Publications mathématiques de Besançon
Algèbre et théorie des nombres

Amílcar Pacheco

Sur le rang des variétés abéliennes sur un corps de fonctions

2014/2, p. 31-46.
<http://pmb.cedram.org/item?id=PMB_2014____2_31_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de Besançon, UMR 6623 CNRS/UFC

Publications mathématiques de Besançon – 2014/2, 31-46

SUR LE RANG DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES SUR UN CORPS DE FONCTIONS

par

Amílcar Pacheco

Résumé. — Ce texte est un survey concernant la question du rang d'une variété abélienne A sur un corps de fonctions K en une variable sur un corps de base k. Il s'agit non seulement de discuter une borne supérieure pour ce rang, mais aussi d'étudier le comportement de cette borne si on prend une extension abélienne finie L de K. On se demande aussi : que se passe-t-il quand on enlève cette dernière hypothèse ? Dans un cas particulier, on discute de la validité d'un analogue du théorème de Lang-Néron. Pour cela, il nous faudra des hypothèses additionnelles. À la fin du texte, nous discutons des situations où ces hypothèses sont vérifiées.

Abstract. — This text is a survey on the question of the rank of an abelian variety A defined over a one variable function field K over a base field k. We discuss not only an upper bound for this rank, but also study the behavior of this bound after taking a finite and abelian extension L of K. We ask ourselves : what happens if this hypothesis is suppressed? In a particular case, we discuss the validity of the Lang-Néron theorem. This validity depends on additional hypotheses. At the end of the text, we discuss situations in which these hypotheses are satisfied.

1. Introduction

Un corps global K est un corps de nombres ou un corps de fonctions en une variable sur un corps fini à q éléments, noté k. Par définition, dans le dernier cas, k est algébriquement clos dans K. On pose g le genre de K et soit A/K une variété abélienne de dimension d. Le théorème de Mordell-Weil nous assure que le groupe $A(K)$ des points K-rationnels de A est un groupe de type fini dont le rang est noté par $r = \operatorname{rg} A(K)$. On s'intéresse dans ce texte à la question de la taille du rang de ce groupe. On expose des résultats obtenus ces dernières années.

Dans le cas où K/k est un corps de fonctions, nous notons $\operatorname{Tr}_{K/k} A$ la K/k-trace de A. (Rappelons que si la caractéristique de K est nulle, cet objet est la plus grande sous-variété de A définie sur k. En caractéristique positive, il faut raffiner la définition, voir [Co06].) Le

Classification mathématique par sujets (2010). — 11G10.
Mots clefs. — Abelian varieties, Tate's conjecture, Selmer groups.
Crédits. — Ce travail a été partiellement soutenu par la bourse de recherche CNPq 306045/2013-3.

théorème de Lang-Néron dit que le groupe $\mathrm{LN}(A, K/k) = A(K)/(\mathrm{Tr}_{K/k} A)(k)$ est un groupe abélien de type fini, dont le rang est noté $\mathrm{rg}\,\mathrm{LN}(A, K/k)$.
Si nous considérons aussi une extension L de K telle que k soit encore algébriquement clos dans L, alors on note $\mathrm{Tr}_{L/k} A$ la L/k-trace de A. On se demande également, pour une extension infinie galoisienne L de K, si le groupe $\mathrm{LN}(A, L/k)$ reste de type fini. Cette question, telle que décrite ci-dessus peut ne pas être abordable. Fixons un premier ℓ différent de la caractéristique de k. Si le groupe de Galois $G(L/K)$ de L/K est un pro-ℓ groupe de Lie ℓ-adique de dimension finie sans éléments de ℓ-torsion non triviaux, on peut donner (pour certains groupes) des conditions suffisantes pour que $\mathrm{LN}(A, L/k)$ soit de type fini. On discute de ces conditions, ainsi que d'un exemple où elles sont vérifiées.

1.1. Notation. — Soit k_s une clôture séparable de k et X une variété algébrique propre et lisse sur k. Notons $X_{\text{ét}}$ le petit site étale de $X \times_k k_s$.

2. La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer

2.1. Le rang analytique. — Soit K_s une clôture séparable d'un corps global K (ou $\bar{K}$ une clôture algébrique, si K est un corps de nombres). Pour toute place v de K, soit D_v un sous-groupe de décomposition associé à v du groupe de Galois absolu $G(K_s/K)$ de K, $I_v \subset D_v$ son sous-groupe d'inertie et $F_v \in D_v$ un automorphisme de Frobenius. Notons κ_v le corps résiduel en v et q_v son cardinal.
La fonction L de Hasse-Weil $L(A/K, s)$ de A/K est définie par le produit

$$L(A/K, s) = \prod_v L_v(A/K, s),$$

où $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re s > 3/2$ et

$$L_v(A/K, s) = \det(1 - F_v\, q_v^{-s} \,|\, H^1(A_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_\ell)^{I_v})^{-1}$$

est le facteur local de $L(A/K, s)$ en v. Une première conjecture à propos de cette fonction prédit son prolongement analytique. Dans le cas d'un corps de fonctions, une conséquence de la formule du trace de Grothendieck-Lefschetz est que cette fonction est rationnelle en q^{-s} (cf. [Ba92] et [SGA 4 1/2]).
Nous rappelons une célèbre conjecture.

***Conjecture 2.1* (Version faible de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer).** —

$$\mathrm{ord}_{s=1} L(A/K, s) = \mathrm{rg}\, A(K).$$

2.2. La valeur spéciale. — Le but de cette sous-section vise à exprimer la valeur spéciale de la fonction $L(A/K, s)$ en $s = 1$ en termes de diverses données.

2.2.1. *Le régulateur.* — Soit $A^\vee = \mathrm{Pic}^0 A$ la variété de Picard de A, $\wp$ le fibré de Poincaré sur $A \times A^\vee$ et $\hat{h}_\wp$ la hauteur canonique de $A \times A^\vee$ associée à $\wp$. À partir de cette hauteur, on définit une forme bilinéaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : A(K) \times A^\vee(K) \to \mathbb{R} \text{ par } \langle P, P^\vee \rangle = \hat{h}_\wp(P, P^\vee).$$

L'objet suivant à définir est le régulateur $\mathrm{Reg}(A/K)$ de A/K. Soit $\{P_1, \cdots, P_r\}$ une base de $A(K)$ modulo la torsion. Soit aussi $\{P_1^\vee, \cdots, P_r^\vee\}$ une base de $A^\vee(K)$ modulo la torsion. Le régulateur est défini par la formule

$$\mathrm{Reg}(A/K) = |\det\langle P_i, P_j^\vee\rangle|.$$

2.2.2. *Le groupe de Tate-Shafarevich.* — Ensuite, on considère le groupe de Tate-Shafarevich de A/K. On présente sa définition cohomologique. Pour tout corps L, notons L_s une clôture séparable de L. Soit $G(L_s/L)$ son groupe de Galois absolu. Pour chaque $G(L_s/L)$-module M et pour tout entier $i \geq 0$, notons $H^i(L, M) = H^i(G(L_s/L), M)$. Pour toute place v de K, notons $K_{v,s}$ une clôture séparable du complété K_v de K en v. Le sous-groupe de décomposition $D_v \subset G(K_s/K)$ s'identifie au groupe de Galois absolu $G(K_{v,s}/K_v)$. De plus, l'inclusion précédente permet de définir un homomorphisme de groupes $H^i(K, A(K_s)) \to H^i(K_v, A(K_{v,s}))$. Le groupe

$$Ш(A/K) = \ker(H^1(K, A(K_s)) \to \prod_v H^1(K_v, A(K_{v,s})))$$

est appelé groupe de Tate-Shafarevich de A/K. Une des conjectures centrales de l'arithmétique des variétés abéliennes prédit que ce groupe est fini.

2.2.3. *Le nombre de Tamagawa.* — Le quatrième nombre qui apparaît dans la valeur spéciale est le nombre de Tamagawa défini ainsi. Pour toute place v de K, le groupe des composantes de A en v est le groupe quotient $\Phi_{A,v} = \tilde{\mathcal{A}}_v/\tilde{\mathcal{A}}_v^0$. Notons $c_v(A/K) = \#\Phi_{A,v}(\kappa_v)$. Le nombre

$$\mathcal{T}(A/K) = \prod_v c_v(A/K)$$

est le nombre de Tamagawa de A/K.

2.2.4. *La hauteur différentielle.* — Soit $\mathcal{C}$ une courbe lisse, complète, géométriquement connexe définie sur k de corps de fonctions K. Soit $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ le modèle de Néron de A/K sur $\mathcal{C}$. Notons $e : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ sa section unité. Considérons le faisceau inversible $\omega_{A/K} = \wedge^d e^*\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}$, où $d = \dim A$. La hauteur différentielle de A/K est définie comme le degré $h_{\mathrm{dif}}(A/K) = \deg \omega_{A/K}$. Soit $q = \#k$, la hauteur différentielle exponentielle de A/K est définie par la formule $H(A/K) = q^{h_{\mathrm{dif}}(A/K)}$.

2.2.5. *Les périodes à l'infini.* — Soit K un corps de nombres et A/K une variété abélienne de dimension d. Notons $\phi : \mathcal{A} \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ le modèle de Néron de A/K. Soit $\omega_{A/K} = \wedge^d\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_K}$. L'espace $W_{\mathcal{A}} = \wedge^d H^0(\mathcal{A}, \omega_{A/K})$ est un $\mathcal{O}_K$-sous-module de $H^0(A, \Omega^d_{A/K})$. Notons $\{w_1, \cdots, w_d\}$ une base de ce dernier espace. Soit $\eta = \wedge_j w_j$.
Si v est une place à l'infini, complexe, de K, définissons

$$c_v(A, \eta) = \int_{A(\mathbb{C})} \sqrt{-1}\,\eta \wedge \bar{\eta}.$$

Si v est une place à l'infini, réelle, de K, associée à un plongement réel $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{R}$, définissons

$$c_v(A, \eta) = \int_{A_\sigma(\mathbb{R})} |\eta|.$$

Observons que $W_{\mathcal{A}} = \eta\mathfrak{a}_\eta$, où $\mathfrak{a}_\eta$ est un idéal fractionnaire dans K. Soit $\mathfrak{d}_K$ la valeur absolue du discriminant de K sur $\mathbb{Q}$. Notons M_K^∞ l'ensemble de places de K à l'infini. Soit

$$C_{A,\infty} = \prod_{v\in M_K^\infty} c_v(A,\eta)\,\frac{N\mathfrak{a}_\eta}{\mathfrak{d}_K^{d/2}},$$

où N note la norme de K sur $\mathbb{Q}$.
Finalement, la deuxième conjecture permet de produire une expression pour la valeur spéciale de la façon suivante.

Conjecture 2.2 **(Version forte de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer).** — *Le groupe* $\text{Ш}(A/K)$ *est fini.*
Supposons d'abord que K *soit un corps de fonctions en une variable sur un corps fini. Dans ce cas, on conjecture l'égalité suivante :*

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^{-r}\cdot L(A/K,s) = \frac{\#\text{Ш}(A/K)\cdot \operatorname{Reg}(A/K)\cdot \mathcal{T}(A/K)}{\#A(K)_{\mathrm{tor}}\cdot \#A^\vee(K)_{\mathrm{tor}}\cdot H(A/K)\cdot q^{d(g-1)}}.$$

Maintenant, soit K *un corps de nombres, on conjecture l'égalité suivante :*

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^{-r}\cdot L(A/K,s) = \frac{\#\text{Ш}(A/K)\cdot \operatorname{Reg}(A/K)\cdot \mathcal{T}_{A/K}\cdot C_{A,\infty}}{\#A(K)_{\mathrm{tor}}\cdot \#A^\vee(K)_{\mathrm{tor}}}.$$

Dans le cas où K est un corps de fonctions, Tate a étudié cette situation, appelée analogue géométrique. En particulier, dans le cas des courbes elliptiques, la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer est équivalente à une conjecture sur la valeur spéciale de la fonction L attachée au deuxième groupe de cohomologie étale de la surface elliptique dont la fibre générique est la courbe elliptique en considération. Cette conjecture est connue sous le nom de conjecture de Artin-Tate.

2.2.6. *État de l'art du cas géométrique de la conjecture.* — L'analogue géométrique de la conjecture est complètement prouvé dans le cas des variétés abéliennes constantes (Milne, [Mi68]) et aussi pour certaines courbes elliptiques (Ulmer, [Ul02]). Les premiers résultats généraux pour le cas non constant sont dus à Artin et Tate pour les courbes elliptiques, à l'exception de la p-partie, sous la condition de l'existence d'un nombre premier $\ell \neq p$ tel que la composante ℓ-primaire $\text{Ш}(A/K)\{\ell\}$ de $\text{Ш}(A/K)$ soit finie (cf. [Ta66]). Dans l'article en question et sous l'hypothèse précédente, Tate présente la stratégie qui sera développée dans les textes ultérieurs. Ce résultat a été étendu par Schneider pour les variétés abéliennes (cf. [Sc82]). Milne a aussi prouvé que le résultat reste valable sans restriction sur la p-partie lorsque $p > 2$ et sous des hypothèses mineures pour les variétés jacobiennes (cf. [Mi75] et [Mi81]). Ensuite, Bauer a prouvé le théorème dans le cas $\ell = p$ mais sous l'hypothèse additionnelle que A a partout bonne réduction (cf. [Ba92]). Finalement, Kato et Trihan ont prouvé le résultat en général, (cf. [KT03]), i.e., que la finitude de $\text{Ш}(A/K)\{\ell\}$ pour un premier $\ell \neq p$ est équivalente à la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer pour la valeur spéciale.

3. Borne supérieure pour le rang des variétés abéliennes

Soit k un corps de caractéristique $p \geq 0$, dont une clôture algébrique est notée $\bar{k}$. Soit K/k un corps de fonctions en une variable sur k de genre g et $\mathcal{K} = \bar{k}\cdot K$. Supposons donnée une variété abélienne A/K de dimension d dont la K/k-trace $\operatorname{Tr}_{K/k} A$ a dimension d_0.

Un des paramètres qui rentre en jeu dans la formule de la borne supérieure pour le rang, est le conducteur de la variété abélienne. Pour simplifier, nous supposerons que $p = 0$ ou que $p > 2d + 1$. Sous la dernière hypothèse, dans le cas où K est un corps de fonctions de caractéristique p, l'extension $K(A[\ell])/K$ est modérément ramifiée, où $\ell \neq p$ est un premier et où $A[\ell]$ est le sous-groupe de A des points de ℓ-torsion (voir [SeTa68]). Sous l'hypothèse que $p > 2d+1$, nous savons aussi que les invariants locaux de Swan (qui mesurent la ramification sauvage), sont tous nuls (voir [SGA 7]).
L'hypothèse précédente sur p nous permet de définir le conducteur de A/K de la façon suivante. Soit $T_\ell(A)$ le module de Tate ℓ-adique de A et $V_\ell(A) = T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$. Pour toute place v de K, la multiplicité du conducteur de A/K en v est donnée par

$$\epsilon_v = \operatorname{codim} V_\ell(A)^{I_v}.$$

Le conducteur de A/K est le diviseur

$$\mathfrak{F}_{A/K} = \sum_v \epsilon_v \cdot [v] \in \operatorname{Div} \mathcal{C} \text{ et nous notons } f_{A/K} = \deg \mathfrak{F}_{A/K}.$$

Un résultat dû à Ogg [Og62], qui peut être retrouvé avec un calcul des caractéristiques d'Euler des faisceaux étales (cf. [Ray68, théorème 3]), nous donne la borne suivante :

$$\operatorname{rg} \operatorname{LN}(A, \mathcal{K}/\bar{k}) \leq 2d \cdot (2g-2) + f_{A/K} + 4d_0.$$

La borne précédente reste une borne supérieure pour le rang du groupe $\operatorname{LN}(A, K/k)$.
Soit $\mathcal{C}$ une courbe lisse, propre, géométriquement connexe définie sur k de corps de fonctions K. La question que l'on se pose ensuite est comment varie cette borne si l'on considère un morphisme fini $\pi : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$? Évidemment, il y a une borne avec les paramètres de $\mathcal{C}'$, mais on souhaiterait plutôt obtenir une meilleure majoration en utilisant la borne provenant des paramètres de la courbe $\mathcal{C}$.

3.1. Les conjectures de Tate et les rangs des variétés abéliennes. —

3.1.1. *Cycles algébriques.* — Dans ce paragraphe, k est un corps de nombres. Pour toute variété lisse, propre et géométriquement connexe X/k, notons $X_{\text{ét}}$ le petit site étale de $X \times_k \bar{k}$. Soit $d = \dim X$. Fixons un nombre premier, ℓ, et considérons les groupes de cohomologie étale, $H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_\ell)$, ainsi que ses tordues de Tate $H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_\ell(1)^{\otimes n}) = H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_\ell)(n)$, pour un entier positif n. Notons ces groupes $H^i_\ell(X)$ et $H^i_\ell(X)(n)$, respectivement.
Nous avons un isomorphisme “d'orientation”

$$\rho_X : H^{2d}_\ell(X)(d) \to \mathbb{Q}_\ell$$

ainsi qu'une application bilinéaire, le cup produit, définie par l'accouplement de Poincaré :

$$H^i_\ell(X)(m) \otimes H^{2d-i}_\ell(X)(d-m) \to H^{2d}_\ell(X)(d) \cong \mathbb{Q}_\ell.$$

Pour toute sous-variété V de X de codimension i, nous associons à V une classe de cohomologie $c_\ell(V) \in H^{2i}_\ell(X)(i)$ qui est caractérisée par la propriété suivante :

$$\rho_X(\eta \cup c_\ell(V)) = \rho_V(\eta_{|V}),$$

pour toute $\eta \in H^{2(d-i)}_\ell(X)(d-i)$.

Soit $Z^i(X) = Z^i(Z_{\bar{k}})$ le groupe des cycles algébriques de codimension i de X, i.e., le groupe engendré par les sous-variétés de codimension i. La notion de classe ℓ-adique est définie par linéarité à partir de celle des variétés, i.e., on a un homomorphisme de groupes

$$c_\ell : Z^i(X) \to H^{2i}_\ell(X)(i).$$

Cet homomorphisme vérifie la condition de compatibilité :

$$c_\ell(X \cdot Y) = c_\ell(X) \cup c_\ell(Y),$$

où la fonction "$\cdot$" à gauche désigne l'intersection des cycles algébriques.
Notons $Z^i_h(X)$ le noyau de c_ℓ (on dit que ce sont les cycles homologiquement équivalents à zéro) et soit $\mathfrak{Z}^i(X) = Z^i(X)/Z^i_h(X)$. On conjecture les propriétés suivantes :

— $Z^i_h(X)$ ne dépend pas de ℓ. Cet ensemble est constitué des cycles numériquement équivalents à zéro ;
— $\mathfrak{Z}^i(X)$ est un groupe abélien de type fini ;
— l'application $c_\ell \otimes 1 : \mathfrak{Z}^i(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to H^{2i}_\ell(X)(i)$ est injective.

Sous la validité de la première et troisième affirmation précédente, lorsque toute sous-variété V de X est définie sur une extension finie de k alors il en est de même pour sa classe ℓ-adique $c_\ell(X)$. La première partie des conjectures de Tate prédit que l'inclusion réciproque est vraie.

***Conjecture 3.1* (Tate).** — *L'ensemble $c_\ell(\mathfrak{Z}^i(X)) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est constitué par les éléments de $H^{2i}_\ell(X)(i)$ dont le stabilisateur est ouvert dans $G_k = G(\bar{k}/k)$.*

Observation 3.2. — Notons $\mathfrak{Z}^i(X/k)$ le sous-groupe des éléments de $\mathfrak{Z}^i(X)$ qui sont définis sur k. Tout élément de $\mathfrak{Z}^i(X)$ qui est fixé par G_k possède un multiple entier qui appartient à $\mathfrak{Z}^i(X/k)$. En conséquence, la conjecture implique l'égalité qui suit :

$$c_\ell(\mathfrak{Z}^i(X)) \otimes \mathbb{Q}_\ell = H^{2i}_\ell(X)(i)^{G_k}.$$

3.1.2. *Fonctions L.* — Soit $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_k$, notons $I_\mathfrak{p}$ un groupe d'inertie associé à $\mathfrak{p}$ et $F_\mathfrak{p}$ un élément de Frobenius. Soit $q_\mathfrak{p}$ le cardinal du corps résiduel $\kappa_\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{p}$. Pour tout $0 \leq i \leq d$, soit

$$L_i(X/k, s) = \prod_\mathfrak{p} \det(1 - q_\mathfrak{p}^{-s} \cdot F_\mathfrak{p} \mid H^i_\ell(X)^{I_\mathfrak{p}})^{-1}$$

la i-ème fonction L. La deuxième conjecture de Tate (analytique) se formule de la manière suivante.

***Conjecture 3.3* (Tate analytique).** —

$$\operatorname{rg} \mathfrak{Z}^i(X/k) = -\operatorname{ord}_{s=i} L_{2i}(X/k, s).$$

3.1.3. *Cas connus de la conjecture de Tate.* Les conjectures de Tate restent mystérieuses même dans le cas des diviseurs ($i = 1$). Une version ℓ-adique du théorème d'hyperplan de Lefschetz [De74] ramène la conjecture à cette situation dans le cas des surfaces, cependant même dans ce cadre, seulement des résultats particuliers sont connus (cf. [Ram89]).

Observation 3.4. — La première conjecture de Tate est connue dans les cas suivants :

— variétés abéliennes ;
— surfaces K3 en caractéristique zéro, surfaces K3 sur $\mathbb{F}_q$ qui sont ordinaires ou de hauteur finie ;

— surfaces modulaires elliptiques en caractéristique zéro et quelques-unes d'entre elles sur $\mathbb{F}_q$;
— certaines variétés de type Fermat ;
— surfaces modulaires de Hilbert, surfaces modulaires de Picard ;
— surfaces de Shimura attachées à une algèbre de quaternions sur un corps quadratique réel qui est totalement indéfinie.

Observation 3.5. — La conjecture de Tate analytique est connue dans les cas suivants :
— variétés abéliennes à multiplication complexe ;
— variété jacobienne d'une courbe modulaire ou d'une courbe de Shimura ;
— produit de deux courbes modulaires ou de deux courbes de Shimura ;
— variété de type Fermat, surfaces de Shimura attachées à une algèbre de quaternions sur un corps quadratique réel qui est totalement indéfinie ;
— surfaces modulaires de Hilbert ;
— produit de trois courbes modulaires et variétés modulaires de Hilbert de dimension trois.

3.2. De conjectures de Tate au rangs des variétés abéliennes. — Les conjectures de Tate peuvent être employées pour obtenir des bornes supérieures pour le rang du groupe de Lang-Néron des variétés abéliennes après changement de base. Commençons d'abord par décrire le cadre géométrique où on se situe. Soit k un corps de nombres, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ des variétés lisses, projectives, géométriquement connexes définies sur k, de dimensions $n \geq m$, respectivement, munies d'un morphisme propre et plat $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, lui aussi défini sur k. Pour presque tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_k$ de k, il existe un modèle entier $\phi_{\mathfrak{p}}$ de ϕ en $\mathfrak{p}$, i.e., défini sur l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. De plus, ce modèle admet une réduction $\tilde{\phi}_{\mathfrak{p}} : \tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}} \to \tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}$ définie sur le corps résiduel $\kappa_{\mathfrak{p}}$ en $\mathfrak{p}$ et les deux variétés $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}}$ et $\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}$ sont lisses. Notons $q_{\mathfrak{p}}$ le cardinal de $\kappa_{\mathfrak{p}}$ et $F_{\mathfrak{p}}$ l'automorphisme de Frobenius correspondant. Pour tout $y \in \tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}(\kappa_{\mathfrak{p}})$, soit $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}$ la fibre de $\tilde{\phi}_{\mathfrak{p}}$ en y. On définit la trace $a_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y})$ de $F_{\mathfrak{p}}$ sur $H^1_\ell(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y})$. La trace moyenne de Frobenius est définie par la formule

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}) = \frac{1}{q_{\mathfrak{p}}^m} \sum_{y \in \tilde{\mathcal{Y}}_{\mathfrak{p}}(\kappa_{\mathfrak{p}})} a_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y}).$$

Soit X la fibre générique de ϕ définie sur $K = k(\mathcal{Y})$. C'est une variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit B la K/k-trace de la variété de Picard $\mathcal{P} = \mathrm{Pic}^0(X)$ de X. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_k$, soit $Fr_{\mathfrak{p}}$ un élément de Frobenius et $I_{\mathfrak{p}}$ un groupe d'inertie en $\mathfrak{p}$. Notons $a_{\mathfrak{p}}(B)$ la trace de $Fr_{\mathfrak{p}}$ sur $H^1_\ell(B)^{I_{\mathfrak{p}}}$. Notons aussi

$$\mathfrak{A}^*_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}) = \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}) - a_{\mathfrak{p}}(B).$$

De façon similaire, on note $b_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y})$ la trace de $F_{\mathfrak{p}}$ sur $H^2_\ell(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},y})$ et $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})$ la trace moyenne définie comme avant par rapport à H^2_ℓ.

Soit $\mathrm{NS}(X)$ le groupe de Néron-Severi de X et $\mathrm{NS}(X/K)$ le sous-groupe de $\mathrm{NS}(X)$ formé par les classes définies sur K. Considérons l'égalité suivante :

$$\mathrm{Res}_{s=1}\left(\sum_{\mathfrak{p}\notin S} -\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}^{*}(\mathcal{X})\cdot\frac{\log q_{\mathfrak{p}}}{q_{\mathfrak{p}}^{s}}\right)+\mathrm{Res}_{s=1}\left(\sum_{\mathfrak{p}\notin S}\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}^{*}(\mathcal{X})\cdot\frac{\log q_{\mathfrak{p}}}{q_{\mathfrak{p}}^{s+1}}\right) = \mathrm{rg}\,\mathrm{LN}(\mathcal{P},K/k)+\mathrm{rg}\,\mathrm{NS}(X/K). \tag{3.1}$$

Théorème 3.6. — [HiPaWa05, théorème 1.4] *Deux des affirmatives suivantes impliquent la troisième :*
- *Les conjectures de Tate pour la variété $\mathcal{X}$.*
- *Les conjectures de Tate pour la variété $\mathcal{Y}$.*
- *L'égalité (3.1).*

3.2.1. *Représentations de monodromie.* — Soit Z une variété lisse et géométriquement connexe définie sur un corps k (dans cette sous-section, supposé quelconque) de dimension d. Soit $Z_{\bar{k}} = Z\times_k \bar{k}$ et $\bar{\eta}$ un point générique géométrique de Z. Le groupe fondamental géométrique $\pi_1^{\text{géom}}(Z) = \pi_1(Z_{\bar{k}},\bar{\eta})$ est la limite inverse des groupes de Galois de revêtements galoisiens, étales finis de Z. Notons $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie sur le site étale $Z_{\text{ét}}$ de $Z_{\bar{k}}$. À $\mathscr{F}$, on associe une représentation linéaire (dite de monodromie) donnée par $\rho:\pi_1^{\text{géom}}(Z)\to \mathrm{GL}(\mathscr{F}_{\bar{\eta}})$.
Pour tout $0\leq i\leq 2d$, on considère aussi les groupes de cohomologie à support compact $H_c^i(Z_{\bar{k}},\mathscr{F})$. Ce sont des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimensions finies. Comme dans le cas de la cohomologie étale, on peut définir des faisceaux tordus à la Tate et les groupes de cohomologie satisfont la propriété $H_c^i(Z_{\bar{k}},\mathscr{F}(n)) = H_c^i(Z_{\bar{k}},\mathscr{F})(n)$ pour tout entier $n\geq 1$. De plus, si on note $\mathscr{F}_{\pi_1^{\text{géom}}(Z)}$ le faisceau quotient de $\mathscr{F}$ coinvariant par rapport à $\pi_1^{\text{géom}}(Z)$, on a l'égalité

$$H_c^{2d}(Z_{\bar{k}},\mathscr{F})\cong(\mathscr{F}_{\pi_1^{\text{géom}}(Z)})(-d).$$

On suppose maintenant que k est un corps fini et nous notons E une extension finie de k. Soit F_k le Frobenius arithmétique associé à k et F_E celui associé à E. La formule de Grothendieck-Lefschetz est décrite par l'équation :

$$\sum_{z\in Z(E)}\mathrm{Tr}(F_E\,|\,\mathscr{F}_z) = \sum_{i=0}^{2d}(-1)^i\cdot\mathrm{Tr}(F_k^{[E:k]}\,|\,H_c^i(Z_{\bar{k}},\mathscr{F}). \tag{3.2}$$

Supposons maintenant que $\mathscr{F}$ soit de poids pur zéro, i.e., les valeurs propres de F_k agissant sur les fibres $\mathscr{F}_z$ (pour $z\in Z(E)$) sont des racines de l'unité. Si on fait l'hypothèse additionnelle que ρ soit irréductible, en particulier, on en conclut que le quotient coinvariant de $\mathscr{F}$ est trivial. Dans cette situation, $H_c^{2d}(Z_{\bar{k}},\mathscr{F})=0$ et sous ces hypothèses la formule (3.2) nous donne l'inégalité :

$$\left|\sum_{z\in Z(E)}\mathrm{Tr}(F_E\,|\,\mathscr{F}_z)\right|\leq\left(\sum_{0\leq i<2d}h_c^i(Z,\mathscr{F})\right)\cdot(\#E)^{(2d-1)/2},$$

où $h_c^i(Z,\mathscr{F}) = \dim H_c^i(Z_{\bar{k}},\mathscr{F})$.

3.2.2. *Bornes supérieures pour les traces moyennes de Frobenius.* — On retourne au cas d'une variété abélienne A de dimension d définie sur un corps de fonctions K en une variable sur un corps fini k. Si on emploie juste les inégalités pour les valeurs absolues de Frobenius provenant du théorème de Deligne [De74], on arriverait seulement aux estimations [1] :

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{A}) = O(q_{\mathfrak{p}}^{1/2}) \quad \text{and} \quad \mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{A}) = O(q_{\mathfrak{p}}).$$

Pour améliorer cela, on considère la sous-courbe affine $\mathcal{U}$ de $\mathcal{C}$ où A a partout bonne réduction. La restriction du modèle de Néron $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ à $\mathcal{U}$ nous donne un schéma abélien $\phi' : \mathcal{A}' \to \mathcal{U}$. Pour presque tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_k$, la réduction $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{U}$ modulo $\mathfrak{p}$ est une courbe lisse. Notons $\mathscr{F}_a = R^1\phi'_*\mathbb{Q}_\ell$ et $\mathscr{F}_b = R^2\phi'_*\mathbb{Q}_\ell$. Sous l'hypothèse que les représentations de monodromie associées à ces faisceaux sont irréductibles on obtient les inégalités suivantes :

$$|\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{A})| \leq 2d(2g-2) + f_{A/K} + O(q_{\mathfrak{p}}^{1/2}) \quad \text{et}$$

$$|\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{A})| \leq (d(2d-1)(2g-2) + (2d-1)f_{A/K})q_{\mathfrak{p}}^{1/2} + O(1).$$

3.2.3. *Changement de base abélien.* — Comme déjà précisé avant, on s'intéresse à comment améliorer la formule de Raynaud et Ogg après un changement abélien de base. Plus précisément, soit $\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ un revêtement abélien, fini de courbes de groupe d'automorphismes géométriques $\mathcal{G}$ et $K' = k(\mathcal{C}')$. En prenant un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_k$ assez générique, on arrive à un revêtement abélien $\tilde{\mathcal{C}}'_{\mathfrak{p}} \to \tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{p}}$ des courbes lisses définies sur $\kappa_{\mathfrak{p}}$ avec groupe d'automorphismes géométriques $\mathbb{G}_{\mathfrak{p}}$. Cela nous permet de déduire les inégalités suivantes.

Lemme 3.7. —

$$|\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{A}')| \leq \frac{\#\mathbb{G}_{\mathfrak{p}}}{\#\mathcal{G}} \cdot (2d \cdot (2g'-2)) + \#\mathbb{G}_{\mathfrak{p}} \cdot f_{A/K} + O(q_{\mathfrak{p}}^{1/2}) \quad \textit{et}$$

$$|\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{A}')| \leq q_{\mathfrak{p}}^{1/2} \cdot \left(\frac{\#\mathbb{G}_{\mathfrak{p}}}{\#\mathcal{G}} \cdot d \cdot (2d-1) \cdot (2g'-2) + \#\mathbb{G}_{\mathfrak{p}} \cdot (2d-1) \cdot f_{A/K}\right) + O(1).$$

Le groupe de Galois absolu G_k de k agit sur $\mathcal{G}$, on note $\mathfrak{O}_{G_k}(\mathcal{G})$ l'ensemble des orbites associées à cette action. Dans [Pa05], on prouve le résultat suivant.

Théorème 3.8. — *Soit $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}'$. Supposons que les deux conjectures de Tate soient satisfaites pour $\mathcal{A}'/k$ et de plus que les représentations de monodromie définies par $\mathscr{F}_a$ et $\mathscr{F}_b$ soient irréductibles. Alors on a l'inégalité*

$$\operatorname{rg} \operatorname{LN}(A, K'/k) \leq \frac{\#\mathfrak{O}_{G_k}(\mathcal{G})}{\#\mathcal{G}} \cdot (d \cdot (2d+1) \cdot (2g'-2))) + \#\mathfrak{O}_{G_k}(\mathcal{G}) \cdot 2d \cdot f_{A/K}.$$

Observation 3.9. — Dans [Pa05], on a aussi discuté le comportement asymptotique du rang $\operatorname{rg}\operatorname{LN}(A, K_n/k)$, où K_n est le corps de fonctions de la courbe $\mathcal{C}_n$ définie comme image inverse de $\mathcal{C}$ par l'application de multiplication par $n \geq 1$ de la variété jacobienne $J_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$. Cela repose sur la conjecture de Mumford-Tate dont on discutera ultérieurement. Le type de résultat qu'on obtient est le suivant. Pour tout $n \geq 1$ assez grand,

$$\operatorname{rg}\operatorname{LN}(A, K_n/K) \leq f_{A/K_n}^{\kappa/\log\log f_{A/K_n}},$$

où κ est une constante qui dépend seulement de k, $J_{\mathcal{C}}$ et de A.

1. Comme d'habitude on note $f = O(g)$ pour dire qu'il existe $c > 0$ telle que $|f| \leq c \cdot g$.

4. Groupes de Selmer et théorèmes de contrôle

4.1. Descente ℓ-adique. — Dans cette section k est un corps quelconque et on note k_s une clôture séparable de k. Maintenons les notations $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ la sous-courbe affine où A a partout bonne réduction et $\mathcal{K} = k_s(\mathcal{C})$. On considère le groupe fondamental modéré $\pi_1^t(\mathcal{U}_{k_s}, \bar{\eta})$ de $\mathcal{U}$. Il est isomorphe au groupe de Galois de l'extension galoisienne maximale $\mathcal{K}_t$ de $\mathcal{K}$ qui est non ramifiée sur les points de $\mathcal{U}$ et modérément ramifiée sur les points de $\mathcal{C} \setminus \mathcal{U}$. Fixons un nombre premier $\ell \neq p = \operatorname{car} k$ (si positive) et un entier $n \geq 1$. La ℓ^n-descente est l'application :

$$\delta_{\ell^n}^t : \frac{\mathrm{LN}(A, \mathcal{K}_t/k_s)}{\ell^n \cdot \mathrm{LN}(A, \mathcal{K}_t/k_s)} \to H^1(\pi_1^t(\mathcal{U}_{k_s}, \bar{\eta}), \mathrm{LN}(A, \mathcal{K}_t/k_s)[\ell^n]).$$

Cette application est déduite de la suite exacte

$$0 \to A[\ell^n] \to A(\mathcal{K}_t) \xrightarrow{\times \ell^n} A(\mathcal{K}_t) \to 0$$

par moyen de la suite longue de cohomologie associée. En passant à la limite directe on obtient l'application de descente modérée ℓ-adique

$$\delta_{\ell^\infty}^t : \mathrm{LN}(A, \mathcal{K}_t/k_s) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^1(\pi_1^t(\mathcal{U}_{k_s}, \bar{\eta}), \mathrm{LN}(A, \mathcal{K}_t/k_s)[\ell^\infty]).$$

4.2. Groupes de Selmer. — Soit $\jmath : \bar{\eta} \hookrightarrow \mathcal{C}_{k_s}$ l'application d'inclusion. Pour tout faisceau discret, ℓ-adique F sur $\bar{\eta}$, soit $\mathscr{F} = \jmath_* F$. On définit le groupe de Selmer comme $S(\mathcal{C}, F) = H^1_{\text{ét}}(\mathcal{C}_{k_s}, \mathscr{F})$.
On peut récupérer à partir de [Mi80, III.1.25, V.2.17] la définition classique de la façon suivante. Pour tout $v \in \mathcal{C}_{k_s}$, soit $\mathcal{K}_v$ la complétion de $\mathcal{K}$ en v et $\mathcal{K}_{v,s}$ une clôture séparable de $\mathcal{K}_v$. Soit $\mathcal{K}_{v,t}$ la plus grande sous-extension galoisienne de $\mathcal{K}_{v,s}/\mathcal{K}_v$ qui est modérément ramifiée sur $\mathcal{K}_v$. Dans ce cadre, on a l'égalité :

$$S(\mathcal{C}, F) = \ker \left(H^1(\pi_1^t(\mathcal{U}_{k_s}, \eta), F) \to \bigoplus_{v \in \mathcal{C}_{k_s} \setminus \mathcal{U}_{k_s}} H^1(\mathrm{Gal}(\mathcal{K}_{v,t}/\mathcal{K}_v), F) \right).$$

Lorsque $\ell \neq \operatorname{car} k$, il suit de [CoGr96, p.149-150] que $\delta_{\ell^\infty}^t$ a une image triviale, donc on retrouve la définition classique.
Pour tout $\mathbb{Z}_\ell$-module M, notons $M^\vee = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$. Si $M^\vee$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini, son rang est dit le corang de M. Soit A/K une variété abélienne de dimension d, dont la K/k-trace a dimension d_0. Notons $F_{\ell^\infty} = \mathrm{LN}(A, \mathcal{K}/k_s)[\ell^\infty]$. Le groupe de Selmer $S(\mathcal{C}, F_{\ell^\infty})$ a un $\mathbb{Z}_\ell$-corang égal à

$$(2d - 2d_0) \cdot (2g - 2) + f_{A/K}.$$

L'approche de groupes de Selmer nous permet d'améliorer la borne supérieure du théorème 3.8 (cf. [Pa09, Theorem 3.10]), et en plus, d'enlever les hypothèses sur la validité de la conjecture de Tate ainsi que l'irréductibilité des représentations de monodromie. On arrive à l'inégalité suivante.

Théorème 4.1. — [Pa09, Theorem 3.10]

$$\operatorname{rg} \mathrm{LN}(A, K'/k) \leq \frac{\#\mathfrak{O}_{G_k}(\mathcal{G})}{\#\mathcal{G}} \cdot ((2d - 2d_0) \cdot (2g - 2) + f_{A/K}). \tag{4.1}$$

4.3. Tours de corps de fonctions. — Une tour de corps de fonctions est une suite d'applications $\mathcal{T} : \cdots \to \mathcal{C}_n \to \cdots \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ telle que pour tout entier $n \geq 1$, l'application $\mathcal{C}_n \to \mathcal{C}$ soit finie, galoisienne et étale. Notons $\mathcal{G}_n$ le groupe de Galois géométrique de ce revêtement. Le groupe de Galois de la tour $\mathcal{T}$ est défini par $\mathcal{G}_\infty = \varprojlim_n \mathcal{G}_n$.
Pour tout $n \geq 1$, soit $\mathcal{K}_n = k_s(\mathcal{C}_n)$ et $\mathcal{K}_\infty = \bigcup_n \mathcal{K}_n$. On définit la $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}_\infty/k_s}$-trace de A comme $\varinjlim_n \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}_n/k_s} A$. La question qu'on se pose est la suivante : le groupe $\mathrm{LN}(A, \mathcal{K}_\infty/k_s) = A(\mathcal{K}_\infty)/(\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}_\infty/k_s} A)(k_s)$ est-il de type fini ?
Pour tout $n \geq 1$, soit $F_{n,\ell^\infty} = \mathrm{LN}(A, \mathcal{K}_n/k_s)[\ell^\infty]$, $F_{\infty,\ell^\infty} = \varinjlim_n F_{n,\ell^\infty}$ et $S(\mathcal{C}_\infty, F_{\infty,\ell^\infty}) = \varprojlim_n S(\mathcal{C}_n, F_{n,\ell^\infty})$. Ce groupe est un groupe discret, ℓ-primaire muni d'une action continue de $\mathcal{G}_\infty$. Cette action s'étend à une action de l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda(\mathcal{G}_\infty) = \varprojlim_{\mathcal{H}} \mathbb{Z}_\ell[\mathcal{G}_\infty/\mathcal{H}]$, où $\mathcal{H}$ parcourt les sous-groupes normaux d'indice fini de $\mathcal{G}_\infty$.

Hypothèse 4.2. — Le groupe $\mathcal{G}_\infty$ est un pro-ℓ-groupe de Lie ℓ-adique de dimension finie sans élément de ℓ-torsion non trivial.

Cette hypothèse implique que $\Lambda(\mathcal{G}_\infty)$ est une algèbre noethérienne à gauche, ainsi qu'à droite, sans diviseur de zéro non-triviaux. De plus, si M est un $\Lambda(\mathcal{G}_\infty)$-module tel que pour tout entier $i \geq 0$, $H^i(M, \mathcal{G}_\infty)$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type cofini, il suit de [Ho02] qu'on peut définir

$$\mathrm{corg}_{\Lambda(\mathcal{G}_\infty)} M = \sum_i (-1)^i \cdot \mathrm{corg}_{\mathbb{Z}_\ell} H^i(M, \mathcal{G}_\infty).$$

Une conséquence des résultats précédentes est l'égalité suivante.

Corollaire 4.3. — [Pa09, Lemma 4.1]

$$\mathrm{corg}_{\Lambda(\mathcal{G}_\infty)} S(\mathcal{C}_\infty, F_{\infty,\ell^\infty}) = (2d - 2d_0) \cdot (2g - 2) + f_{A/K}.$$

Hypothèse 4.4. — $\mathcal{G}_\infty = \mathbb{Z}_\ell$.

Soit $\mathcal{H}$ le sous-groupe normal de $\pi_1^t(\mathcal{U}_{k_s}, \bar{\eta})/\mathcal{H} \cong \mathcal{G}_\infty$. On a prouvé dans [Pa09, Proposiiton 4.2] que si k est de type fini sur son corps premier alors $F_{\ell^\infty}^{\mathcal{H}}$ est fini. Soit k_∞ l'extension algébrique minimale de k dont le groupe d'automorphismes agit trivialement sur $\mathcal{G}_\infty$.

Proposition 4.5. — [Pa09, Proposition 4.3] *Supposons que la caractéristique de k soit zéro ou plus grande que $2d + 1$. Supposons de plus que k soit de type fini sur son corps premier. Faisons l'hypothèse que $\ell > (2d - 2d_0) \cdot (2g - 2) + f_{A/K}$ soit un nombre premier différent de la caractéristique de k. Alors il existe une extension L de k_∞ telle que*
- *$G(k_s/L)$ agit trivialement sur $\mathrm{LN}(A, \mathcal{K}_n/k_s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ pour tout $n \geq 1$;*
- *L est une extension abélienne d'une pro-ℓ extension de k_∞.*

Le théorème de contrôle envisagé est le résultat suivant.

Théorème 4.6. — [Pa09, Theorem 4.4] *Sous les hypothèses précédentes, on suppose de plus que*

(†) pour toute extension L de k qui est une pro-ℓ extension abélienne d'une extension finie de k_∞, aucun sous-groupe divisible de $S(\mathcal{C}, F_{\ell^\infty})$ est fixé par $G(k_s/L)$.

Alors $\mathrm{LN}(A, \mathcal{K}_\infty/k_s)$ est un groupe abélien de type fini.

5. Familles de surfaces

La question qui se pose est l'existence des exemples où l'hypothèse (†) du théorème 4.6 est vérifiée. Une manière d'approcher cela, est de traiter une fibration jacobienne associée à une fibration en courbes au lieu de traiter une fibration abélienne.

Soit $\mathcal{X}$, respectivement $\mathcal{C}$, une surface, respectivement une courbe, projective, lisse définie sur un corps k. Nous supposons de plus qu'elles sont géométriquement connexes. Soit $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ un morphisme propre et plat, lui aussi défini sur k. Notons X la fibre générique de ϕ, supposée aussi géométriquement irréductible, projective et lisse, définie sur $K = k(\mathcal{C})$ et de genre d. La fibration jacobienne associée à ϕ est une fibration $\phi_J : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ de dimension relative d, dont presque toutes les fibres lisses coïncident avec les variétés jacobiennes des fibres lisses de ϕ et dont la fibre générique de ϕ_J est la variété jacobienne de ϕ. Supposons que $\mathrm{Tr}_{K/k} J = 0$.

Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k. Le groupe de cohomologie étale $H^2(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_\ell)$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type cofini, dont le corang $b_2(\mathcal{X}_{\text{ét}})$ est indépendant de ℓ. Ce groupe est équipé d'une forme quadratique $q_{\mathcal{X}}$ provenant du cup produit. Cette forme est compatible avec la forme qui définit l'intersection de diviseurs dans $\mathcal{X}$ par l'application de classe $cl_\ell : \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{k}}) \to H^2(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_\ell)(1)$. Soit F une fibre verticale lisse de ϕ et D_0 le diviseur horizontal dans $\mathcal{X}$ tel que $(D_0 \cdot X)$ engendre l'idéal $\{(D \cdot X) \,;\, D \in \mathrm{Div}\,\mathcal{X}\} \subset \mathbb{Z}$.

Soit Γ'_ℓ le sous-groupe du groupe d'automorphismes de $H^2(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_\ell)$ qui préservent la forme $q_{\mathcal{X}}$ et fixent les classes $[F]$ et $[D_0]$. Notons Γ_ℓ un sous-groupe d'indice fini de Γ'_ℓ. Supposons que $d \geq 2$, soit $h \in K \setminus k$ et pour tout entier $n \geq 1$ notons $K_n = K(h^{1/\ell^n})$. Notons aussi $\mathcal{K} = \bar{k}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}(h^{1/\ell^n})$.

Théorème 5.1. — [Pa09, Theorem 5.1] *Supposons que k soit un corps de nombres ainsi que les conditions suivantes :*

1. *l'image de $G(\bar{k}/k)$ dans $\mathrm{Aut}\, H^2(\mathcal{X}_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}_\ell)$ contient Γ_ℓ ;*
2. *d est impair ou égal à 2 ou 6 ;*
3. *pour presque tout $v \in \mathcal{C}$ on a $\mathrm{End}\,\mathcal{J}_v = \mathbb{Z}$;*
4. *$\ell > b_2(\mathcal{X}) - 2 + 2d \cdot \deg h$.*

Alors, le rang du groupe de Lang-Néron $J(\mathcal{K}_n)$ est uniformément borné quand $n \to \infty$.

Observation 5.2. — Les conditions du théorème 5.1 impliquent l'hypothèse du théorème 4.6 (voir op. cit.). Les points 2 et 3 impliquent la validité de la conjecture de Mumford-Tate, qu'on présentera dans la suite. Le point le plus difficile pour construire des exemples est le point 1. Il va exiger une famille de surfaces avec un gros deuxième groupe de monodromie géométrique.

5.1. Conjecture de Mumford-Tate. — Soit $\mathfrak{A}$ une variété abélienne définie sur un corps de nombres k de dimension d. Pour tout nombre premier ℓ, soit $T_\ell(\mathfrak{A})$ son module de Tate ℓ-adique et $V_\ell(\mathfrak{A}) = T_\ell(\mathfrak{A}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$. Toute polarisation de $\mathfrak{A}$ dote $V_\ell(\mathfrak{A})$ d'une forme bilinéaire alternée non-dégenerée qui de plus est invariante par l'action de $G(\bar{k}/k)$. Soit $\mathbf{G}_{\ell^\infty}$ la clôture de Zariski de l'image de la représentation galoisienne $\rho_{\ell^\infty} : G(\bar{k}/k) \to \mathrm{Aut}\, V_\ell(\mathfrak{A})$ dans le groupe algébrique $\mathbf{GSp}_{2d,\mathbb{Q}_\ell}$ de similitudes symplectiques. Soit $\mathbf{G}^0_{\ell^\infty}$ la composante neutre de $\mathbf{G}_{\ell^\infty}$.

Le groupe de Mumford-Tate $\mathrm{MT}(\mathfrak{A})$ de $\mathfrak{A}$ est défini comme suit. On fixe un plongement $k \hookrightarrow \mathbb{C}$. Soit $J : H^1(\mathfrak{A}, \mathbb{C}) \to H^1(\mathfrak{A}, \mathbb{C})$ une structure complexe, i.e., $J^2 = -I$. La donnée de J est équivalente à la donnée d'un homomorphisme de groupes algébriques $h : S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \to \mathrm{Aut}\, H^1(\mathfrak{A}, \mathbb{C})$ défini par $a + ib \mapsto aI + bJ$. Le groupe $\mathrm{MT}(\mathfrak{A})$ est le plus petit sous-groupe algébrique G de $\mathbf{GL}_{2d,\mathbb{Q}}$ tel que $h(S^1) \subset G(\mathbb{R})$. Notons $\mathrm{MT}(\mathfrak{A})_\ell = \mathrm{MT}(\mathfrak{A}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$.

***Conjecture 5.3* (La conjecture de Mumford-Tate).** —

$$\mathbf{G}_\ell^0 = \mathrm{MT}(\mathfrak{A})_\ell.$$

Cette conjecture a été prouvé par Serre [Se85, théorème 3] sous les hypothèses que $\mathrm{End}\, A = \mathbb{Z}$ et que d soit impair ou égal à 2 ou 6. Plus tard, Pink dans [Pi98, Theorem 5.4] a généralisé ce résultat en imposant des conditions numériques plus souples sur d. Il montre que les deux groupes sont égaux à $\mathbf{GSp}_{2d,\mathbb{Q}_\ell}$. En particulier, $\mathbf{G}_{\ell^\infty}$ est connexe. La conjecture de Mumford-Tate est connue pour les variétés abéliennes de dimension au plus 3 (voir [Pi98]).

5.2. Surfaces de Catanese-Ciliberto. — Il est difficile, en général, de procéder à la classification des surfaces lisses, projectives et de type général (i.e., de dimension de Kodaira égale à 2). Dans [Ly11] l'auteur considère des surfaces S satisfaisant de plus les contraintes suivantes :

- $p_g(S) = \dim H^0(S, \Omega_S^2) = 1$;
- $q(S) = \dim H^1(S, \mathcal{O}_S) = 1$;
- si K_S est le diviseur canonique de S, alors $K_S^2 = 3$;
- la variété d'Albanese $\mathrm{Alb}\, S$ est une courbe elliptique E et l'application d'Albanese $\alpha : S \to E$ a comme fibre générique une courbe de genre 3. La surface est dite admissible si de plus son modèle canonique est lisse, cela est équivalent à supposer K_S ample.

Ces surfaces ont été d'abord définies sur le corps de nombres complexes, mais elles ont les propriétés arithmétiques nécessaires pour les applications (cf. [CaCi93]). Ces surfaces sont appelées des surfaces de Catanese-Ciliberto, ou pour faire plus court des surfaces CC. Les auteurs ont montré que les modèles canoniques de toutes les surfaces complexes admissibles de type CC s'organisent en une famille lisse $\pi_{\mathbb{C}} : \mathfrak{X}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$, dont la base est une variété lisse, irréductible de dimension 5. Inversement, toute surface de type CC est isomorphe à une fibre de $\pi_{\mathbb{C}}$.

5.3. Structures de Hodge. — Fixons $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ et notons $\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathcal{S}(\mathbb{C}), \sigma)$ le groupe fondamental topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ par rapport à σ. La surface $\mathfrak{X}_\sigma$ possède deux courbes numériquement indépendantes : le diviseur canonique $K_{\mathfrak{X}_\sigma}$ et une fibre Albanese lisse $f_{\mathfrak{X}_\sigma}$.
Notons $\mathrm{cl} : \mathrm{NS}(\mathfrak{X}_\sigma) \to H^2(\mathfrak{X}_\sigma, \mathbb{Q})(1)$ l'application de classe de diviseurs. On peut montrer que les classes $\mathrm{cl}([K_{\mathfrak{X}_\sigma}])$ et $\mathrm{cl}([f_{\mathfrak{X}_\sigma}])$ proviennent des sections globales $[\mathbf{K}]$ et $[\mathbf{f}]$ du système locale $\mathbb{H} = R^2\pi_{\mathbb{C}*}\mathbb{Q}(1)$. Notons $\mathbb{V}$ la variation de structure de Hodge rationnelle polarisée définie par l'orthogonal du réseau $\langle[\mathbf{K}], [\mathbf{f}]\rangle$ dans $\mathbb{H}$ par rapport au cup produit. Notons ϕ_σ la polarisation de la fibre $\mathbb{V}_\sigma$ de $\mathbb{V}$ en σ. Soit $O(\mathbb{V}_\sigma, \phi_\sigma)$ le groupe orthogonal de $\mathbb{V}_\sigma$ par rapport à la polarisation ϕ_σ.

Théorème 5.4. — [Ly11, Theorem A] *L'image de l'application de monodromie*

$$\Lambda_\sigma : \pi_1^{\mathrm{top}}(\mathcal{S}(\mathbb{C}), \sigma) \to O(\mathbb{V}_\sigma, \phi_\sigma)$$

est dense pour la topologie de Zariski.

5.4. Version intégrale. — Soit $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}} = R^2\pi_{\mathbb{C}*}\mathbb{Z}(1)/\mathrm{tor}$ et $\mathbb{H} = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{H} \to R^4\pi_{\mathbb{C}*}(2) \cong \mathbb{Z}$. Les sections globales $[\mathbf{K}]$ et $[\mathbf{f}]$ proviennent des sections globales $[\mathbf{K}]_{\mathbb{Z}}$ et $[f_{\mathbb{Z}}]$ de $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}$. Soit $\mathbb{V}_{\mathbb{Z}}$ le complément orthogonal du réseau engendré par ses sections dans $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}$.
Supposons maintenant que k soit un corps de nombres plongé dans $\mathbb{C}$ et que X soit une surface de type CC définie sur k. Donc, son diviseur canonique K_X est encore défini sur k [BoZa09]. De plus, si on suppose que $\mathrm{Alb}(X)(k) \neq \emptyset$, la fibre Albanese f_X est aussi définie sur k.
Soient $\xi_1 = \mathrm{cl}([K_X]), \xi_2 = \mathrm{cl}([f_X]) \in H_{\mathbb{Z}} = H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})(1)/\mathrm{tor}$. Notons $V_{\mathbb{Z}}$ le complément orthogonal du réseau engendré dans $H_{\mathbb{Z}}$ par rapport au cup produit $\theta : H_{\mathbb{Z}} \otimes H_{\mathbb{Z}} \to H^4(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})(2) \cong \mathbb{Z}$. Si K_X est ample, nous disons que $(V_{\mathbb{Z}}, \theta)$ est une variation intégrale d'une structure de Hodge. Notons $V = V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$.
Il existe une famille projective lisse $\pi : \mathfrak{X} \to \mathcal{S}$ définie sur k et telle que $\mathcal{S}$ soit aussi définie sur k. De plus, les propriétés suivantes sont aussi satisfaites (cf. [Ly11, §5]) :

- il existe $s \in \mathcal{S}(k)$ tel que $X \cong_k \mathfrak{X}_s$;
- les éléments ξ_1, ξ_2 s'étendent en sections globales η_1, η_2 de $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}$. Soit $\sigma = s_{\mathbb{C}} \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$, alors $(V_{\mathbb{Z},\sigma}, \phi_\sigma) = (V_{\mathbb{Z}}, \theta)$;
- en identifiant $O(\mathbb{V}_\sigma, \phi_\sigma)$ avec $O(V, \theta)$, l'application de monodromie précédente a une image dense pour la topologie de Zariski dans $O(V, \theta)$.

5.5. Analogue ℓ-adique. — Soit $m \geq 1$ un entier et $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}/\ell^m} = R^2\pi_{\mathbb{C}*}\mathbb{Z}/\ell^m(1)$. Notons $[\mathbf{K}]_{\mathbb{Z}/\ell^m}$ et $[\mathbf{f}]_{\mathbb{Z}/\ell^m}$ les projections des classes $[\mathbf{K}]_{\mathbb{Z}}$ et $[\mathbf{f}]_{\mathbb{Z}}$ dans le dernier système locale. De façon similaire, Notons $\mathbb{V}_{\mathbb{Z}/\ell^m}$ le complément orthogonal du réseau engendré par les premières sections dans $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}/\ell^m}$. À la donnée de ce complément, on associe une représentation de monodromie $\Lambda_{\sigma,\mathbb{Z}/\ell^m}$ du groupe fondamental topologique sur $O(\mathbb{V}_{\mathbb{Z}/\ell^m})$. Notons $\Upsilon_{\mathbb{Z}/\ell^m}$ l'image de cette représentation. On peut passer cette construction à la limite en définissant $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}_\ell} = \varprojlim_m \mathbb{H}_{\mathbb{Z}/\ell^m}$ obtenant une représentation de monodromie $\Lambda_{\sigma,\mathbb{Z}_\ell}$ sur $O(\mathbb{V}_{\mathbb{Z}_\ell})$ et d'image $\Upsilon_{\mathbb{Z}_\ell}$.
Cette version ℓ-adique de la théorie de Hodge sera un des points centraux dans la démonstration de la proposition qui suit.

5.6. Une famille de surfaces. — Soit X une surface de type CC admissible définie sur k et $\alpha : X \to E$ sa vibration d'Albanese. Pour tout entier $n \geq 1$ et toute fonction $h \in K = k(E)$, soit $K_n = K(h^{1/\ell^n})$, $\mathcal{K} = \bar{k}(E)$, $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}(h^{1/\ell^n})$. Soit $\psi : \mathcal{J} \to E$ la fibration jacobienne associée à α et notons A sa fibre générique. Cette fibre est une variété abélienne de dimension 3. Supposons que $\ell > b_x(X) - 2 + 6 \cdot \deg h$ soit un nombre premier. Dans ce cadre $\mathrm{Tr}_{K/k} A = 0$.

Proposition 5.5. — [Pa13, Proposition 4.9] *Soit k un corps de nombres plongé dans $\mathbb{C}$. Il existe une infinité de surfaces X de type CC telles que le rang de $A(\mathcal{K}_n)$ soit uniformément borné quand $n \to \infty$.*

Références

[Ba92] W. Bauer, *On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer for abelian varieties over function fields in characteristic $p > 0$*, Invent. Math. **108** (1992), 263-287.

[BoZa09] F.A.Bogomolov, Y.G.Zarhin, *Ordinary reduction of K3 surfaces*, Cent. Eur. J. Math. **7**(2009), 206-213.

[CaCi93] F. Catanese, C. Ciliberto, *Symmetric products of elliptic curves and surfaces of general type with $p_g = q = 1$*, J. Alg. Geometry **2** (1993), 389-411.

[CoGr96] J. Coates, R. Greenberg, *Kummer theory for abelian varieties over local fields*, Inventiones Math. **124** (1996), 129-174.

[Co06] B. Conrad, *Chow's K/k-image and K/k-trace, and the Lang-Néron theorem*, Enseignement Mathématique **52** (2006), 37-108.

[De74] P. Deligne, Conjectures de Weil I, Publ. Math. IHES 43 (1974) 273-307.

[De81] P. Deligne, Conjectures de Weil II, Publ. Math. IHES 52 (1981) 313-428.

[El06] J. Ellenberg, *Selmer groups and Mordell-Weil groups of elliptic curves over towers of function fields*, Compositio Math. **142** (2006), 1215-1230.

[HiPaWa05] M. Hindry, A. Pacheco, R. Wazir, *Fibrations et conjectures de Tate*, J. Number Theory **112** (2005), 345-368.

[Ho02] S. Howson, *Euler characteristics as invariants of Iwasawa modules*, Proc. London Math. Soc. **85** (2002), 634-658.

[KT03] K. Kato, F. Trihan, *On the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture in characteristic* $p > 0$, Inventiones Math. **153** (2003), 537-592.

[KP99] N. Katz, P. Sarnak, *Random matrices, Frobenius eigenvalues and monodromy*, AMS Coll. Pub. vol. **45**, 1999.

[Ka02] N. Katz, *Twisted L-functions and monodromy*, Annals Math. Studies, Princeton Univ. Press, number **150**, 2002.

[Ly11] C. Lyons, *Large monodromy for a family of surfaces of general type and some arithmetic application*, preprint 2011, `http://www-personal.umich.edu/~lyonsc/`.

[Mi68] J. S. Milne, *The Tate-Shafarevich group of constant abelian variety*, Invent. Math. **6** (1968), 91-105.

[Mi75] J. S. Milne, *On a conjecture of Artin and Tate*, Annals Math. **102** (1975), 517-533.

[Mi80] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton University Press, 1980.

[Mi81] J. S. Milne, *Comparison between the Brauer group with the Tate-Šafarevič group*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A **28** (1981), 735-743.

[Na94] K. Nagao, *Construction of high rank elliptic curves*, Kobe J. Math. **11** (1994), 211-219.

[Na97] K. Nagao, $\mathbb{Q}(T)$*-rank of elliptic curves and certain limit coming from the local points*, Manuscripta Math. **92** (1997), 13-32.

[Og62] A. P. Ogg, *Cohomology of abelian varieties over function fields*, Ann. Math. **76** (1962), 185-212.

[Pa05] A. Pacheco, *On the rank of abelian varieties over function fields*, Manuscripta Math. **118** (2005), 361-381.

[Pa09] A. Pacheco, *Selmer groups of abelian varieties in extensions of function fields*, Math. Zeitschrift **261** (2009), 787-804.

[Pa13] A. Pacheco, *Rational points of Jacobian varieties in pro-ℓ towers of function fields*, J. Number Theory **133** (2013), 3517-3523.

[Pi98] R. Pink, *ℓ-adic monodromy groups, cocharacters and the Mumford-Tate conjecture*, J. reine und angewandet Mathematik (Crelle) **495** (1998), 187-237.

[Ram89] D. Ramakrishnan, *Regulators, algebraic cycles and values of L-functions*, in : M. Stein, R. Dennis (Eds.), Algebraic K-Theory and Algebraic Number Theory, American Mathematical Society, Contemp. Math. **83** (1989), 183-310.

[Ra07] N. Ratazzi, *Borne sur la torsion des variétés abéliennes de type CM*, Ann. Éc. Normal Sup. Paris **40** (2007), 951-983.

[Ray68] M. Raynaud, *Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes*, Sém. Bourbaki 1964/65, exp. 286, dans "Dix Exposés sur la cohomologie des schémas", 1968.

[Sc82] P. Schneider, *Zur Vermutung von Birch undSwinnerton-Dyer über globalen Funktionenkörpern*, Math. Ann. **260** (1982), 495-510.

[Se68] J.-P. Serre, *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves*, 1968.

[Se72] J.-P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math. **15** (1972), 259-331.

[Se85] J.-P. Serre, *Résumé des cours au Collège de France*, 1984-85, Oeuvres IV, pp. 27-32.

[Se86] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lec. Notes Math. **5**, Springer-Verlag, 1986.

[SeTa68] J.-P. Serre, J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*, Annals of Math. **88** (1968), 492-517.

[SGA 4 1/2] P. Deligne, *Cohomologie étale* (Séminaire de Géométrie Algébrique 4 1/2), Lecture Notes in Math 569, Springer-Verlag, 1977.

[SGA 7] A. Grothendieck, *Modèles de Néron et monodromie* dans SGA 7, Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique, Exp. IX, Lect. Notes in Math **288** (1972), Springer-Verlag.

[Sh61] G. Shimura, Y. Taniyama, *Complex multiplication to abelian varieties and its applications to number theory*, Publications of the Japan Mathematical Society, 1971.

[Si04] J. Silverman, *The rank of elliptic surfaces in unramified abelian towers over number fields*, J. reine und angewandet Mathematik (Crelle) **577** (2004), 153-169.

[Ta65] J. Tate, *Algebraic cycles and poles of zeta-functions*, Arithmetical Algebraic Geometry, Harper and Row, New York, 1965, pp. 93-110.

[Ta66] J. Tate, *On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog*, Sém. Bourbaki, exp. 305 (1965/66).

[Ul02] D. Ulmer, *Elliptic curves with high rank over function fields*, Annals of Math. **155** (2002), 295-315.

30 janvier 2014

Amílcar Pacheco, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, rua Alzira Brandão 355/404, Tijuca, 20550-035 Rio de Janeiro, RJ, Brasil • *E-mail :* amilcar@acd.ufrj.br