Minorations explicites
de formes linéaires de logarithmes

Nicolas Gouillon

Université de la méditerranée, Institut de Mathématiques de Luminy.
163 Avenue de Luminy, Case 907, 13288 MARSEILLE Cédex 9, FRANCE.

gouillon@iml.univ-mrs.fr

21 septembre 2002

Résumé

Nous donnons ici une minoration entièrement explicite de formes linéaires en deux logarithmes, du type de celle de Baker, améliorant substantiellement les résultats connus. Seul un schéma de la preuve, utilisant la méthode de Schneider, est donné.

1 Introduction

Une forme linéaire en logarithmes désigne une somme de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \log \alpha_i,$$

où les b_i sont des entiers relatifs non nuls et les α_i des nombres algébriques. La détermination des logarithmes est choisie de manière arbitraire. Il s'agit de minorer la valeur absolue d'une telle forme, dans le cas de deux logarithmes $(n = 2)$, en terme de la hauteur des α_i et des b_i. La minoration obtenue est analogue à celle de Baker [1]

$$\log |\Lambda| \geq -C_1 D^4 \log \max\{|b_1|, |b_2|\} \log h(\alpha_1) \log h(\alpha_2),$$

où h désigne la hauteur logarithmique définie ci-dessous. La constante C_1 calculée à partir de la méthode de Baker est elle de l'ordre de 10^9. Il existe une autre minoration

$$\log |\Lambda| \geq -C_2 D^4 (\log \max\{|b_1|, |b_2|\})^2 \log h(\alpha_1) \log h(\alpha_2),$$

dont la constante C_2, obtenue par M. Laurent, M. Mignotte et Y. Nesterenko dans [3], est de l'ordre de 20. Nous nous proposons d'améliorer substantiellement la constante C_1 en arrivant à obtenir une constante de l'ordre de 25000. Pour aboutir à ce résultat nous utilisons la méthode de Schneider avec multiplicités jointe à celle des déterminants d'interpolation.

Nous énonçons nos résultats dans le paragraphe 2. Ils découlent tous du Théorème 1 et s'obtiennent par spécialisation des paramètres de son énoncé. Dans la paragraphe 3 nous donnons le plan de la démonstration du Théorème 1 Dans le paragraphe 4 nous énonçons un lemme de zéros , qui améliore, pour le cas m=2, celui de [2].

Nous nous plaçons dans un cadre archimédien : les nombres algébriques considérés sont toujours vus comme éléments du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Pour tout nombre algébrique α de degré d sur $\mathbb{Q}$, et dont le polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$ s'écrit $a\prod_{i=1}^{d}(X-\alpha^{(i)})$, où les racines $\alpha^{(i)}$ sont des nombres complexes, on désignera par

$$h(\alpha)=\frac{1}{d}\left(\log|a|+\sum_{i=1}^{d}\log(max(1,|\alpha^{(i)})|\right),$$

la hauteur logarithmique usuelle du nombre α.

2 Énoncés des résultats

Soient α_1, α_2 deux nombres algébriques non nuls, et soient $\log\alpha_1$ et $\log\alpha_2$ des déterminations quelconques de leurs logarithmes. On se propose de minorer la valeur absolue de la forme linéaire

$$\Lambda=b_1\log\alpha_1-b_2\log\alpha_2,$$

où b_1 et b_2 sont des entiers positifs. Nous supposerons dans la suite que les valeurs absolues $|\alpha_1|$ et $|\alpha_2|$ sont ≥ 1. Cette condition n'est pas restrictive puisque l'on peut remplacer α_1 et α_2 par leurs inverses sans modifier $|\Lambda|$, et que la partie réelle de Λ est la somme de deux termes ≥ 0 lorsque $|\alpha_1|\geq 1$, $|\alpha_2|\leq 1$. Posons

$$D=[\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2):\mathbb{Q}]/[\mathbb{R}(\alpha_1,\alpha_2):\mathbb{R}].$$

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1. *Soient K, L, T des entiers ≥ 1, R, S des entiers ≥ 0. Soit E un réel >1. Posons*

$$N=\frac{(K+1)(K+2)}{2}(L+1),$$

$$g=\frac{1}{4}-\frac{N}{12(R+1)(S+1)(T+1)},\quad B=\frac{R|b_2|+S|b_1|}{2K}.$$

Soient a_1, a_2 des réels >0 tels que

$$a_i\geq E|\log\alpha_i|-\log|\alpha_i|+2Dh(\alpha_i),\quad i=1,2.$$

Supposons que pour tout entier K' tel que $0\leq K'\leq K$ l'on puisse trouver des entiers R_1, R_2, R_3, S_1, S_2, S_3, T_1, T_2 et T_3 tels que

$$R_1+R_2+R_3\leq R,$$

$$S_1+S_2+S_3\leq S,$$

$$T_1+T_2+T_3\leq T-K',$$

et vérifiant la condition suivante

$$\begin{aligned}
\operatorname{Card}\{rb_2+sb_1; 0\le r\le R_1, 0\le s\le S_1\} &\ge K-K'+1,\\
\operatorname{Card}\{\alpha_1^r\alpha_2^s; 0\le r\le R_1, 0\le s\le S_1\} &\ge \frac{L+1}{T_1+1},\\
\operatorname{Card}\{\alpha_1^r\alpha_2^s; 0\le r\le R_2, 0\le s\le S_2\} &\ge \frac{2(K-K')L+1}{T_2+1},\\
\operatorname{Card}\{rb_2+sb_1; 0\le r\le R_2, 0\le s\le S_2\} &\ge \frac{(K-K')^2+1}{T_2+1},\\
\operatorname{Card}\{(rb_2+sb_1,\alpha_1^r\alpha_2^s); 0\le r\le R_3, 0\le s\le S_3\} &\ge \frac{3(K-K')^2L+1}{T_3+1}.
\end{aligned}\tag{1}$$

Si de plus

$$\begin{aligned}
\frac{V}{2} \quad > \quad & D\left[\log(\frac{N}{2})+\frac{K}{3}\log\left(\frac{Rb_2+Sb_1}{2K}\right)+\frac{22}{18}K+\frac{K}{3}\log\left(\frac{T}{KL}\right)\right.\\
&+T+\frac{2T}{L+1}\left[\log\left(\frac{L+1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}\log\left(\frac{309T}{(L+1)(309+107K)}\right)\right]\\
&\left.+\left(\frac{107K}{309}+1\right)\frac{309T}{(L+1)(309+107K)}+\frac{(\frac{1}{2}\log(L)+L)K}{3(L+1)}\right]\\
&+T\log E+\frac{K}{3}\log E+\log 2+g\frac{L+1}{2}(Ra_1+Sa_2),
\end{aligned}\tag{2}$$

où

$$V=\frac{\left(2-2/(L+1)+\sqrt{4-8/(L+1)}\right)(K+2)(L+1)\log E}{8}.$$

Alors nous avons

$$|\Lambda'|\ge e^{-V+T\log E},\quad avec\quad \Lambda'=\Lambda\cdot\max\left\{\frac{LSe^{LS|\Lambda|/(2b_2)}}{2b_2},\frac{LRe^{LR|\Lambda|/(2b_1)}}{2b_1}\right\}.$$

Posons

$$b'=\frac{b_1}{D\log A_2}+\frac{b_2}{D\log A_1},$$

où A_1, A_2 désignent des réels >1 tels que

$$\log A_i\ge\max\left\{h(\alpha_i),\frac{|\log\alpha_i|}{D},\frac{1}{D}\right\},\quad (i=1,2).$$

Du Théorème 1 on déduit les corollaires suivants.

Corollaire 1. *Supposons que α_1 et α_2 soient multiplicativement indépendants. Alors*

$$\log|\Lambda|\ge -25900D^4\max\left\{\log b'+4.277,\frac{100}{D},10\left(1.0344+\frac{1.59}{D}\right)\right\}\log A_1\log A_2.$$

Corollaire 2. *Supposons de plus que α_1 et α_2 soient réels et positifs. Alors*

$$\log|\Lambda| \geq -18600 D^4 \max\left\{\log b' + 4.29, \frac{100}{D}, 10\left(1.0314 + \frac{1.434}{D}\right)\right\} \log A_1 \log A_2.$$

Le choix de la constante 100 ci-dessus est bien sûr arbitraire, et donne naissance aux autres constantes numériques intervenant dans ces deux corollaires. En général, ces constantes sont d'autant plus petites que b' est grand. On notera que les constantes multiplicatives asymptotiques (c'est à dire lorsque b' tend vers l'infini) sont respectivement de l'ordre de 21800 et de 15900 dans les corollaires 1 et 2. Les deux corollaires sont à mettre en parallèle avec les corollaires 1 et 2 de [3] dont les coefficients sont asymptotiquement de l'ordre de 20 pour le Corollaire 1 et de 15 pour le Corollaire 2. On peut alors dire qu'il devient intéressant d'utiliser les minorations énoncées ici lorsque $\log b' \geq 1300$.

3 Schéma de démonstration du Théorème 1

Pour démontrer le Théorème 1 , nous utilisons la matrice M de taille $N \times RST$ dont les coefficients sont les nombres

$$\gamma_{\underline{k}l}^{trs} = \triangle\ (rb_2 + sb_1; k_1)\alpha_1^{rl}\alpha_2^{sl} l^{t-k_0},$$

où (trs), avec $(0 \leq t \leq T,\ 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq s \leq S)$, est l'indice de colonne et $(\underline{k}, l)$, avec $(k_0 + k_1 \leq K, 0 \leq l \leq L)$, est celui de ligne. L'application $\triangle$ étant définie par

$$\triangle\ (z; n) = \left(\frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n!}\right).$$

Voici le plan de la preuve du Théorème 1.

Étape 1**.** Soit la matrice M définie précédemment. Grâce à un lemme de zéro nous montrons que la matrice M est de rang maximal. La condition (1) découle en fait du lemme de zéros utilisé.

Étape 2**.** Transformation de la matrice M grâce aux polynômes de Feldman. (On pourra se référer au chapitre 11 de [4] pour plus de détails.)

Étape 3**.** Nous prenons un mineur non nul Δ de la matrice M, dont l'existence est assurée par l'étape 1, que nous majorons arithmétiquement grâce à une inégalité de Liouville.

Étape 4**.** Nous majorons analytiquement Δ en fonction de $|\Lambda'|$ grâce à un lemme de Schwarz.

Étape 5**.** Les étapes 4 et 5 fournissent un encadrement de Δ. Or la majoration dépend de $|\Lambda'|$ tandis que la minoration non, il s'en suit que pour $|\Lambda'|$ suffisamment petit nous obtenons une contradiction. L'hypothèse (2) du théorème 1 provient de cette étape.

L'étape 2 n'est pas là pour améliorer les coefficients mais est nécessaire pour obtenir une minoration en $\log b'$. En effet l'application directe des étapes 3 et 4 à la matrice M donne une minoration en $\log b' \log\log b'$, c'est pour supprimer le terme $\log\log b'$ qu'il nous faut utiliser les polynômes de Feldman. Pour plus de précision voir le chapitre 11 de [4].

4 Lemme de zéros

Voici le lemme de zéros utilisé dans l'étape 1 de la démonstration.

Soit $\mathfrak{D}$ la dérivation $\mathfrak{D} = \frac{\partial}{\partial X_0} + Y\frac{\partial}{\partial Y}$, on dira qu'un polynôme P s'annule à l'ordre $> T$ sur un ensemble Σ si pour tout t compris entre 0 et T, $\mathfrak{D}^t P$ s'annule sur Σ.

Lemme 1. *Soient K, L des entiers ≥ 1 ; soient T_1, T_2, T_3 des entiers ≥ 0 et soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ des ensembles finis de $\{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ non vides. Soit P un polynôme appartenant à $\mathbb{C}[X_1, X_0, Y]$, de degré total en (X_0, X_1) inférieur ou égal à K et de degré en Y inférieur ou égal à L. On notera K', $K' \leq K$, le plus grand entier tel que $X_0^{K'}$ divise P.*

Supposons les conditions suivantes réalisées.

(1) *Pour tout $j = 1, 2$ et tout sous-espace vectoriel W de $\mathbb{C}^2$, $W \neq \{0\} \times \mathbb{C}$ de dimension $2 - j$ on a*

$$\binom{T_j + 1}{\epsilon_j} \mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{W \times \mathbb{C}^\times}\right) \geq (K - K')^j + 1, \quad \textit{où } \epsilon_j = \begin{cases} 1 \textit{ si } (1, 0, \ldots, 0) \notin W \\ 0 \textit{ sinon} \end{cases}$$

(2) *Pour tout $j = 1, 2, 3$ et tout sous-espace vectoriel W de $\mathbb{C}^2$ de dimension $3 - j$ on a*

$$(T_j + 1)\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{W \times \mathbb{C}^\times_{tors}}\right) \geq j(K - K')^{j-1}L + 1.$$

Alors si P s'annule sur $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$ à un ordre $> K' + T_1 + T_2 + T_3$ pour la dérivation $\mathfrak{D}$, il est identiquement nul.

Références

[1] Baker A., The theory of linear forms in logarithms. Transcendence theory : advances and applications, Academic press, London, p.21-27, 1976.

[2] Gouillon N., Un Lemme de zéro, C.R.A.S. Paris, Ser. I 335, p.167-170, 2002.

[3] Laurent M., Mignotte M., Nesterenko Y., Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation, Journal of Number Theory, vol.55, No. 2, p.285-321, 1995.

[4] Waldschmidt M., Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups, Springer-Verlag, 1999.