RÉGULATEURS p-ADIQUES EXPLICITES POUR LE K_2 DES COURBES ELLIPTIQUES

par

François Brunault

Résumé. — Dans cet article, nous utilisons le système d'Euler de Kato et la théorie de Perrin-Riou pour établir une formule reliant la valeur en 0 de la fonction L p-adique d'une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$, et un régulateur p-adique sur la courbe modulaire $X(N)$. En particulier, nous obtenons une relation explicite entre fonction L p-adique et régulateur p-adique pour la courbe elliptique $X_0(20)$.

***Abstract* (Explicit p-adic regulators for K_2 of elliptic curves).** — In this article, we use Kato's Euler system and Perrin-Riou's theory to get an explicit formula linking the value at 0 of the p-adic L-function of an elliptic curve defined over $\mathbf{Q}$, and a p-adic regulator on the modular curve $X(N)$. In particular, we give an explicit relation between the p-adic L-function and the p-adic regulator, in the case of the elliptic curve $X_0(20)$.

Les fonctions ζ et fonctions L de nature arithmétique, et leur comportement aux points entiers sont l'objet de conjectures profondes et mystérieuses. Par exemple, dans le cas d'une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$, la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer prédit que l'ordre d'annulation en 1 de la fonction L est égal au rang du groupe des points rationnels. Pour les entiers ≥ 2, la situation est différente car la fonction L ne s'y annule pas. Les valeurs spéciales sont alors décrites conjecturalement par Beilinson, en termes de régulateurs.
De nombreux travaux (citons ici Mazur, Tate et Teitelbaum [**MTT86**], Bloch et Kato [**BK90**], Fontaine et Perrin-Riou [**FPR94**], Besser [**Bes00a, Bes00b**]...) permettent d'envisager un

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F67,11G40,19F27.
Mots clefs. — cohomologie étale, conjectures de Beilinson, courbe elliptique, courbe modulaire, éléments zêta, fonction L, fonction L p-adique, forme modulaire, K-théorie, régulateur, régulateur p-adique, système d'Euler de Kato.

Ce texte est la version longue d'un exposé donné à l'occasion de la conférence *Fonctions L et arithmétique*, qui s'est déroulée du 8 au 12 juin 2009 à Besançon. C'est avec grand plaisir que je remercie Christophe Delaunay, Christian Maire et Xavier-François Roblot de m'y avoir invité, ainsi que pour l'ambiance chaleureuse et la bonne organisation de la conférence. Je remercie également Laurent Berger, Massimo Bertolini, Hugo Chapdelaine, Pierre Colmez, Henri Darmon, Rob de Jeu, Olivier Fouquet, Lionel Fourquaux, Matthew T. Gealy, Xavier-François Roblot, Floric Tavares Ribeiro et Stefano Vigni pour des discussions très stimulantes sur les fonctions L p-adiques.

analogue de ces conjectures dans le monde p-adique, où il s'agit de relier les valeurs spéciales des fonctions L p-adiques et les régulateurs p-adiques.

Indiquons plus précisément les principaux résultats connus en direction de ces conjectures, dans le cas particulier de la valeur en 2 de la fonction L d'une courbe elliptique. Vers 1978, Bloch [**Blo00**] construit, pour toute courbe elliptique E définie sur $\mathbf{C}$, un régulateur complexe $r_{E,\infty} : K_2(E) \to \mathbf{C}$. Pour certaines courbes elliptiques E définies sur $\mathbf{Q}$ à multiplication complexe, il montre que $L(E,2)$ est, à un facteur rationnel explicite non nul près, le régulateur d'un élément explicite de $K_2(E) \otimes \mathbf{Q}$. Dans les années 1980, Beilinson [**Bei84**] propose une vaste généralisation de l'approche de Bloch et formule une conjecture décrivant les valeurs spéciales des fonctions L de toutes les variétés algébriques en tous les entiers. De plus, pour toute courbe elliptique (modulaire) définie sur $\mathbf{Q}$, il montre que $L(E,2)$ est proportionnel au régulateur d'un élément a priori inexplicite de $K_2(E) \otimes \mathbf{Q}$. En 1988, Coleman et de Shalit [**CdS88**] définissent, pour toute courbe elliptique E sur $\overline{\mathbf{Q}_p}$ ayant bonne réduction en p, un régulateur p-adique $r_{E,p} : K_2(E) \to \overline{\mathbf{Q}_p}$. Dans le cas des courbes à multiplication complexe, ils obtiennent aussi un analogue p-adique de la formule de Bloch. Il est intéressant de noter que leur formule fait intervenir le même élément dans K_2, et essentiellement le même facteur rationnel.

La motivation de ce travail est de donner des exemples explicites de lien entre fonction L p-adique et régulateur p-adique dans le cas des courbes elliptiques sans multiplication complexe. La stratégie adoptée ici pour atteindre cet objectif ne surprendra pas les experts. Nous utilisons de manière essentielle les résultats fondamentaux et très profonds de Kato [**Kat04**], en particulier sa construction d'un système d'Euler pour toute forme modulaire f, ainsi que son lien avec la fonction L p-adique de f. D'autres ingrédients interviennent également : l'application exponentielle de Perrin-Riou [**PR94**], et la loi de réciprocité explicite, démontrée notamment par Colmez [**Col98**]. Nous espérons que l'approche explicite suivie dans ce texte pourra contribuer à familiariser certains lecteurs avec le système d'Euler de Kato.

De manière plus précise, nous montrons (théorème 4.1) un lien entre la valeur en 0 de la fonction L p-adique d'une courbe elliptique E sans multiplication complexe, et un régulateur p-adique explicite sur la courbe modulaire paramétrant E. On peut ici choisir l'une des courbes $X(N)$, $X_1(N)$ ou $X_0(N)$ (voir la proposition 9.1). La formule obtenue n'est pas optimale : la constante rationnelle devant la valeur spéciale peut s'annuler. Enfin, signalons que Gealy [**Gea03, Gea05**] a obtenu une formule plus générale, reliant la valeur spéciale de la fonction L p-adique d'une forme modulaire en tout entier ≤ 0, à un régulateur p-adique défini sur la variété de Kuga-Sato.

Voici le plan de l'article. Dans les trois premières sections, nous faisons des rappels sur la fonction L p-adique, la représentation p-adique et le régulateur p-adique associés à une courbe elliptique E définie sur $\mathbf{Q}$. Le résultat principal du texte (théorème 4.1) est énoncé dans la section 4. Nous faisons ensuite des rappels sur la cohomologie d'Iwasawa dans la section 5, en vue de définir le système d'Euler de Kato, ou plutôt sa partie locale, dans la section 6. Dans la section 7, nous utilisons la théorie développée par Perrin-Riou pour énoncer la loi de réciprocité explicite. La section 8 est consacrée à la démonstration du théorème 4.1. Enfin, en guise d'application, nous donnons dans la section 9 des exemples explicites, notamment le cas de la courbe elliptique $X_0(20)$.

1. La fonction L p-adique

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$, de conducteur N. On note $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n e^{2i\pi nz} \in S_2(\Gamma_0(N))$ la forme parabolique primitive, de poids 2 et de niveau N, associée à E.
La fonction L de Hasse-Weil de E, donnée par $L(E,s) = L(f,s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ pour $\Re(s) > \frac{3}{2}$, se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$. Pour tout caractère de Dirichlet $\chi : (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^* \to \mathbf{C}^*$ ($m \geq 1$), la série L de E tordue par χ, donnée par $L(E,\chi,s) = \sum_{n\geq 1} a_n \chi(n) n^{-s}$, se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$.
Soit $\omega_E \in \Omega^1(E/\mathbf{Q})$ la forme différentielle associée à une équation de Weierstraß minimale de E sur $\mathbf{Z}$. Notons Λ_E le réseau des périodes de ω_E. On définit les périodes réelle et imaginaire pure de E par $\Lambda_E \cap \mathbf{R} = \Omega_E^+ \cdot \mathbf{Z}$ et $\Lambda_E \cap i\mathbf{R} = \Omega_E^- \cdot \mathbf{Z}$, avec $\Omega_E^+ \in \mathbf{R}_{>0}$ et $\Omega_E^- \in i\mathbf{R}_{>0}$. Il résulte du théorème de Manin-Drinfeld et de la théorie des symboles modulaires [**Man72**] que $L(E,\chi,1)/\Omega_E^{\chi(-1)}$ est algébrique pour tout χ. Notons $\tau(\chi) = \sum_{a\in(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*} \chi(a) e^{2ia\pi/m}$ la somme de Gauss de χ.
Soit p un nombre premier. Le facteur d'Euler en p de $L(E,s)$ vaut $(1 - a_p p^{-s} + \varepsilon(p) p^{1-2s})^{-1}$, avec $\varepsilon(p) = 1$ si $p \nmid N$, et $\varepsilon(p) = 0$ si $p \mid N$.
On note ord_p la valuation sur $\overline{\mathbf{Q}_p}$ qui prolonge la valuation p-adique usuelle sur $\mathbf{Q}_p$. Pour pouvoir définir une fonction L p-adique associée à E, les conditions équivalentes suivantes doivent être satisfaites :

1. Il existe $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}_p}$ tel que $\mathrm{ord}_p(\alpha) < 1$ et $1 - \alpha T \mid 1 - a_p T + \varepsilon(p) p T^2$.
2. La courbe elliptique E est semi-stable en p.
3. $p^2 \nmid N$.

Supposons ces conditions vérifiées et donnons-nous α vérifiant (1). La fonction L p-adique de E, qui dépend de ce choix de α, est construite par interpolation p-adique de valeurs tordues de la fonction L complexe de E, au moyen du théorème suivant.
Rappelons qu'une distribution sur $\mathbf{Z}_p^*$ à valeurs dans $\mathbf{Q}_p$ est une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions localement analytiques de $\mathbf{Z}_p^*$ dans $\mathbf{Q}_p$. Fixons des plongements $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}_p}$ et $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}$.

Théorème 1.1 ([**Man73, MSD74**]). — *Il existe une unique distribution $\mu_{E,\alpha}$ d'ordre $v_p(\alpha)$ sur $\mathbf{Z}_p^*$, à valeurs dans $\mathbf{Q}_p(\alpha)$, telle que*

$$\text{(1)} \qquad \int_{\mathbf{Z}_p^*} \mu_{E,\alpha} = (1-\alpha^{-1})^{1+\varepsilon(p)} \frac{L(E,1)}{\Omega_E^+},$$

et telle que pour tout $n \geq 1$ et tout $\chi : (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^* \to \overline{\mathbf{Q}}^*$ primitif, on ait

(2) $$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \chi(x)\mu_{E,\alpha} = \frac{\tau(\chi)}{\alpha^n}\frac{L(E,\overline{\chi},1)}{\Omega_E^{\chi(-1)}}.$$

Posons $q = p$ si p est impair, et $q = 4$ si $p = 2$. Tout $x \in \mathbf{Z}_p^*$ s'écrit de manière unique $x = \omega(x)\langle x\rangle$ où $\omega(x)$ est une racine $\varphi(q)$-ième de l'unité dans $\mathbf{Z}_p$, et $\langle x\rangle \in 1 + q\mathbf{Z}_p$. Pour $y \in p\mathbf{Z}_p$ et $s \in \mathbf{Z}_p$, on définit $(1+y)^s = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{s}{n}y^n$. Pour $s \in \mathbf{Z}_p$, l'application $x \mapsto \langle x\rangle^s$ est un caractère continu de $\mathbf{Z}_p^*$ (on peut également montrer que $\langle x\rangle^s = \exp_p(s\log_p x)$, avec $\log_p : \mathbf{Z}_p^* \to q\mathbf{Z}_p$ et $\exp_p : q\mathbf{Z}_p \xrightarrow{\cong} 1 + q\mathbf{Z}_p$).

Définition 1.2. — La fonction L p-adique de E est donnée par

(3) $$L_{p,\alpha}(E,s) = \int_{\mathbf{Z}_p^*}\langle x\rangle^{s-1}\cdot\mu_{E,\alpha} \qquad (s \in \mathbf{Z}_p).$$

Pour tout caractère continu $\chi : \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{C}_p^*$, on pose également

(4) $$L_{p,\alpha}(E,\chi,s) = \int_{\mathbf{Z}_p^*}\chi(x)\langle x\rangle^{s-1}\mu_{E,\alpha}.$$

On dispose d'une équation fonctionnelle reliant les valeurs $L_{p,\alpha}(E,s)$ et $L_{p,\alpha}(E,2-s)$. Posons $W_N f = w(f)f$, où W_N est l'involution d'Atkin-Lehner sur $S_2(\Gamma_0(N))$, et $w(f)$ est l'opposé du signe de l'équation fonctionnelle de $L(E,s)$. On a alors [**MTT86**, §17, Cor. 2]

(5) $$L_{p,\alpha}(E,s) = -w(f)\langle N\rangle^{1-s}L_{p,\alpha}(E,2-s) \qquad \text{si } p \nmid N,$$

(6) $$L_{p,\alpha}(E,s) = a_p w(f)\left\langle\frac{N}{p}\right\rangle^{1-s}L_{p,\alpha}(E,2-s) \qquad \text{si } p \mid N.$$

Pour tout caractère continu $\chi : \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{C}_p^*$, on a également

(7) $$L_{p,\alpha}(E,\chi,s) = -w(f)\chi^{-1}(-N)\langle N\rangle^{1-s}L_{p,\alpha}(E,\chi^{-1},2-s) \qquad \text{si } p \nmid N,$$

(8) $$L_{p,\alpha}(E,\chi,s) = a_p w(f)\chi^{-1}\Big(-\frac{N}{p}\Big)\left\langle\frac{N}{p}\right\rangle^{1-s}L_{p,\alpha}(E,\chi^{-1},2-s) \qquad \text{si } p \mid N.$$

2. Représentations p-adiques

Si X est une courbe lisse définie sur $\mathbf{Q}$ ou sur $\mathbf{Q}_p$, la cohomologie étale p-adique $V_X := H^1(X_{\overline{\mathbf{Q}_p}}, \mathbf{Q}_p)$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, ce qui en fait une représentation p-adique.

Le module de Tate p-adique $T_pE = \varprojlim E[p^n]$ est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang 2, muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$. De plus $V_pE := T_pE \otimes \mathbf{Q}_p$ est isomorphe à $V_E(1)$.

La courbe modulaire ouverte $Y_1(N)$ et sa compactifiée $X_1(N)$ sont définies sur $\mathbf{Q}$, lisses et géométriquement irréductibles. Par fonctorialité, les espaces $V_{Y_1(N)}$ et $V_{X_1(N)}$ sont munis d'une action des opérateurs de Hecke T_n $(n \geq 1)$.

Définition 2.1. — On pose $V_f := V_{Y_1(N)}/\langle T_n - a_n, n \geq 1\rangle$.

Grâce aux théorèmes de comparaison entre cohomologie étale p-adique et cohomologie de de Rham, on sait que V_f est une représentation p-adique de dimension 2. De plus, si $j : Y_1(N) \hookrightarrow X_1(N)$ désigne l'inclusion et $\phi : X_1(N) \to E$ est une paramétrisation modulaire, l'application $(\phi \circ j)^*$ induit un isomorphisme $V_E \xrightarrow{\cong} V_f$. Cependant, cet isomorphisme dépend du choix de ϕ.
Grâce au cup-produit, on a une dualité parfaite $V_E \times V_E \to \mathbf{Q}_p(-1)$, d'où un isomorphisme $V_E^*(1) \cong V_E(2)$.
Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ le corps des périodes p-adiques. Fontaine a montré que la représentation V_E est de de Rham, c'est-à-dire que $D_{\mathrm{dR}}(V_E) := (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)}$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 2. On sait que $D_{\mathrm{dR}}(V_E)$ s'identifie à $H^1_{\mathrm{dR}}(E_{\mathbf{Q}_p})$ et que la filtration naturelle de $D_{\mathrm{dR}}(V_E)$ correspond à la filtration de Hodge :

$$\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V_E) = \begin{cases} H^1_{\mathrm{dR}}(E_{\mathbf{Q}_p}) & \text{si } i \leq 0, \\ \Omega^1(E_{\mathbf{Q}_p}) & \text{si } i = 1, \\ \{0\} & \text{si } i \geq 2. \end{cases} \tag{9}$$

Rappelons que $D_{\mathrm{cris}}(V_E) := (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes V_E)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)}$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $D_{\mathrm{dR}}(V_E)$, et est muni d'un Frobenius φ. D'après Saito [**Sai97, Sai00**], on a

$$\dim_{\mathbf{Q}_p} D_{\mathrm{cris}}(V_E) = \begin{cases} 2 & \text{si } p \nmid N, \\ 1 & \text{si } p \mid N \text{ et } p^2 \nmid N, \\ 0 & \text{si } p^2 \mid N, \end{cases} \tag{10}$$

et le polynôme caractéristique de φ sur $D_{\mathrm{cris}}(V_E)$ est donné par

$$\det(1 - \varphi T | D_{\mathrm{cris}}(V_E)) = 1 - a_p T + \varepsilon(p) p T^2. \tag{11}$$

Si E a bonne réduction en p, l'endomorphisme φ de $D_{\mathrm{cris}}(V_E)$ est diagonalisable après extension des scalaires à $\mathbf{Q}_p(\alpha)$, ses valeurs propres étant α et $\beta := p/\alpha$. Puisque $a_p \in \mathbf{Z}$, on a nécessairement $\alpha \neq \beta$.
Si E a réduction multiplicative en p, on a $\varphi = \alpha = a_p = \pm 1$ sur $D_{\mathrm{cris}}(V_E)$, qui est de dimension 1.
Pour $n \geq 0$ et $k \in \mathbf{Z}$, notons

$$\exp_{n,k} : D_{\mathrm{dR}}(V_E(k)/\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})) \to H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), V_E(k)) \tag{12}$$

l'exponentielle de Bloch-Kato associée à $V_E(k)$ vue comme représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}))$ [**BK90**, 3.10]. L'application naturelle

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}) \otimes D_{\mathrm{dR}}(V_E) \to D_{\mathrm{dR}}(V_E(k)/\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})) \\ a \otimes v \mapsto at^{-k}v\end{gathered}$$

est un isomorphisme, ce qui permet d'identifier ces deux espaces. Via cette identification, on a $\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V_E(k)) = \mathrm{Fil}^{i+k} D_{\mathrm{dR}}(V_E)$ pour $i, k \in \mathbf{Z}$.
Donnons maintenant la dimension des groupes de cohomologie galoisienne associés aux tordues de V_E. Rappelons que pour une représentation p-adique V, on note $H^1_e(\mathbf{Q}_p, V)$ (resp. $H^1_f(\mathbf{Q}_p, V)$, $H^1_g(\mathbf{Q}_p, V)$) le noyau de $H^1(\mathbf{Q}_p, V) \to H^1(\mathbf{Q}_p, B \otimes V)$ avec $B = \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}$ (resp. $B = \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, $B = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$). Notons $h^1_*(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} H^1_*(\mathbf{Q}_p, V)$ pour $* \in \{e, f, g, \varnothing\}$.

Proposition 2.2. — *Si E n'a pas réduction multiplicative déployée en p, alors $h^1_*(V_E(k))$ est donnée par la table suivante :*

(13)

k	$h^1_e(V_E(k))$	$h^1_f(V_E(k))$	$h^1_g(V_E(k))$	$h^1(V_E(k))$
≤ 0	0	0	0	2
1	1	1	1	2
≥ 2	2	2	2	2

Si E a réduction multiplicative déployée en p, alors $h^1_*(V_E(k))$ est donnée par la table suivante :

(14)

k	$h^1_e(V_E(k))$	$h^1_f(V_E(k))$	$h^1_g(V_E(k))$	$h^1(V_E(k))$
< 0	0	0	0	2
0	0	1	1	3
1	1	1	1	2
2	2	2	3	3
> 2	2	2	2	2

Démonstration. — Il suffit d'utiliser (11) et les résultats de Bloch-Kato [**BK90**, Prop. 3.8 et 3.8.4]. L'image de $\exp_{0,k}$ est $H^1_e(\mathbf{Q}_p, V_E(k))$, et son noyau a pour dimension

$$\begin{aligned}(15) \qquad & \dim D_{\mathrm{cris}}(V_E(k))^{\varphi=1} + \dim \mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(V_E(k)) - \dim V_E(k)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)} \\ &= \dim D_{\mathrm{cris}}(V_E)^{\varphi=p^k} + \dim \mathrm{Fil}^k D_{\mathrm{dR}}(V_E) - \dim V_E(k)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)}.\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}(16) \qquad h^1_f(V_E(k)) &= h^1_e(V_E(k)) + \dim D_{\mathrm{cris}}(V_E(k))/(1-\varphi)D_{\mathrm{cris}}(V_E(k)) \\ &= h^1_e(V_E(k)) + \dim D_{\mathrm{cris}}(V_E(k))^{\varphi=1}.\end{aligned}$$

Remarquons qu'on a une inclusion naturelle

$$V_E(k)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)} \hookrightarrow D_{\mathrm{cris}}(V_E(k))^{\varphi=1} \qquad (17)$$
$$v \mapsto 1 \otimes v.$$

Comme $V_E^*(1) \cong V_E(2)$, on a une dualité parfaite en cohomologie galoisienne

$$H^1(\mathbf{Q}_p, V_E(k)) \times H^1(\mathbf{Q}_p, V_E(2-k)) \to H^2(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p(1)) \cong \mathbf{Q}_p, \qquad (18)$$

pour laquelle H^1_e (resp. H^1_f) est l'orthogonal de H^1_g (resp. H^1_f), d'où

$$h^1(V_E(k)) = h^1_f(V_E(k)) + h^1_f(V_E(2-k)) \qquad (19)$$
$$h^1(V_E(k)) = h^1_g(V_E(k)) + h^1_e(V_E(2-k)). \qquad (20)$$

Il suffit donc de déterminer $h^1_e(V_E(k))$ et $h^1_f(V_E(k))$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.
Si E a bonne réduction en p, les valeurs propres α et β de φ vérifient $|\alpha|_\infty = |\beta|_\infty = \sqrt{p}$ et ne peuvent donc être des puissances de p. Par suite, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a $D_{\mathrm{cris}}(V_E)^{\varphi=p^k} = 0$, et aussi $V_E(k)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)} = 0$ d'après (17). On obtient alors

$$h^1_e(V_E(k)) = h^1_f(V_E(k)) = 2 - \dim \mathrm{Fil}^k D_{\mathrm{dR}}(V_E) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq 0, \\ 1 & \text{si } k = 1, \\ 2 & \text{si } k \geq 2. \end{cases} \qquad (21)$$

Les formules (19) et (20) permettent de compléter la table (13).
Si E a réduction additive en p, on a $D_{\mathrm{cris}}(V_E) = 0$; si E a réduction multiplicative non déployée en p, on a $\varphi = -1$ sur $D_{\mathrm{cris}}(V_E)$: dans ces deux cas, la table (13) reste valable.
Supposons enfin que E a réduction multiplicative déployée en p. D'après la théorie de Tate, V_E admet un vecteur non nul invariant sous Galois :

$$\dim V_E(k)^{G_{\mathbf{Q}_p}} = \dim D_{\mathrm{cris}}(V_E(k))^{\varphi=1} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases} \qquad (22)$$

La formule (15) montre alors que $h^1_e(V_E(k))$ est donné par la même formule que précédemment, d'où la première colonne de la table (14). On obtient la deuxième colonne par (16), et la table complète par dualité, grâce aux formules (19) et (20). □

Remarque 2.3. — Lorsque $\exp_{0,2} : D_{\mathrm{dR}}(V_E(2)) \to H^1(\mathbf{Q}_p, V_E(2))$ est bijective, c'est-à-dire lorsque E n'a pas réduction multiplicative déployée en p, on peut définir l'isomorphisme réciproque

$$\log : H^1(\mathbf{Q}_p, V_E(2)) \xrightarrow{\cong} D_{\mathrm{dR}}(V_E(2)) \cong D_{\mathrm{dR}}(V_E). \qquad (23)$$

La forme différentielle $\omega_f = 2i\pi f(z)dz$ définit un élément canonique, encore noté ω_f, dans $\mathrm{Fil}^1 D_{\mathrm{dR}}(V_f)$ [**Kat04**, 9.2.2]. On a un isomorphisme canonique $V_f^*(1) \cong V_f(2)$ et donc une dualité parfaite

(24) $$D_{\mathrm{dR}}(V_f(2)) \times D_{\mathrm{dR}}(V_f) \xrightarrow{[\cdot,\cdot]} \mathbf{Q}_p.$$

3. Le régulateur étale p-adique

Les groupes K_2 considérés ici sont les groupes de K-théorie algébrique définis par Quillen. Soit X une courbe lisse définie sur $\mathbf{Q}_p$. On dispose d'une application classe de Chern en cohomologie étale continue [**Jan88**]

(25) $$\mathrm{ch}_X : K_2(X) \to H^2(X, \mathbf{Z}_p(2)).$$

La suite spectrale $E_2^{a,b} = H^a(\mathbf{Q}_p, H^b(X_{\overline{\mathbf{Q}_p}}, \mathbf{Z}_p(2)))$, qui converge vers $H^{a+b}(X, \mathbf{Z}_p(2))$, est concentrée en degrés $0 \le a, b \le 2$. Puisque

(26) $$H^2(X_{\overline{\mathbf{Q}_p}}, \mathbf{Z}_p(2)) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ est affine,} \\ \mathbf{Z}_p(1) & \text{si } X \text{ est projective,} \end{cases}$$

on a dans tous les cas $E_2^{0,2} = 0$. De plus, par dualité locale en cohomologie galoisienne, $E_2^{2,0} = H^2(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}_p(2))$ est isomorphe à

(27) $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(H^0(\mathbf{Q}_p, (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)(-1)), \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) = 0.$$

La suite spectrale dégénère donc en E_2 et l'on a un isomorphisme

(28) $$H^2(X, \mathbf{Z}_p(2)) \cong H^1(\mathbf{Q}_p, H^1(X_{\overline{\mathbf{Q}_p}}, \mathbf{Z}_p(2))).$$

En composant ch_X avec (28), puis en tensorisant par $\mathbf{Q}$, on obtient l'*application régulateur*

(29) $$\mathrm{reg}_X^{(p)} : K_2(X) \otimes \mathbf{Q} \to H^1(\mathbf{Q}_p, V_X(2))$$

où l'on a posé $V_X(2) := H^1(X_{\overline{\mathbf{Q}_p}}, \mathbf{Q}_p(2))$.

Remarque 3.1. — Dans le cas où X a bonne réduction, Besser a défini un régulateur p-adique plus intrinsèque, le régulateur syntomique, et a fait le lien avec le régulateur présenté ici [**Bes00a**, 9.11]. Il a également montré le lien entre le régulateur syntomique et le régulateur de Coleman et de Shalit défini par intégration p-adique [**Bes00b**, Thm 3].

Appliquons ce qui précède à $X = E_{\mathbf{Q}_p}$. Grâce à l'application naturelle $K_2(E) \to K_2(E_{\mathbf{Q}_p})$, on obtient

$$\mathrm{reg}_E^{(p)} : K_2(E) \otimes \mathbf{Q} \to H^1(\mathbf{Q}_p, V_E(2)). \tag{30}$$

Nous venons de définir le régulateur p-adique sur $K_2(E)$. Cependant, il sera commode d'utiliser un régulateur p-adique défini sur le K_2 d'une courbe modulaire, de la manière suivante. Soit $Y(N)$ la courbe modulaire définie sur $\mathbf{Q}$ paramétrant les courbes elliptiques $\mathfrak{E}$ munies d'un isomorphisme $\mathfrak{E}[N] \cong (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$. Le morphisme fini $Y(N) \to Y_1(N)$ induit un morphisme de trace $V_{Y(N)} \to V_{Y_1(N)}$, et on dispose de la projection canonique $V_{Y_1(N)} \to V_f$. En composant $\mathrm{reg}_{Y(N)}^{(p)}$ et le morphisme induit par $V_{Y(N)} \to V_f$, on obtient

$$\mathrm{reg}_f^{(p)} : K_2(Y(N)) \otimes \mathbf{Q} \to H^1(\mathbf{Q}_p, V_f(2)). \tag{31}$$

Maintenant, on dispose dans $K_2(Y(N)) \otimes \mathbf{Q}$ des éléments de Beilinson-Kato, obtenus comme cup-produits d'unités de Siegel. Plus précisément, pour tout $(a,b) \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$, on a une unité de Siegel $g_{a,b} \in \mathcal{O}^*(Y(N)) \otimes \mathbf{Q}$ [**Kat04**, §1]. Pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$, on peut donc considérer

$$\rho\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \{g_{a,b}, g_{c,d}\} \in K_2(Y(N)) \otimes \mathbf{Q}. \tag{32}$$

Définition 3.2. — On pose $z_N = \rho(I_2) = \{g_{1,0}, g_{0,1}\} \in K_2(Y(N)) \otimes \mathbf{Q}$.

Le but de ce texte est d'obtenir une formule explicite pour $\mathrm{reg}_f^{(p)}(z_N)$. Remarquons que si E n'a pas réduction multiplicative déployée en p, il est licite de considérer

$$\log \mathrm{reg}_f^{(p)} : K_2(Y(N)) \otimes \mathbf{Q} \to D_{\mathrm{dR}}(V_f(2)). \tag{33}$$

4. Énoncé du théorème principal

On suppose dans cette section $p^2 \nmid N$. En utilisant le théorème de semi-stabilité de V_f [**Fal02, Tsu99**], on obtient l'admissibilité du φ-module $D_{\mathrm{cris}}(V_f)$ et donc [**Kat04**, Thm 16.6(1)] qu'il existe un unique $\eta_\alpha \in D_{\mathrm{cris}}(V_f) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p(\alpha)$ tel que

$$\varphi(\eta_\alpha) = \alpha\eta_\alpha \qquad \text{et} \qquad [\omega_f, \eta_\alpha] = 1, \tag{34}$$

où le crochet de dualité a été défini en (24), et où l'on considère ω_f comme un élément de $D_{\mathrm{dR}}(V_f) \cong D_{\mathrm{dR}}(V_f(2))$. On peut penser à η_α comme à un substitut, dans le contexte p-adique, d'une 1-forme antiholomorphe.

Notons $\langle f, f\rangle := \frac{i}{2}\int_{X_1(N)(\mathbf{C})} \omega_f \wedge \overline{\omega_f}$ le carré scalaire de Petersson de f.

Théorème 4.1. — *Supposons p impair et E sans multiplication complexe. Si E a bonne réduction en p, alors*

$$\begin{aligned}[\log \mathrm{reg}_f^{(p)}(z_N), \eta_\alpha] = &\Big(\prod_{\ell \mid N} 1 - a_\ell\Big) \frac{L(E,1)\Omega_E^-}{i\langle f, f\rangle} \cdot \\ &\cdot (1-p\alpha^{-1})^{-1}(1-p^{-1}\alpha^{-1})^{-1} L_{p,\alpha}(E, \omega^{-1}, 0),\end{aligned} \tag{35}$$

où le produit porte sur les diviseurs premiers de N. Si E a réduction multiplicative non déployée en p, alors

$$\begin{aligned}[\log \mathrm{reg}_f^{(p)}(z_N), \eta_\alpha] = &\Big(\prod_{\substack{\ell \mid N \\ \ell \neq p}} 1 - a_\ell\Big) \frac{L(E,1)\Omega_E^-}{i\langle f, f\rangle} \cdot \\ &\cdot \frac{1-\alpha}{1-p^{-1}\alpha^{-1}} L_{p,\alpha}(E, \omega^{-1}, 0).\end{aligned} \tag{36}$$

Remarque 4.2. — Soit $\phi : X_1(N) \to E$ une paramétrisation modulaire de E. Posons $\phi^*\omega_E = c\omega_f$ avec $c \in \mathbf{Q}^*$. On a

$$i\langle f, f\rangle = -\frac{1}{2c^2} \int_{X_1(N)(\mathbf{C})} \phi^*\omega_E \wedge \phi^*\overline{\omega_E} = -\frac{\deg \phi}{2c^2} \int_{E(\mathbf{C})} \omega_E \wedge \overline{\omega_E}.$$

De plus $\int_{E(\mathbf{C})} \omega_E \wedge \overline{\omega_E} = -c_\infty \Omega_E^+ \Omega_E^-$, où c_∞ est le nombre de composantes connexes de $E(\mathbf{R})$. Comme $L(E,1)/\Omega_E^+ \in \mathbf{Q}$ [**Man72**], on en déduit que le facteur $L(E,1)\Omega_E^-/(i\langle f,f\rangle)$ dans (35) et (36) est rationnel et vaut

$$\frac{L(E,1)\Omega_E^-}{i\langle f, f\rangle} = \frac{2c^2}{c_\infty \deg \phi} \frac{L(E,1)}{\Omega_E^+}. \tag{37}$$

Remarquons que $L(E,1)/\Omega_E^+$ peut aussi s'exprimer en termes de $L_{p,\alpha}(E,1)$ lorsque la réduction est bonne ou multiplicative non déployée.

Remarque 4.3. — Kato a donné une formule pour le régulateur complexe de z_N faisant intervenir la dérivée en 0 de $L^{(N)}(E,s)$, la fonction L complexe de E privée de tous ses mauvais facteurs d'Euler [**Kat04**, 2.6]. La formule obtenue ici pour le régulateur p-adique est similaire : on peut en effet remarquer que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(L^{(N)}(E,s)\Big)_{s=0} = \Big(\prod_{\ell \mid N} 1 - a_\ell\Big) L'(E, 0). \tag{38}$$

La présence de facteurs d'Euler en p supplémentaires dans (35) et (36) est un phénomène bien connu (comparer avec la formule (2) de [**CdS88**]).

Remarque 4.4. — Le théorème 4.1 n'est pas optimal en ce sens que le membre de droite de (35) et (36) peut s'annuler : par exemple, s'il existe ℓ premier divisant N tel que $a_\ell = 1$.

Comme nous le verrons dans les sections suivantes, la présence des facteurs $1 - a_\ell$ reflète l'idée que le système d'Euler de Kato, qui est parfaitement normalisé, l'est en cohomologie d'Iwasawa, mais pas au niveau des groupes K_2.

Question 4.5. — *Supposons $L(E,1) = 0$. La trace (voir la section 9, définition 9.3) de z_N dans $K_2(E) \otimes \mathbf{Q}$ est-elle nulle ? La même question se pose s'il existe ℓ tel que $a_\ell = 1$.*

Remarque 4.6. — On peut également calculer le régulateur p-adique de $\rho(M)$ pour tout $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ (voir la définition (32) de $\rho(M)$). Cependant, il ne semble pas possible de calculer $\mathrm{reg}_f^{(p)}(\rho(M))$ avec les méthodes de cet article lorsque la matrice M n'est pas inversible.

Remarque 4.7. — Je ne sais pas si le théorème 4.1 reste valable dans le cas où E est à multiplication complexe. Cela vient du fait que dans ce cas, la construction (antérieure) du système d'Euler par Rubin est de nature différente : elle utilise les unités elliptiques à la place des éléments de Beilinson-Kato.

5. Cohomologie d'Iwasawa

On fixe un système compatible $(\zeta_{p^n})_{n\geq 0}$ de racines primitives p^n-ièmes de l'unité dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$. Pour $n \geq 0$, posons $G_n = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbf{Q}_p) \cong (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^*$ et $G_\infty = \varprojlim G_n \cong \mathbf{Z}_p^*$. Pour tout $x \in \mathbf{Z}_p^*$, notons $\sigma_x \in G_\infty$ l'élément correspondant.
L'algèbre d'Iwasawa est définie par $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[G_\infty]] := \varprojlim \mathbf{Z}_p[G_n]$. On a une application canonique de G_∞ dans Λ.
Si T est un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, le groupe de cohomologie d'Iwasawa de T est défini par $\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) = \varprojlim H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), T)$, où la limite projective est relative aux applications de corestriction. Il existe une unique structure de Λ-module sur $\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, T)$ compatible, via les projections naturelles $\Lambda \to \mathbf{Z}_p[G_n]$, à la structure de G_n-module de $H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), T)$ pour chaque n.
Si V est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, le groupe $\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V) := \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) \otimes \mathbf{Q}_p$, où T est un $\mathbf{Z}_p$-réseau de V stable par Galois, ne dépend pas du choix de T, et est un $\Lambda \otimes \mathbf{Q}_p$-module. On note $\pi_n : \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V) \to H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), V)$ l'application canonique.
Pour chaque n, on a une forme $\mathbf{Z}_p$-bilinéaire

$$H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), T) \times H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), T^*(1)) \xrightarrow{\langle\cdot,\cdot\rangle_n} H^2(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), \mathbf{Z}_p(1)) \cong \mathbf{Z}_p. \tag{39}$$

En posant, pour $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, T)$ et $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, T^*(1))$

$$\langle x, y \rangle := \Big(\sum_{\sigma \in G_n} \langle \sigma^{-1} x_n, y_n \rangle_n [\sigma] \Big)_{n \geq 0} \in \Lambda, \tag{40}$$

on obtient [**PR94**, 3.6.1] une application $\mathbf{Z}_p$-bilinéaire

$$\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) \times \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, T^*(1)) \xrightarrow{\langle\cdot,\cdot\rangle} \Lambda \tag{41}$$

qui est Λ-linéaire à gauche, et Λ-antilinéaire à droite, c'est-à-dire

$$\langle x, \lambda \cdot y\rangle = \iota(\lambda)\langle x, y\rangle \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

où ι est l'involution de Λ déduite de l'involution $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ de G_∞. En tensorisant (41) par $\mathbf{Q}_p$, on obtient

$$\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V) \times \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V^*(1)) \xrightarrow{\langle\cdot,\cdot\rangle} \Lambda \otimes \mathbf{Q}_p. \tag{42}$$

Si $\chi : G_\infty \to \mathbf{C}_p^*$ est un caractère continu, on peut évaluer les éléments de $\Lambda \otimes \mathbf{Q}_p$ en χ, et obtenir un morphisme de $\mathbf{Q}_p$-algèbres $\Lambda \otimes \mathbf{Q}_p \to \mathbf{C}_p$. Pour $x \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V)$, $y \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V^*(1))$ et $\chi : G_\infty \to \mathbf{C}_p^*$ caractère se factorisant par G_n ($n \geq 0$), on a

$$\langle x, y\rangle(\chi) = \sum_{\sigma \in G_n} \langle \sigma^{-1}\pi_n(x), \pi_n(y)\rangle_n \chi(\sigma). \tag{43}$$

L'isomorphisme $\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) \xrightarrow{\cong} \varprojlim H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), T/p^nT)$ permet de définir des isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) &\xrightarrow{\cong} \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, T(k)) \\ z = (z_n)_{n\geq 0} &\mapsto z(k) := (z_n \otimes \zeta_{p^n}^{\otimes k})_{n \geq 0}. \end{aligned} \tag{44}$$

ainsi que $\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V) \cong \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V(k))$. Notons $\lambda \mapsto \lambda(k)$ l'automorphisme de $\Lambda \otimes \mathbf{Q}_p$ envoyant $[\sigma_x]$ sur $x^k[\sigma_x]$ pour tout $x \in \mathbf{Z}_p^*$. On a la formule

$$(\lambda \cdot z)(k) = \lambda(-k) \cdot z(k) \qquad (\lambda \in \Lambda \otimes \mathbf{Q}_p, z \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V)). \tag{45}$$

Rappelons que $q = p$ si p est impair, et $q = 4$ si $p = 2$. Le sous-groupe $G_\infty^1 \cong 1 + q\mathbf{Z}_p$ de $G_\infty \cong \mathbf{Z}_p^*$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$, engendré topologiquement par σ_{1+q}. On définit de manière analogue $\mathbf{Z}_p[[G_\infty^1]]$, qui est une sous-algèbre de Λ. En posant $\Delta = (G_\infty)_{\mathrm{tors}} \cong \mu_{\phi(q)}$, on a un isomorphisme canonique $G_\infty \cong G_\infty^1 \times \Delta$ et $\mathbf{Z}_p[\Delta]$ s'identifie à une sous-algèbre de Λ. Posons

$$\mathcal{H} = \{\sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbf{Q}_p[[x]]; \exists h \geq 0, |a_n|_p = O_{n\to+\infty}(n^h)\}. \tag{46}$$

On a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_p[[x]] &\xrightarrow{\cong} \mathbf{Z}_p[[G_\infty^1]] \\ x &\mapsto [\sigma_{1+q}] - [1]. \end{aligned} \tag{47}$$

qui s'étend en un morphisme injectif $\mathcal{H} \to \mathbf{Q}_p[[G_\infty^1]]$. Notons $\mathcal{H}_\infty^1$ son image, et posons $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}_\infty^1 \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[\Delta]$. On a des inclusions naturelles $\Lambda \otimes \mathbf{Q}_p \subset \mathcal{H}_\infty \subset \mathbf{Q}_p[[G_\infty]]$.

La projection naturelle $\mathcal{H}_\infty \to \mathbf{Q}_p[G_n]$ munit $H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), V)$ d'une structure de $\mathcal{H}_\infty$-module. On étend π_n en une application $\mathcal{H}_\infty$-linéaire

$$\pi_n : \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V) \otimes_{\Lambda\otimes\mathbf{Q}_p} \mathcal{H}_\infty \to H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), V). \tag{48}$$

Par extension des scalaires de (42), on a aussi une application

$$\big(\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V) \otimes \mathcal{H}_\infty\big) \times \big(\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V^*(1)) \otimes \mathcal{H}_\infty\big) \xrightarrow{\langle\cdot,\cdot\rangle} \mathcal{H}_\infty \tag{49}$$

qui est $\mathcal{H}_\infty$-linéaire à gauche et $\mathcal{H}_\infty$-antilinéaire à droite (les produits tensoriels sont pris au-dessus de $\Lambda \otimes \mathbf{Q}_p$).
Enfin, si $\chi : G_\infty \to \mathbf{C}_p^*$ est un caractère d'ordre fini, on peut encore évaluer les éléments de $\mathcal{H}_\infty$ en χ. On vérifie alors que la formule (43) reste valable pour $x \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V) \otimes \mathcal{H}_\infty$ et $y \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V^*(1)) \otimes \mathcal{H}_\infty$. En particulier, on obtient

$$\langle x, y\rangle(1) = \langle \pi_0(x), \pi_0(y)\rangle_0 \tag{50}$$

pour $x \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V) \otimes \mathcal{H}_\infty$ et $y \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V^*(1)) \otimes \mathcal{H}_\infty$.

6. Le système d'Euler de Kato

Nous allons détailler la construction par Kato [**Kat04**, 12.5,13.9] d'un système d'Euler pour la représentation V_f. En fait, nous ne définirons que sa partie *locale*, qui est un élément $z_{\mathrm{Kato}}^{(p)} \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_f)$.
Considérons la tour infinie des courbes modulaires $Y(Np^n)$, avec $n \geq 0$. On dispose de morphismes finis $Y(Np^{n+1}) \to Y(Np^n)$, qui induisent des morphismes de trace $K_2(Y(Np^{n+1})) \to K_2(Y(Np^n))$ et $V_{Y(Np^{n+1})}(2) \to V_{Y(Np^n)}(2)$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K_2(Y(Np^{n+1})) \otimes \mathbf{Q} \arrow[r, "\mathrm{reg}^{(p)}_{Y(Np^{n+1})}"] \arrow[d, "\mathrm{trace}"'] & H^1(\mathbf{Q}_p, V_{Y(Np^{n+1})}(2)) \arrow[d, "\mathrm{trace}"] \\ K_2(Y(Np^n)) \otimes \mathbf{Q} \arrow[r, "\mathrm{reg}^{(p)}_{Y(Np^n)}"] & H^1(\mathbf{Q}_p, V_{Y(Np^n)}(2)). \end{tikzcd} \tag{51}$$

D'autre part, on a un morphisme fini $Y(Np^n) \to Y_1(N) \otimes \mathbf{Q}(\zeta_{p^n})$ et par le lemme de Shapiro, on a un isomorphisme

$$H^1(\mathbf{Q}_p, V_{Y_1(N)\otimes\mathbf{Q}(\zeta_{p^n})}(2)) \cong H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), V_{Y_1(N)}(2)). \tag{52}$$

En utilisant la trace $V_{Y(Np^n)} \to V_{Y_1(N)\otimes\mathbf{Q}(\zeta_{p^n})}$ et l'isomorphisme (52), on obtient un morphisme

$$H^1(\mathbf{Q}_p, V_{Y(Np^n)}(2)) \to H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), V_{Y_1(N)}(2)). \tag{53}$$

En composant (51) et (53), on obtient un diagramme

$$\begin{tikzcd} K_2(Y(Np^{n+1})) \arrow[r] \arrow[d, "\text{trace}"'] & H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}}), V_{Y_1(N)}(2)) \arrow[d, "\text{cores}"] \\ K_2(Y(Np^n)) \arrow[r] & H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), V_{Y_1(N)}(2)). \end{tikzcd} \tag{54}$$

Le point fondamental est la commutativité du diagramme (54). Pour obtenir un élément de $\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_{Y_1(N)}(2))$, il suffit donc de fabriquer une famille d'éléments de $K_2(Y(Np^n))$ compatible pour la trace.

Proposition 6.1 **([Kat04], 2.3)**. — *La famille $(z_{Np^n})_{n\geq 1}$ d'éléments de $K_2(Y(Np^n))\otimes\mathbf{Q}$ est compatible pour la trace.*

Remarque 6.2. — Dans les calculs, il faut faire attention à ce que z_N n'est pas égal à la trace de z_{Np} lorsque $p\nmid N$. C'est là, d'ailleurs, la propriété clé d'un système d'Euler (voir la formule (91)).

Pour chaque n, le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/Np^n\mathbf{Z})$ agit par automomorphismes sur $Y(Np^n)$. Ces actions sont compatibles via les morphismes canoniques $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/Np^{n+1}\mathbf{Z})\to\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/Np^n\mathbf{Z})$ et $Y(Np^{n+1})\to Y(Np^n)$. Pour tout $\alpha\in\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, la famille $(\alpha^* z_{Np^n})_{n\geq1}$ d'éléments de $K_2(Y(Np^n))\otimes\mathbf{Q}$ est donc encore compatible pour la trace.

Définition 6.3. — On note $z^{(p)}_{N,\alpha}(2)\in\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_{Y_1(N)}(2))$ l'image de la famille $(\alpha^* z_{Np^n})_{n\geq1}$ par le diagramme (54). De plus, on note $z^{(p)}_{f,\alpha}(2)\in\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_f(2))$ l'image de $z^{(p)}_{N,\alpha}(2)$ par le morphisme induit par $V_{Y_1(N)}(2)\to V_f(2)$.

Compte tenu des isomorphismes (44), on dispose en fait d'éléments $z^{(p)}_{f,\alpha}(k)\in\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_f(k))$ pour tout $k\in\mathbf{Z}$. Il reste à les normaliser. Pour cela, Kato utilise la structure de Λ-module de $\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_f)$.
La classe de la forme différentielle $\omega_f = 2i\pi f(z)dz$ définit un élément de $H^1(Y_1(N)(\mathbf{C}),\mathbf{C})$. Cet espace vectoriel est muni d'une appplication $\mathbf{C}$-linéaire c^*, induite par la conjugaison complexe c sur $Y_1(N)(\mathbf{C})$. Pour $x\in H^1(Y_1(N)(\mathbf{C}),\mathbf{C})$, posons $x^{\pm}=\frac{1}{2}(x\pm c^*x)$.

Définition 6.4. — On pose $V_{f,\mathbf{Q}} = H^1(Y_1(N)(\mathbf{C}),\mathbf{Q})/\langle T_n - a_n; n\geq 1\rangle$.

On a $\dim_{\mathbf{Q}} V_{f,\mathbf{Q}} = 2$ et par les théorèmes de comparaison, on peut voir $V_{f,\mathbf{Q}}$ comme une $\mathbf{Q}$-structure du $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel V_f. De plus, on a un isomorphisme $V_{f,\mathbf{Q}}\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}\cong H^1(Y_1(N)(\mathbf{C}),\mathbf{C})/\langle T_n-a_n; n\geq1\rangle$.

Définition 6.5. — On note $\gamma_E\in V_{f,\mathbf{Q}}$ l'unique élément vérifiant

$$[\omega_f] = \gamma_E^+\otimes\Omega_E^+ + \gamma_E^-\otimes\Omega_E^- \tag{55}$$

où $[\omega_f]$ désigne l'image canonique de ω_f dans $V_{f,\mathbf{Q}}\otimes\mathbf{C}$.

Soit $H_1(X_1(N)(\mathbf{C}), \mathrm{ptes}, \mathbf{Z})$ le groupe d'homologie relative de $X_1(N)(\mathbf{C})$ à support dans les pointes. On a une dualité parfaite

$$H_1(X_1(N)(\mathbf{C}), \mathrm{ptes}, \mathbf{Z}) \times H_c^1(Y(N)(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z} \tag{56}$$

où H_c^1 désigne le groupe de cohomologie à support compact. Après extension des scalaires à $\mathbf{C}$, l'application (56) est donnée par l'intégration. On dispose également de la dualité parfaite de Poincaré

$$H^1(Y_1(N)(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \times H_c^1(Y_1(N)(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}. \tag{57}$$

Après extension des scalaires à $\mathbf{C}$, l'application (57) est donnée par $(\omega, \nu) \mapsto \int_{Y_1(N)(\mathbf{C})} \omega \wedge \nu$. On déduit de (56) et (57) un isomorphisme

$$\Psi : H_1(X_1(N)(\mathbf{C}), \mathrm{ptes}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} H^1(Y_1(N)(\mathbf{C}), \mathbf{Z}). \tag{58}$$

Définition 6.6. — Pour tout $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, notons $\xi(\alpha)$ la classe du chemin $\{\alpha 0, \alpha\infty\}$ dans $H_1(X_1(N)(\mathbf{C}), \mathrm{ptes}, \mathbf{Z})$ et posons

$$\delta(\alpha) := \Psi\big(\xi(\alpha^{-1})\big) \in H^1(Y_1(N)(\mathbf{C}), \mathbf{Z}). \tag{59}$$

De plus, notons $\delta_f(\alpha)$ l'image de $\delta(\alpha)$ dans $V_{f,\mathbf{Q}}$.

Dans les notations de [**Kat04**, 5.5,6.3], on a $\delta(\alpha) = \delta_{1,N}(2,1,\alpha)$ et $\delta_f(\alpha) = \delta(f,1,\alpha)$. La théorie des symboles modulaires [**Man72**] montre que le groupe $H^1(Y_1(N)(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ est engendré par les $\delta(\alpha)$ lorsque α parcourt $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. En particulier, les $\delta_f(\alpha)$ engendrent le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $V_{f,\mathbf{Q}}$.

Définition 6.7. — On pose $\mu = \prod_{\ell | N, \ell \neq p} 1 - a_\ell \ell^{-2} \sigma_\ell^{-1} \in \Lambda$, où le produit est étendu aux diviseurs premiers $\neq p$ de N.

Kato montre [**Kat04**, 12.5,13.9,13.10] qu'il existe une unique application $\mathbf{Q}_p$-linéaire

$$\begin{aligned} V_f &\to \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_f) \\ \gamma &\mapsto z_\gamma^{(p)} \end{aligned} \tag{60}$$

vérifiant

$$\mu \cdot z_{\delta_f(\alpha)}^{(p)} = z_{f,\alpha}^{(p)} \qquad (\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})). \tag{61}$$

Définition 6.8. — On pose $z_{\mathrm{Kato}}^{(p)} = z_{\gamma_E}^{(p)} \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_f)$.

La propriété fondamentale du système d'Euler de Kato est son lien avec la fonction L p-adique de E. Plus précisément, Kato montre que la fonction L p-adique de E est l'image de $z_{\mathrm{Kato}}^{(p)}(2)$ par un homomorphisme de $\Lambda \otimes \mathbf{Q}_p$-modules

$$\mathcal{L}_\eta : \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_f(2)) \to \mathcal{H}_\infty. \tag{62}$$

Ce point de vue donne en fait une nouvelle construction de la fonction L p-adique de E (il est intéressant de noter qu'aucune hypothèse n'est faite sur le type de réduction de E en p). Le morphisme $\mathcal{L}_\eta$, que l'on peut voir comme une extension de l'application logarithme définie en (23), est défini à l'aide de l'exponentielle de Perrin-Riou. La section suivante est consacrée à la définition et aux propriétés de $\mathcal{L}_\eta$.

7. Exponentielle de Perrin-Riou

Nous travaillerons dans cette section avec la représentation V_E, mais il est bien sûr possible de remplacer V_E par V_f.

Notons $\Gamma_\infty = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^\infty}))$. D'après [**PR92**, 2.1.4], on peut identifier $V_E^{\Gamma_\infty}$ à un sous-$\Lambda \otimes \mathbf{Q}_p$-module de $\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_E)$. Perrin-Riou a défini une application exponentielle

$$\Omega_{V_E} : D_{\mathrm{cris}}(V_E) \to \big(\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_E)/V_E^{\Gamma_\infty}\big) \otimes_{\Lambda\otimes\mathbf{Q}_p} \mathcal{H}_\infty \tag{63}$$

qui interpole, en un sens que nous préciserons plus tard, les applications $\exp_{n,k}$ pour tout $n \geq 0$ et $k \geq 1$. Nous ne détaillerons pas ici la définition de Ω_{V_E}, pour laquelle nous renvoyons à [**PR99**] et [**PR01**].

Pour $\eta \in D_{\mathrm{cris}}(V_E)$, on peut alors poser

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\eta : \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_E(2)) &\to \mathcal{H}_\infty \\ x &\mapsto \langle x, \Omega_{V_E}(\eta)\rangle, \end{aligned} \tag{64}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le crochet de dualité (49) pour la représentation $V = V_E(2)$. Cette définition est licite car $V_E^{\Gamma_\infty}$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$, donc de torsion dans $\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_E)$. Par linéarité à gauche de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, l'application $\mathcal{L}_\eta$ est un morphisme de $\Lambda \otimes \mathbf{Q}_p$-modules.

Le théorème suivant est un cas particulier de la loi de réciprocité explicite, conjecturée par Perrin-Riou et démontrée par Colmez [**Col98**].

Théorème 7.1. — *Supposons que p est impair et que E n'a pas réduction multiplicative déployée en p. Alors pour tout $x \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_E(2))$ et $\eta \in D_{\mathrm{cris}}(V_E)$, on a*

$$\mathcal{L}_\eta(x)(1) = [\log \pi_0(x), (1 - p^{-1}\varphi^{-1})(1-\varphi)^{-1}\eta] \tag{65}$$

avec $[\cdot,\cdot] : D_{\mathrm{dR}}(V_E(2)) \times D_{\mathrm{dR}}(V_E) \to \mathbf{Q}_p$.

Remarque 7.2. — Le fait que la réduction de E n'est pas multiplicative déployée assure que $\log \pi_0(x)$ est bien défini et que $1-\varphi$ est inversible sur $D_{\mathrm{cris}}(V_E)$, ce qui montre que (65) a bien un sens. Dans le cas multiplicatif déployé, il devrait être possible également de calculer $\mathcal{L}_\eta(x)$, puisque la loi de réciprocité de Colmez s'applique à toute représentation de de Rham.

Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème 7.1. Aucune puissance de p n'est alors valeur propre de φ sur $D_{\mathrm{cris}}(V_E)$ et cela entraîne $V_E^{\Gamma_\infty} = 0$ [**PR94**, 3.4.3].
Soit $\eta \in D_{\mathrm{cris}}(V_E)$. Posons $g = (1+x) \otimes \eta \in \mathcal{H} \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{\mathrm{cris}}(V_E)$. Nous allons définir les objets intervenant dans la construction de $\Omega_{V_E}(\eta) = \Omega_{V_E}(g)$.
Le Frobenius $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est le morphisme injectif d'anneaux défini par

$$\varphi(f) = f((1+x)^p - 1) \qquad (f \in \mathcal{H}).$$

Il existe une unique application $\mathbf{Q}_p$-linéaire $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ telle que

$$\varphi(\psi(f)) = \frac{1}{p} \sum_{\zeta \in \mu_p} f\big(\zeta(1+x) - 1\big) \qquad (f \in \mathcal{H}).$$

On vérifie que $\psi(1+x) = 0$, ce qui fait que $g \in \mathcal{H}^{\psi=0} \otimes D_{\mathrm{cris}}(V_E)$. De plus $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$. Notons Φ l'opérateur $\varphi \otimes \varphi$ sur $\mathcal{H} \otimes D_{\mathrm{cris}}(V_E)$.

Lemme 7.3. — *Il existe $G_0 \in \mathcal{H} \otimes D_{\mathrm{cris}}(V_E)$ tel que $(1-\Phi)G_0 = g$.*

Démonstration. — En posant $\eta = (1-\varphi)\eta'$ avec $\eta' \in D_{\mathrm{cris}}(V_E)$, on a $g = (1-\Phi)(1 \otimes \eta') + x \otimes \eta$. La série

$$\sum_{n \geq 0} \Phi^n(x \otimes \eta) = \sum_{n \geq 0} \varphi^n(x) \otimes \varphi^n(\eta) = \sum_{n \geq 0} \big((1+x)^{p^n} - 1\big) \otimes \varphi^n(\eta) \tag{66}$$

converge dans $\mathcal{H} \otimes D_{\mathrm{cris}}(V_E)$ puisque $(1+x)^{p^n} - 1 \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ dans $\mathcal{H}$ et que $\varphi^n(\eta)$ est bornée dans $D_{\mathrm{cris}}(V_E)$. En notant F la somme de cette série, on a $(1-\Phi)F = x \otimes \eta$ et donc $G_0 = 1 \otimes \eta' + F$ convient. □

L'anneau $\mathcal{H}$ est muni d'une dérivation D définie par

$$Df = (1+x) f'(x) \qquad (f \in \mathcal{H}). \tag{67}$$

On a $D\varphi = p\varphi D$ et $\psi D = pD\psi$. De plus $D : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est surjective et $\ker D = \mathbf{Q}_p$. On en déduit que D est un isomorphisme sur $\mathcal{H}^{\psi=0}$. On étend D à $\mathcal{H} \otimes D_{\mathrm{cris}}(V_E)$ en posant $D = D \otimes 1$.

Lemme 7.4. — *Il existe une famille $(G_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de $\mathcal{H} \otimes D_{\mathrm{cris}}(V_E)$ telle que pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on ait $DG_k = G_{k+1}$ et $(1 - p^k\Phi)(G_k) = g$.*

Démonstration. — On remarque que $Dg = g$ et que $D(1 - p^k\Phi) = (1 - p^{k+1}\Phi)D$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Par conséquent, pour tout $k \geq 1$, l'élément $G_k = D^k G_0$ vérifie bien $(1 - p^k\Phi)G_k = g$. Pour les entiers $k \leq 0$, raisonnons par récurrence. Supposons $(1 - p^k\Phi)G_k = g$ avec $k \leq 0$. Comme D est surjective sur $\mathcal{H}$, il existe $\widetilde{G}_{k-1} \in \mathcal{H} \otimes D_{\mathrm{cris}}(V_E)$ telle que $D\widetilde{G}_{k-1} = G_k$. Alors

$(1-p^{k-1}\Phi)\widetilde{G}_{k-1}-g$ est annulé par D, donc est de la forme $1\otimes\theta$ avec $\theta\in D_{\mathrm{cris}}(V_E)$. En écrivant $\theta=(1-p^{k-1}\varphi)\theta'$, ce qui est possible car les valeurs propres de φ ne sont pas des puissances de p, on vérifie que $G_{k-1}=\widetilde{G}_{k-1}-1\otimes\theta'$ convient. □

Remarquons que $\eta=g(0)=(1-\varphi)G_0(0)$. On étend ψ à $\mathcal{H}\otimes D_{\mathrm{cris}}(V_E)$ en posant $\psi=\psi\otimes 1$. Pour $k\in\mathbf{Z}$, on a alors $\psi(g)=\psi(1-p^k\Phi)G_k=\psi(G_k)-(p^k\otimes\varphi)G_k$ et donc

(68) $$\psi(G_k)=(p^k\otimes\varphi)G_k \qquad (k\in\mathbf{Z}).$$

En suivant [**PR01**, 5.2.2], définissons $\Xi_{n,k}\in\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})\otimes D_{\mathrm{cris}}(V_E)$ par

(69) $$\Xi_{n,k}=(p^{n(k-1)}\otimes\varphi^{-n})G_{-k}(\zeta_{p^n}-1) \qquad (n\geq 1, k\in\mathbf{Z}).$$

Par construction de $\Omega_{V_E}(\eta)=\Omega_{V_E}(g)$, on a

(70) $$\pi_n\big(\Omega_{V_E}(\eta)(k)\big)=(-1)^{k-1}(k-1)!\exp_{n,k}\Xi_{n,k} \qquad (n,k\geq 1).$$

C'est en ce sens que Ω_{V_E} interpole les applications $\exp_{n,k}$ avec $k\geq 1$. Pour obtenir des informations sur $\pi_n\big(\Omega_{V_E}(\eta)(k)\big)$ lorsque $k\leq 0$, on a recours à la loi de réciprocité explicite démontrée par Colmez [**Col98**]. Pour $n\geq 0$ et $k\in\mathbf{Z}$, introduisons l'exponentielle duale

(71) $$\exp^*_{n,k}: H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}),V_E(k))\to D_{\mathrm{dR}}(V_E(k)/\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})),$$

obtenue par dualité à partir de $\exp_{n,2-k}$. La loi de réciprocité énoncée dans [**PR01**, 5.3.2] donne alors

(72) $$\exp^*_{n,k}\pi_n\big(\Omega_{V_E}(\eta)(k)\big)=\frac{1}{(-k)!}\Xi_{n,k} \qquad (n\geq 1, k\leq 0).$$

Pour $n=1$ et $k=0$, on obtient en particulier

(73) $$\exp^*_{1,0}\pi_1(\Omega_{V_E}(\eta))=\Xi_{1,0}=(p^{-1}\otimes\varphi^{-1})G_0(\zeta_p-1).$$

Lemme 7.5. — *Pour tout $n\geq 0$, on a un diagramme commutatif*

(74) $$\begin{tikzcd} H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}}),V_E) \arrow[r, "\exp^*"] \arrow[d, "\mathrm{cores}"'] & \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}})\otimes D_{\mathrm{dR}}(V_E) \arrow[d, "\mathrm{tr}\otimes 1"] \\ H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}),V_E) \arrow[r, "\exp^*"] & \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})\otimes D_{\mathrm{dR}}(V_E) \end{tikzcd}$$

Notons tr la trace de $\mathbf{Q}_p(\zeta_p)\otimes D_{\mathrm{dR}}(V_E)$ à $D_{\mathrm{dR}}(V_E)$. En appliquant le lemme précédent, il vient

$$\begin{aligned}\exp^* \pi_0(\Omega_{V_E}(\eta)) &= \exp^* \operatorname{cores} \pi_1(\Omega_{V_E}(\eta))\\ &= \operatorname{tr}(p^{-1} \otimes \varphi^{-1}) G_0(\zeta_p - 1)\\ &= p^{-1}\varphi^{-1}(\operatorname{tr} G_0(\zeta_p - 1)).\end{aligned} \tag{75}$$

En évaluant en $x = 0$ l'identité

$$(\varphi \otimes 1)\psi G_0 = \frac{1}{p} \sum_{\zeta \in \mu_p} G_0(\zeta(1+x) - 1),$$

il vient

$$(\psi G_0)(0) = \frac{1}{p} \sum_{\zeta \in \mu_p} G_0(\zeta - 1).$$

En évaluant aussi (68) en 0, on obtient alors

$$\varphi(G_0(0)) = (\psi G_0)(0) = \frac{1}{p}\big(\operatorname{tr} G_0(\zeta_p - 1) + G_0(0)\big)$$

En reportant dans (75) et en tenant compte du fait que $G_0(0) = (1-\varphi)^{-1}\eta$, il vient

$$\begin{aligned}\exp^* \pi_0(\Omega_{V_E}(\eta)) &= p^{-1}\varphi^{-1}(p\varphi - 1)(1-\varphi)^{-1}\eta\\ &= (1 - p^{-1}\varphi^{-1})(1-\varphi)^{-1}\eta.\end{aligned} \tag{76}$$

Nous pouvons finalement donner la démonstration de la formule (65). Soit $x \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_E(2))$. En utilisant la définition (64) de $\mathcal{L}_\eta$, ainsi que la formule d'évaluation (50), il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\eta(x)(1) &= \langle x, \Omega_{V_E}(\eta)\rangle(1)\\ &= \langle \pi_0(x), \pi_0(\Omega_{V_E}(\eta))\rangle_0\\ &= [\log \pi_0(x), \exp^* \pi_0(\Omega_{V_E}(\eta))]\end{aligned}$$

par définition de $\exp^*$. On conclut grâce à (76).

8. Démonstration du théorème principal

Commençons par énoncer le théorème de Kato, qui va nous permettre de démontrer le théorème 4.1.

Théorème 8.1 **([Kat04], 16.6)**. — *Supposons E sans multiplication complexe, et soit $z_{\mathrm{Kato}}^{(p)}$ le système d'Euler de Kato défini dans la section 6. Soit $\eta_\alpha \in D_{\mathrm{cris}}(V_f) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p(\alpha)$ comme en (34). Alors pour tout caractère continu $\chi : G_\infty \cong \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{C}_p^*$, on a*

$$L_{p,\alpha}(E, \chi\omega^{-1}, 0) = \mathcal{L}_{\eta_\alpha}\big(z_{\mathrm{Kato}}^{(p)}(2)\big)(\chi). \tag{77}$$

Notons que comme χ est arbitraire, le théorème de Kato donne en fait une expression de toutes les valeurs spéciales de $L_{p,\alpha}(E,s)$, en termes du système d'Euler $z^{(p)}_{\mathrm{Kato}}$.
Choisissons $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ tels que $\delta_f(\alpha_1)^+ \neq 0$ et $\delta_f(\alpha_2)^- \neq 0$, et écrivons $\gamma_E \in V_{f,\mathbf{Q}}$ sous la forme

$$\gamma_E = b_1\delta_f(\alpha_1)^+ + b_2\delta_f(\alpha_2)^- \qquad (b_i \in \mathbf{Q}^*). \tag{78}$$

Rappelons que $z^{(p)}_{\mathrm{Kato}} = z^{(p)}_{\gamma_E}$ (définition 6.8) et donc

$$z^{(p)}_{\mathrm{Kato}}(2) = b_1 z^{(p)}_{\delta_f(\alpha_1)^+}(2) + b_2 z^{(p)}_{\delta_f(\alpha_2)^-}(2). \tag{79}$$

Le lemme suivant étudie le comportement de l'application $\gamma \mapsto z^{(p)}_\gamma$ vis-à-vis de la conjugaison complexe.

Lemme 8.2. — *Pour $\gamma \in V_{f,\mathbf{Q}}$, on a $z^{(p)}_{c^*\gamma} = -\sigma_{-1} z^{(p)}_\gamma$.*

Démonstration. — Il suffit de le montrer pour $\gamma = \delta_f(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. En posant $\epsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $c_*\xi(\alpha) = \xi(\alpha')$ avec $\alpha' = \epsilon\alpha\epsilon$. Puisque la conjugaison complexe sur $X_1(N)(\mathbf{C})$ renverse l'orientation, on a $\Psi(c_*\gamma) = -c^*\Psi(\gamma)$ pour $\gamma \in H^1(X_1(N)(\mathbf{C}), \mathrm{ptes}, \mathbf{Z})$. Par suite $c^*\delta_f(\alpha) = -\delta_f(\alpha')$.
Il reste à montrer que $z^{(p)}_{\delta_f(\alpha')} = \sigma_{-1} z^{(p)}_{\delta_f(\alpha)}$. Comme μ n'est pas diviseur de zéro dans Λ, et grâce à la propriété (61), il suffit de montrer $z^{(p)}_{f,\alpha'} = \sigma_{-1} z^{(p)}_{f,\alpha}$. Comme les unités de Siegel vérifient $g_{-a,-b} = g_{a,b}$ pour tout a,b, il vient $\epsilon^* z_{Np^n} = z_{Np^n}$ pour tout n, et donc

$$\mathrm{reg}^{(p)}_{Y(Np^n)}((\alpha')^* z_{Np^n}) = \epsilon^* \,\mathrm{reg}^{(p)}_{Y(Np^n)}(\alpha^* z_{Np^n}). \tag{80}$$

Or le morphisme $\pi : Y(Np^n) \to Y_1(N) \otimes \mathbf{Q}(\zeta_{p^n})$ vérifie $\pi \circ \epsilon = \sigma_{-1} \circ \pi$, où l'on a noté $\sigma_{-1} = -1 \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^* \cong \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbf{Q})$. On en déduit $z^{(p)}_{N,\alpha'} = \sigma_{-1} z^{(p)}_{N,\alpha}$ et le résultat. □

Pour $z \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_f(k))$ $(k \in \mathbf{Z})$, posons $z^\pm = \frac{1}{2}(z \pm \sigma_{-1} z)$. D'après le lemme 8.2, on a $z^{(p)}_{\gamma^\pm} = (z^{(p)}_\gamma)^\mp$ pour $\gamma \in V_{f,\mathbf{Q}}$. Remarquons que d'après (45), on a $z(2)^\pm = z^\pm(2)$ pour $z \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_f)$. Il suit

$$z^{(p)}_{\mathrm{Kato}}(2) = b_1\big(z^{(p)}_{\delta_f(\alpha_1)}(2)\big)^- + b_2\big(z^{(p)}_{\delta_f(\alpha_2)}(2)\big)^+. \tag{81}$$

Appliquons maintenant $\pi_0 : \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_f(2)) \to H^1(\mathbf{Q}_p, V_f(2))$. Comme $\pi_0(\sigma_{-1} z) = \pi_0(z)$ pour $z \in \mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_p, V_f(2))$, on obtient

$$\pi_0(z^{(p)}_{\mathrm{Kato}}(2)) = b_2\pi_0(z^{(p)}_{\delta_f(\alpha_2)}(2)). \tag{82}$$

Écrivons $\delta_f(I_2)$ sous la forme

(83) $$\delta_f(I_2) = b_1'\delta_f(\alpha_1)^+ + b_2'\delta_f(\alpha_2)^- \qquad (b_i' \in \mathbf{Q}).$$

En remplaçant γ_E par $\delta_f(I_2)$ dans le raisonnement ci-dessus, on obtient une formule analogue à (82), à savoir

(84) $$\pi_0(z^{(p)}_{\delta_f(I_2)}(2)) = b_2'\pi_0(z^{(p)}_{\delta_f(\alpha_2)}(2)).$$

En combinant (82) et (84), il vient donc

(85) $$\pi_0(z^{(p)}_{\delta_f(I_2)}(2)) = \frac{b_2'}{b_2}\pi_0(z^{(p)}_{\mathrm{Kato}}(2)).$$

Lemme 8.3. — *Pour $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, on a*

(86) $$\pi_0(z^{(p)}_{f,\alpha}(2)) = \Big(\prod_{\substack{\ell \mid N \\ \ell \neq p}} 1 - a_\ell\Big)\pi_0(z^{(p)}_{\delta_f(\alpha)}(2)).$$

Démonstration. — En tordant deux fois vers la droite la propriété (61) grâce à (45), on a

(87) $$z^{(p)}_{f,\alpha}(2) = (\mu \cdot z^{(p)}_{\delta_f(\alpha)})(2) = \mu(-2) \cdot z^{(p)}_{\delta_f(\alpha)}(2)$$

avec $\mu(-2) = \prod_{\ell \mid N, \ell \neq p} 1 - a_\ell \sigma_\ell^{-1}$. Il reste à appliquer π_0 et à remarquer que $\pi_0(\mu(-2)) = \prod_{\substack{\ell \mid N \\ \ell \neq p}} 1 - a_\ell$. □

En appliquant le lemme 8.3 à $\alpha = I_2$ et compte tenu de (85), il vient

(88) $$\pi_0(z^{(p)}_{f,I_2}(2)) = \Big(\prod_{\substack{\ell \mid N \\ \ell \neq p}} 1 - a_\ell\Big)\frac{b_2'}{b_2}\pi_0(z^{(p)}_{\mathrm{Kato}}(2)).$$

Dans (88), le membre de gauche est lié au régulateur p-adique, tandis que le membre de droite va donner la fonction L p-adique, grâce au théorème de Kato.
Considérons le membre de gauche de (88). Par définition de $z^{(p)}_{f,I_2}$, on a

(89) $$\pi_0(z^{(p)}_{f,I_2}(2)) = \mathrm{reg}_f^{(p)}(\mathrm{tr}_{Y(Np)\to Y(N)}(z_{Np})).$$

Lemme 8.4. — *On a*

(90) $$\mathrm{reg}_f^{(p)}\big(\mathrm{tr}_{Y(Np)\to Y(N)}(z_{Np})\big) = \begin{cases} (1 - a_p + p)\,\mathrm{reg}_f^{(p)}(z_N) & \text{si } p \nmid N, \\ \mathrm{reg}_f^{(p)}(z_N) & \text{si } p \mid N. \end{cases}$$

De plus $1 - a_p + p = (1-\alpha)(1-p\alpha^{-1})$ si $p \nmid N$.

Démonstration. — Si p divise N, alors $\mathrm{tr}_{Y(Np)\to Y(N)}(z_{Np}) = z_N$ d'après [**Kat04**, 2.3], d'où le lemme dans ce cas.
Si $p \nmid N$ alors d'après [**Kat04**, 2.4], on a

$$\mathrm{tr}_{Y(Np)\to Y(N)}(z_{Np}) = \left(1 - T'(p)\begin{pmatrix}1/p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^* + p\begin{pmatrix}1/p & 0\\ 0 & 1/p\end{pmatrix}^*\right) z_N, \tag{91}$$

où $T'(p)$ est l'opérateur de Hecke sur $Y(N)$ défini en [**Kat04**, 2.9]. L'opérateur $T'(p)\begin{pmatrix}1/p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^*$ induit l'adjoint de T_p sur $V_{Y_1(N)}$ [**Kat04**, 5.4], donc a_p sur V_f. Puisque le caractère de f est trivial, l'automorphisme $\begin{pmatrix}1/p & 0\\ 0 & 1/p\end{pmatrix}$ induit l'identité sur V_f. Par compatibilité du régulateur étale p-adique aux opérateurs de Hecke et aux automorphismes, on trouve la formule annoncée.
La dernière assertion résulte du fait que $1 - a_p + p = \det(1-\varphi) = (1-\alpha)(1-\beta)$ avec $\alpha\beta = p$. □

Calculons maintenant la constante rationnelle b_2'/b_2 dans (88). Remarquons que $\delta_f(I_2)^- = (b_2'/b_2)\gamma_E^-$ et donc

$$\frac{b_2'}{b_2} = \frac{\langle \delta_f(I_2)^-, \omega_f\rangle}{\langle \gamma_E^-, \omega_f\rangle}, \tag{92}$$

où l'on considère ω_f comme un élément de $H^1_c(Y_1(N)(\mathbf{C}), \mathbf{C})$, et où l'application $\langle \cdot, \omega_f\rangle : V_{f,\mathbf{Q}} \to \mathbf{C}$ est induite par (57).

Lemme 8.5. — *On a*

$$\langle \delta_f(I_2)^-, \omega_f\rangle = -L(f,1) \tag{93}$$

Démonstration. — Remarquons que $\xi(I_2) = \{0,\infty\}$ est invariant par la conjugaison complexe, donc $\delta_f(I_2) = \delta_f(I_2)^-$. On a alors

$$\langle \delta_f(I_2), \omega_f\rangle = \int_{Y_1(N)(\mathbf{C})} \delta(I_2)\wedge\omega_f = \int_{\xi(I_2)} \omega_f \tag{94}$$

par définition de la dualité de Poincaré. Un calcul classique [**Man72**] donne $\int_0^\infty 2i\pi f(z)dz = -L(E,1)$, d'où le résultat. □

Lemme 8.6. — *On a*

$$\langle \gamma_E^-, \omega_f\rangle = \frac{-i}{\Omega_E^-}\langle f, f\rangle. \tag{95}$$

Démonstration. — Remarquons que $c^*\omega_f = \overline{\omega_f}$. D'après la définition 6.8 de γ_E, on a

$$\gamma_E^- = \frac{1}{\Omega_E^-}\omega_f^- = \frac{1}{2\Omega_E^-}(\omega_f - \overline{\omega_f}) \tag{96}$$

et par suite

$$\langle \gamma_E^-, \omega_f \rangle = \frac{1}{2\Omega_E^-} \int_{Y_1(N)(\mathbf{C})} -\overline{\omega_f} \wedge \omega_f = \frac{-i}{\Omega_E^-}\langle f, f\rangle. \tag{97}$$

□

On déduit de (92) et des lemmes 8.5 et 8.6 que

$$\frac{b_2'}{b_2} = \frac{L(E,1)\Omega_E^-}{i\langle f, f\rangle}. \tag{98}$$

Enfin, considérons le terme $\pi_0(z_{\mathrm{Kato}}^{(p)}(2))$ dans (88).

Proposition 8.7. — *On a*

$$[\log \pi_0(z_{\mathrm{Kato}}^{(p)}(2)), \eta_\alpha] = \frac{1-\alpha}{1-p^{-1}\alpha^{-1}} \cdot L_{p,\alpha}(E, \omega^{-1}, 0). \tag{99}$$

Démonstration. — Par le théorème 7.1 appliqué à $x = z_{\mathrm{Kato}}(2)$ et $\eta = \eta_\alpha$, on a

$$\mathcal{L}_{\eta_\alpha}(z_{\mathrm{Kato}}^{(p)}(2))(1) = \left[\log \pi_0(z_{\mathrm{Kato}}^{(p)}(2)), \frac{1-p^{-1}\alpha^{-1}}{1-\alpha} \cdot \eta_\alpha\right]. \tag{100}$$

Le théorème 8.1 de Kato pour $\chi = 1$ entraîne $\mathcal{L}_{\eta_\alpha}(z_{\mathrm{Kato}}^{(p)}(2))(1) = L_{p,\alpha}(E, \omega^{-1}, 0)$, d'où le résultat. □

En mettant ensemble (88), (89), (98), le lemme 8.4 et la proposition 8.7, on obtient le théorème 4.1.

9. Exemples explicites

Le théorème 4.1 montre un lien entre $L_{p,\alpha}(E, \omega^{-1}, 0)$ et le régulateur p-adique de $z_N \in K_2(Y(N)) \otimes \mathbf{Q}$. Puisque le régulateur étale p-adique est compatible aux morphismes de trace associés aux morphismes finis et localement libres, il est naturel de chercher une formule exprimant $L_{p,\alpha}(E, \omega^{-1}, 0)$ comme le régulateur d'un élément explicite de $K_2(E) \otimes \mathbf{Q}$.
En général, la paramétrisation modulaire $\phi : X_1(N) \to E$ est difficile à calculer explicitement. De plus, et c'est là une difficulté plus sérieuse, la trace est une opération hautement non triviale au niveau des groupes K_2. Il existe un algorithme pour la calculer [**RT83**], mais il ne semble pas raisonnable de pouvoir espérer l'utiliser lorsque le degré de ϕ est grand. Nous devons donc nous contenter de cas particuliers.

Auparavant, nous montrons qu'il est quand même toujours possible de calculer la trace de z_N dans $K_2(Y_0(N)) \otimes \mathbf{Q}$.

Proposition 9.1. — *Soit $\pi : Y(N) \to Y_0(N)$ le morphisme canonique, et $u = \pi_* g_{1,0}$. On a la formule*

$$\mathrm{tr}_{Y(N)\to Y_0(N)}(z_N) = \frac{2}{\varphi(N)^2}\{u, W_N u\}, \tag{101}$$

où $\varphi(N)$ est l'indicatrice d'Euler de N, et W_N est l'involution d'Atkin-Lehner sur $X_0(N)$.

Démonstration. — Soit $v = \pi_* g_{0,1}$. Notons $\pi = \pi_0 \circ \pi_1$ avec $\pi_1 : Y(N) \to Y_1(N)$ et $\pi_0 : Y_1(N) \to Y_0(N)$. Rappelons que $Y_1(N)$ (resp. $Y_0(N)$) est le quotient de $Y(N)$ par le sous-groupe suivant de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$:

$$\Gamma_1 = \{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} \qquad (\text{resp. } \Gamma_0 = \{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\}). \tag{102}$$

D'autre part, les unités de Siegel vérifient $g_{a,b}|\gamma = g_{(a,b)\gamma}$ pour tout $a, b \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ et $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$. On en déduit que $g_{0,1}$ est invariante par Γ_1, d'où $g_{0,1} = \pi_1^* w$ avec $w \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)) \otimes \mathbf{Q}$. Alors

$$(\pi_1)_* z_N = \{(\pi_1)_* g_{1,0}, w\} \tag{103}$$

D'autre part

$$\pi_1^*(\pi_1)_* g_{1,0} = \prod_{\substack{a \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^* \\ b \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}}} g_{a,b} \tag{104}$$

est invariante par Γ_0, d'où $\pi_1^*(\pi_1)_* g_{1,0} = \pi^* g$ avec $g \in \mathcal{O}^*(Y_0(N)) \otimes \mathbf{Q}$. Par injectivité de π_1^*, on a $(\pi_1)_* g_{1,0} = \pi_0^* g$, d'où

$$\pi_* z_N = \{g, (\pi_0)_* w\}. \tag{105}$$

On a en fait

$$u = (\pi_0)_*(\pi_1)_* g_{1,0} = (\pi_0)_* \pi_0^* g = g \otimes (\deg \pi_0) \tag{106}$$

et aussi

$$v = (\pi_0)_*(\pi_1)_* g_{0,1} = (\pi_0)_*(\pi_1)_* \pi_1^* w = (\pi_0)_* w \otimes (\deg \pi_1), \tag{107}$$

d'où l'on déduit

$$\pi_* z_N = \frac{1}{\deg \pi}\{u,v\}. \tag{108}$$

Insistons sur le fait que la formule (108), qui peut sembler naturelle à première vue, est particulière au symbole $z_N = \{g_{1,0}, g_{0,1}\}$.
On a $\deg \pi = \mathrm{card}(\Gamma_0/\{\pm I_2\}) = N\varphi(N)^2/2$. Pour montrer (101), il suffit donc d'établir que $v = (W_N u)^N$, ou encore

$$v\left(\frac{-1}{N\tau}\right) = u(\tau)^N \qquad (\tau \in \mathfrak{h}), \tag{109}$$

où $\mathfrak{h}$ désigne le demi-plan de Poincaré, et l'égalité étant entendue dans $\mathbf{C}^* \otimes \mathbf{Q}$. En notant $\nu : \mathfrak{h} \to Y(N)(\mathbf{C})$ l'application canonique, on a d'une part

$$\begin{aligned} u(\tau) &= (\pi^* u)(\nu(\tau)) = \Big(\prod_{\gamma \in \Gamma_0/\pm 1} g_{1,0}|\gamma\Big)(\nu(\tau)) \\ &= \prod_{\substack{a \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^* \\ b \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}}} g_{a,b}(\nu(\tau))^{\varphi(N)/2}. \end{aligned} \tag{110}$$

D'autre part, on a $\nu(-1/\tau) = \sigma \cdot \nu(\tau)$ avec $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et donc

$$\begin{aligned} v\left(\frac{-1}{N\tau}\right) &= (\pi^* v)\left(\nu\left(\frac{-1}{N\tau}\right)\right) = \Big(\prod_{\gamma \in \Gamma_0/\pm 1} g_{0,1}|\gamma\sigma\Big)(\nu(N\tau)) \\ &= \prod_{a \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*} g_{a,0}(\nu(N\tau))^{N\varphi(N)/2}. \end{aligned} \tag{111}$$

En utilisant l'expression des unités de Siegel en termes de q-produits [**Kat04**, 1.9], on montre que

$$g_{a,0}(\nu(N\tau)) = \prod_{b \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} g_{a,b}(\nu(\tau)) \qquad (\tau \in \mathfrak{h}) \tag{112}$$

(comparer avec [**Kat04**, 2.12]), ce qui achève la preuve. □

Remarque 9.2. — Supposons N premier. Comme le signe de l'équation fonctionnelle de $L(E,s)$ est a_N, on a toujours $(1-a_N)L(E,1) = 0$ et le membre de droite de (35) est nul. La proposition 9.1 confirme ce fait : puisque $X_0(N)$ n'a que deux pointes 0 et ∞, qui sont échangées par W_N, l'unité modulaire $W_N u$ est de la forme λ/u avec $\lambda \in \mathbf{Q}^*$, et la trace de z_N est proportionnelle à $\{\lambda, u\}$ (on peut montrer que $\lambda = N^{\varphi(N)/2}$, mais ce n'est pas essentiel ici).

Par une construction de Bloch [**Nek94**, 7.4], on peut ajouter au symbole $\{u, W_N u\} \in K_2(Y_0(N)) \otimes \mathbf{Q}$ de la proposition 9.1 des symboles de la forme $\{\lambda, w\}$, où λ est une constante et w est une unité modulaire, de manière à obtenir un élément $\{u, W_N u\}' \in K_2(X_0(N)) \otimes \mathbf{Q}$.

Définition 9.3. — Si $\phi_0 : X_0(N) \to E$ est une paramétrisation modulaire, posons

$$z_{E,\phi_0} := (\phi_0)_*\Big(\frac{2}{\phi(N)^2}\{u, W_N u\}'\Big) \in K_2(E) \otimes \mathbf{Q}. \tag{113}$$

On déduit du théorème 4.1 et de la proposition 9.1 la formule suivante pour le régulateur p-adique de z_{E,ϕ_0}. On suppose $p^2 \nmid N$. Soit $\eta_{E,\alpha}$ l'unique élément de $D_{\mathrm{cris}}(V_E) \otimes \mathbf{Q}_p(\alpha)$ tel que

$$\varphi(\eta_{E,\alpha}) = \alpha\eta_{E,\alpha} \qquad \text{et} \qquad [\omega_E, \eta_{E,\alpha}] = 1 \tag{114}$$

où l'on considère ω_E comme élément de $D_{\mathrm{dR}}(V_E) \cong D_{\mathrm{dR}}(V_E(2))$. Posons $\phi_0^*\omega_E = 2i\pi c f(z)dz$ avec $c \in \mathbf{Q}^*$, et notons c_∞ le nombre de composantes connexes de $E(\mathbf{R})$.

Théorème 9.4. — *Supposons p impair et E sans multiplication complexe. Si E a bonne réduction en p, alors*

$$\begin{aligned}[\log \mathrm{reg}_E^{(p)}(z_{E,\phi_0}), \eta_{E,\alpha}] = &\frac{2c}{c_\infty}\Big(\prod_{\ell \mid N} 1 - a_\ell\Big)\frac{L(E,1)}{\Omega_E^+}\cdot \\ &\cdot (1 - p\alpha^{-1})^{-1}(1 - p^{-1}\alpha^{-1})^{-1} L_{p,\alpha}(E, \omega^{-1}, 0),\end{aligned} \tag{115}$$

Si E a réduction multiplicative non déployée en p, alors

$$\begin{aligned}[\log \mathrm{reg}_E^{(p)}(z_{E,\phi_0}), \eta_{E,\alpha}] = &\frac{2c}{c_\infty}\Big(\prod_{\substack{\ell \mid N \\ \ell \neq p}} 1 - a_\ell\Big)\frac{L(E,1)}{\Omega_E^+}\cdot \\ &\cdot \frac{1-\alpha}{1 - p^{-1}\alpha^{-1}} L_{p,\alpha}(E, \omega^{-1}, 0).\end{aligned} \tag{116}$$

Démonstration. — Prenons $\phi = \phi_0 \circ \pi_0 : X_1(N) \to E$ avec $\pi_0 : X_1(N) \to X_0(N)$ le morphisme canonique. Notons $\phi_* : V_f \xrightarrow{\cong} V_E$ l'isomorphisme induit par ϕ, et transportons les formules (35) et (36) dans V_E. Par compatibilité du régulateur aux morphismes de trace, on a

$$\phi_* \mathrm{reg}_f^{(p)}(z_N) = \mathrm{reg}_E^{(p)}(z_{E,\phi_0}). \tag{117}$$

D'après $\phi^*\omega_E = c\omega_f$ et comme $\phi_* \circ \phi^*$ est la multiplication par $\deg\phi$ dans V_E, donc dans $D_{\mathrm{dR}}(V_E)$, il vient $\phi_*\omega_f = (\deg\phi/c)\omega_E$ et donc $\eta_{E,\alpha} = (\deg\phi/c)\phi_*\eta_\alpha$. En tenant compte de (37), on obtient les formules annoncées. □

Donnons quelques exemples où z_{E,ϕ_0} est non nul et peut être explicité. D'après la formule pour le régulateur complexe de z_{E,ϕ_0} montrée par Kato, on a $z_{E,\phi_0} \neq 0$ dès que les deux conditions suivantes sont remplies :

1. Pour tout diviseur premier ℓ de N, on a $a_\ell \neq 1$.
2. On a $L(E,1) \neq 0$.

Pour ne pas avoir à calculer de trace dans K_2, considérons le cas où ϕ_0 est un isomorphisme, c'est-à-dire le cas où $E = X_0(N)$. Ces courbes elliptiques ont été étudiées en détail par Ligozat [**Lig75**]. La courbe $X_0(N)$ est de genre 1 pour douze valeurs de N :

$$N \in \{11,14,15,17,19,20,21,24,27,32,36,49\}. \tag{118}$$

Pour ces courbes, la condition (2) est toujours vérifiée et la condition (1) est vérifiée pour six valeurs de N :

$$(\forall \ell \mid N, a_\ell \neq 1) \Leftrightarrow N \in \{20,24,27,32,36,49\}. \tag{119}$$

Parmi ces six courbes, $X_0(20)$ et $X_0(24)$ sont sans multiplication complexe. Elles sont données par les équations minimales sur $\mathbf{Z}$ suivantes :

$$X_0(20) : y^2 = x^3 + x^2 + 4x + 4, \tag{120}$$

$$X_0(24) : y^2 = x^3 - x^2 - 4x + 4. \tag{121}$$

Considérons la courbe $E = X_0(20)$. Un calcul explicite assez long donne

$$u = \Big(\frac{x-4}{x(x+1)}\Big) \otimes \frac{4}{3} \tag{122}$$

$$W_{20} u = \Big(\frac{(x-y+2)(x-4)^2}{x^2(x^2+5y+7x+6)}\Big) \otimes \frac{4}{3} \tag{123}$$

De plus, en posant $z_E = z_{E,\phi_0}$, les techniques de Goncharov et Levin [**GL98**] permettent de montrer

$$z_E = \frac{1}{3}\{x, y+2x+2\}' \in K_2(E)_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q}. \tag{124}$$

On a $c = 1$ [**Lig75**, 4.2.7.1], $c_\infty = 1$, $a_2 = 0$, $a_5 = -1$ et $L(E,1)/\Omega_E^+ = 1/6$. En appliquant le théorème 9.4, on obtient donc

$$[\log \mathrm{reg}_E^{(p)}\{x, y+2x+2\}, \eta_{E,\alpha}] = \frac{2L_{p,\alpha}(E,\omega^{-1},0)}{(1-p\alpha^{-1})(1-p^{-1}\alpha^{-1})} \qquad (p \neq 2,5), \tag{125}$$

$$[\log \mathrm{reg}_E^{(p)}\{x, y+2x+2\}, \eta_{E,\alpha}] = \frac{5}{3} L_{p,\alpha}(E,\omega^{-1},0) \qquad (p = 5). \tag{126}$$

Pour terminer, signalons le cas $N = 64$: la courbe $X_0(64)$ n'est autre que la quartique de Fermat et la trace de z_{64} définit un élément de $K_2(X_0(64)) \otimes \mathbf{Q}$. D'après la formule complexe de Kato, cet élément est non nul. Il serait intéressant de calculer son régulateur p-adique.

Références

[Bei84] A. A. Beilinson. Higher regulators and values of L-functions. In *Current problems in mathematics, Vol. 24*, Itogi Nauki i Tekhniki, pages 181–238. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1984.

[Bes00a] A. Besser. Syntomic regulators and p-adic integration. I. Rigid syntomic regulators. In *Proceedings of the Conference on p-adic Aspects of the Theory of Automorphic Representations (Jerusalem, 1998)*, volume 120 (part B), pages 291–334, 2000.

[Bes00b] A. Besser. Syntomic regulators and p-adic integration. II. K_2 of curves. In *Proceedings of the Conference on p-adic Aspects of the Theory of Automorphic Representations (Jerusalem, 1998)*, volume 120 (part B), pages 335–359, 2000.

[BK90] S. J. Bloch and K. Kato. L-functions and Tamagawa numbers of motives. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, volume 86 of *Progr. Math.*, pages 333–400. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Blo00] S. J. Bloch. *Higher regulators, algebraic K-theory, and zeta functions of elliptic curves*, volume 11 of *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[CdS88] R. Coleman and E. de Shalit. p-adic regulators on curves and special values of p-adic L-functions. *Invent. Math.*, 93(2) :239–266, 1988.

[Col98] P. Colmez. Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local. *Ann. of Math. (2)*, 148(2) :485–571, 1998.

[Fal02] G. Faltings. Almost étale extensions. *Astérisque*, 279 :185–270, 2002. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (II).

[FPR94] J.-M. Fontaine and B. Perrin-Riou. Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L. In *Motives (Seattle, WA, 1991)*, volume 55 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 599–706. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Gea03] M. T. Gealy. Special values of p-adic L-functions associated to modular forms. Preprint, 2003.

[Gea05] M. T. Gealy. *On the Tamagawa Number Conjecture for Motives Attached to Modular Forms.* PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, December 2005. Available at `http://resolver.caltech.edu/CaltechETD:etd-12162005-124435`.

[GL98] A. B. Goncharov and A. M. Levin. Zagier's conjecture on $L(E, 2)$. *Invent. Math.*, 132(2) :393–432, 1998.

[Jan88] U. Jannsen. Continuous étale cohomology. *Math. Ann.*, 280(2) :207–245, 1988.

[Kat04] K. Kato. p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms. *Astérisque*, 295 :ix, 117–290, 2004. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (III).

[Lig75] G. Ligozat. *Courbes modulaires de genre* 1. Société Mathématique de France, Paris, 1975. Bull. Soc. Math. France, Mém. 43, Supplément au Bull. Soc. Math. France Tome 103, no. 3.

[Man72] Y. I. Manin. Parabolic points and zeta functions of modular curves. *Math. USSR Izvestija*, 6(1) :19–64, 1972.

[Man73] Y. I. Manin. Periods of cusp forms, and p-adic Hecke series. *Mat. Sb. (N.S.)*, 92(134) :378–401, 503, 1973.

[MSD74] B. Mazur and P. Swinnerton-Dyer. Arithmetic of Weil curves. *Invent. Math.*, 25 :1–61, 1974.

[MTT86] B. Mazur, J. Tate, and J. Teitelbaum. On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer. *Invent. Math.*, 84(1) :1–48, 1986.

[Nek94] J. Nekovář. Beilinson's conjectures. In *Motives (Seattle, WA, 1991)*, volume 55 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 537–570. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[PR92] B. Perrin-Riou. Théorie d'Iwasawa et hauteurs p-adiques. *Invent. Math.*, 109(1) :137–185, 1992.

[PR94] B. Perrin-Riou. Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local. *Invent. Math.*, 115(1) :81–161, 1994. With an appendix by Jean-Marc Fontaine.

[PR99] B. Perrin-Riou. Théorie d'Iwasawa et loi explicite de réciprocité. *Doc. Math.*, 4 :219–273 (electronic), 1999.

[PR01] B. Perrin-Riou. Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques semi-stables. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, 84 :vi+111, 2001.

[RT83] S. Rosset and J. Tate. A reciprocity law for K_2-traces. *Comment. Math. Helv.*, 58(1) :38–47, 1983.

[Sai97] T. Saito. Modular forms and p-adic Hodge theory. *Invent. Math.*, 129(3) :607–620, 1997.

[Sai00] T. Saito. Weight-monodromy conjecture for l-adic representations associated to modular forms. A supplement to : "Modular forms and p-adic Hodge theory" [Invent. Math. **129** (1997), no. 3, 607–620 ; MR1465337 (98g :11060)]. In *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*, volume 548 of *NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 427–431. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[Tsu99] T. Tsuji. p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. *Invent. Math.*, 137(2) :233–411, 1999.

---

18 mars 2010

F. Brunault, Université de Lyon, ÉNS Lyon - UMPA, 46 allée d'Italie, F-69007 Lyon, France
E-mail : brunault@umpa.ens-lyon.fr • *Url :* http://www.umpa.ens-lyon.fr/~brunault/