Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Jérôme VON BUHREN

Borne de hauteur semi-effective pour le problème de Mordell–Lang dans une variété abélienne

Tome 29, n^{o} 1 (2017), p. 307-320.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2017__29_1_307_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **29** (2017), 307–320

Borne de hauteur semi-effective pour le problème de Mordell–Lang dans une variété abélienne

par Jérôme VON BUHREN

Résumé. Soit X un sous-schéma fermé d'une variété abélienne sur un corps de nombres. On désigne par Z_X la réunion des translatés inclus dans X de sous-variétés abéliennes non nulles. Faltings a montré que les points rationnels de $X \setminus Z_X$ sont en nombre fini. McQuillan a étendu ce résultat à une famille $V \to P$ de sous-schémas fermés de A en donnant une majoration qualitative de la hauteur des points rationnels de chaque $V_p \setminus Z_{V_p}$. Nous étendons le résultat de McQuillan au problème de Mordell–Lang plus Bogomolov et nous établissons une borne semi-effective pour la hauteur des points de $V_p \setminus Z_{V_p}$.

Abstract. Let X be a closed subscheme of an abelian variety on a number field. Let Z_X denote the union of all translated positive dimensional abelian subvarieties contained in X. Faltings proved that the set of rational points on $X \setminus Z_X$ is finite. Moreover, if $V \to P$ is a family of closed subscheme of A, McQuillan gave an ineffective bound for the height of the rational points of each $V_p \setminus Z_{V_p}$. We extend the result of McQuillan to the case of Mordell–Lang plus Bogomolov problem and we give a semi-effective bound for the height of the rational points in $V_p \setminus Z_{V_p}$.

1. Introduction

Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K et soit P un schéma projectif et intègre sur K. On considère un sous-schéma fermé intègre $V \hookrightarrow A \times P$ et on note V_p la fibre de $V \to P$ au-dessus de $p \in P$. On note également Z_{V_p} la réunion des translatés inclus dans V_p de sous-variétés abéliennes non nulles de A. Faltings a montré dans [1] que $(V_p \setminus Z_{V_p})(K)$ est fini pour chaque $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$.

D'autre part, si l'on note $\hat{h} : A(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ la hauteur de Néron–Tate associée à un faisceau ample et symétrique $\mathcal{L}_0$ sur A et $h_{\mathfrak{L}} : P(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$

Manuscrit reçu le 2 juin 2015, révisé le 17 janvier 2016, accepté le 25 janvier 2015.
Mathematics Subject Classification. 11G10, 11G50.
Mots-clefs. Problème de Mordell–Lang, Inégalité de Vojta, Hauteurs.
Je remercie Carlo Gasbarri pour les nombreuses discussions enrichissantes que nous avons eues sur ce sujet.

une hauteur associée à un faisceau ample $\mathfrak{L}$ sur P, McQuillan a montré dans [2] qu'il existe une constante géométrique $\mu > 0$ ne dépendant que de A et V de sorte qu'en dehors d'un nombre fini $p \in P(K)$, les points $a \in (V_p \setminus Z_{V_p})(K)$ vérifient l'inégalité de hauteur $\hat{h}(a) \leq \mu \cdot h_{\mathfrak{L}}(p)$.

Dans cet article, nous allons étendre le résultat précédent au problème de Mordell–Lang plus Bogomolov et nous donnerons une valeur effective pour la constante $\mu > 0$. On considère à présent A, P et V sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et on suppose que le faisceau $\mathcal{L}_0$ est associé à un plongement $A \hookrightarrow \mathbb{P}^{N_A}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ de sorte que

$$\Gamma\left(\mathbb{P}^{N_A}_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}(n)\right) \to \Gamma\left(A, \mathcal{L}_0^{\otimes n}\right) \tag{1.1}$$

est surjective pour tout $n \geq 1$. De plus, on suppose que le faisceau $\mathfrak{L}$ est associé à un plongement $P \hookrightarrow \mathbb{P}^{N_P}_{\bar{\mathbb{Q}}}$. Le degré de V sera pris relativement au plongement de Segre

$$V \hookrightarrow \mathbb{P}^{N_A}_{\bar{\mathbb{Q}}} \times \mathbb{P}^{N_P}_{\bar{\mathbb{Q}}} \hookrightarrow \mathbb{P}^{N}_{\bar{\mathbb{Q}}} \quad \text{où} \quad N = (N_A+1)(N_P+1) - 1.$$

Si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un groupe de rang fini (i.e. $\dim \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est fini) et $\varepsilon > 0$ un réel, on note

$$\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) = \{a + b \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \mid a \in \Gamma,\ \hat{h}(b) \leq \varepsilon(1 + \hat{h}(a))\}.$$

Avec les résultats de Rémond dans [7], on trouve que pour chaque $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $(V_p \setminus Z_{V_p})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ soit fini. Nous commencerons par démontrer le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Il existe une constante $\mu \geq 0$ et un réel $\varepsilon > 0$ ayant la propriété suivante : si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe un réel $\nu \geq 0$ tel que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, on a*

$$\forall a \in (V_p \setminus Z_{V_p})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon), \quad \hat{h}(a) \leq \mu \cdot h_{\mathfrak{L}}(p) + \nu.$$

De plus, en notant $m = \dim V + 1$, on peut prendre

$$\mu = \varepsilon^{-1} = \Big((N_A+1)(N_P+1)\deg V\Big)^{m^{3m^2}}.$$

Signalons qu'il n'est en général pas possible de choisir un $\varepsilon > 0$ uniforme pour avoir la finitude des ensembles $(V_p \setminus Z_{V_p})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$, mais le résultat ci-dessus nous assure que l'on peut tout de même avoir une majoration de la hauteur de ses points. On retrouve bien le théorème de McQuillan en prenant $\Gamma = A(K)$ et en écartant les $p \in P(K)$ tels que $h_{\mathfrak{L}}(p) \leq \nu$. Les méthodes employées ne fournissent aucune information sur la constante ν. On peut également s'intéresser à l'ensemble

$$\Gamma_\varepsilon = \{a + b \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \mid a \in \Gamma,\ \hat{h}(b) \leq \varepsilon\}$$

pour lequel le résultat précédent reste vrai par l'inclusion $\Gamma_\varepsilon \subset \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$. On peut cependant obtenir le résultat suivant, qui correspond au problème de

Mordell–Lang plus Bogomolov démontré pour une sous-variété de A par Poonen dans [3].

Théorème 1.2. *Il existe une constante $\mu \geq 0$, un réel $\varepsilon > 0$ et une famille finie $\mathfrak{B}$ de sous-variétés abéliennes de A ayant la propriété suivante : si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un réel $\nu \geq 0$ tels que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, il existe $a_1, \ldots, a_n \in V_p(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant l'inégalité*

$$\hat{h}\,(a_i) \leq \mu \cdot h_{\mathfrak{L}}(p) + \nu \tag{1.2}$$

et des sous-variétés abéliennes $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}$ avec $a_i + B_i \subset V_p$ tels que

$$V_p(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{n} \Big(a_i + B_i(\bar{\mathbb{Q}})\Big) \cap \Gamma_\varepsilon. \tag{1.3}$$

Il s'agit ici d'un résultat qualitatif : la valeur effective pour la constante μ n'est plus valide pour ce résultat. Remarquons que l'existence du réel $\varepsilon > 0$ se déduit de [6, Théorème 1.3]. D'après ce dernier, on peut choisir $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de V_p dans l'égalité du point (1.3). Le degré des V_p ne prenant qu'un nombre fini de valeurs pour $p \in P$, on obtient que l'on peut choisir $\varepsilon > 0$ uniformément. Avec un raisonnement analogue, l'existence de $\mathfrak{B}$ peut se déduire de [4, Lemme 4.6]. Ainsi la partie nouvelle du théorème ci-dessus est l'inégalité de hauteur (1.2).

Dans un premier temps, on prouvera quelques résultats préliminaires et on rappellera l'existence d'un sous-schéma fermé Z_V de V dont la fibre au-dessus de $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$ est Z_{V_p}. La suite de l'article est majoritairement consacrée à la démonstration d'une inégalité de Vojta effective pour les points de $V \setminus Z_V$, généralisant celle de [5]. Cette dernière nous permet de vérifier que la hauteur des points de l'ensemble

$$\{(a, p) \in (V \setminus Z_V)(\bar{\mathbb{Q}}) \mid a \in \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon),\ \hat{h}(a) \geq \mu \cdot h_{\mathfrak{L}}(p)\}$$

est bornée et d'aboutir au théorème 1.1. Le second résultat s'en déduit par récurrence à partir du premier sur la dimension de la variété abélienne.

La démonstration de l'inégalité de Vojta est basée sur la méthode de Vojta. Au lieu de rédiger entièrement la méthode (comme Rémond dans [5] par exemple), nous utiliserons le résultat principal de [8] dont la démonstration repose entièrement sur la méthode de Vojta. Ce dernier fournit une comparaison de hauteurs très générale. Son utilisation nous permet d'obtenir les valeurs explicites annoncées et de raccourcir la preuve des résultats.

2. Préliminaires

2.1. Le lieu exceptionnel. On dispose pour chaque $p \in P$ d'un sous-schéma fermé Z_{V_p} de V_p. Le résultat suivant montre qu'il s'agit d'une famille algébrique.

Théorème 2.1. *Il existe un sous-schéma fermé Z_V de V vérifiant pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$ la relation $(Z_V)_p(\bar{\mathbb{Q}}) = Z_{V_p}(\bar{\mathbb{Q}})$. De plus si $V = Z_V$, il existe une sous-variété abélienne non nulle B de A telle que $V_p + B = V_p$ pour tout $p \in P$.*

Démonstration. Voir [2, Théorème 1.2] et [2, Lemme 1.3]. □

2.2. Un lemme de recouvrement. Le résultat de cette partie nous permettra d'exploiter notre inégalité de Vojta dans la dernière partie pour aboutir aux résultats de l'introduction. Le lemme ci-dessous et sa preuve sont analogues à ceux du [6, Lemme 2.1].

Soit E un espace vectoriel réel muni d'une norme N. On fixe un sous-espace vectoriel de dimension finie F de E et pour un réel $\eta \geq 0$, on note

$$\mathcal{C}(F,\eta) = \{y + z \in E \mid y \in F,\ N(z) \leq \eta(1 + N(y))\}.$$

Lemme 2.2. *Si $\eta \geq 0$ et $e \geq 1$ sont des réels vérifiant $\eta \leq 2^{-4}e^{-1}$, alors il existe une partition finie de $\{x \in \mathcal{C}(F,\eta) \mid N(x) \geq 2\}$ par des ensembles dans chacun desquels deux points x et y vérifient*

$$N\left(\frac{x}{N(x)} - \frac{y}{N(y)}\right) \leq \frac{1}{e}.$$

Démonstration. On peut recouvrir la sphère unité de E par un nombre fini de boules de rayons $(4e)^{-1}$, dont on note les centres $(x_i)_{i\in I}$. On définit

$$A_i = \left\{x \in \mathcal{C}(F,\eta) \;\middle|\; N(x) \geq 2,\ N\left(\frac{x}{N(x)} - x_i\right) \leq \frac{1}{2e}\right\}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, deux points $x, y \in A_i$ vérifient bien la condition voulue. Il reste à montrer que les A_i recouvrent $\{x \in \mathcal{C}(F,\eta) \mid N(x) \geq 2\}$. On fixe $x \in \mathcal{C}(F,\eta)$ avec $N(x) \geq 2$ que l'on écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $N(z) \leq \eta(1 + N(y))$. D'une part, l'élément y est non nul (car $N(x) \geq 2$) et $y/N(y) \in F$ appartient à l'une des boules précédentes, donc il existe $i \in I$ tel que

$$N\left(\frac{y}{N(y)} - x_i\right) \leq \frac{1}{4e}.$$

D'autre part, on a l'inégalité

$$N\left(\frac{x}{N(x)} - \frac{y}{N(y)}\right) \leq \frac{|N(y) - N(x)| + N(z)}{N(x)} \leq 2\frac{N(z)}{N(x)},$$

et en utilisant $N(z) \leq \eta(1 + N(y))$, on obtient avec l'inégalité triangulaire

$$N(z) \leq \frac{\eta}{1-\eta}(1 + N(x)).$$

On en déduit en utilisant $N(x) \geq 2$ et la condition sur η que

$$N\left(\frac{x}{N(x)} - \frac{y}{N(y)}\right) \leq 2\frac{N(z)}{N(x)} \leq \frac{2\eta}{1-\eta}\left(1 + \frac{1}{N(x)}\right) \leq \frac{2}{2^4 e - 1} \cdot \frac{3}{2} \leq \frac{1}{4e},$$

donc $x \in A_i$ par inégalité triangulaire. $\square$

3. Inégalité de Vojta effective dans le cas abélien

3.1. Énoncé. On commence par fixer les notations utilisées dans le reste de l'article. On note $X_0, \dots, X_{N_A}$ les coordonnées de $\mathbb{P}^{N_A}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ et on désigne par add : $A^2 \to A^2$ le morphisme donné sur les points par

$$\mathrm{add}(a,b) = (a+b, a-b).$$

L'hypothèse 1.1 et le théorème du cube montrent qu'il existe des polynômes $P^{\mathrm{add}}_{i,j}$ pour $0 \leq i,j \leq N_A$ tels que

$$\mathrm{add}^*(\mathrm{p}_1^* X_i \otimes \mathrm{p}_2^* X_j) = P^{\mathrm{add}}_{i,j}(\mathrm{p}_1^* X_0, \dots, \mathrm{p}_1^* X_{N_A}, \mathrm{p}_2^* X_0, \dots, \mathrm{p}_2^* X_{N_A})$$

où $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2 : A^2 \to A$ sont les deux projections. On note h_{add} la hauteur de la famille de tous les coefficients des polynômes $P^{\mathrm{add}}_{i,j}$ pour $0 \leq i,j \leq N_A$.

On note $h^w : A(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ et $h^w_{\mathfrak{L}} : P(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ les hauteurs de Weil respectives induites par les plongements $A \hookrightarrow \mathbb{P}^{N_A}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ et $P \hookrightarrow \mathbb{P}^{N_P}_{\bar{\mathbb{Q}}}$. Comme les hauteurs $\hat{h}$ et h^w sont associées au même faisceau, et qu'il en est de même de $h_{\mathfrak{L}}$ et $h^w_{\mathfrak{L}}$, on peut considérer le nombre

$$C_{\mathrm{haut}} = \max\left(\sup_{a \in A(\bar{\mathbb{Q}})} \left| \hat{h}(a) - h^w(a) \right|, \sup_{p \in P(\bar{\mathbb{Q}})} \left| h_{\mathfrak{L}}(p) - h^w_{\mathfrak{L}}(p) \right| \right) \tag{3.1}$$

qui est fini. D'autre part, on dispose à présent d'un plongement

$$A \times P \hookrightarrow \mathbb{P}^{N_A}_{\bar{\mathbb{Q}}} \times \mathbb{P}^{N_P}_{\bar{\mathbb{Q}}} \hookrightarrow \mathbb{P}^{N}_{\bar{\mathbb{Q}}} \ \text{ avec } N = (N_A+1)(N_P+1) - 1$$

où la deuxième immersion est le morphisme de Segre. Le degré et la hauteur d'un sous-schéma fermé de $A \times P$ sont définis relativement à ce plongement.

Finalement, on note $m = \dim V + 1$ et on introduit les constantes

$$\begin{aligned} \Lambda &= 2^{m^2} (8m \dim V)^{m \dim V} (N_A+1)(N_P+1)(\deg V)^{3m}, \\ \psi &= \prod_{j=2}^{m \dim V} (3j+1). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Rappelons que la hauteur de Néron–Tate $\hat{h}$ s'étend à l'espace vectoriel $A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Dans cette partie, nous allons démontrer l'inégalité de Vojta effective suivante.

Théorème 3.1. *Il existe des constantes $e_1, e_2, e_3, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ tels que si des points $(a_1,p_1),\dots,(a_m,p_m) \in V(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifient simultanément les inégalités*

$$\hat{h}\left(\frac{a_i}{\sqrt{\hat{h}(a_i)}} - \frac{a_{i+1}}{\sqrt{\hat{h}(a_{i+1})}}\right) \leq \frac{1}{e_1^2}, \qquad \hat{h}(a_{i+1}) \geq e_2^2 \cdot \hat{h}(a_i),$$
$$\hat{h}(a_1) \geq e_3, \qquad \hat{h}(a_j) \geq \mu \cdot h_{\mathfrak{L}}(p_j)$$

pour tout $1 \leq i \leq m-1$ et pour tout $1 \leq j \leq m$, alors il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $(a_i, p_i) \in Z_V(\bar{\mathbb{Q}})$. De plus, on peut prendre les valeurs

$$e_1 = 8\Lambda^{\psi}, \quad e_2 = 2\Lambda^{2\psi}, \quad \mu = 4\Lambda^{\psi} \quad \text{et}$$
$$e_3 = (4(N_A+1))^{2m^2 \dim V} \Lambda^{8\psi} \max(h(V), h_{\mathrm{add}}, C_{\mathrm{haut}}).$$

On supposera dans la suite que $\dim V > 0$, sans quoi le résultat est évident. Dans les prochaines parties, nous allons donc nous placer dans les conditions d'application du [8, Théorème 1.2], puis nous vérifierons que l'on dispose de son hypothèse.

3.2. Préliminaires. Pour $s \in (\mathbb{N}^*)^m$, on note $r_\pm : V^m \to A^{m-1}$ le morphisme donné sur les points par

$$((a_1,p_1),\dots,(a_m,p_m)) \mapsto (s_1a_1 \pm s_2a_2, \dots, s_{m-1}a_{m-1} \pm s_m a_m).$$

En utilisant le plongement $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}$, les morphismes r_- et r_+ composés avec un morphisme de Segre et le plongement $P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}$, on obtient un plongement

$$V^m \hookrightarrow \left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}\right)^m \times \left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N'_A}\right) \times \left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N'_A}\right) \times \left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}\right)^m \text{ avec } N'_A = (N_A+1)^{m-1} - 1.$$

Par restriction, on obtient ainsi un faisceau $\mathcal{O}(b, c, c', d)$ sur V^m pour chaque $b, d \in \mathbb{Z}^m$ et $c, c' \in \mathbb{Z}$. Par construction, on a les relations suivantes.

$$\mathcal{O}(b,0,0,0) \simeq \mathrm{p}^*\left(\bigotimes_{i=1}^m \mathrm{p}_i^* \mathcal{L}_0^{\otimes b_i}\right),$$
$$\mathcal{O}(0,0,0,d) \simeq \mathrm{q}^*\left(\bigotimes_{i=1}^m \mathrm{q}_i^* \mathfrak{L}^{\otimes d_i}\right),$$
$$\mathcal{O}(0,0,1,0) \simeq \mathrm{p}^*\left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} (s_i\,\mathrm{p}_i + s_{i+1}\,\mathrm{p}_{i+1})^* \mathcal{L}_0\right),$$
$$\mathcal{O}(0,1,0,0) \simeq \mathrm{p}^*\left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} (s_i\,\mathrm{p}_i - s_{i+1}\,\mathrm{p}_{i+1})^* \mathcal{L}_0\right),$$

où $\mathrm{p} : A^m \times P^m \to A^m$, $\mathrm{q} : A^m \times P^m \to P^m$, $\mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_m : A^m \to A$ et $\mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_m : P^m \to P$ sont les différentes projections.

On note $X_0^{(i)}, \dots, X_{N_A}^{(i)}$ les coordonnées du i-ème facteur de $\left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}\right)^m$, puis $V_0, \dots, V_{N'_A}$ et $V'_0, \dots, V'_{N'_A}$ pour les deux espaces projectifs intermédiaires et $T_0^{(i)}, \dots, T_{N_P}^{(i)}$ les coordonnées du i-ème facteur $\left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}\right)^m$. En notant $\eta = (1, 2, \dots, 2, 1) \in \mathbb{N}^m$, on a le résultat suivant.

Lemme 3.2. *Il existe sur $A^m \times P^m$ un isomorphisme*

$$\xi' : \mathcal{O}(2\eta s^2, 1, 1, 0) \to \mathcal{O}(4\eta s^2, 0, 0, 0)$$

ayant la propriété suivante : pour tout $k \in [\![0, N_A]\!]^m$, il existe des polynômes $(P_{\ell,\ell'})_{0 \le \ell, \ell' \le N'_A}$ de multidegré $4\eta s^2$ en les $X^{(i)}$ dont la famille est de hauteur au plus $|\eta s^2|(h_{\mathrm{add}} + 10N_A)$ tels que

$$\xi'\left(\left(\bigotimes_{i=1}^{m}\left(X_{k_i}^{(i)}\right)^{2\eta_i s_i^2}\right) \otimes V_\ell \otimes V'_{\ell'}\right) = P_{\ell,\ell'}\left(X^{(1)}, \dots, X^{(m)}\right).$$

Démonstration. L'existence de l'isomorphisme ξ' est une conséquence du théorème du cube. Le reste de la démonstration est entièrement analogue à celle du [7, Lemme 3.3]. □

3.3. Mise en place. On va se placer dans les conditions d'application du résultat de [8]. En utilisant un plongement de Segre, on définit $\iota : V \to \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^N$ comme la composée $V \hookrightarrow A \times P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^N$. On définit le faisceau $\mathcal{L} = \iota^*\mathcal{O}(1)$ et on fixe les paramètres de [8] en posant

$$m = \dim(V) + 1, \quad t_1 = 4, \quad t_2 = 4,$$
$$M = (N_A + 1)^m (N'_A + 1), \quad \theta = 2^{m^2} \quad \text{et} \quad \gamma = h_{\mathrm{add}} + 10N_A.$$

A partir de ces valeurs, les trois constantes définies par [8] sont

$$\begin{aligned} &c_1 = 4\Lambda^\psi, \quad c_2 = \Lambda^{4\psi} \\ &c_3 = (4(N_A + 1)^m (N'_A + 1))^{m \dim V} \Lambda^{8\psi} \max(h(V), h_{\mathrm{add}} + 10N_A). \end{aligned} \tag{3.3}$$

où Λ et ψ sont données par le point (3.2). On fixe un m-uplet $s \in (\mathbb{N}^*)^m$ et on pose $\delta = \eta s^2$. On définit également $\mathcal{V} = V^m$ et $\pi = \mathrm{Id}_{V^m}$. Avec les notations introduites à la partie précédente, le faisceau $\mathcal{M}$ sur V^m que nous considérons est $\mathcal{M} = \mathcal{O}(0, 1, 0, \eta s^2)$. Le faisceau $\mathcal{N}_\delta$ défini dans [8] s'écrit avec ces mêmes notations $\mathcal{N}_\delta = \mathcal{O}(\eta s^2, 0, 0, \eta s^2)$. On introduit finalement le faisceau $\mathcal{P} = \mathcal{O}(4\eta s^2, 0, 0, \eta s^2)$ sur V^m qui est associé au plongement ι' donné par

$$V^m \hookrightarrow \left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}\right)^m \times \left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}\right)^m \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N'} \quad \text{avec } N' = (N+1)^m - 1$$

où la seconde flèche est un plongement de Segre–Veronese considérant tous les monômes de bidegré $(4\eta s^2, \eta s^2)$. On définit l'injection $j_1 : \mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{N}_{\eta s^2}^{\otimes 4}$

comme la multiplication par une section globale non nulle de la forme

$$\bigotimes_{i=1}^{m}\left(T_{k_i}^{(i)}\right)^{3\eta_i s_i^2}\in\mathcal{O}(0,0,0,3\eta s^2)\quad\text{où}\quad k\in[\![0,N_P]\!]^m.$$

D'autre part, en utilisant l'isomorphisme ξ' du lemme 3.2, on a

$$\mathcal{P}\otimes\mathcal{M}^{\otimes -1}=\mathcal{O}(4\eta s^2,-1,0,0)\simeq\mathcal{O}(2\eta s^2,0,1,0)$$

ce qui permet de définir Σ comme la famille des images réciproques par cet isomorphisme de

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{m}\left(X_{k_i}^{(i)}\right)^{2\eta_i s_i^2}\right)\otimes V'_{\ell'}\quad\text{où}\quad k\in[\![0,N_A]\!]^m,\quad \ell'\in[\![0,N'_A]\!].$$

Cette famille est bien de cardinal M. On définit finalement l'injection $j_2 : \mathcal{P}\otimes\mathcal{M}^{\otimes -1}\hookrightarrow\mathcal{N}_{\eta s^2}^{\otimes 4}$ comme la multiplication par une section globale non nulle de la forme

$$V_\ell\otimes\left(\bigotimes_{i=1}^{m}\left(T_{r_i}^{(i)}\right)^{4\eta_i s_i^2}\right)\in\mathcal{O}(0,1,0,4\eta s^2)\quad\text{où}\quad \ell\in[\![0,N'_A]\!],\quad r\in[\![0,N_P]\!]^m.$$

Finalement, l'image par j_1 de chaque coordonnée de $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N'}$ est clairement un monôme en les coordonnées de chaque $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N}$. D'autre part, le lemme 3.2 assure que l'image par j_2 des éléments de Σ s'exprime bien comme des polynômes de multidegré $4\eta s^2$ et de hauteur au plus $|\eta s^2|\gamma$. (Les termes en $T^{(1)},\ldots,T^{(m)}$ n'intervenant que par des monômes, la hauteur des polynômes n'est pas modifiée).

Remarque 3.3. Il est important de voir que l'on peut choisir j_1 et j_2 tels qu'ils soient des isomorphismes en un point $x\in V^m$ fixé préalablement. En effet, on peut choisir les sections définissant j_1 et j_2 pour qu'elles ne s'annulent pas en x.

Le lemme suivant permet de contrôler les hauteurs $h_{\mathcal{L}} : V(\bar{\mathbb{Q}})\to\mathbb{R}$ et $h_{\mathcal{M}} : V^m(\bar{\mathbb{Q}})\to\mathbb{R}$ de [8] en fonction de $\hat{h}$, h^w et $h^w_{\mathfrak{L}}$.

Lemme 3.4. *On a les égalités suivantes*

(i) Pour tout $(a,p)\in V(\bar{\mathbb{Q}})$, on a $h_{\mathcal{L}}(a,p)=h^w(a)+h^w_{\mathfrak{L}}(p)$.

(ii) Pour tout $x\in V^m(\bar{\mathbb{Q}})$ où l'on écrit $x_i=(a_i,p_i)$ pour $1\le i\le m$, on a

$$h_{\mathcal{M}}(x)\le\sum_{i=1}^{m-1}\hat{h}(s_i a_i-s_{i+1}a_{i+1})+\sum_{i=1}^{m}\eta_i s_i^2 h^w_{\mathfrak{L}}(p_i)+3|\eta s^2|C_{\text{haut}}.$$

Démonstration. Le point (i) est immédiat par définition de ι et des propriétés classiques du morphisme de Segre. Pour le point (ii), vu la définition de

$h_{\mathcal{M}}$ et de ι', on peut écrire

$$h_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^{m} 2\eta_i s_i^2 h^w(a_i) - \sum_{i=1}^{m-1} h^w(s_i a_i + s_{i+1}a_{i+1}) + \sum_{i=1}^{m} \eta_i s_i^2 h^w_{\mathfrak{L}}(p_i).$$

En repassant à $\hat{h}$ avec le point (3.1) et en utilisant le théorème du cube, on obtient le résultat. □

3.4. L'hypothèse sur le nombre d'intersection. Il nous reste à vérifier que l'on dispose de l'hypothèse principale du théorème de [8] sur le nombre d'intersection. On fixe donc $Z = Z_1 \times \ldots \times Z_m$ un produit de sous-schémas fermés intègres de V.

Lemme 3.5. *Si $Z_i \not\subset Z_V$ pour $1 \leq i \leq m$, alors on a la minoration*

$$[\mathcal{M}]^{\dim(Z)} \cdot Z \geq \prod_{i=1}^{m} s_i^{2\dim Z_i}.$$

Démonstration. Dans le cas $s_1 = \ldots = s_m = 1$, le lemme 2.2 de [2] montre que le faisceau $\mathcal{M}$ est l'image réciproque d'un faisceau ample par une application génériquement finie, ce qui montre le résulat. Le cas général en découle, car $[\mathcal{M}]^{\dim(Z)} \cdot Z$ est homogène en s_i de degré $2\dim Z_i$ (voir [2]). □

3.5. Démonstration de l'inégalité de Vojta. On suppose que l'on dispose des points $(a_1, p_1), \ldots, (a_m, p_m) \in (V \setminus Z_V)(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant les inégalités dans les hypothèses du théorème 3.1 avec les constantes $e_1, e_2, e_3, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ données. Signalons que les constantes e_1, e_2, e_3, μ ont été choisies pour vérifier les inégalités élémentaires suivantes

$$e_1 = 2c_1, \quad e_2^2 \geq 2c_2, \quad e_3 \geq c_3 + C_{\text{haut}}, \quad e_3 > 2^4 c_1^2 C_{\text{haut}} \quad \text{et} \quad \mu = c_1, \tag{3.4}$$

où les constantes c_1, c_2, c_3 sont données par le point (3.3). On commence par choisir un m-uplet $s \in \mathbb{N}^*$ pour obtenir une première inégalité de hauteurs.

Lemme 3.6. *Il existe $s \in (\mathbb{N}^*)^m$ tel que $s_i/s_{i+1} \geq e_2$ pour $1 \leq i \leq m-1$ et*

$$\sum_{i=1}^{m-1} \hat{h}(s_i a_i - s_{i+1}a_{i+1}) \leq \frac{3}{e_1^2} \sum_{i=1}^{m} \eta_i s_i^2 \hat{h}(a_i).$$

Démonstration. On note dans cette démonstration $\|\cdot\| = \sqrt{\hat{h}}$ qui vérifie l'inégalité triangulaire. On pose $s_m = 1$ et on définit $s_{m-1}, \ldots, s_1$ successivement de sorte que s_i/s_{i+1} soit l'entier le plus proche de $\|a_{i+1}\|/\|a_i\|$. Comme $e_2 \in \mathbb{N}$, on a $s_i/s_{i+1} \geq e_2$. D'autre part,

$$\Big| s_i\|a_i\| - s_{i+1}\|a_{i+1}\| \Big| = s_{i+1}\|a_i\| \left| \frac{s_i}{s_{i+1}} - \frac{\|a_{i+1}\|}{\|a_i\|} \right| \leq \frac{s_{i+1}\|a_i\|}{2} \leq \frac{s_{i+1}\|a_{i+1}\|}{2e_2}.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\|s_i a_i - s_{i+1}a_{i+1}\| &= \left\| s_i a_i - s_{i+1}\frac{\|a_{i+1}\|}{\|a_i\|}a_i + s_{i+1}\frac{\|a_{i+1}\|}{\|a_i\|}a_i - s_{i+1}a_{i+1}\right\| \\
&\leq \left| s_i - s_{i+1}\frac{\|a_{i+1}\|}{\|a_i\|}\right| \|a_i\| + s_{i+1}\|a_{i+1}\| \left\| \frac{a_i}{\|a_i\|} - \frac{a_{i+1}}{\|a_{i+1}\|}\right\| \\
&\leq \Big| s_i\|a_i\| - s_{i+1}\|a_{i+1}\|\Big| + \frac{1}{e_1}s_{i+1}\|a_{i+1}\| \\
&\leq \left(\frac{1}{2e_2} + \frac{1}{e_1}\right) s_{i+1}\|a_{i+1}\|.
\end{aligned}$$

En remarquant que $e_2 \geq e_1$, en élevant au carré, puis en sommant, on obtient le résultat. □

On applique la construction de la partie précédente avec le m-uplet s fourni par le lemme ci-dessus. Nous allons utiliser le résultat de [8] avec le m-uplet $\delta = \eta s^2$. En utilisant la remarque 3.3, on peut choisir j_1 et j_2 de sorte qu'ils soient des isomorphismes en $x = (x_1, \dots, x_m) \in V^m(\bar{\mathbb{Q}})$ où $x_i = (a_i, p_i)$, donc $x \in U'(\bar{\mathbb{Q}})$. Comme $x_i \in (Z_i \setminus Z_V)$, le lemme 3.5 s'applique et on obtient

$$[\mathcal{M}]^{\dim(Z)} \cdot Z \geq \prod_{i=1}^{m} s_i^{2\dim Z_i} \geq \theta^{-1}\prod_{i=1}^{m}(\eta_i s_i^2)^{\dim Z_i}$$

et d'autre part, avec le point (3.4), on a

$$\begin{aligned}
&\eta_i s_i^2/(\eta_{i+1}s_{i+1}^2) \geq e_2^2/2 \geq c_2 \quad \text{et} \\
&\qquad h_{\mathcal{L}}(x_i) \geq h^w(a_i) \geq \hat{h}(a_i) - C_{\text{haut}} \geq \hat{h}(a_1) - C_{\text{haut}} \geq e_3 - C_{\text{haut}} \geq c_3.
\end{aligned}$$

Ainsi le théorème de [8] s'applique, donc on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_i s_i^2 h_{\mathcal{L}}(x_i) \leq c_1 h_{\mathcal{M}}(x).$$

En utilisant le lemme 3.4, on en déduit

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \eta_i s_i^2 (h^w(a_i) + h^w_{\mathfrak{L}}(p_i)) \\
&\qquad \leq c_1 \left(\sum_{i=1}^{m-1} \hat{h}(s_i a_i - s_{i+1}a_{i+1}) + \sum_{i=1}^{m} \eta_i s_i^2 h^w_{\mathfrak{L}}(p_i) + 3|\eta s^2| C_{\text{haut}} \right),
\end{aligned}$$

puis en utilisant l'inégalité du lemme 3.6, on obtient

$$\begin{aligned}(3.5)\quad &\sum_{i=1}^{m}\eta_i s_i^2 h^w(a_i)+\sum_{i=1}^{m}\eta_i s_i^2 h^w_{\mathfrak{L}}(p_i)\\ &\qquad\le c_1\left(\frac{3}{e_1^2}\sum_{i=1}^{m}\eta_i s_i^2\hat{h}(a_i)+\sum_{i=1}^{m}\eta_i s_i^2 h^w_{\mathfrak{L}}(p_i)+3|\eta s^2|C_{\text{haut}}\right).\end{aligned}$$

De plus, avec les hypothèses du théorème 3.1 et le point (3.1), on obtient

$$h^w(a_i)\ge\hat{h}(a_i)-C_{\text{haut}},\quad h^w_{\mathfrak{L}}(p_i)\le h_{\mathfrak{L}}(p_i)+C_{\text{haut}}\le\frac{1}{\mu}\hat{h}(a_i)+C_{\text{haut}},$$

et par suite

$$\left(1-\frac{3c_1}{e_1^2}-\frac{c_1-1}{\mu}\right)\sum_{i=1}^{m}\eta_i s_i^2\hat{h}(a_i)\le 4c_1|\eta s^2|C_{\text{haut}}.$$

Finalement, en utilisant le point (3.4), on obtient l'inégalité

$$\frac{1}{4c_1}\sum_{i=1}^{m}\eta_i s_i^2\hat{h}(a_i)\le 4c_1|\eta s^2|C_{\text{haut}},$$

puis en utilisant $\hat{h}(a_i)\ge e_3$ pour $1\le i\le m$, on arrive à $e_3\le 2^4c_1^2C_{\text{haut}}$. Cette dernière inégalité étant contraire au point (3.4), cela termine la preuve du théorème 3.1.

4. Démonstration des énoncés

En utilisant l'inégalité de Vojta établie dans la partie précédente, nous allons montrer les résultats de l'introduction.

Démonstration du théorème 1.1. L'inégalité de Vojta donne des constantes $e_1,e_2,e_3,\mu\in\mathbb{R}_+^*$. On pose $\varepsilon=2^{-8}e_1^{-2}$ et on fixe un sous-groupe Γ de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$. On désigne par $(a_i,p_i)_{i\in I}$ l'ensemble des points de $(V\setminus Z_V)(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant les inégalités

$$a_i\in\mathcal{C}(\Gamma,\varepsilon),\quad \hat{h}(a_i)\ge e_3\ \text{ et }\ \hat{h}(a_i)\ge\mu\cdot h_{\mathfrak{L}}(p_i).$$

L'application $\sqrt{\hat{h}}:\bar{A}\to\mathbb{R}$ s'étend en une norme N à l'espace vectoriel $E=A(\bar{\mathbb{Q}})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. On applique le lemme 2.2 en prenant

$$F=\Gamma\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R},\quad e=e_1\ \text{ et }\ \eta=\sqrt{\varepsilon}.$$

En utilisant l'inégalité $(1+\hat{h}(a))^{1/2}\le(1+N(a))$, on en déduit que l'on peut recouvrir l'ensemble $\{a\in\mathcal{C}(\Gamma,\varepsilon)\mid\hat{h}(a)\ge e_3\}$ par un nombre fini d'ensembles dans chacun desquels deux points a et b vérifient

$$\hat{h}\left(\frac{a}{\sqrt{\hat{h}(a)}}-\frac{b}{\sqrt{\hat{h}(b)}}\right)\le\frac{1}{e_1^2}.$$

Ainsi l'inégalité de Vojta montre que l'ensemble $(\hat{h}(a_i))_{i\in I}$ est majoré par un réel $\nu' \geq e_3$ (sinon on pourrait exhiber des points $(a_{i_1}, p_{i_1}), \dots, (a_{i_m}, p_{i_m}) \in (V \setminus Z_V)(\bar{\mathbb{Q}})$ la contredisant). On a donc bien l'inégalité de hauteurs annoncée en posant

$$\nu = \nu' - \mu \cdot \min\left(\inf_{p\in P(\bar{\mathbb{Q}})} h_{\mathfrak{L}}(p), 0\right).$$

Vérifions que la valeur de μ annoncée convient. Le théorème 3.1 fournit la valeur $\mu = 4\Lambda^{\psi}$ où les constantes Λ et ψ sont données par le point (3.2). En utilisant $m = \dim V + 1$ et $\dim V \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned}2\Lambda &= 2^{m^2+1}(8m\dim V)^{m\dim V}(N_A+1)(N_P+1)(\deg V)^{3m}\\ &\leq 16^{m^2} m^{2m^2}(N_A+1)(N_P+1)(\deg V)^{3m}.\end{aligned}$$

En remarquant que $N_A \geq 2$ et $N_P \geq 1$, on a

$$16^{m^2} \leq [(N_A+1)(N_P+1)]^{2m^2-1} \quad \text{et} \quad m \leq (N_A+1)(N_P+1)$$

ce qui permet d'aboutir à l'inégalité

$$2\Lambda \leq \Big((N_A+1)(N_P+1)\deg V\Big)^{4m^2}.$$

Comme $\psi \geq 2$, on a donc

$$\mu = 4\Lambda^{\psi} \leq (2\Lambda)^{\psi} \leq \Big((N_A+1)(N_P+1)\deg V\Big)^{4m^2\psi}.$$

Finalement, si $m \geq 4$, on a

$$\begin{aligned}8m^2\psi &= 8m^2 \prod_{j=2}^{m(m-1)} (3j+1)\\ &\leq 8m^2 3^{m(m-1)-1}(m(m-1)+1)!\\ &\leq m^{m(m-1)+2} m^{2(m(m-1)+1)}\\ &\leq m^{3m^2}.\end{aligned}$$

L'inégalité restant vraie pour $m = 2$ et $m = 3$, on obtient la constante μ annoncée. Pour la constante ε, le théorème 3.1 donne $e_1 = 2^3\Lambda^{\psi}$ où les constantes Λ et ψ sont données par le point (3.2). Comme $m \geq 2$, on a $\psi \geq 7$, donc

$$\varepsilon^{-1} = 2^8 e_1^2 = 2^{14}\Lambda^{2\psi} \leq (2\Lambda)^{2\psi},$$

et en reprenant les majorations ci-dessus

$$\varepsilon^{-1} \leq \Big((N_A+1)(N_P+1)\deg V\Big)^{8m^2\psi} \leq \Big((N_A+1)(N_P+1)\deg V\Big)^{m^{3m^2}}. \quad \square$$

Finalement, on déduit le second énoncé par récurrence sur $\dim A$.

Démonstration du théorème 1.2. On montre le théorème par récurrence sur $\dim A$. Si $\dim A = 0$, le résultat est évident, on suppose donc dans la suite que $\dim A > 0$. En notant $W^{(1)}, \dots, W^{(r)}$ les composantes irréductibles de Z_V, on peut écrire

$$V = (V \setminus Z_V) \cup W^{(1)} \cup \dots W^{(r)}.$$

En particulier si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, on a pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$ et tout réel $\varepsilon > 0$

$$V_p(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon = \Big((V_p \setminus Z_{V_p})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon\Big) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{r} W_p^{(k)}(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon\right). \tag{4.1}$$

D'après [6, Théorème 1.3], on peut choisir un $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de V_p par son degré de sorte que le cardinal de $(V_p \setminus Z_{V_p})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ soit fini et majoré par une constante ne dépendant que de V_p par son degré. Comme $\deg V_p$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs pour $p \in P$, on en déduit le résultat sur le premier membre de la réunion dans (4.1) en appliquant le théorème 1.1. Il reste donc à traiter les autres facteurs de cette réunion, c'est-à-dire le cas où $V = Z_V$. Dans ce cas, par le théorème 2.1, il existe une sous-variété abélienne B non nulle de A telle que $V_p + B = V_p$ pour tout $p \in P$. On note V' l'image de V par l'application $A \times P \to A/B \times P$ et on fixe une hauteur de Néron–Tate $\hat{h}' : (A/B)(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ associée à un faisceau très ample et symétrique $\mathcal{L}'_0$ sur A/B. On obtient par hypothèse de récurrence l'existence d'une constante $\mu' > 0$, d'un réel $\varepsilon' > 0$ et d'une famille finie $\mathfrak{B}'$ de sous-variétés abéliennes de A/B vérifiant le théorème. En notant $\pi : A \to A/B$, on pose

$$\mathfrak{B} = \{\pi^{-1}(B') \subset A \mid B' \in \mathfrak{B}'\}.$$

Comme A/B est isogène à une sous-variété abélienne de A, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall a' \in (A/B)(\bar{\mathbb{Q}}), \quad \exists a \in (\pi^{-1}(a'))(\bar{\mathbb{Q}}), \quad \hat{h}(a) \leq \alpha \cdot \hat{h}'(a'). \tag{4.2}$$

D'autre part, comme $\mathcal{L}_0$ est ample, il existe une constante $\tau > 0$ telle que

$$\forall a \in A(\bar{\mathbb{Q}}), \quad \hat{h}'(\pi(a)) \leq \tau \cdot \hat{h}(a). \tag{4.3}$$

Vérifions que la constante $\mu = \mu' \cdot \alpha$, le réel $\varepsilon = \varepsilon' \cdot \tau^{-1}$ et la famille $\mathfrak{B}$ conviennent. On fixe un sous-groupe de rang fini $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ et on note Γ' l'image de Γ par π. Par hypothèse de récurrence, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une constante $\nu' \geq 0$ tels que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, il existe des points $a'_1, \dots, a'_n \in V'_p(\bar{\mathbb{Q}})$ avec

$$\hat{h}'\left(a'_i\right) \leq \mu' \cdot h_{\mathfrak{L}}(p) + \nu' \tag{4.4}$$

et des sous-variétés abéliennes $B'_1, \ldots, B'_n \in \mathfrak{B}'$ avec $a'_i + B'_i \subset V'_p$ tels que

$$V'_p(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma'_{\varepsilon'} = \bigcup_{i=1}^{n} \Big(a'_i + B'_i(\bar{\mathbb{Q}})\Big) \cap \Gamma'_{\varepsilon'}. \tag{4.5}$$

Les points (4.2) et (4.4) fournissent des points $a_1, \ldots, a_n \in V_p(\bar{\mathbb{Q}})$ avec

$$\pi(a_i) = a'_i \quad \text{et} \quad \hat{h}\,(a_i) \leq \mu \cdot h_{\mathfrak{L}}(p) + \alpha\nu'.$$

De plus, on a par définition de la sous-variété abélienne B

$$\pi^{-1}(V'_p) = V_p + B = V_p, \quad \pi^{-1}(a'_i + B'_i(\bar{\mathbb{Q}})) = a_i + \Big(\pi^{-1}(B'_i)\Big)\,(\bar{\mathbb{Q}}).$$

Finalement, avec le point (4.3) on a $\pi(\Gamma_\varepsilon) \subset \Gamma'_{\varepsilon'}$, donc il suffit de prendre l'image réciproque du point (4.5) par l'application π, puis de prendre l'intersection avec Γ_ε pour conclure. □

Bibliographie

[1] G. FALTING, « The general case of S. Lang's conjecture », in *Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (Abano Terme, 1991)*, Perspect. Math., vol. 15, Academic Press, San Diego, CA, 1994, p. 175-182.

[2] M. MCQUILLAN, « Quelques compléments à une démonstration de Faltings », *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I* **319** (1994), n° 7, p. 649-652.

[3] B. POONEN, « Mordell-Lang plus Bogomolov », *Invent. Math.* **137** (1999), n° 2, p. 413-425.

[4] G. RÉMOND, « Décompte dans une conjecture de Lang », *Invent. Math.* **142** (2000), n° 3, p. 513-545.

[5] ———, « Inégalité de Vojta en dimension supérieure », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **29** (2000), n° 1, p. 101-151.

[6] ———, « Sur les sous-variétés des tores », *Compos. Math.* **134** (2002), n° 3, p. 337-366.

[7] ———, « Approximation diophantienne sur les variétés semi-abéliennes », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **36** (2003), n° 2, p. 191-212.

[8] ———, « Inégalité de Vojta généralisée », *Bull. Soc. Math. Fr.* **133** (2005), n° 4, p. 459-495.

Jérôme VON BUHREN
Lycée Polyvalent Blaise Pascal
74 rue du Logelbach
68000 Colmar, France
E-mail: `jerome.vonbuhren@gmail.com`
URL: `http://www.math.u-bordeaux.fr/A2X/`