℓ détermine une injection de $\mathfrak{Y}$ dans $\mathrm{Log}_\ell\, \mathcal{K}^{g\tilde{e}}$. De l'identité des caractères, nous concluons que cette injection est presque surjective, autrement dit, que $\mathfrak{Y}$ s'envoie dans $\widetilde{\bigoplus_{\mathfrak{L}|\ell}} D_{\mathfrak{L}}$ avec un indice fini ; ce qui constitue le résultat attendu.

3 - ETUDE DU GROUPE DE GALOIS DE LA ℓ-EXTENSION ABELIENNE MAXIMALE ℓ-RAMIFIEE DE K_∞

§ a - Définition du groupe $\mathfrak{G}$:

Désignons par M_∞ la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de K_∞, et notons $\mathfrak{G} = \mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty)$ son groupe de Galois. L'extension M_∞ est évidemment la réunion des ℓ-extensions abéliennes ℓ-ramifiées maximales M_n des sous-corps de degré fini K_n de K_∞, et nous disons que M_n est le ℓ-corps des ℓ-classes infinitésimales de K_n, en accord avec les résultats de [12], qui interprètent le groupe de Galois $\mathfrak{G}_n = \mathrm{Gal}(M_n/K_n)$ comme quotient du tensorisé $\mathcal{J}'_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} J'_n$ du groupe J'_n des idéaux de K_n par le sous-module $\mathcal{P}_n^\infty$ des idéaux principaux-infinitésimaux, image dans le sous-module $\mathcal{P}_n$ des idéaux principaux de $\mathcal{J}'_n$, du sous-groupe infinitésimal $\mathcal{K}_n^\infty$ de $\mathcal{K}_n$, défini dans la section **2 § b**. Autrement dit :

<u>DEFINITION 6</u> : Par $\mathcal{G}$ nous entendons le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty)$ de la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de K_∞, qui s'identifie à la limite projective $\varprojlim \mathcal{G}_n$ des ℓ-groupes de ℓ-classes infinitésimales $\mathcal{J}'_n/\mathcal{P}^\infty_n$ des corps K_n. Le groupe $\mathcal{G}$ est un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien, dont nous notons ρ_a, λ_a, et μ_a les paramètres dans $R^+_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$.



La tour cyclotomique K_∞/K étant ℓ-ramifiée, pour chaque naturel n, le corps des ℓ-classes infinitésimales M_n est la sous-extension maximale de M_∞ qui est abélienne sur K_n. Le groupe de Galois $\mathcal{G}'_n = \mathrm{Gal}(M_n/K_\infty)$, plus grand quotient de $\mathcal{G}$ fixé par Γ_n, est ainsi le quotient des ℓ-genres infinitésimaux $\mathcal{G}/\mathcal{G}^{\omega_n}$ de l'extension procyclique K_∞/K_n; et le groupe $\mathcal{G}_n = \mathrm{Gal}(M_n/K_n)$ est donc isomorphe, comme $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module, à la somme directe :

$$\mathcal{G}_n \simeq \Gamma_n \oplus \mathcal{G}'_n = \Gamma_n \oplus \mathcal{G}/\mathcal{G}^{\omega_n},$$

puisque Γ_n se relève dans $\mathcal{G}_n$, par un argument de projectivité.

En particulier, il suit $\mathcal{G}_n/\mathcal{G}_n^{\ell^n} \simeq \Gamma_n/\Gamma_{2n} \oplus \mathcal{G}/\mathcal{G}^{\nabla_n}$; d'où, d'après le théorème **2** et la proposition 4 :

<u>PROPOSITION 8</u> : La suite $\left(\mathcal{G}_n/\mathcal{G}_n^{\ell^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des quotients d'exposant ℓ^n des groupes de ℓ-classes infinitésimales des corps K_n est paramétrée par les caractères ρ_a, λ_a+1; et μ_a. Autrement dit, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{a_\varphi(n)}$ de la φ-composante $\left(\mathcal{G}_n/\mathcal{G}_n^{\ell^n}\right)^{e_\varphi}$ est donné asymptotiquement par la formule :

$$a_\varphi(n) \sim \langle \rho_a, \varphi\rangle\, n\ell^n + \langle \mu_a, \varphi\rangle\, \ell^n + \langle \lambda_a+1, \varphi\rangle\, n.$$

PROPOSITION 9 : La suite $(\mathfrak{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des radicaux kummeriens des sous-extensions maximales $M_n^{(\ell^n)}/K_n$ d'exposant ℓ^n des ℓ-corps des ℓ-classes infinitésimales M_n est paramétrée par les caractères $\rho_a^*, \lambda_a^*+\omega$, et μ_a^*. L'ordre $\ell^{a_\varphi^*(n)}$ de la φ-composante $\mathfrak{R}_n^{e_\varphi}$ est ainsi donné asymptotiquement par la formule :

$$a_\varphi^*(n) \sim \langle \rho_a^*, \varphi\rangle\, n\,\ell^n + \langle \mu_a^*, \varphi\rangle\, \ell^n + \langle \lambda_a^*+\omega, \varphi\rangle\, n .$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème :

THEOREME 5 : Les paramètres ρ_a, λ_a, et μ_a du groupe de Galois $\mathcal{G}$ de la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale M_∞ de K_∞ sont donnés, en fonction de ceux λ_c et μ_c du groupe de Galois $\mathcal{C}'$ de la sous-extension non ramifiée ℓ-décomposée maximale C'_∞, par les formules suivantes :

$$\rho_a = \chi_\infty^* = \omega\chi_\infty\ , \quad \lambda_a = \lambda_c^* + (\chi_\ell - 1)^* = \omega[\lambda_c^{-1} + (\chi_\ell - 1)]\ ,$$

$$\mu_a = \mu_c^* = \omega\mu_c^{-1}\ .$$

Démonstration : Revenons sur la définition $\mathfrak{R}_n = \{\ell^{-n}\otimes x \in \mathfrak{R}_n \mid (x)' \in J_n'^{\ell^n}\}$ du radical kummerien $\mathfrak{R}_n$. L'application, qui à l'élément $\ell^{-n}\otimes x$ de $\mathfrak{R}_n$ associe la classe $c\ell'\left(\sqrt[\ell^n]{(x)'}\right)$ dans le groupe $\mathcal{C}\ell_n'$ de l'idéal $\sqrt[\ell^n]{(x)'}$ de J_n', est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-morphisme qui envoie $\mathfrak{R}_n$ sur le sous-groupe $\mathcal{C}\ell_n'^{(\ell^n)}$ d'exposant ℓ^n de $\mathcal{C}\ell_n'$. Quel est son noyau ? L'identité $(x)' = (y)'^{\ell^n}$, qui s'écrit encore $x = \varepsilon y^{\ell^n}$ pour une ℓ-unité ε, exprime que la classe $\ell^{-n}\otimes x$ de x dans $\mathfrak{R}_n$ est contenue dans l'image $(\ell^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} E_n'$ du groupe des ℓ-unités E_n'. De la suite exacte obtenue :

$$1 \longrightarrow (\ell^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} E_n' \longrightarrow \mathfrak{R}_n \longrightarrow \mathcal{C}\ell_n'^{(\ell^n)} \longrightarrow 1,$$

nous déduisons sans peine les formules annoncées, l'ordre du premier groupe étant donné dans l'exemple 3 (section 1 § c), celui du dernier par le théorème 3, et l'ordre de $\mathfrak{R}_n$ par la proposition 9 ci-dessus. Enfin les identités $\chi_\infty^* = \omega\chi_\infty$ et $\chi_\ell^* = \omega\chi_\ell$ proviennent du fait que χ_∞ et χ_ℓ, sommes d'induits de caractères unités attachés à des sous-groupes de Δ, sont égaux à leurs "inverses" χ_∞^{-1} et χ_ℓ^{-1}.

§ b - Etude du sous-groupe de torsion $\mathcal{T}$ et interprétation des facteurs cyclotomiques :

D'après [8] une façon d'énoncer la conjecture de Leopoldt pour le corps K_n consiste à affirmer que le tensorisé $\mathcal{E}'_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_n$ du groupe des ℓ-unités de ce corps s'injecte canoniquement dans le complété profini $\hat{\mathcal{K}}_n$, défini dans la section 2 § b. Cela justifie la définition suivante (cf. [8], section 1 § a) :

DEFINITION 7 : Par groupe des unités infinitésimales du corps K_n, nous entendons le noyau $\mathcal{E}^\infty_n$ de la restriction au groupe $\mathcal{E}'_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_n$ (des ℓ-unités généralisées) de la surjection canonique s du tensorisé ℓ-adique $\mathcal{K}_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times_n$ sur le complété profini $\hat{\mathcal{K}}_n$. Le groupe $\mathcal{E}^\infty_n$ est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-*module projectif, et nous disons que son caractère* $\delta(n)$ *est* le caractère de défaut de la conjecture de Leopoldt pour le corps K_n.

Naturellement, le groupe $\mathcal{E}^\infty_n$ est connu pour être nul dans un certain nombre de cas. Rappelons, sous une forme voisine de celle du théorème 4, le résultat dû à Emsalem, Kisilevsky et Wales (cf. [17]).

THEOREME 6 : Supposons que le corps K satisfasse les conditions suivantes :

(i) K est une extension galoisienne du corps des rationnels, de groupe de Galois G.

(ii) Les groupes de décomposition des places à l'infini de K sont distingués, et contiennent le sous-groupe dérivé G'. Alors la conjecture de Leopoldt est vraie dans la tour cyclotomique K

PROPOSITION 10 : Les caractères de défaut $\delta(n)$ de la conjecture de Leopoldt dans la tour cyclotomique K_∞/K forment une suite croissante et stationnaire, majorée par le paramètre λ^*_c des radicaux $\mathfrak{D}_n$.

Si δ désigne la valeur asymptotique du défaut $\delta(n)$, l'inégalité obtenue $(\delta \leq \lambda^*_c)$ est ainsi le pendant de celle $(\partial \leq \lambda_c)$ vérifiée par le caractère de défaut de la théorie des ℓ-genres.

Démonstration : Ce résultat étant essentiellement bien connu (cf. [2], [4] et [6]), vérifions le rapidement : Le fait que la suite $\left(\delta(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ aille croissant est évident. Cela étant, pour chaque naturel n, l'extension $K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{\mathcal{E}_n^\infty}]$ engendrée sur K_∞ par les racines d'ordre ℓ-primaire des unités infinitésimales de K_n est une extension abélienne non ramifiée ℓ-décomposée sur K_∞. Son groupe de Galois $\mathrm{Gal}\left(K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{\mathcal{E}_n^\infty}]/K_\infty\right)$ est donc un quotient de $\mathcal{C}\ell' = \mathrm{Gal}\left(C'_\infty/K_\infty\right)$, et un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module projectif qui a pour caractère le reflet $\delta(n)^*$ de $\delta(n)$. Il suit $\delta(n)^* \leq \lambda_c$, comme annoncé.

Les résultats de Gillard (cf. [2]) interprètent d'ailleurs le défaut (mesuré ici par le degré deg $\delta(n)$ du caractère $\delta(n)$) de la conjecture de Leopoldt à chaque étage fini de la tour cyclotomique, à partir de la participation des polynômes cyclotomiques à la factorisation irréductible du polynôme caractéristique du sous-module de Λ-torsion du groupe de Galois $\mathcal{G}$. Enonçons sans démonstration l'analogue de la proposition 6 :

PROPOSITION 11 : Pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, écrivons $Pa_\varphi = \omega_o^{s_\varphi(o)} \prod_{i=0}^{m'} \xi_i^{s_\varphi(i+1)} Pb_\varphi$ la factorisation dans l'anneau $Z_\varphi[\gamma-1]$ du polynôme caractéristique de la φ-composante $\mathcal{T}^{e_\varphi}$ du sous-module de $\Lambda[\Delta]$-torsion du groupe de Galois $\mathcal{G}$. Alors, pour chaque naturel n, la φ-partie $\delta_\varphi(n)$ du caractère de défaut $\delta(n)$ est donnée par la formule : $\delta_\varphi(n) = s_\varphi(o) + (\ell-1) \sum_{i=1}^{\inf(n,m')} s_\varphi(i)\,\ell^{i-1}$.

D'après les propositions 10 et 11, le groupe $\mathcal{E}_n^\infty$ des unités infinitésimales de K_n est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module noethérien, qui est indépendant de n, lorsque n est assez grand. Désignons par $\sqrt[\ell^n]{\mathcal{E}_n^\infty}$ son ℓ^n-radical dans $\mathcal{K}_n$ (i.e. $\sqrt[\ell^n]{\mathcal{E}_n^\infty} = \{x \in \mathcal{K}_n \mid x^{\ell^n} \in \mathcal{E}_n^\infty\}$). Comme les seuls éléments ℓ-divisibles de $K_\infty^\times$ sont les racines de l'unité, le quotient $\sqrt[\ell^n]{\mathcal{E}_n^\infty}/\mathcal{E}_n^\infty\mu_n$ est donc un groupe fini qui ne dépend pas de n, pour n assez grand. Notons maintenant $\mathcal{e}_n^\infty = \{\ell^{-n} \otimes x \in \mathcal{R}_n \mid x \in \mathcal{E}_n^\infty\}$ l'image canonique de $\mathcal{E}_n^\infty$ dans le groupe $\mathcal{R}_n = \left(\ell^{-n}\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{K}_n$. De l'exactitude de la suite courte de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules :

$$1 \longrightarrow \sqrt[\ell^n]{\mathcal{E}_n^\infty}/\mathcal{E}_n^\infty\mu_n^{(\ell^n)} \longrightarrow \left(\ell^{-n}\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{E}_n^\infty \longrightarrow \mathcal{e}_n^\infty \longrightarrow 1,$$

nous déduisons la proposition :

PROPOSITION 12 : La suite $\left(\mathcal{E}_n^{\infty}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des sous-modules $\mathcal{E}_n^{\infty} = \{\ell^{-n}\otimes x \in \mathcal{R}_n \mid x\in\mathcal{E}_n^{\infty}\}$ de $\mathfrak{D}_n$ engendrés par les unités infinitésimales est paramétrée par les caractères $\rho = 0$, $\lambda = \delta$, et $\mu = 0$. Autrement dit, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{e_\varphi^{\infty}(n)}$ de la φ-composante de $\mathcal{E}_n^{\infty}$ est donné asymptotiquement par la formule :

$$e_\varphi^{\infty}(n) \sim \langle \delta , \varphi\rangle\, n.$$

THEOREME 7 : La suite $\left(\mathcal{T}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des sous-groupes de torsion des groupes de ℓ-classes infinitésimales $\mathcal{C}_n$ des corps K_n, et la suite $\left(\mathcal{T}_n/\mathcal{T}_n^{\ell^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de leurs quotients d'exposant ℓ^n, sont paramétrés par les caractères $\rho_t = 0$, $\lambda_t = \lambda_a - \delta$, et $\mu_t = \mu_a$. En particulier, pour chaque caractère ℓ-adique φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{t_\varphi(n)}$ de la φ-composante $\left(\mathcal{T}_n/\mathcal{T}_n^{\ell^n}\right)^{\ell_\varphi}$ est donné asymptotiquement par la formule :

$$t_\varphi(n) \sim \langle \mu_c^*, \varphi\rangle\, \ell^n + \langle \left(\lambda_c^* - \delta\right) + \left(\chi_\ell - 1\right)^*, \varphi > n.$$

Démonstration : Nous allons donner deux démonstrations de ce résultat, l'une directe, l'autre par dualité.

(i) Ecrivons $\mathcal{C} \sim \mathcal{B} \oplus \mathcal{T}'$ la pseudo-décomposition du $\Lambda[\Delta]$-module $\mathcal{C}$, en désignant par $\mathcal{T}'$ le facteur élémentaire de $\mathcal{C}$ dont les composantes isotypiques ont pour polynômes caractéristiques les polynômes P'_{a_φ}, définis à la proposition 11. Pour chaque naturel n, le sous-groupe de torsion $\mathcal{T}_n$ de $\mathcal{C}_n$ est aussi celui du quotient $\mathcal{C}'_n = \mathcal{C}/\mathcal{C}^{\omega_n}$. L'ordre de sa φ-composante $\mathcal{T}_n^{e_\varphi}$ est donc donné, à un facteur borné près, par celui du groupe $\left(\mathcal{T}'/\mathcal{T}'^{\omega_n}\right)^{e_\varphi}$, qui est paramétré par les caractères annoncés. D'après le théorème 2, le même résultat vaut pour les quotients $\left(\mathcal{T}'/\mathcal{T}'^{\nabla_n}\right)^{e_\varphi}$, donc pour ceux $\left(\mathcal{T}_n/\mathcal{T}_n^{\ell^n}\right)^{e_\varphi}$ du groupe $\mathcal{T}_n^{e_\varphi}$; ce qui établit la première assertion du théorème. La seconde résulte de l'expression des paramètres de $\mathcal{C}$, donnée par le théorème 5.

(ii) Désignons par $\mathcal{T}_n^{(\ell^n)}$ le sous-groupe d'exposant ℓ^n du groupe de torsion $\mathcal{T}_n$. Dans la description $\mathcal{C}_n = \mathcal{J}'_n/\mathcal{P}_n^{\infty}$ du groupe de Galois $\mathcal{C}_n$ comme groupe de ℓ-classes infinitésimales, les éléments de $\mathcal{T}_n^{(\ell^n)}$ sont représentés par les idéaux généralisés $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{J}'_n$ dont la puissance ℓ^n-ième est un idéal principal-infinitésimal $\mathfrak{a}^{\ell^n} = (x)$; et le générateur x de cet idéal est naturellement défini à une unité infinitésimale près. En associant à la classe $c\ell_\infty(\mathfrak{a})$ de l'idéal $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{C}_n$ celle de l'élément $\ell^{-n}\otimes x$ dans le quotient $\mathcal{R}_n/\mathcal{E}_n^\infty$, nous définissons donc un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-morphisme du sous-groupe $\mathcal{T}_n^{(\ell^n)}$ sur le quotient $\mathcal{D}_n/\mathcal{E}_n^\infty$. Quel est son noyau ? L'identité $\ell^{-n}\otimes x\in\mathcal{E}_n^\infty$ s'écrit $x=\varepsilon y^{\ell^n}$ pour un y de K_n (défini à une racine ℓ^n-ième de l'unité près) et une unité infinitésimale ε de $\mathcal{E}_n^\infty$. Les éléments du noyau sont donc les classes des idéaux principaux $\mathfrak{a}=(y)$ engendrés par les éléments y de K_n dont la puissance ℓ^n-ième est dans K_n^∞ ; c'està-dire par les éléments y de K_n dont l'image semi-locale $s(y)$ tombe dans le groupe $\hat{\mu}_n^{(\ell^n)}=\bigoplus_{\mathfrak{L}_n|\ell}\mu_{\mathfrak{L}_n}^{(\ell^n)}$ des racines ℓ^n-ièmes de l'unité dans $\hat{K}_n$. En d'autres termes, le noyau lui-même n'est autre que l'image canonique dans le sous-groupe de torsion $\mathcal{T}_n$, du quotient $\hat{\mu}_n^{(\ell^n)}/s\left(\mu_n^{(\ell^n)}\right)$.

La formule finale du théorème résulte donc de l'exactitude de la suite de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules :

$$1\longrightarrow \sqrt[\ell^n]{\mathcal{E}_n^\infty}/\mathcal{E}_n^\infty\,\mu_n^{(\ell^n)}\longrightarrow \hat{\mu}_n^{(\ell^n)}/s\left(\mu_n^{(\ell^n)}\right)\longrightarrow \mathcal{T}_n^{(\ell^n)}\longrightarrow \mathcal{D}_n/\mathcal{E}_n^\infty\longrightarrow 1.$$

Le groupe $\mathcal{D}_n$, en effet, est mesuré par la proposition 5 ; le sous-groupe $\mathcal{E}_n^\infty$ par la proposition 12 ; le quotient $\hat{\mu}_n^{(\ell^n)}/s\left(\mu_n^{(\ell^n)}\right)$ est paramétré par les caractères $\rho=0,\lambda=\omega\left(\chi_\ell-1\right)$, et $\mu=0$; et le terme de gauche $\sqrt[\ell^n]{\mathcal{E}_n^\infty}/\mathcal{E}_n^\infty\,\mu_n^{(\ell^n)}$ a un ordre borné, indépendamment de n.

Réunissant (i) et (ii), nous obtenons en particulier une nouvelle démonstration du théorème 5.

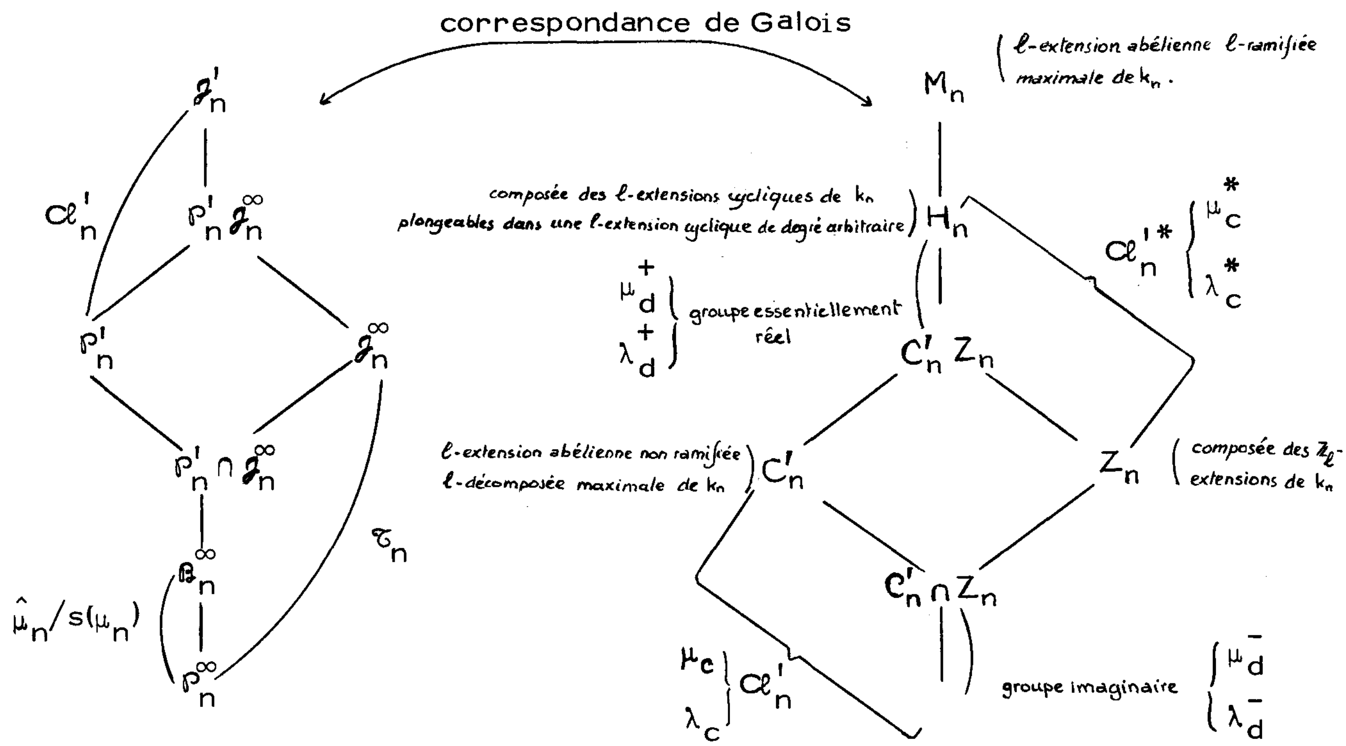
§ c - <u>Inégalités du miroir</u> :

Nous supposons, dans cette section, que le corps F est totalement réel, et que les places à l'infini $\mathfrak{p}_\infty$ de F ont le même sous-corps de décomposition, disons K^+, dans l'extension K/F. Dans ce cas, il est naturel d'écrire chaque caractère ℓ-adique χ du groupe Δ comme somme $\chi^+ + \chi^-$ d'un caractère réel et d'un caractère imaginaire, en posant :

<u>DEFINITION 8</u> : Lorsque le corps F est totalement réel, et K une extension quadratique d'un sur-corps K^+ de F, totalement réel, le sous-groupe de décomposition commun Δ_∞ des places à l'infini de F est le groupe d'ordre 2, engendré dans Δ par la conjugaison complexe. Nous disons qu'un <u>caractère</u> ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ est <u>réel</u> lorsqu'il est re-

présenté dans le caractère χ_∞, qu'il est imaginaire dans le cas contraire ; et qu'un caractère virtuel quelconque φ est réel (respectivement imaginaire) lorsque tous ses facteurs irréductibles sont réels (respectivement imaginaires). Les sous-groupes de $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$, engendrés, le premier par les caractères irréductibles réels, le second par ceux imaginaires, sont deux sous-groupes supplémentaires de $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$, images l'un de l'autre dans l'involution du miroir.

Introduisons maintenant les sous-groupes $\mathcal{B}_n^\infty = \{(x)' \in \mathcal{P}'_n \mid \exists\, p \in \mathbb{N}$ avec $x^{\ell^p} \in \mathcal{K}_n^\infty\}$ des idéaux ℓ-principaux généralisés $(x)'$ des corps K_n, respectivement engendrés par les éléments de $\mathcal{K}_n$ dont une puissance finie est infinitésimale (les groupes $\mathcal{B}_n^\infty$ ont déjà été rencontrés dans la partie (ii) du théorème 7) ; désignons par H_n la sous-extension de M_n associée à $\mathcal{B}_n^\infty$ par la théorie de Galois ; et considérons le schéma de corps :



Par un argument déjà utilisé (cf. th. 7 (ii)), le groupe $\mathcal{B}_n^\infty/\mathcal{P}_n^\infty$ s'identifie, via l'application $x \mapsto s(x)$, au quotient $\hat{\mu}_n/s(\mu_n)$ du groupe des racines de l'unité dans $\hat{\mathcal{K}}_n$ (le groupe des racines semi-locales de l'unité) par l'image diagonale du groupe des racines de l'unité dans $\mathcal{K}_n$ (le groupe des racines globales de l'unité) : c'est donc un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module fini, paramétré par les caractères $\lambda = \omega(\chi_\ell - 1)$, et $\mu = 0$. Cela étant, comme sous la condition $\delta = 0$, les paramètres du groupe de torsion $\mathcal{T}_n = \mathcal{J}_n^\infty / \mathcal{P}_n^\infty$ sont donnés par les formules $\lambda_t = \lambda_c^* + \omega(\chi_\ell - 1)$, et $\mu_t = \mu_c^*$, nous concluons que le quotient $\mathcal{J}_n^\infty / \mathcal{B}_n^\infty = \mathrm{Gal}(H_n / Z_n)$, désigné par $\mathcal{C}\ell_n'^*$ dans le schéma, est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module paramétré par les reflets λ_c^* et μ_c^* des caractères attachés au groupe des ℓ-classes C', pourvu que la conjecture de Leopoldt soit vérifiée dans la tour cyclotomique K_∞/K. Nous disons alors que $\mathcal{C}\ell_n'^*$ est le reflet de $\mathcal{C}\ell_n'$.

Le quotient $\mathcal{J}_n' / \mathcal{P}_n' \mathcal{J}_n^\infty$ est le groupe de Galois $\mathrm{Gal}\big((C_n' \cap Z_n)/K_n\big)$ de la sous-extension ℓ-décomposée maximale du composé Z_n des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K_n ; c'est donc (toujours sous la conjecture de Leopoldt) un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module fini totalement imaginaire : En effet, d'après les théorèmes 5 et 7, le groupe de Galois $\mathcal{J}_n' / \mathcal{J}_n^\infty$ de l'extension Z_n/K_n est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module projectif de caractère $\ell^n \chi_\infty^* + 1$; et la tour cyclotomique K_∞/K_n, qui correspond au caractère unité, est totalement ramifiée dès que n est assez grand.

Considérons enfin le quotient $\mathcal{P}_n' \cap \mathcal{J}_n^\infty / \mathcal{B}_n^\infty \simeq \mathrm{Gal}\big(H_n / (C_n' Z_n)\big)$: Si $(x)'$ est un idéal de $\mathcal{P}_n'$ qui est également dans $\mathcal{J}_n^\infty$, nous avons $(x^{\ell^p})' \in \mathcal{P}_n^\infty$, pour p assez grand, i.e. $x^{\ell^p} = \varepsilon y$ avec $\varepsilon \in \mathcal{E}_n'$ et $y \in \mathcal{K}_n^\infty$, et $s(x)^{\ell^p}$ est donc dans $s(\mathcal{E}_n')$. L'application $(x)' \mathcal{B}_n^\infty \mapsto s(x) \hat{\mu}_n s(\mathcal{E}_n')$ est ainsi un isomorphisme de $\mathcal{P}_n' \cap \mathcal{J}_n^\infty / \mathcal{B}_n^\infty$ sur le sous-groupe de torsion du quotient $\hat{\mathcal{K}}_n / \hat{\mu}_n s(\mathcal{E}_n')$. Introduisons maintenant le groupe des normes cyclotomiques semi-locales : $\hat{\mathcal{N}}_n = \bigcap_{p \geq n} N_{K_p/K_n}(\hat{\mathcal{K}}_p)$. Sous la condition $\partial = 0$, nous savons d'une part, par les résultats de la section 2 § b, que le quotient $\hat{\mathcal{K}}_n / \hat{\mathcal{N}}_n s(\mathcal{E}_n')$, qui s'identifie au groupe de Galois $\mathrm{Gal}\big(C_{\infty/n}' / K_\infty C_n'\big)$, a un ordre borné indépendamment de n ; et d'autre part, que la composante imaginaire du sous-groupe $\hat{\mathcal{N}}_n s(\mathcal{E}_n') / \hat{\mu}_n s(\mathcal{E}_n') \simeq \hat{\mathcal{N}}_n / \hat{\mu}_n(\hat{\mathcal{N}}_n \cap s(\mathcal{E}_n'))$ est sans torsion, puisqu'aucun élément de $(\mathcal{E}_n')^-$, autre que les racines de l'unité, n'est alors norme dans la tour cyclotomique K_∞/K_n. En particulier, la composante imaginaire du groupe $\mathcal{P}_n' \cap \mathcal{J}_n^\infty / \mathcal{B}_n^\infty$ a donc un ordre borné indépendamment de n ; ce que nous traduisons en disant que $\mathcal{P}_n' \cap \mathcal{J}_n^\infty / \mathcal{B}_n^\infty$ est essentiellement réel.

Regardons maintenant le quotient $\mathcal{J}_n^\infty / \mathcal{P}_n' \cap \mathcal{J}_n^\infty \simeq \mathcal{J}_n^\infty \mathcal{P}_n' / \mathcal{P}_n'$. Les conditions qui précèdent prouvent

- d'un côté, que sa composante réelle est paramétrée par les caractères λ_c^+ et μ_c^+,

- et de l'autre, que sa composante imaginaire est paramétrée par les caractères $(\lambda_c^*)^-$ et $(\mu_c^*)^-$, donc que ce quotient lui-même est globalement un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module paramétré. Par différence, nous en concluons que les quotients $\mathcal{J}'_n/\mathcal{P}'_n\mathcal{J}_n^\infty$ et $\mathcal{P}'_n \cap \mathcal{J}_n^\infty/\mathcal{B}_n^\infty$, considérés plus haut, sont eux aussi des $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules paramétrés. Ecrivant λ_d^- et μ_d^- les paramètres (imaginaires) du premier, λ_d^+ et μ_d^+ ceux (réels) du second, nous obtenons sans peine les formules :

$$\mu_d^- = (\mu_d^+)^* = \mu_c^- - (\mu_c^+)^* \quad , \quad \text{et} \quad \lambda_d^- = (\lambda_d^+)^* = \lambda_c^- - (\lambda_c^+)^*.$$

Par suite :

<u>THEOREME 8</u> : Lorsque l'extension K/F admet une conjugaison complexe, le paramètre μ_c du groupe des ℓ-classes $\mathcal{C}'$ vérifie l'inégalité du miroir :

$$\mu_c^- \geq (\mu_c^+)^*.$$

Lorsque, de plus, le corps K est absolument abélien, le paramètre μ_c est nul, et l'inégalité du miroir vaut pour le paramètre λ_c :

$$\lambda_c^- \geq (\lambda_c^+)^*. \qquad (\dagger)$$

<u>Démonstration</u> : L'inégalité $\mu_c^- \geq (\mu_c^+)^*$ résulte directement des calculs précédents, le paramètre μ_d^- devant être dans $R^+_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ (on se convaincra sans peine que les hypothèses $\delta = \partial = 0$ faites au cours du calcul sont sans importance ici, car elles ne concernent que des paramètres de type λ). Lorsque le corps est absolument abélien, le caractère μ_c est nul, en vertu du théorème de Ferrero et Washington (cf. [10]), et les conditions $\delta = \partial = 0$ sont automatiquement vérifiées ; d'où le résultat annoncé, le paramètre λ_d^- étant alors dans $R^+_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$.

4 - <u>APPLICATION AU GROUPE UNIVERSEL $K_2(K_\infty)$ ET AUX DIVERS NOYAUX ASSOCIES AUX SYMBOLES CLASSIQUES</u>

Pour chaque naturel n, désignons par $K_2(K_n)$ le groupe universel des symboles sur le corps K_n (qui est, par définition, le quotient du carré tensoriel $K_n^\times \otimes_{\mathbb{Z}} K_n^\times$ du groupe multiplicatif de K_n par le sous-groupe I_n, engendré par les éléments de la forme $x \otimes (1-x)$, pour $x \notin \{0, 1\}$), et notons

---

(†) On prendra garde que ce résultat est strictement plus fort que le résultat analogue pour l'invariant λ associé aux groupes de classes au sens ordinaire (cf. 4 §c).

$K_2(K_\infty) = \varinjlim_n K_2(K_n)$ celui correspondant à K_∞. Les groupes $K_2(K_n)$ étant de torsion, en vertu d'un théorème de Garland, leurs ℓ-Sylow respectifs s'identifient aux produits tensoriels : $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K_2(K_n) = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} [(K_n^\times \otimes_{\mathbb{Z}} K_n^\times)/I_n] \simeq (\mathcal{K}_n \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{K}_n)/\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} I_n$; ce qui justifie la définition :

<u>DEFINITION 8</u> : Pour chaque naturel n, nous désignons par $K_2(\mathcal{K}_n)$ le ℓ-Sylow $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K_2(K_n) = (\mathcal{K}_n \otimes \mathcal{K}_n)/\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} I_n$ du groupe universel $K_2(K_n)$, et nous notons $K_2(\mathcal{K}) = \varinjlim_n K_2(\mathcal{K}_n)$ le ℓ-Sylow du groupe $K_2(K_\infty)$.

§ a - Description du noyau modéré et du noyau hilbertien dans $K_2(\mathcal{K})$:

Pour chaque naturel n et chaque place $\mathfrak{P}_n$ de K_n, convenons d'écrire $(\, , \,)_{\mathfrak{P}_n}$ le symbole modéré défini par $\mathfrak{P}_n$, ou plutôt l'induit de ce symbole au tensorisé $\mathcal{K}_n \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{K}_n$, qui prend ses valeurs dans le ℓ-Sylow $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{O}_n/\mathfrak{P}_n)^*$ du groupe multiplicatif du corps résiduel de la place $\mathfrak{P}_n$. Désignons de même par $\left(\frac{\, , \,}{\mathfrak{P}_n}\right)$ l'induit au tensorisé $\mathcal{K}_n \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{K}_n$ du symbole de Hilbert associé à la place $\mathfrak{P}_n$, qui prend ses valeurs dans le ℓ-Sylow $\mu_{\mathfrak{P}_n}$ du groupe des racines de l'unité du complété de K_n pour la place $\mathfrak{P}_n$. Si $\mathfrak{P}_n$ ne divise pas ℓ, il est toujours possible de relever dans $\mu_{\mathfrak{P}_n}$ le groupe résiduel $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{O}_n/\mathfrak{P}_n)^*$, ce qui permet d'identifier symbole modéré et symbole de Hilbert. En revanche, si $\mathfrak{P}_n$ divise ℓ, le groupe résiduel $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{O}_n/\mathfrak{P}_n)^*$ est nul, de sorte que le symbole modéré $(\, , \,)_{\mathfrak{P}_n}$ est trivial, tandis que le symbole de Hilbert continue à prendre ses valeurs dans le groupe $\mu_{\mathfrak{P}_n}$ tout entier.

<u>DEFINITION 9</u> : Pour chaque naturel n, nous désignons par $R_2(\mathcal{K}_n)$ le noyau dans $K_2(\mathcal{K}_n)$ des symboles modérés :

$R_2(\mathcal{K}_n) = \{\{a, b\} \in K_2(\mathcal{K}_n) \mid (a, b)_{\mathfrak{P}_n} = 1$, pour chaque place $\mathfrak{P}_n$ de $k_n\}$.

Et par $H_2(\mathcal{K}_n)$ nous entendons le noyau dans $K_2(\mathcal{K}_n)$ des symboles de Hilbert :

$H_2(\mathcal{K}_n) = \{\{a, b\} \in K_2(\mathcal{K}_n) \mid \left(\frac{a, b}{\mathfrak{P}_n}\right) = 1$, pour chaque place $\mathfrak{P}_n$ de $k_n\}$.

Considérons, pour commencer, les groupes $R_2(\mathcal{K}_n)$: D'après Coates (cf. [1], § 3) le noyau $R_2(\mathcal{K}) = \varinjlim R_2(\mathcal{K}_n)$ des symboles modérés dans $K_2(\mathcal{K})$

s'identifie au dual $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}\left(\bar{\mathbb{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathfrak{T}, \mathbb{T}_\ell\right)$ du produit $\bar{\mathbb{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathfrak{T}$ du sous-groupe de Λ-torsion $\mathfrak{T}$ du groupe de Galois $\mathcal{G}$ (défini dans la section 3 § a) par l'opposé $\bar{\mathbb{T}}_\ell = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(\mathbb{T}_\ell, \mathbb{Z}_\ell)$ du module de Tate $\mathbb{T}_\ell = \varprojlim_n \mu_n$. Plus précisément, les résultats de [4] (§ 4, th. 7) montrent que pour chaque naturel n il existe une suite exacte courte de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules finis :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{M}_n \longrightarrow R_2(K_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}\left(\left(\bar{\mathbb{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathfrak{T}\right) / \left(\bar{\mathbb{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathfrak{T}\right)^{\omega_n}, \mathbb{T}_\ell\right) \longrightarrow 1,$$

dont le noyau $\mathfrak{M}_n$ a un ordre borné indépendamment de n.

Cela étant, nous savons par le théorème 5 que le groupe $\mathfrak{T}$ est un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien et de torsion, de paramètres $\lambda = \omega\lambda_c^{-1} + \omega(\chi_\ell - 1)$ et $\mu = \omega\mu_c^{-1}$. Son tensorisé $\bar{\mathbb{T}}_\ell \otimes \mathfrak{T}$, qui est tout aussi bien un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien et de torsion, a donc pour paramètres $\lambda = \lambda_c^{-1} + (\chi_\ell - 1)$ et $\mu = \mu_c^{-1}$; et la finitude du terme de droite de la suite montre que son polynôme caractéristique ne contient aucun facteur cyclotomique (ce dernier résultat étant d'ailleurs équivalent au théorème de Tate sur l'exactitude de la conjecture principale pour le K_2). D'après le théorème 2, nous pouvons donc énoncer :

<u>THEOREME 9</u> : La suite $\left(R_2(K_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des noyaux dans $K_2(K_n)$ des symboles modérés est paramétrée par les deux caractères $\omega\left(\lambda_c + (\chi_\ell - 1)\right)$ et $\omega\mu_c$. Autrement dit, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{r_\varphi(n)}$ de la φ-composante de $R_2(K_n)$ est donné asymptotiquement par la formule :

$$r_\varphi(n) \sim \langle \omega\mu_c, \varphi\rangle\, \ell^n + \langle \omega\left(\lambda_c + (\chi_\ell - 1)\right), \varphi\rangle\, n\,.$$

Le même résultat vaut pour la suite des quotients $\left(R_2(K_n)/R_2(K_n)^{\ell^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>THEOREME 10</u> : La suite $\left(H_2(K_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des noyaux dans $K_2(K_n)$ des symboles de Hilbert est paramétrée par les deux caractères $\omega\lambda_c$ et $\omega\mu_c$. Autrement dit, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{h_\varphi(n)}$ de la φ-composante de $H_2(K_n)$ est donné asymptotiquement par la formule :

$$h_\varphi(n) \sim \langle \omega\mu_c, \varphi\rangle\, \ell^n + \langle \omega\lambda_c, \varphi\rangle\, n\,.$$

Le même résultat vaut pour la suite des quotients $\left(H_2(K_n)/H_2(K_n)^{\ell^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration des théorèmes : Le théorème 9 résulte directement des calculs ci-dessus, qui montrent que les groupes $R_2(K_n)$ sont paramétrés par les reflets $\omega[\lambda_c+(\chi_\ell-1)]$ et $\omega\mu_c$ des caractères $\lambda_c^{-1}+(\chi_\ell-1)$ et μ_c^{-1}. Bien entendu, en l'absence de facteurs cyclotomiques, les quotients $R_2(K_n)/R_2(K_n)^{\ell^n}$ sont paramétrés par les mêmes caractères.

Pour établir le théorème 10, formons la suite exacte de Moore (cf. par exemple [13], § 2) :

$$1 \longrightarrow H_2(K_n) \longrightarrow R_2(K_n) \xrightarrow{\text{Hilbert}} \hat{\mu}_n \xrightarrow{\text{produit}} \mu_n \longrightarrow 1 .$$

Nous obtenons immédiatement $h_\varphi(n) = r_\varphi(n) - \langle \omega\chi_\ell, \varphi\rangle + \langle \omega, \varphi\rangle$; d'où le résultat attendu.

Remarque : Nous aurions pu tout aussi bien démontrer le théorème 9 en évaluant directement les ordres respectifs des φ-composantes des quotients $R_2(K_n)/R_2(K_n)^{\ell^n}$ à partir de la suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules (dont on trouvera une démonstration dans [9]) :

$$1 \longrightarrow \mu_n^{(\ell^n)} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{C}\ell'_n \longrightarrow R_2(K_n)/R_2(K_n)^{\ell^n} \longrightarrow \hat{\mu}_n/\hat{\mu}_n^{\ell^n} \longrightarrow \mu_n/\mu_n^{\ell^n} \longrightarrow 1 .$$

Compte tenu de l'interprétation de Coates, citée plus haut, du groupe $R_2(K)$ comme dual du sous-groupe de Λ-torsion de $\mathfrak{G}$, nous obtiendrions ainsi une troisième démonstration du théorème 5.

§ b - Description du noyau modéré et du noyau hilbertien dans les groupes $\mathfrak{R}_n$:

Rappelons que nous avons désigné par $\mathfrak{R}_n = (\ell^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} K_n^\times \simeq (\ell^{-n}\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{K}_n$ le radical kummerien des ℓ-extensions abéliennes d'exposant ℓ^n du n-ième étage K_n de la tour cyclotomique K_∞/K. Nous savons, par un résultat de Tate (cf. [14], § 6) que tout élément de $K_2(K_n)$ d'ordre divisant ℓ^n est de la forme $\{\zeta_n, x\}$ pour un x de K_n, et une racine primitive ℓ^n-ième de l'unité ζ_n dans k_n ; ce que nous pouvons traduire par l'exactitude de la suite :

$$\mu_n^{(\ell^n)} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathfrak{R}_n \longrightarrow K_2(K_n)^{(\ell^n)} \longrightarrow 1,$$

en désignant par $K_2(K_n)^{(\ell^n)}$ le sous-groupe d'exposant ℓ^n de $K_2(K_n)$, et par $\mu_n^{(\ell n)}$ celui de μ_n.

Cela étant, à chacune des deux familles de symboles citées plus haut correspond un sous-module canonique de $\mathfrak{K}_n$. Le noyau des symboles modérés $\mathfrak{R}_n = \{\ell^{-n} \otimes x \in \mathfrak{K}_n \mid (\zeta_n, x)_{\mathfrak{P}_n} = 1$, pour chaque place $\mathfrak{P}_n$ de $K_n\}$ est bien connu : c'est le radical kummerien de la ℓ-extension abélienne maximale ℓ-ramifiée d'exposant ℓ^n du corps k_n ; nous l'avons rencontré dans la section 3 § a. Celui des symboles de Hilbert $\mathfrak{H}_n = \{\ell^{-n} \otimes x \in \mathfrak{K}_n \mid \left(\frac{\zeta_n, x}{\mathfrak{P}_n}\right) = 1$, pour chaque place $\mathfrak{P}_n$ de $K_n\}$ a également une interprétation naturelle : d'après [2] (§ II, lemme 1), c'est le radical kummerien de la composée $H_n^{(\ell^n)}$ des ℓ-extensions cycliques d'exposant ℓ^n de K_n, qui se plongent dans une extension cyclique de degré ℓ^{n+p}, pour chaque naturel p. Enfin, le groupe $\mathfrak{U}_n = \{\ell^{-n} \otimes x \in \mathfrak{K}_n \mid \{\zeta_n, x\}$ est le noyau dans $\mathfrak{K}_n$ du symbole universel $\{\zeta_n, \ \}$.

<u>DEFINITION 10</u> : Nous appelons <u>noyau modéré</u> attaché au corps K_n le sous-groupe $\mathfrak{R}_n$ du radical $\mathfrak{K}_n$, qui est annulé par les symboles modérés $(\zeta_n, \ )_{\mathfrak{P}_n}$, associés à l'une quelconque des racines ℓ^n-ièmes primitives de l'unité ζ_n de K_n. Le groupe $\mathfrak{R}_n = \{\ell^{-n} \otimes x \ \mathfrak{K}_n \mid (\zeta_n, x)_{\mathfrak{P}_n} = 1$, pour chaque place $\mathfrak{P}_n$ de $k_n\}$ est le radical kummerien de la ℓ-extension $M_n^{(\ell^n)}$ abélienne maximale ℓ-ramifiée d'exposant ℓ^n du corps K_n.

Nous appelons <u>noyau hilbertien</u> attaché au corps K_n le noyau dans $\mathfrak{K}_n$ des symboles de Hilbert $\left(\frac{\zeta_n, }{\mathfrak{P}_n}\right)$. Le groupe $\mathfrak{H}_n = \{\ell^{-n} \otimes x \in \mathfrak{K}_n \mid \left(\frac{\zeta_n, x}{\mathfrak{P}_n}\right)_{\mathfrak{P}_n} = 1$, pour chaque place $\mathfrak{P}_n$ de $\ _n\}$ est le radical kummerien de la composé $H_n^{(\ell^n)}$ des ℓ-extensions cycliques d'exposant ℓ^n de K_n, qui se plongent dans une extension cyclique de degré ℓ^{n+p}, pour chaque naturel p.

Enfin, nous appelons <u>noyau universel</u> attaché au corps K_n le noyau dans $\mathfrak{K}_n$ des symboles universels $\{\zeta_n, \ \}$; i.e. $\mathfrak{U}_n = \{\ell^{-n} \otimes x \in \mathfrak{K}_n \mid \{\zeta_n, x\} = 1\}$.

Ces définitions posées, le résultat de Tate cité plus haut permet de conclure à l'exactitude du diagramme (où $H_2^{(\ell)}(\mathcal{K}_n)^{(\ell^n)}$ et $R_2(\mathcal{K}_n)^{(\ell^n)}$ désignent respectivement les sous-groupes d'exposant ℓ^n de $H_2(\mathcal{K}_n)$ et $R_2(\mathcal{K}_n)$) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 \longrightarrow & \mu_n^{(\ell^n)} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathfrak{U}_n & \longrightarrow & \mu_n^{(\ell^n)} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathfrak{H}_n & \longrightarrow & H_2(\mathcal{K}_n)^{(\ell^n)} & \longrightarrow & 1 \\
 & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 \longrightarrow & \mu_n^{(\ell^n)} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathfrak{U}_n & \longrightarrow & \mu_n^{(\ell^n)} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathfrak{R}_n & \longrightarrow & R_2(\mathcal{K}_n)^{(\ell^n)} & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Dans celui-ci, le groupe $\mu_n^{(\ell^n)} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathfrak{R}_n$ est donné par le théorème 5 (section 3 § a), le groupe $R_2(\mathcal{K}_n)^{(\ell^n)}$ par le théorème 9 (section 4 § a), et le groupe $H_2(\mathcal{K}_n)^{(\ell^n)}$ par le théorème 10 (section 4 § a). Il vient donc :

<u>THEOREME 11</u> : La suite $(\mathfrak{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des noyaux universels dans $\mathfrak{R}_n$ est paramétrée par les caractères $\rho = \chi_\infty$, $\lambda = \omega$, et $\mu = 0$. Autrement dit, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{u_\varphi(n)}$ de la φ-composante de $\mathfrak{U}_n$ est donné asymptotiquement par la formule :

$$u_\varphi(n) \sim \langle \chi_\infty, \varphi \rangle n \ell^n + \langle \omega, \varphi \rangle n .$$

<u>THEOREME 12</u> : La suite $(\mathfrak{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des noyaux dans $\mathfrak{R}_n$ des symboles de Hilbert est paramétrée par les caractères $\rho = \chi_\infty$, $\lambda = \lambda_c + \omega$, et $\mu = \mu_c$. Et la suite $\left(\mathfrak{H}_n/\mathfrak{H}_n^{\ell^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des quotients d'exposant ℓ^n des groupes de Galois respectifs des composés des ℓ-extensions cycliques des corps K_n, qui se plongent dans une ℓ-extension cyclique de degré arbitrairement grand est paramétrée par les caractères reflets $\rho = \chi_\infty^*$, $\lambda = \lambda_c^* + 1$, et $\mu = \mu_c^*$.

<u>SCOLIE</u> : La suite $(\mathfrak{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des radicaux kummeriens des sous-extensions d'exposant ℓ^n respectives $Z_n^{(\ell^n)}/K_n$ des composés des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions des corps K_n est paramétrée par les caractères $\rho = \chi_\infty$, $\lambda = \omega + \delta^*$, et $\mu = 0$. En particulier, lorsque la conjecture de Leopoldt est vérifiée dans la tour cyclotomique K_∞/K, les groupes $\mathfrak{U}_n$ et $\mathfrak{Z}_n$ ont les mêmes paramètres.

<u>Démonstration</u> : Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(Z_n/K_n)$ de la composée des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K_n a été rencontré au cours de la section 3 § c. C'est

un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module projectif de caractère $\ell^n\chi_\infty^* + \delta(n)+1$ (et le caractère de défaut $\delta(n)$ est constant pour n assez grand). Les paramètres du radical $\mathfrak{Z}_n$ s'en déduisent aussitôt, via l'involution du miroir ; ils coincident avec ceux de $\mathfrak{U}_n$ sous la conjecture de Leopoldt, ce qui se traduit par le fait que l'écart entre les groupes $\mathfrak{U}_n$ et $\mathfrak{Z}_n$ reste borné, lorsqu'on monte la tour cyclotomique.

§ c – Comparaison avec le groupe des classes au sens ordinaire :

Nous savons que, pour chaque naturel n, le ℓ-groupe $C\ell_n'$ des ℓ-classes d'idéaux du corps K_n s'écrit comme quotient du ℓ-groupe des classes au sens ordinaire $C\ell_n$, par le sous-groupe, disons $\mathcal{L}_n$, engendré par les classes dans $C\ell_n$ des idéaux premiers de K_n au-dessus de ℓ. Les groupes $C\ell_n$ donnent lieu naturellement à une description tout à fait semblable à celle effectuée dans la section 2 § a à propos des groupes $C\ell_n'$. En particulier, leur limite projective $\mathcal{C} = \varprojlim C\ell_n$ est un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien et de torsion, qui admet $\mathcal{C}'$ comme quotient. Si m d'ailleurs désigne l'indice du composé K_m des sous-corps de décomposition des places de k au-dessus de ℓ dans la tour K_∞/K, le sous-groupe $\mathcal{L} = \varprojlim \mathcal{L}_n$, qui définit le quotient $\mathcal{C}' = \mathcal{C}/\mathcal{L}$, est évidemment fixé par Γ_m, de sorte que pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, les polynômes caractéristiques des φ-composantes respectives de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$ ne diffèrent que par des facteurs cyclotomiques, et sont en particulier divisibles par les mêmes puissances de ℓ.

Plus précisément :

<u>THEOREME 13</u> : La suite $(C\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des ℓ-groupes de classes au sens ordinaire des corps $_n$ est paramétrée par les éléments $\lambda = \lambda_c + \lambda_\ell$ et $\mu = \mu_c$ du groupe $R^+_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$. Le caractère λ_ℓ, qui intervient ici, paramètre la suite $(\mathcal{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sous-groupes de $C\ell_n$ respectivement engendrés par les classes des idéaux premiers de k_n au-dessus de ℓ. Lorsque l'extension K/F possède une conjugaison complexe, il est donné par la formule $\lambda_\ell = \chi_\ell^- - \partial$, dès que la conjecture de Leopoldt est vérifiée dans la tour cyclotomique K_∞/K. En particulier, il est égal à la partie imaginaire χ_ℓ^- du caractère χ_ℓ, lorsque k est absolument abélien.

<u>Démonstration</u> (cf. [2], [3] et [4]) : Supposons que l'extension K/F possède une conjugaison complexe, et désignons par λ_ℓ l'élément de $R^+_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$

qui paramètre les sous-groupes $\mathcal{L}_n$. D'après la caractérisation du caractère de défaut ∂ de la théorie des ℓ-genres, la somme $\lambda_\ell + \partial$, qui prend en compte la totalité des facteurs cyclotomiques qui interviennent dans la décomposition des polynômes caractéristiques associés aux φ-composantes du groupe, mesure de ce fait la dimension asymptotique du quotient des genres $\mathcal{G}_n = C\ell / C\ell^{\omega_n}$ de l'extension procyclique K_∞/K_n (en ce sens que pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, et n assez grand, le coefficient de φ dans la décomposition du caractère $(\lambda_\ell + \partial)$ n'est autre que la dimension $\dim_{\mathbb{Z}_\varphi} (\mathcal{C}/\mathcal{C}^{\omega_n})^{e_\varphi}$ de la φ-composante de $\mathcal{G}_n$).
Désignons par C_n le ℓ-corps des classes de Hilbert de K_n, et par $C_{\infty/n}$ le ℓ-corps des genres de K_∞/K_n (i. e. la ℓ-extension abélienne maximale de K_n qui est non ramifiée sur K_∞). D'après [7], la famille $\mathfrak{h}_n$ des symboles de Hasse $\left(\frac{\ ,C_{\infty/n}/K_n}{\mathfrak{L}_n}\right)_{\mathfrak{L}_n|\ell}$, et la formule du produit p_n (prise dans $\mathrm{Gal}(C_{\infty/n}/K_n)$ donnent naissance à la suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow \mathcal{E}_n/\mathcal{E}_n \cap \mathcal{N}_n \xrightarrow{\mathfrak{h}_n} \widetilde{\bigoplus_{\mathfrak{L}_n|\ell}} I_{\mathfrak{L}_n}(C_{\infty/n}/K_n) \xrightarrow{p_n} \mathrm{Gal}(C_{\infty/n}/K_\infty C_n) \longrightarrow 1.$$

Dans celle-ci, $\mathcal{E}_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_n$ est le tensorisé du groupe des unités de K_n ; $\mathcal{N}_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigcap_{p\geq n} N_{K_p/K_n}(K_n^\times)\right)$ est celui du groupe des normes cyclotomiques ; et $\widetilde{I}_n = \widetilde{\bigoplus_{\mathfrak{L}_n|\ell}} I_{\mathfrak{L}_n}(C_{\infty/n}/K_n)$ désigne le sous-groupe de la somme directe des groupes d'inertie attachés aux places $\mathfrak{L}_n$ de K_n au-dessus de ℓ dans l'extension abélienne $C_{\infty/n}/K_n$, constitué des familles $(\sigma_{\mathfrak{L}_n})_{\mathfrak{L}_n|\ell}$ dont la restriction à K_∞ vérifie la formule du produit $\prod_{\mathfrak{L}_n|\ell} \sigma_{\mathfrak{L}_n}\Big|_{K_\infty} = 1$. Le groupe $\widetilde{I}_n$ étant un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module projectif de caractère $(\chi_\ell - 1)$, distinguons trois cas :

(i) Si φ est réel, et distinct du caractère unité, la φ-composante $\mathcal{E}_n^{e_\varphi}$ du groupe des unités généralisées s'envoie injectivement dans celle $\mathcal{U}_n^{e_\varphi}$ du groupe des unités semi-locales (d'après l'exactitude de la conjecture de Leopoldt pour K_n), donc presque surjectivement (en vertu de l'égalité des dimensions), et le conoyau, qui s'envoie surjectivement dans le groupe $\mathrm{Gal}(C_{\infty/n}/K_\infty C_n)^{e_\varphi}$ est donc fini. Ce dernier groupe l'est aussi.

(ii) Si φ est unité, l'équation aux dimensions montre que le quotient $\left(\mathcal{U}_n/s(\mathcal{E}_n)\right)^{e_1}$ est de dimension 1 ; mais ce défaut de surjectivité est compensé par la formule du produit, et la conclusion "$\mathrm{Gal}\left(\mathcal{C}_{\infty/n}/K_\infty C_n\right)^{e_1}$ fini" vaut encore.

(iii) Enfin, si φ est imaginaire, le groupe $\mathcal{E}_n^{e_\varphi}$ est fini, et nous obtenons immédiatement : $\dim_{Z_\varphi} \mathcal{G}_n^{e_\varphi} = \dim_{Z_\varphi} \left(\mathrm{Gal}\left(\mathcal{C}_{\infty/n}/K_\infty C_n\right)\right)^{e_\varphi} = \dim_{Z_\varphi} \tilde{I}_n = \langle \varphi, \chi_\ell \rangle$; ce qui achève la démonstration.

5 - APPENDICE : SUR UNE CONJECTURE DE J. COATES

Nous conservons les notations du reste de l'article : En particulier K est une extension abélienne finie d'un corps de nombres F, de degré relatif d étranger à ℓ, contenant les racines ℓ-ièmes de l'unité, et K_∞ la tour cyclotomique sur K. Nous désignons par M_∞ la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de K_∞, par $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ le groupe des unités de K_∞.

Considérons les trois extensions suivantes : $K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E'}]$, engendrée par les racines d'ordre ℓ-primaire des ℓ-unités; $K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E}]$, engendrée par les racines d'ordre ℓ-primaire des unités ; et Z_∞ fixée par le sous-groupe de Λ-torsion $\mathcal{T}$ du groupe de Galois $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}\left(M_\infty/K_\infty\right)$. Les inclusions suivantes sont bien connues :

$$Z_\infty \subset K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E}] \subset K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E'}] \subset M_\infty .$$

Rappelons brièvement comment les obtenir : Comme $K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E'}]$ contient trivialement $K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E}]$, et que l'extension $K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E'}]/K_\infty$ est ℓ-ramifiée, il suffit de vérifier que Z_∞ est contenue dans $K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E}]$; autrement dit, que $\mathrm{Gal}\left(M_\infty/K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E}]\right)$ est un module de Λ-torsion. Désignons par $\mathfrak{R} = \{\ell^{-m} \otimes x \in \left(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right) \otimes_{\mathbb{Z}} K_\infty^\times \mid (x)' \in J'^{\ell^m}\}$ le radical kummerien de M_∞, par $\mathcal{E} = \left(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right) \otimes_{\mathbb{Z}} E$ celui de $K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E}]$, et considérons le groupe $\mathcal{C}\ell$, défini par la suite exacte courte de $\Lambda[\Delta]$-modules :

$$1 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}\ell \longrightarrow 1 .$$

Une vérification immédiate montre que l'application qui à l'élément $\ell^{-m} \otimes x$

de $\mathfrak{R}$ associe la classe $cl\left(\sqrt[\ell^m]{(x)}\right)$ de l'idéal $\sqrt[\ell^m]{(x)}$ induit un isomorphisme canonique de $\mathcal{C}\ell$ sur le ℓ-groupe des classes d'idéaux du corps K_∞(on notera que l'appartenance à $\mathfrak{R}$ assure que l'idéal principal (x) est une puissance ℓ^m-ième en dehors de ℓ, et que les idéaux de K_∞qui divisent ℓ sont ℓ-divisibles dans J). L'inclusion annoncée provient alors du fait bien connu que le dual de Pontrjagin de $\mathcal{C}\ell$ est Λ-pseudo-isomorphe au groupe de Galois $\mathcal{C} = \mathrm{Gal}\left(C_\infty/K_\infty\right)$ de la ℓ-extension abélienne non ramifiée maximale de K_∞(cf. [6], §5, th. 11). Plus généralement, nous avons ici, par une généralisation facile du résultat d'Iwasawa, un $\Lambda[\Delta]$-pseudo-isomorphisme (où $\overline{\mathcal{C}\ell}$ est l'opposé du groupe $\mathcal{C}\ell$ pour l'action de Galois) :

$$\mathrm{Hom}\left(\overline{\mathcal{C}\ell},\ \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right) \sim \mathcal{C}\,.$$

Cela étant, comme le groupe de Galois $\mathcal{C}^* = \mathrm{Gal}\left(M_\infty/K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E}\ ]\right)$ est le dual au sens de Kummer $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}\ell\,,\mu_\ell)$ du groupe $\mathcal{C}\ell$, nous retrouvons bien le fait que $\mathcal{C}^*$ est un $\Lambda[\Delta]$-module de torsion, pseudo-isomorphe à $\mathcal{C}$ en tant que Λ-module, mais dont les paramètres sont les images de ceux de $\mathcal{C}$ dans l'involution du miroir. Nous disons que $\mathcal{C}^*$ est le reflet de $\mathcal{C}$.

Le groupe de Galois $\mathcal{C}'^* = \mathrm{Gal}\left(M_\infty/K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E'}\right)$ s'évalue de la même façon : La suite exacte courte canonique (où $\mathcal{E}' = \left(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right)\otimes_{\mathbb{Z}} E'$ est le radical kummerien de l'extension $K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E'}]/K_\infty\big)$:

$$1 \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}\ell' \longrightarrow 1$$

montre que le quotient $\mathcal{C}\ell' = \mathfrak{R}/\mathcal{E}'$ s'identifie au ℓ-groupe des ℓ-classes d'idéaux de K_∞,et, par suite, que le groupe de Galois $\mathcal{C}'^*$ est le reflet de $\mathcal{C}'$. Enonçons ces résultats (cf. [6], § viii, th. 16) :

<u>THEOREME 14</u> : Les groupes de Galois $\mathcal{C}^* = \mathrm{Gal}\left(M_\infty/K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E}\ ]\right)$ et $\mathcal{C}'^* = \mathrm{Gal}\left(M_\infty/K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E'}\ ]\right)$ sont les reflets respectifs des groupes $\mathcal{C} = \mathrm{Gal}\left(C_\infty/K_\infty\right)$ et $\mathcal{C}' = \mathrm{Gal}\left(C'_\infty/K_\infty\right)$. En particulier, le groupe $\mathcal{C}^*$ est un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien de paramètres $\mu_{\mathcal{C}}^* = \omega\,\mu_{\mathcal{C}}^{-1}$ et $\left(\lambda_{\mathcal{C}}+\lambda_\ell\right)^* = \omega\left(\lambda_{\mathcal{C}}^{-1}+\lambda_\ell^{-1}\right)$; et le caractère λ_ℓ qui intervient ici paramètre le sous-groupe de $\mathcal{C}$ correspondant aux classes des idéaux au-dessus de ℓ.

Ce dernier résultat nous permet de préciser la conjecture avancée par Coates dans [1], et infirmée par Iwasawa, qui postule l'identité de Z_∞ et de $K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E}\ ]$. En effet, les paramètres du $\Lambda[\Delta]$-module $\mathfrak{T} = \mathrm{Gal}\left(M_\infty/Z_\infty\right)$ sont donnés par le théorème 5, et le paramètre λ_ℓ par le théorème 13. Il vient donc :

THEOREME 15 : Désignons par $K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E}\ ]$ l'extension abélienne engendrée sur K_∞ par les racines d'ordre ℓ-primaire des unités de K_∞, et par Z_∞ la sous-extension de M_∞ fixée par le sous-groupe de Λ-torsion $\mathfrak{T}$ de $\mathfrak{G}$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}\left(K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E}\ ]/Z_\infty\right)$ est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module projectif et un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien paramétré par le seul caractère :

$$\lambda_e = \omega\left(\chi_\ell - 1\right) - \lambda_\ell^* .$$

En particulier, lorsque K est absolument abélien, et si l'extension K/F admet une conjugaison complexe, le caractère λ_e est donné par la formule :

$$\lambda_e = \omega\left(\chi_\ell^+ - 1\right).$$

Dans ce cas l'égalité $Z_\infty = K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E}\ ]$ a lieu si et seulement si χ_ℓ^+ est le caractère unité, c'est-à-dire si et seulement s'il n'existe qu'un seul premier au-dessus de ℓ dans le sous-corps réel maximal K_+ de K.

Démonstration : Le groupe $\mathrm{Gal}\left(K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E}\ ]/K_\infty\right)$ n'ayant aucun sous-module fini non nul, en vertu d'un argument classique de théorie d'Iwasawa (cf. [6] § 8.3), la conjecture de Coates $Z_\infty = K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E}\ ]$ équivaut, en effet, à la nullité du caractère λ_e, qui se lit, lorsque K est absolument abélien, sur le nombre de places au-dessus de ℓ contenues dans son sous-corps réel maximal K_+. Signalons qu'une démonstration de ce tout dernier résultat vient également d'être obtenue, par K. Wingberg (cf. [15]), à l'aide des théorèmes de dualité globale de Poitou-Tate.

6 - TABLEAU DES RESULTATS

Nous donnons ci-dessous les paramètres des principaux modules étudiés plus haut (conformément à la définition 2, la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est paramétrée par ρ, λ, et μ lorsque l'ordre $\ell^{o_\varphi(n)}$ de la φ-composante de M_n est donné asymptotiquement par la formule : $o_\varphi(n) \sim \langle\rho,\varphi\rangle\, n\, \ell^n + \langle\mu,\varphi\rangle\, \ell^n + \langle\lambda,\varphi\rangle\, n$).

Module paramétré	Rappel de la définition du groupe étudié	Paramètres		
		ρ	λ	μ
$E_n/E_n^{\ell^n}$	Quotient d'exposant ℓ^n du groupe des unités du corps K_n	χ_∞	$\omega - 1$	0
$E'_n/E'^{\ell^n}_n$	Quotient d'exposant ℓ^n du groupe des ℓ-unités du corps K_n	χ_∞	$\omega + (\chi_\ell - 1)$	0
$\mathcal{C}\ell'_n$	ℓ-groupe des ℓ-classes d'idéaux de K_n	0	λ_c	μ_c
$\mathcal{C}\ell'_n/\mathcal{C}\ell'^{\ell^n}_n$	Quotient d'exposant ℓ^n du groupe des ℓ-classes d'idéaux de K_n	0	λ_c	μ_c
$\mathfrak{D}_n$	Radical kummérien de la ℓ-extension abélienne maximale d'exposant ℓ^n de K_n qui est non ramifiée et ℓ-décomposée	0	$\omega\lambda_c^{-1}$	$\omega\mu_c^{-1}$
$\mathfrak{A}_n/\mathfrak{A}_n^{\ell^n}$	Quotient d'exposant ℓ^n du groupe des ℓ-classes infinitésimales du corps K_n	$\omega\chi_\infty$	$\omega\lambda_c^{-1}+1+\omega(\chi_\ell-1)$	$\omega\mu_c^{-1}$
$\mathfrak{R}_n$	Radical kummérien de la ℓ-extension abélienne maximale d'exposant ℓ^n de K_n qui est ℓ-ramifiée	χ_∞	$\lambda_c+\omega+(\chi_\ell-1)$	μ_c
$\mathfrak{H}_n/\mathfrak{H}_n^{\ell^n}$	Quotient d'exposant ℓ^n du groupe de Galois de la composée des ℓ-extensions cycliques de K_n, qui se plongent dans une ℓ-extension cyclique de degré arbitrairement grand	$\omega\chi_\infty$	$\omega\lambda_c^{-1}+1$	$\omega\mu_c^{-1}$
$\mathfrak{S}_n$	Radical kummérien correspondant au quotient ci-dessus	χ_∞	$\lambda_c+\omega$	μ_c
$\mathfrak{T}_n^{(\ell^n)}$	Sous-groupe de ℓ^n-torsion de $\mathfrak{A}_n$	0	$\omega\lambda_c^{-1}+\omega(\chi_\ell-1)-\delta$	$\omega\mu_c^{-1}$
$\mathfrak{H}_n^{(\ell^n)}$	Sous-groupe de ℓ^n-torsion de $\mathfrak{H}_n$	0	$\omega\lambda_c^{-1}-\delta$	$\omega\mu_c^{-1}$
$R_2(k_n)^{(\ell^n)}$	Sous-groupe d'exposant ℓ^n du noyau dans $K_2(k_n)$ des symboles modérés	0	$\omega\lambda_c+\omega(\chi_\ell-1)$	$\omega\mu_c$
$H_2(k_n)^{(\ell^n)}$	Sous-groupe d'exposant ℓ^n du noyau dans $K_2(k_n)$ des symboles de Hilbert	0	$\omega\lambda_c$	$\omega\mu_c$
$\mathfrak{U}_n$	Noyau dans $K_n^\times/K_n^{\times\ell^n}$ des symboles universels $\{\zeta_n,\cdot\}$ (ζ_n racine ℓ^n-ième primitive de l'unité dans K_n)	χ_∞	ω	0
$\mathfrak{Z}_n$	Radical kummérien de la sous-extension d'exposant ℓ^n de la composée des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K_n	χ_∞	$\omega+\omega\delta^{-1}$ (†)	0

(†) δ est le caractère de défaut de la conjecture de Leopoldt.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. COATES .- On K_2 and some classical conjectures in algebraic number theory.
Ann. of Math. 95 (1972) 99-116.

[2] R. GILLARD .- Formulations de la conjecture de Leopoldt et étude d'une condition suffisante.
Abh. Math. Sem. Hamburg 48 (1979) 125-138.

[3] R. GREENBERG .- On a certain ℓ-adic representation.
Inv. Math. 21 (1973) 117-124.

[4] R. GREENBERG .- On the Iwasawa invariants of totally real number fields.
Am. J. Math. 98 (1976) 263-284.

[5] J. HERBRAND .- Sur les unités d'un corps algébrique.
C. R. Acad. Sc. Paris, 192 (1931) 24-27.

[6] K. IWASAWA .- On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields.
Ann. of Math. 98 (1973) 243-326.

[7] J.-F. JAULENT .- Sur la théorie des genres dans les tours métabéliennes.
Sém. Th. Nombres, Bordeaux (1981/82).

[8] J.-F. JAULENT .- $\mathcal{S}$-classes infinitésimales d'un corps de nombres algébriques.
Ann. Sc. Inst. Fourier 34, 2 (1984).

[9] J.-F. JAULENT .- Sur quelques représentations ℓ-adiques liées aux symboles et à la ℓ-ramification.
Séminaire Th. Nombres, Bordeaux (1983/84).

[10] J. ŒSTERLE .- Travaux de Ferrero et Washington sur le nombre de classes d'idéaux des corps cyclotomiques.
Sém. Bourbaki (1978) exp. 535.

[11] B. ORIAT .- Introduction à la théorie d'Iwasawa.
Pub. Math. Fac. Sc. Besançon (1980/81).

[12] J.-P. SERRE .- Classes des corps cyclotomiques (d'après Iwasawa).
Sém. Bourbaki (1958) exp. 174.

[13] J. TATE .- Symbols in arithmetic.
Ac. Congres Int. Math. (1970) 201-211.

[14] J. TATE .- Relations between K_2 and Galois cohomology.
Inv. Math. 36 (1976) 257-274.

[15] K. WINGBERG .- Duality theorems for Γ-extensions of algebraic number fields.

[16] M. EMSALEM, H.H. KISILEVSKY & D.B. WALES .- Indépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de logarithmes p-adiques de nombres algébriques et rang p-adique du groupe des unités d'un corps de nombres. - J. Num.Th. 19 (1984) 384-391.

Jean-François JAULENT

Université de Franche-Comté
Faculté des Sciences et des Techniques
Laboratoire de Mathématiques

25030 BESANÇON CEDEX