JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Nikolay MOSHCHEVITIN

Sur une question de N. Chevallier liée à l'approximation diophantienne simultanée

Tome 28, n° 3 (2016), p. 583-595.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2016__28_3_583_0>

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **28** (2016), 583–595

Sur une question de N. Chevallier liée à l'approximation diophantienne simultanée

par Nikolay MOSHCHEVITIN

Résumé. Nous prouvons dans cet article une conjecture proposée par Nicolas Chevallier concernant des matrices unimodulaires liées à l'approximation diophantienne simultanée des nombres réels.

Abstract. We prove a conjecture due to Nicolas Chevallier concerning unimodular matrices related to simultaneous Diophantine approximation to real numbers.

1. Approximation diophantienne simultanée

Soit n un entier naturel. Dans cet article nous considérons un vecteur réel ξ de la forme $\xi = (1, \xi_1, ..., \xi_n)$ dont les coordonnées sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$. Nous nous intéressons à l'approximation du sous-espace vectoriel engendré par ξ par des points entiers $\mathbf{z} = (q, a_1, ..., a_n)$. On considère la fonction

$$\psi_\xi(t) = \min_{q\in\mathbb{Z}, 1\le q\le t} \max_{1\le k\le n} ||q\xi_k||,$$

où $||\cdot||$ désigne la distance à l'entier le plus proche. Cette fonction est décroissante et constante par morceaux. Soient

$$q_0 = 1 \le q_1 < q_2 < .... < q_\nu < q_{\nu+1} < ...$$

les sauts de $\psi_\xi(t)$. Ils correspondent aux *vecteurs de meilleures approximations* $\mathbf{g}_\nu = (q_\nu, a_{1,\nu}, ..., a_{n,\nu}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ qui sont définis par les conditions

$$||q_\nu\xi_k|| = |q_\nu\xi_k - a_{k,\nu}|, \;\; 1 \le k \le n.$$

Notons que d'après le théorème de Minkowski sur les corps convexes on sait que

$$\psi_\xi(t) \le t^{-\frac{1}{n}},$$

Manuscrit reçu le 28 avril 2014, révisé le 10 juillet 2014, accepté le 4 septembre 2014.

Mathematics Subject Classification. 11J13, 11J70, 11K60.

Mots-clefs. Simultaneous Diophantine approximations, multidimensional continued fraction expansions.

Cette recherche est financée par la subvention de RFBR No. 15-01-05700-a et par la subvention du gouvernement russe, projet 11. G34.31.0053.

où

$$\max_{1\le k\le n} ||q_\nu \xi_k|| \le q_{\nu+1}^{-\frac{1}{n}}. \tag{1.1}$$

Dans le cas $n = 1$, d'après la théorie des fractions continues, nous savons que pour les approximations (1.1) nous avons une borne inférieure du même ordre, et même

$$(2q_{\nu+1})^{-1} < ||q_\nu \xi_1|| < q_{\nu+1}^{-1}.$$

Nous savons également que

$$\begin{vmatrix} q_\nu & q_{\nu+1} \\ a_{1,\nu} & a_{1,\nu+1} \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Ces simples observations conduisent au corollaire suivant.

Proposition 1.1. *Pour tout nombre irrationnel ξ_1, il existe une infinité de matrices unimodulaires*

$$\begin{pmatrix} q' & q'' \\ a_1' & a_1'' \end{pmatrix}$$

telles que

$$\max\{q'|q'\xi_1 - a_1'|, q''|q''\xi_1 - a_1''|\} \le 1.$$

La situation dans le cas $n \ge 2$ est tout à fait différente. Considérons une fonction décroissante φ telle que

$$\varphi(t) = o(1), \quad t \to \infty. \tag{1.2}$$

Le résultat principal de cet article est le théorème suivant.

Théorème 1.2. *Pour une fonction donnée φ qui décroît vers zéro lorsque $t \to \infty$, il existe un vecteur $(1, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$ dont les composantes sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$ et tel que pour toute matrice entière*

$$M = \begin{pmatrix} q' & q'' & q''' \\ a_1' & a_1'' & a_1''' \\ a_2' & a_2'' & a_2''' \end{pmatrix}, \quad \det M = \pm 1, \quad q', q'', q''' \ge 1, \tag{1.3}$$

on a

$$\max\left\{ \frac{\max_{j=1,2} |q'\xi_j - a_j'|}{\varphi(q')}, \frac{\max_{j=1,2} |q''\xi_j - a_j''|}{\varphi(q'')}, \frac{\max_{j=1,2} |q'''\xi_j - a_j'''|}{\varphi(q''')} \right\} \ge \varepsilon,$$

pour un certain nombre positif ε qui ne dépend que de la fonction φ.

Notre théorème 1.2 donne une réponse affirmative à la question posée par N. Chevallier dans [2] dans le cas $n = 2$. La méthode qui est présentée dans cet article permet d'obtenir des résultats similaires pour $n > 2$. Mais l'exposition en serait trop lourde. C'est pourquoi nous avons décidé de formuler et de prouver ici le théorème 1.2 ainsi que la proposition 1.3 qui suit uniquement en dimension 2.

La même méthode que le théorème ci-dessus permet de montrer le résultat suivant.

Proposition 1.3. *Il existe ξ_1, ξ_2 linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$ avec* 1 *et tels que le déterminant d'une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} q_{\nu_1} & q_{\nu_2} & q_{\nu_3} \\ a_{1,\nu_1} & a_{1,\nu_2} & a_{1,\nu_3} \\ a_{2,\nu_1} & a_{2,\nu_2} & a_{2,\nu_3} \end{pmatrix}, \quad \nu_1 < \nu_2 < \nu_3$$

(ici $(q_\nu, a_{\nu,1}, a_{\nu,2})$ sont les vecteurs de meilleures approximations) ne soit jamais égal à ± 1.

Nous tenons à rappeler deux résultats liés à l'approximation diophantienne simultanée.

Le premier résultat remonte à V. Jarník [6] (voir aussi [3] et [7]). Il affirme que pour $n \geq 2$ il y a un nombre infini de triplets de meilleures approximations consécutives $(\mathbf{g}_\nu, \mathbf{g}_{\nu+1}, \mathbf{g}_{\nu+2})$ formés de vecteurs *linéairement indépendants.*

Le second est dû à l'auteur [8]. Il affirme que pour tout $n \geq 2$ il existe $\xi_1, ..., \xi_n$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$ avec 1 et tels que pour tout ν la matrice

$$\begin{pmatrix} q_\nu & q_{\nu+1} & \cdots & q_{\nu+n} \\ a_{1,\nu} & a_{1,\nu+1} & \cdots & a_{1,\nu+n} \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots & \cdots \\ a_{n,\nu} & a_{n,\nu+1} & \cdots & a_{n,\nu+n} \end{pmatrix}$$

de $n+1$ vecteurs de meilleures approximations consécutifs est de rang ≤ 3. Ce résultat donne un contre-exemple à une conjecture de Lagarias [7].

Pour plus d'informations concernant les vecteurs de meilleures approximations nous nous référons à [2, 9, 10].

Pour une matrice M de la forme (1.3) nous définissons

$$R(M) = \max\left\{ \max_{j=1,2} |q'\xi_j - a'_j|, \max_{j=1,2} |q''\xi_j - a''_j|, \max_{j=1,2} |q'''\xi_j - a'''_j| \right\}.$$

Notre théorème peut se déduire de la convergence de l'algorithme bien connu [4, 1]. Cependant, il est possible de le prouver par l'approche ancienne de Jarník. C'est la raison pour laquelle nous donnons sa preuve dans cet article.

Théorème 1.4. *Supposons que $1, \xi_1, \xi_2$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. Il existe une suite M_ν de matrices de la forme* (1.3) *telle que $R(M_\nu) \to 0$ lorsque $\nu \to \infty$.*

Le théorème 1.2 sera prouvé dans les sections 2–5. Nous donnons une preuve du théorème 1.4 dans la section 6.

Je remercie Victoria Zhuravleva pour la traduction en français de cet article.

2. Lemmes préparatoires

Ici $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne, $\mathrm{dist}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ désigne la distance euclidienne entre les ensembles $\mathscr{A},\mathscr{B}$. Par $\mathrm{angle}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ nous notons l'angle entre les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Par $\mathrm{angle}(L,P)$ nous notons aussi l'angle entre les sous-espaces L et P de dimension un ou deux.

Pour deux vecteurs linéairement indépendants $\mathbf{z}',\mathbf{z}''\in\mathbb{R}^3$, nous définissons le sous-espace vectoriel

$$L(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')=\mathbb{R}\mathbf{z}'+\mathbb{R}\mathbf{z}'.$$

Pour $\mathbf{z}',\mathbf{z}''\in\mathbb{Z}^3$ nous considérons le réseau

$$\Lambda(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')=L(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')\cap\mathbb{Z}^3.$$

Notons que dans le cas où une paire $(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')\in\mathbb{Z}^3$ peut être complétée en une base de $\mathbb{Z}^3$, on a

$$\Lambda(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')=\langle\mathbf{z}',\mathbf{z}''\rangle_{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}\mathbf{z}'+\mathbb{Z}\mathbf{z}''.$$

Pour deux points entiers $\mathbf{z}',\mathbf{z}''$ vérifiant

$$L(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')\cap\mathbb{Z}^3=\langle\mathbf{z}',\mathbf{z}''\rangle_{\mathbb{Z}} \tag{2.1}$$

nous considérons un point $\mathbf{y}(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')$ qui complète la paire $\mathbf{z}',\mathbf{z}''$ en une base de $\mathbb{Z}^3$. Ensuite, nous définissons deux sous-espaces affines de dimension deux

$$L^{\pm}(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')=L(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')\pm\mathbf{y}(\mathbf{z}',\mathbf{z}''). \tag{2.2}$$

Nous allons introduire une quantité supplémentaire. Pour deux points entiers $\mathbf{z}',\mathbf{z}''$ vérifiant (2.1) nous considérons la quantité

$$\eta(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')=\min_{\mathbf{x}\in\Lambda(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')\setminus\mathbb{R}\mathbf{z}'}\mathrm{dist}(\mathbf{x},\mathbb{R}\mathbf{z}')>0. \tag{2.3}$$

Lemme 2.1. *Soit $\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^3$. Supposons que $\mathbf{z}',\mathbf{z}''\in\mathbb{Z}^3$ satisfont* (2.1) *et $\mathbf{z}\notin L(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')$. Considérons un point $\mathbf{w}=L^+(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')\cap\mathbb{R}\mathbf{z}$. Soit δ tel que*

$$\mathrm{angle}(L(\mathbf{z}',\mathbf{z}''),\mathbb{R}\mathbf{z})>\delta>0.$$

Supposons que

$$\mathbf{x}\in L^-(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')\cup L^+(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')$$

et

$$|\mathbf{x}|\geq 2|\mathbf{w}|. \tag{2.4}$$

Alors

$$\mathrm{dist}(\mathbf{x},\mathbb{R}\mathbf{z})\geq\frac{|\mathbf{x}|}{2}\sin\delta.$$

Démonstration. Notons $\mathbf{x}^*$ la projection orthogonale du point $\mathbf{x}$ sur le sous-espace $\mathbb{R}\mathbf{z}$, qui est de dimension un. Alors,

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{R}\mathbf{z}) = \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = |\mathbf{x} \pm \mathbf{w}| \sin\theta,$$

où $\theta \geq \delta$ est l'angle entre $\mathbf{x} \pm \mathbf{w}$ et $\mathbf{z}$. Ainsi

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{R}\mathbf{z}) \geq (|\mathbf{x}| - |\mathbf{w}|) \sin\delta \geq \frac{|\mathbf{x}|}{2} \sin\delta$$

(ici nous utilisons (2.4)). Le lemme 2.1 est prouvé. □

Du lemme 2.1 nous déduisons immédiatement

Corollaire 2.2. *Soit $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3$. Supposons que $\mathbf{z}', \mathbf{z}'' \in \mathbb{Z}^3$ satisfont* (2.1) *et $\mathbf{z} \notin L(\mathbf{z}', \mathbf{z}'')$. Alors il existe des nombres positifs $\delta(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{z}'')$ et $T(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{z}'')$ tels que pour tous les vecteurs $\xi = (1, \xi_1, \xi_2)$ vérifiant*

$$\operatorname{angle}(\xi, \mathbf{z}) \leq \delta(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{z}'')$$

et pour tous les vecteurs entiers $\mathbf{x} = (q, a_1, a_2), q \geq 1$ vérifiant

$$\mathbf{x} \in L^-(\mathbf{z}', \mathbf{z}'') \cup L^+(\mathbf{z}', \mathbf{z}'') \quad \textit{et} \quad |\mathbf{x}| \geq T(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{z}''),$$

on ait

$$\max_{j=1,2} |q\xi_j - a_j| \geq \varphi(q). \tag{2.5}$$

Il est clair que dans le corollaire 2.2 on peut considérer une collection finie de couples $(\mathbf{z}', \mathbf{z}'')$. Donc nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 2.3. *Soit $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3$. Soit $\mathfrak{C}$ une collection finie de couples $(\mathbf{z}', \mathbf{z}'')$ de points entiers tels que chacun d'eux satisfait* (2.1) *et $\mathbf{z} \notin L(\mathbf{z}', \mathbf{z}'')$. Alors il existe des nombres positifs $\delta(\mathbf{z}, \mathfrak{C})$ et $T(\mathbf{z}, \mathfrak{C})$ tels que pour tous les vecteurs $\xi = (1, \xi_1, \xi_2)$ vérifiant*

$$\operatorname{angle}(\xi, \mathbf{z}) \leq \delta(\mathbf{z}, \mathfrak{C})$$

et pour tous les vecteurs entiers $\mathbf{x} = (q, a_1, a_2), q \geq 1$ vérifiant

$$\mathbf{x} \in \bigcup_{(\mathbf{z}', \mathbf{z}'') \in \mathfrak{C}} (L^-(\mathbf{z}', \mathbf{z}'') \cup L^+(\mathbf{z}', \mathbf{z}'')) \quad \textit{et} \quad |\mathbf{x}| \geq T(\mathbf{z}, \mathfrak{C})$$

on ait l'inégalité (2.5).

Considérons un point entier $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}^3$ un sous-réseau de dimension deux tel que $\Lambda \ni \mathbf{z}$ et soit $\varepsilon > 0$; nous considérons l'ensemble des sous-réseaux

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \mathscr{L}(\mathbf{z}, \Lambda, \varepsilon) \\ &= \{\Lambda' \subset \mathbb{Z}^3 : \dim \Lambda' = 2,\ \mathbf{z} \in \Lambda',\ \operatorname{angle}(\operatorname{span}_{\mathbb{R}} \Lambda', \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \Lambda) < \varepsilon\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Lemme 2.4. *Considérons un ensemble $\mathscr{L}(\mathbf{z}, \Lambda, \varepsilon)$ de la forme* (2.6)*. Soit T un nombre réel strictement positif. Alors, il existe un réseau $\Lambda' \in \mathscr{L}(\mathbf{z}, \Lambda, \varepsilon)$ tel que pour tout point $\mathbf{x}$ qui satisfait*

$$\mathbf{x} \in \Lambda' \ \ et \ \ |\mathbf{x}| \leq T$$

on ait

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}\mathbf{z}.$$

Démonstration. Le lemme résulte de l'observation que tout ensemble de la forme (2.6) contient un nombre infini d'éléments. □

Lemme 2.5. *Soit $\mathbf{z}$ un point entier et $\Lambda \ni \mathbf{z}$ un sous-réseau de dimension deux de $\mathbb{Z}^3$. Considérons un point entier $\mathbf{z}'$ indépendant de $\mathbf{z}$. Alors il existe un nombre réel strictement positif ε^* et un sous-réseau de dimension deux $\Lambda_* \ni \mathbf{z}$ tels que*

$$\mathscr{L}_* = \mathscr{L}(\mathbf{z}, \Lambda_*, \varepsilon_*) \subset \mathscr{L}(\mathbf{z}, \Lambda, \varepsilon)$$

et pour tout $\Lambda \in \mathscr{L}_*$ on a

$$\Lambda \cap (L^-(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \cup L^+(\mathbf{z}, \mathbf{z}')) = \varnothing.$$

Démonstration. Le sous-réseau affine $L^-(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \cap \mathbb{Z}^3$ (ainsi que le sous-réseau $L^+(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \cap \mathbb{Z}^3$) se divise en sous-réseaux affines (de dimension un) Γ_i qui sont parallèles à $\mathbb{R}\mathbf{z}$:

$$L^-(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \cap \mathbb{Z}^3 = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} \Gamma_i.$$

Il suffit de traiter le cas de $L^-(\mathbf{z}, \mathbf{z}')$, par l'argument de la symétrie. Nous considérons deux points différents $\mathbf{w}_j \in L^-(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), j = 1, 2$, appartenant à deux sous-espaces affines voisins (de dimension un) Γ_i et Γ_{i+1}, respectivement. Pour certains $\mathbf{w}$ de l'intervalle ouvert d'extrémités $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$, le sous-espace $L(\mathbf{w}, \mathbf{z})$ contient un sous-réseau

$$\Lambda_* = L(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \cap \mathbb{Z}^3 \in \mathscr{L}.$$

(Si $\mathbf{z}'$ ne se situe pas dans $\mathrm{span}\Lambda$, alors les points $\mathbf{w}_j$ sont situés de part et d'autre du sous-espace $\mathrm{span}\Lambda$, mais si $\mathbf{z}'$ se situe dans $\mathrm{span}\Lambda$, alors les points $\mathbf{w}_j$ sont situés sur le même côté du sous-espace $\mathrm{span}\Lambda$.) Il est clair que, pour un certain ε_* suffisamment petit, l'ensemble $\mathscr{L}_*$ de la forme (2.6) possède la propriété désirée. □

D'après le lemme 2.5 on déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 2.6. *Soit $\mathfrak{C}$ une collection finie de vecteurs $\mathbf{z}'$, chacun étant indépendant de $\mathbf{z}$. Supposons que $\Lambda \ni \mathbf{z}$ est un sous-réseau entier de dimension deux. Alors il existe un ensemble*

$$\mathscr{L}_* = \mathscr{L}(\mathbf{z}, \Lambda_*, \varepsilon_*)$$

de la forme (2.6) *tel que pour tout* $\Lambda \in \mathscr{L}_*$ *on ait*

$$\Lambda \cap \left(\bigcup_{\mathbf{z}' \in \mathfrak{E}} (L^-(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \cup L^+(\mathbf{z}, \mathbf{z}')) \right) = \varnothing.$$

Pour deux points indépendants $\mathbf{z}$ et $\mathbf{z}^*$ nous considérons l'ensemble

$$\mathscr{P}(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) = \bigcup_P P,$$

où l'union est prise sur tous les sous-espaces vectoriels P de dimension deux tels que

$$\mathrm{span}\,(\mathbf{z}) \subset P \ \text{ et } \ \mathrm{angle}(P, L(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)) \geq \frac{3\pi}{8}.$$

Nous avons aussi besoin d'un ensemble

$$\overline{\mathscr{P}}(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) = \bigcup_P P,$$

où l'union est prise sur tous les sous-espaces vectoriels P de dimension deux tels que

$$\mathbb{R}\mathbf{z} \subset P \ \text{ et } \ \mathrm{angle}(P, L(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)) \geq \frac{\pi}{4}.$$

Il est clair que

$$\overline{\mathscr{P}}(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) \supset \mathscr{P}(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*).$$

Lemme 2.7. *Supposons que les points entiers* $\mathbf{z}$ *et* $\mathbf{z}^*$ *peuvent être complétés en une base de* $\mathbb{Z}^3$ *Alors*

$$\mathrm{dist}(\overline{\mathscr{P}}(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*), \Lambda(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) \setminus \mathbb{R}\mathbf{z}) \geq \frac{\eta(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)}{\sqrt{2}},$$

où $\eta(\cdot, \cdot)$ *est défini dans* (2.3).

Démonstration. La distance entre $\mathbf{x} \in \Lambda(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) \setminus \mathbb{R}\mathbf{z}$ et $\overline{\mathscr{P}}(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)$ n'est pas inférieure à la distance entre $\mathbf{x}$ et $\mathbb{R}\mathbf{z}$ multiplié par $\sin \frac{\pi}{4}$. □

3. Vecteurs $\mathbf{z}_\nu$

Dans cette section nous construisons une suite de vecteurs entiers $\mathbf{z}_\nu$ par une certaine procédure inductive. On pose

$$\mathbf{z}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{z}_2 = (0, 1, 0).$$

Maintenant, nous supposons que les vecteurs $\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_\nu, \nu \geq 2$, sont déjà définis.

Pour une fonction décroissante φ nous définissons la fonction ϕ qui est la fonction inverse de φ. Nous définissons

$$H_\nu = \phi(2^{-3}\eta(\mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}_{\nu-1})). \tag{3.1}$$

Considérons les ensembles

$$\mathfrak{C}_\nu = \bigcup_{\lambda=1}^{\nu} \bigcup_{\mu=1}^{\nu-1} \{(\mathbf{z}', \mathbf{z}'') \text{ satisfait (2.1)} :$$

$$\mathbf{z}_\nu \notin L(\mathbf{z}', \mathbf{z}''),\ \mathbf{z}' \in \Lambda_\lambda,\ |\mathbf{z}'| \le H_\lambda,\ \mathbf{z}'' \in \Lambda_\mu,\ |\mathbf{z}''| \le H_\mu\}$$

et

$$\mathfrak{E}_\nu = \bigcup_{\mu=1}^{\nu} \{\mathbf{z}' : (\mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}') \text{ satisfait (2.1)}, \mathbf{z}' \in \Lambda_\mu \, |\mathbf{z}'| \le H_\mu\}.$$

Il est clair que $\mathfrak{C}_\nu$ et $\mathfrak{E}_\nu$ sont des ensembles finis.

Posons

$$\delta_\nu = \delta(\mathbf{z}_\nu, \mathfrak{C}_\nu), \quad T_\nu = T(\mathbf{z}_\nu, \mathfrak{C}_\nu), \quad \nu \ge 2,$$

où $\delta(\cdot,\cdot)$ et $T(\cdot,\cdot)$ sont définis dans le corollaire 2.3. Bien sûr, nous pouvons supposer que $\delta_\nu < \delta_{\nu-1}/2$, où $\delta_{\nu-1}$ est défini à l'étape précédente de la construction (au début du processus on prend $\delta_1 = \delta_2 = \pi, T_1 = T_2 = 1$).

Nous supposons que

$$\text{angle}(\mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}_{\nu-1}) < \frac{\delta_{\nu-1}}{2}. \tag{3.2}$$

Nous devons définir maintenant le vecteur $\mathbf{z}_{\nu+1}$ de telle manière que le couple $(\mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}_{\nu+1})$ peut être complété en une base de $\mathbb{Z}^3$ et définir le réseau correspondant $\Lambda_{\nu+1} = \langle \mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}_{\nu+1}\rangle_{\mathbb{Z}}$. Nous allons le faire de la manière suivante. *Au début* nous allons définir un réseau $\Lambda_{\nu+1} \ni \mathbf{z}_\nu$ et *ensuite* nous allons choisir le vecteur $\mathbf{z}_{\nu+1}$ pour compléter le couple $(\mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}_{\nu+1})$.

Nous prenons un réseau $\Lambda_{\nu+1}$ satisfaisant les conditions

(i) $\mathbf{z}_\nu \in \Lambda_{\nu+1}$,
(ii) $\mathbb{Z}^3 \cap \operatorname{span}\Lambda_{\nu+1} = \Lambda_{\nu+1}$,
(iii) $\Lambda_{\nu+1} \subset \mathscr{P}(\mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}_{\nu-1})$,
(iv) pour chaque $\mathbf{x} \in \Lambda_{\nu+1}$ tel que $|\mathbf{x}| \le T_\nu$ on a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}\mathbf{z}_\nu$,
(v) $\Lambda_{\nu+1} \cap \left(\bigcup_{\mathbf{z}' \in \mathfrak{E}_\nu} (L^-(\mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}') \cup L^+(\mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}'))\right) = \varnothing$.

L'existence d'un tel réseau $\Lambda_{\nu+1}$ résulte du lemme 2.4 et du corollaire 2.6.

Maintenant, nous expliquons comment choisir le point entier $\mathbf{z}_{\nu+1} = (q_{\nu+1}, a_{1,\nu+1}, a_{2,\nu+1}) \in \Lambda_{\nu+1}$. Comme $\mathbf{z}_\nu \in \Lambda_{\nu+1}$ est un point primitif, le réseau $\Lambda_{\nu+1}$ se divise en réseaux affines parallèles (de dimension un) Γ^k de telle manière que $\Lambda_{\nu+1} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Gamma^k$, $\Gamma^0 = \mathbb{R}\mathbf{z}_\nu \cap \mathbb{Z}^3$. Ici $\Gamma^{\pm 1}$ sont les réseaux les plus proches de Γ^0. Si nous prenons $\mathbf{z}_{\nu+1} \in \Gamma^1$, nous voyons que le couple $(\mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}_{\nu+1})$ peut être complété en une base de $\mathbb{Z}^3$. Notons que si $|\mathbf{z}_{\nu+1}|$ est assez grand (et donc $q_{\nu+1}$ est grand) alors l'angle $\text{angle}(\mathbf{z}_{\nu+1}, \mathbf{z}_\nu)$ est petit.

Il est clair que cet angle tend vers zéro lorsque $|\mathbf{z}_{\nu+1}|$ tend vers l'infini. Il existe donc

$$W_\nu^1 = W_\nu(\delta(\mathbf{z}_\nu, \mathfrak{C}_\nu))$$

tel que si $|\mathbf{z}_{\nu+1}| \geq W_\nu^1$ alors

$$\text{angle}(\mathbf{z}_{\nu+1}, \mathbf{z}_\nu) < \delta_\nu/2. \tag{3.3}$$

On peut supposer que δ_ν est assez petit, alors

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \text{angle}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_\nu) < \delta_\nu\} \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \text{angle}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_{\nu-1}) < \delta_{\nu-1}\}. \tag{3.4}$$

Si nous choisissons $\mathbf{z}_{\nu+1}$, nous pouvons considérer la distance euclidienne

$$\rho_\nu = \text{dist}(\mathbf{z}_\nu, \mathbb{R}\mathbf{z}_{\nu+1}) = \eta(\mathbf{z}_{\nu+1}, \mathbf{z}_\nu).$$

Nous voyons d'après la définition que ρ_ν dépend du choix du point $\mathbf{z}_{\nu+1}$. Notons que pour tout choix de $\mathbf{z}_{\nu+1} \in \Gamma^{\pm 1}$ la valeur $q_{\nu+1}\rho_\nu$ sera du même ordre que le volume fondamental du réseau de dimension deux $\Lambda_{\nu+1}$, qui est déjà défini. Plus précisément, la quantité $\frac{q_{\nu+1}\rho_\nu}{\det \Lambda_{\nu+1}}$ est bornée inférieurement par une constante strictement positive.

Mais ρ_ν tend vers zéro lorsque $|\mathbf{z}_{\nu+1}|$ tend vers l'infini. Il existe donc

$$W_\nu^2 = W_\nu(\mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_\nu)$$

tel que pour tout $\mathbf{z}_{\nu+1} \in \Gamma^{\pm 1}$ vérifiant $|\mathbf{z}_{\nu+1}| > W_\nu^2$ on a $\rho_\nu \leq \rho_{\nu-1}/2$ et

$$\varphi\left(\frac{1}{64\rho_{\nu-1}\rho_\nu}\right) \leq \frac{1}{16 q_{\nu+1}\rho_\nu} \tag{3.5}$$

(ici $\rho_{\nu-1}$ supposé être défini au moyen des points $\mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_\nu$ à l'étape précédente de la construction).

Maintenant, nous fixons $\mathbf{z}_{\nu+1}$ avec

$$|\mathbf{z}_{\nu+1}| > \max(W_\nu^1, W_\nu^2).$$

Nous avons construit le point suivant $\mathbf{z}_{\nu+1}$. Pour le point construit les conditions (3.3), (3.4), (3.5) sont valables. Et le réseau correspondant $\Lambda_{\nu+1}$ satisfait (**i**) - (**v**). De plus, notre construction donne (3.2) avec ν remplacé par $\nu + 1$.

Maintenant, nous posons

$$\xi_{j,\nu} = \frac{a_{i,\nu}}{q_\nu}, \ \ j = 1, 2$$

et

$$\xi_j = \lim_{\nu \to \infty} \xi_{j,\nu}, \quad \xi = (1, \xi_1, \xi_2). \tag{3.6}$$

Bien sûr, nous pouvons supposer que $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$.

Nous voyons d'après (3.3), (3.4) que

$$\xi \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \text{angle}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_\nu) < \delta_\nu\} \quad \forall \nu. \tag{3.7}$$

Notons que pour ξ défini dans (3.6) nous avons

$$\mathrm{dist}(\mathbf{z}_\nu, \mathbb{R}\xi) \leq \sum_{k=\nu}^{\infty} \mathrm{dist}(\mathbf{z}_k, \mathbb{R}\mathbf{z}_{k+1}) \leq 2\rho_\nu,$$

et ainsi

$$\max_{j=1,2} |q_\nu \xi_j - a_{\nu,j}| \leq 4\rho_\nu. \tag{3.8}$$

Par ailleurs il faut noter que d'après (iii), il en résulte que

$$\xi \in \overline{\mathscr{P}}(\mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}_{\nu-1}), \quad \forall\, \nu,$$

et donc d'après le lemme 2.7 et la definition de H_ν (égalité (3.1)) pour tout $\mathbf{z} = (q, a_1, a_2) \in \Lambda_\nu \setminus \mathbb{R}\mathbf{z}_\nu$ avec $|\mathbf{z}| \geq H_\nu$ on a

$$\max_{j=1,2} |q\xi_j - a_j| \geq \varphi(H_\nu) \geq \varphi(|\mathbf{z}|) \geq \varphi(q). \tag{3.9}$$

Dans le reste de l'article, nous montrons que le vecteur ξ construit satisfait la conclusion du théorème 1.2.

4. Inégalités

Nous considérons l'intervalle

$$I_\nu = \left[\phi\left(\frac{1}{16 q_\nu \rho_{\nu-1}}\right), \frac{1}{64\rho_{\nu-1}\rho_\nu}\right]. \tag{4.1}$$

Lemme 4.1. *Si $z = (q, a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^3$ est linéairement indépendant avec $\mathbf{z}_{\nu-1}$ et $\mathbf{z}_\nu$ et*

$$q \in I_\nu, \tag{4.2}$$

alors

$$\max_{j=1,2} ||q\xi_j|| \geq \varphi(q). \tag{4.3}$$

Démonstration. Soit $\rho = \max_{j=1,2} ||q\xi_j||$. D'après la condition d'indépendance, nous avons

$$0 \neq \begin{vmatrix} q & a_1 & a_2 \\ q_{\nu-1} & a_{1,\nu-1} & a_{2,\nu-1} \\ q_\nu & a_{1,\nu} & a_{2,\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q & a_1 - q\xi_1 & a_2 - q\xi_1 \\ q_{\nu-1} & a_{1,\nu-1} - q_{\nu-1}\xi_1 & a_{2,\nu-1} - q_{\nu-1}\xi_2 \\ q_\nu & a_{1,\nu} - q_\nu \xi_1 & a_{2,\nu} - q_\nu 2\xi_2 \end{vmatrix}.$$

Ainsi, selon (3.8) nous avons

$$1 \leq 32 q \rho_{\nu-1}\rho_\nu + 8 q_\nu \rho \rho_{\nu-1}.$$

De la borne supérieure qui découle de (4.2), nous avons

$$\frac{1}{2} \leq 8 q_\nu \rho \rho_{\nu-1}.$$

Ainsi

$$\max_{j=1,2} ||q\xi_j|| = \rho \geq \frac{1}{16 q_\nu \rho_{\nu-1}} \geq \varphi(q)$$

(dans la dernière inégalité, nous utilisons la borne inférieure qui découle de (4.2)). □

5. Preuve du théorème 1.2

Notons que (3.5) montre que l'union $\bigcup_\nu I_\nu$ couvre une certaine demi-droite $[I, +\infty)$. Alors, d'après le lemme 4.1, si q est assez grand et le point (q, a_1, a_2) est indépendant avec deux points quelconques $\mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_\nu, \nu = 1, 2, 3, ...$ alors nous avons (4.3) et ces points n'ont pas d'intérêt pour notre propos. Donc, si nous avons une matrice unimodulaire à coefficients entiers

$$\begin{pmatrix} q & q'' & q''' \\ a_1' & a_1'' & a_1''' \\ a_2' & a_2'' & a_2''' \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

avec $\min\{|q'|, |q''|, |q'''|\}$ assez grand et

$$\max\left\{\frac{\max_{j=1,2}|q'\xi_j - a_j'|}{\varphi(q')}, \frac{\max_{j=1,2}|q''\xi_j - a_j''|}{\varphi(q'')}, \frac{\max_{j=1,2}|q'''\xi_j - a_j'''|}{\varphi(q''')}\right\} \leq 1, \tag{5.2}$$

alors pour certains ν', ν'', ν''' on a

$$\mathbf{z}' = (q', a_1', a_2') \in \Lambda_{\nu'}, \ \ \mathbf{z}'' = (q'', a_1'', a_2'') \in \Lambda_{\nu''}, \ \ \mathbf{z}''' = (q''', a_1''', a_2''') \in \Lambda_{\nu'''}.$$

Nous prenons ν', ν'', ν''' les quantités minimales à satisfaire cette propriété. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= (q', a_1', a_2') \in \Lambda_{\nu'} \setminus \Lambda_{\nu'-1}, \\ \mathbf{z}'' &= (q'', a_1'', a_2'') \in \Lambda_{\nu''} \setminus \Lambda_{\nu''-1}, \\ \mathbf{z}''' &= (q''', a_1''', a_2''') \in \Lambda_{\nu'''} \setminus \Lambda_{\nu'''-1}. \end{aligned}$$

Nous supposons que $\nu' = \min\{\nu', \nu'', \nu'''\} < \max\{\nu', \nu'', \nu'''\} = \nu'''$ (sinon le déterminant de la matrice (5.1) est nul, ce qui n'est pas possible).

Considérons le cas (A) où $\nu' \leq \nu'' < \nu'''$. Alors $\mathbf{z}''' \in L^-(\mathbf{z}'.\mathbf{z}'') \cup L^+(\mathbf{z}'.\mathbf{z}'')$ par l'unimodularité de la matrice (5.1). Cependant $\mathbf{z}''' \in \Lambda_{\nu'''}$ et $\mathbf{z}''' \notin \mathrm{span}(\mathbf{z}_{\nu'''-1})$. Ainsi par (iv) nous avons $|\mathbf{z}'''| \geq T_{\nu'''-1}$. Par (3.7) nous voyons que $\mathrm{angle}(\xi, \mathbf{z}_{\nu'''-1}) < \delta_{\nu'''-1}$.

Supposons que $(\mathbf{z}'.\mathbf{z}'') \in \mathfrak{C}_{\nu'''-1}$. Alors par le corollaire 2.3 nous avons (2.5) pour le point $\mathbf{z}'''$, c'est-à-dire

$$\frac{\max_{j=1,2}|q'''\xi_j - a_j'''|}{\varphi(q''')} \geq 1.$$

Nous avons donc une contradiction avec (5.2).

Supposons que $(\mathbf{z}'.\mathbf{z}'') \notin \mathfrak{C}_{\nu'''-1}$. Ensuite, par la définition de $\mathfrak{C}_{\nu'''-1}$, soit $|\mathbf{z}_{\nu'}| \geq H_{\nu'}$ ou $|\mathbf{z}_{\nu''}| \geq H_{\nu''}$. Ainsi, par (3.9) avec ν égal à ν' ou ν'', nous avons

$$\max\left\{\frac{\max\limits_{j=1,2}|q'\xi_j-a'_j|}{\varphi(q')},\frac{\max\limits_{j=1,2}|q''\xi_j-a''_j|}{\varphi(q'')}\right\}\geq 1.$$

Nous avons à nouveau une contradiction avec (5.2).

Donc, le cas (A) n'est pas possible.

Maintenant, nous considérons le cas (B) où $\nu'<\nu''=\nu'''$. Nous avons

$$\mathbf{z}'\in\Lambda_{\nu'},\quad \mathbf{z}'',\mathbf{z}'''\in\Lambda_{\nu''}\setminus\Lambda_{\nu''-1}.$$

Comme la matrice (5.1) est unimodulaire, le couple $(\mathbf{z}'',\mathbf{z}''')$ forme une base de $\Lambda_{\nu''}$. Ainsi

$$\mathbf{z}'\in L^-(\mathbf{z}_{\nu''},\mathbf{z}_{\nu''-1})\cup L^+(\mathbf{z}_{\nu''},\mathbf{z}_{\nu''-1}).$$

Mais alors

$$\mathbf{z}_{\nu''}\in L^-(\mathbf{z}_{\nu''-1},\mathbf{z}')\cup L^+(\mathbf{z}_{\nu''-1},\mathbf{z}').$$

Comme $\mathbf{z}_{\nu''}\in\Lambda_{\nu''}$, par (v) avec $\nu=\nu''-1$ nous voyons que $\mathbf{z}'\notin\mathfrak{E}_{\nu''-1}$. Cela signifie que $|\mathbf{z}'|\geq H_{\nu'}$. Donc par (3.9) nous avons

$$\frac{\max_{j=1,2}|q'\xi_j-a'_j|}{\varphi(q')}\geq 1.$$

Nous avons à nouveau une contradiction avec (5.2).

Donc, le cas (B) n'est pas possible.

Donc, dans le cas où $\min\{|q'|.|q''|.|q'''|\}\geq q_0(\varphi)$, nous avons

$$\max\left\{\frac{\max_{j=1,2}|q'\xi_j-a'_j|}{\varphi(q')},\frac{\max_{j=1,2}|q''\xi_j-a''_j|}{\varphi(q'')},\frac{\max_{j=1,2}|q'''\xi_j-a'''_j|}{\varphi(q''')}\right\}\geq 1.$$

Maintenant, nous prenons $\varepsilon=\varepsilon(\varphi)>0$ assez petit pour assurer l'inégalité nécessaire pour les vecteurs avec $q\leq q_0(\varphi)$. Le théorème 1.2 est prouvé. $\square$

6. Preuve du théorème 1.4

Dans cette section, nous considérons les vecteurs de meilleures approximations $\mathbf{z}_\nu=(q_\nu,a_{1,\nu},a_{2,\nu})\in\mathbb{Z}^3$ dans le sens de l'approximation simultanée de ξ_1,ξ_2 (voir [10]). Nous savons que

$$\max\left\{\max_{j=1,2}|q_\nu\xi_j-a_{j,\nu}|,\max_{j=1,2}|q_{\nu+1}\xi_j-a_{j,\nu+1}|\right\}\leq q_{\nu+1}^{-1/2}\to 0,\quad \nu\to\infty.$$

En outre, le couple $(\mathbf{z}_\nu,\mathbf{z}_{\nu+1})$ peut être étendu en une base de $\mathbb{Z}^3$. Le parallélogramme

$$\Pi_\nu=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3:\ \mathbf{x}=\lambda\mathbf{z}_\nu+\mu\mathbf{z}_{\nu+1},\ \lambda,\mu\in[0,1)\}.$$

forme un domaine fondamental du réseau de dimension deux $L(\mathbf{z}_\nu,\mathbf{z}_{\nu+1})\cap\mathbb{Z}^3$. Considérons le sous-espace affine $L^+(\mathbf{z}_\nu,\mathbf{z}_{\nu+1})$ et la projection orthogonale Π^*_ν de Π_ν sur $L^+(\mathbf{z}_\nu,\mathbf{z}_{\nu+1})$. Alors

$$\Pi^*_\nu=\Pi_\nu+\mathbf{e}_\nu,$$

où le vecteur $\mathbf{e}_\nu \in \mathbb{R}^3$ a la longueur

$$|\mathbf{e}_\nu| = (\det(L(\mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}_{\nu+1}) \cap \mathbb{Z}^3))^{-1} \asymp (q_{\nu+1} \cdot \max_{j=1,2} |q_\nu \xi_j - a_{j,\nu}|)^{-1} \to 0, \quad \nu \to \infty$$

(la dernière affirmation ici est le théorème 17 de [10] qui est une généralisation du théorème 9 de [5]). Comme Π_ν^* est un domaine fondamental pour $L(\mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}_{\nu+1}) \cap \mathbb{Z}^3$, il existe un point entier $\mathbf{z}^* = (q^*, a_1^*, a_2^*) \in \Pi_\nu^*$. Nous voyons que

$$\max_{j=1,2} |q^* \xi_j - a_j^*| = O(\max_{j=1,2} |q_\nu \xi_j - a_{j,\nu}| + \max_{j=1,2} |q_{\nu+1} \xi_j - a_{j,\nu+1}| + |\mathbf{e}_\nu|) \to 0, \quad \nu \to \infty.$$

Mais la matrice

$$\begin{pmatrix} q_\nu & q_{\nu+1} & q^* \\ a_{1,\nu} & a_{1,\nu+1} & a_1^* \\ a_{2,\nu} & a_{2,\nu+1} & a_2^* \end{pmatrix}$$

est unimodulaire. Le théorème 1.4 est prouvé. □

Bibliographie

[1] A. J. Brentjes, *Multidimensional continued fraction algorithms*, Mathematical Centre Tracts, vol. 145, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981, i+183 pages.

[2] N. Chevallier, « Best simultaneous Diophantine approximations and multidimensional continued fraction expansions », *Mosc. J. Comb. Number Theory* **3** (2013), n° 1, p. 3-56.

[3] H. Davenport & W. M. Schmidt, « Approximation to real numbers by algebraic integers », *Acta Arith.* **15** (1968/1969), p. 393-416.

[4] H. R. P. Ferguson & R. W. Forcade, « Generalization of the Euclidean algorithm for real numbers to all dimensions higher than two », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **1** (1979), n° 6, p. 912-914.

[5] V. Jarník, « Zum Khintchineschen "Übertragungssatz" », *Acad. Sci. URSS* **3**, *Travaux Inst. Math., Tbilissi* (1938), p. 193-216.

[6] ———, « Contribution à la théorie des approximations diophantiennes linéaires et homogènes », *Czechoslovak Math. J.* **4(79)** (1954), p. 330-353.

[7] J. C. Lagarias, « Best simultaneous Diophantine approximations. II. Behavior of consecutive best approximations », *Pacific J. Math.* **102** (1982), n° 1, p. 61-88.

[8] N. G. Moshchevitin, « On best simultaneous approximations », *Russ. Math. Surv.* **51** (1996), n° 6, p. 213-214.

[9] ———, « Best Diophantine approximations : the phenomenon of degenerate dimension », *London Mathematical Society* **338** (2007), p. 158-182.

[10] ———, « Khintchine's singular Diophantine systems and their applications », *Russ. Math. Surv.* **65** (2010), n° 3, p. 43-126.

Nikolay Moshchevitin
Moscow Lomonosov Université
Leninskie Gory 1
119991 Moscow, Russia
E-mail: `moshchevitin@gmail.com`