

# JOURNAL

de Théorie des Nombres  
de BORDEAUX

*anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*

Orlando CAU

**Delta-composantes des espaces de modules de revêtements**

Tome 24, n° 3 (2012), p. 557-582.

[http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB\\_2012\\_\\_24\\_3\\_557\\_0](http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2012__24_3_557_0)

© Société Arithmétique de Bordeaux, 2012, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://jtnb.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# Delta-composantes des espaces de modules de revêtements

par ORLANDO CAU

RÉSUMÉ. Nous nous intéressons aux composantes irréductibles des espaces de modules de  $G$ -revêtements et à leurs corps de définition. Nos résultats permettent de construire, quel que soit le groupe fini, de telles composantes définies sur  $\mathbb{Q}$ . Notre méthode laisse de plus une grande latitude quant au type de ramification des revêtements. Ces composantes sont obtenues par déformation de certains revêtements du bord des espaces de modules. Enfin, ces composantes sont aussi compatibles dans une tour d'espaces de Hurwitz ; nous obtenons des systèmes projectifs de composantes de la tour modulaire définis sur  $\mathbb{Q}$ .

ABSTRACT. *Delta-components of moduli spaces of covers.*

We are interested in irreducible components of moduli spaces of  $G$ -covers and their fields of definition. Our results allow us to build, for any finite group, such components defined over  $\mathbb{Q}$ . Our method provides a large scope for the ramification type of the covers. These components are obtained by deforming certain covers of the boundary of the moduli spaces. Finally, these components are also compatible in a tower of Hurwitz spaces; we get projective systems of components of the modular tower.

## 1. Introduction

L'espace de Hurwitz  $H_r(G)$  est l'espace de modules grossier pour la catégorie des  $G$ -revêtements de groupe  $G$  de la droite projective à  $r$  points de branchement. Il est lié au problème inverse de Galois par le théorème d'irréductibilité de Hilbert. Lorsque le centre du groupe  $G$  est trivial, un  $\mathbb{Q}$ -point de  $H_r(G)$  donne par spécialisation une extension galoisienne de  $\mathbb{Q}$  de groupe  $G$ . Un travail préliminaire à la recherche de  $\mathbb{Q}$ -points consiste à trouver des  $\mathbb{Q}$ -composantes irréductibles des espaces de Hurwitz.

Dans sa thèse [14] Wewers construit une compactification des espaces de Hurwitz, il montre aussi comment utiliser sa compactification pour créer de

---

Manuscrit reçu le 26 janvier 2011, révisé le 24 octobre 2011.

*Mots clefs.* Revêtement algébrique, espace de Hurwitz, composante de Harbater-Mumford, problème inverse de Galois, déformation.

*Classification math.* 12F12, 14H30, 14H10, 14D15.

nouveaux invariants, généralisant l’invariant canonique de l’inertie, pour les  $G$ -revêtements. Dans [5], Dèbes et Emsalem utilisent les méthodes de Wevers pour montrer que les composantes HM, introduites par Fried [9], sont permutées par le groupe de Galois absolu  $G_{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{Q}$ . La méthode consiste à déformer un revêtement de type HM vers un objet plus simple : un HM-revêtement admissible. En gros il s’agit d’un assemblage connexe de revêtements cycliques à 2 points de branchement. L’image par un élément de  $G_{\mathbb{Q}}$  d’un tel assemblage de revêtements reste un HM-revêtement admissible. Sous certaines conditions, ceci nous permet de calculer le corps de définition d’une composante HM. Nous nous proposons de généraliser la notion de revêtement HM et les méthodes s’y rapportant.

Soient  $G$  un groupe fini et  $\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_s)$  un  $s$ -uplet de sous-groupes de  $G$ . Fixons un  $s$ -uplet d’entiers  $(r_1, \dots, r_s)$  et notons  $r$  leur somme. Nous définirons une application

$$\Phi : \text{Comp}(H_{r_1}(G_1)) \times \dots \times \text{Comp}(H_{r_s}(G_s)) \longrightarrow \text{Comp}(H_r(G))$$

$$(M_1, \dots, M_s) \longmapsto M_1 \star \dots \star M_s$$

associant une composante  $M_1 \star \dots \star M_s$  de  $H_r(G)$  à tout  $s$ -uplet  $(M_1, \dots, M_s)$  de composantes  $M_i$  de  $H_{r_i}(G_i)$  pour  $i = 1, \dots, s$ . Cette composante  $M_1 \star \dots \star M_s$  sera particulièrement intéressante sous l’hypothèse suivante, dite de *complétude* du système de sous-groupes  $\mathbf{G}$  : quels que soient  $i = 1, \dots, s$  et  $h_1, \dots, h_s \in G$ , le groupe  $G$  est engendré par les sous-groupes

$$\{G_1^{h_1}, \dots, G_{i-1}^{h_{i-1}}, G_{i+1}^{h_{i+1}}, \dots, G_s^{h_s}\}.$$

Sous cette hypothèse, nous obtiendrons la formule suivante :

$$(1.1) \quad \forall \sigma \in G_{\mathbb{Q}}, (M_1 \star \dots \star M_s)^\sigma = M_1^\sigma \star \dots \star M_s^\sigma$$

qui permet de comprendre l’action de  $G_{\mathbb{Q}}$  sur la composante  $M_1 \star \dots \star M_s$  en fonction de son action sur les composantes  $M_i$ . Par exemple, si les composantes  $M_1, \dots, M_s$  ont pour corps de définition  $\mathbb{Q}$ , *i.e.*  $M_i^\sigma = M_i$  pour tout  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ , alors il en est de même pour la composante  $M_1 \star \dots \star M_s$ . L’ensemble des ces conclusions sont regroupées dans les énoncés de la proposition 2.10 et du théorème 3.2 qui sont les résultats principaux de cet article. Nous en déduisons le résultat suivant, qui est à rapprocher du théorème de Conway-Parker, annexe de [12].

**Corollaire 1.1.** *Soient  $G$  un groupe fini,  $r$  un entier supérieur à 2 et  $n$  le nombre de composantes irréductibles de  $H_r(G)$ . Alors l’espace de Hurwitz  $H_{nr}(G)$  contient une  $\mathbb{Q}$ -composante irréductible.*

La démonstration des énoncés principaux passe par les notions de *structure de dégénérescence* et de  $\Delta$ -composante. La première partie définit ces objets ; il s’agit de construire une sous-variété fermée  $\text{ni}(\Delta)$  de l’espace de Hurwitz  $H_r(G)$  à partir de composantes  $M_i$  d’espaces de Hurwitz associées

aux sous-groupes  $G_i$  de  $G$ . La deuxième partie tourne autour de la notion de système complet de sous-groupes. Nous verrons que cette hypothèse entraîne l'irréductibilité de  $\text{ni}(\Delta)$ . La troisième partie montre comment calculer le corps de définition de cette variété. Dans la dernière partie nous étudierons la compatibilité des  $\Delta$ -composantes dans la tour modulaire de Fried.

Je tiens à remercier P. Dèbes et M. Emsalem pour leurs encouragements ainsi que le rapporteur anonyme pour son examen approfondi de l'article et ses commentaires très utiles.

## 2. Espace de Hurwitz : étude topologique

Dans cette section nous rappelons la description topologique des composantes irréductibles de l'espace de Hurwitz puis définissons et étudions la notion de  $\Delta$ -composante qui est une généralisation naturelle de la notion de HM-composante introduite par M. Fried [9].

**2.1. Espace de Hurwitz et description combinatoire de ses composantes.** Rappelons que pour tout entier  $r > 1$  et tout groupe fini  $G$  on peut définir le champ (de Deligne-Mumford) des  $G$ -revêtements de groupe  $G$  de la droite projective dont le diviseur de branchement est de degré  $r$ . Ce champ admet un espace de modules grossier qui est un schéma normal sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/|G|])$  ; on le note  $H_r(G)$  et on l'appelle espace de Hurwitz. La propriété d'espace de modules grossier s'interprète de la manière suivante : les points de  $H_r(G)(\overline{\mathbb{Q}})$  correspondent aux classes d'isomorphismes de  $G$ -revêtements de la droite projective définis sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , de groupe de Galois  $G$  et ayant  $r$  points de branchement. De plus, l'action de  $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$  sur les points de cet espace correspond à l'action de  $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$  sur les revêtements. C'est-à-dire, si un point  $x$  représente la classe d'isomorphisme d'un revêtement  $f$ , alors le point  $x^\sigma$  représente la classe d'isomorphisme du revêtement  $f^\sigma$  ; ainsi le corps de définition du point  $x$  est le corps des modules du revêtement  $f$  représenté par  $x$ .

Le morphisme de champ qui à un  $G$ -revêtement associe son diviseur de branchement induit au niveau des espaces de modules grossiers un revêtement étale :

$$\Phi_{r,G} : H_r(G) \rightarrow U_r.$$

L'espace  $U_r$  désigne l'espace des modules grossier du champ des droites projectives muni d'un diviseur de degré  $r$ .

Nous avons besoin pour la suite, d'étudier le revêtement topologique induit par  $\Phi_{r,G}$ . Notons  $\mathcal{B}_0$  le groupe des difféomorphismes de la sphère de Riemann préservant son orientation, que l'on munit de la topologie "compact-ouvert". Pour chaque  $\mathbf{t} \in U_r(\mathbb{C})$ , on a un morphisme d'évaluation  $\varepsilon_{\mathbf{t}} : \mathcal{B}_0 \rightarrow U_r(\mathbb{C})$  qui est une fibration de Serre. Nous noterons  $\mathcal{B}_{0,\mathbf{t}}$  la fibre

de  $\mathcal{B}_0$  en  $\mathbf{t}$ ; il s'agit des éléments de  $\mathcal{B}_0$  conservant globalement  $\mathbf{t}$ . Cette fibration donne naissance à une suite longue d'homotopie, et en particulier à un épimorphisme de groupes

$$\delta_{\mathbf{t}} : \pi_1(U_r(\mathbb{C}), \mathbf{t}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{B}_{0,\mathbf{t}}).$$

Le groupe  $\pi_1(U_r(\mathbb{C}), \mathbf{t})$  est le groupe des tresses de Hurwitz à  $r$  brins, noté traditionnellement  $H_r$ ; il est engendré par  $r - 1$  tresses élémentaires  $\mathcal{Q}_1 \dots, \mathcal{Q}_{r-1}$  (la tresse  $\mathcal{Q}_i$  échange les points  $t_i$  et  $t_{i+1}$ ). Le groupe  $\pi_0(\mathcal{B}_{0,\mathbf{t}})$  est le *mapping class group*, noté  $M_{0,r}$  chez Birman [2]. On dispose d'une action extérieure de  $M_{0,r}$  sur  $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbf{t})$  qui composée avec le morphisme  $\delta_{\mathbf{t}}$  donne l'action du groupe des tresses sur le groupe fondamental  $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbf{t})$  :

$$\Upsilon : \pi_1(U_r(\mathbb{C}), \mathbf{t}) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbf{t})).$$

La notion classique de *bouquet topologique* pour  $\mathbf{t}$  permet d'expliciter davantage cette action : il s'agit d'un  $r$ -uplet de classes d'homotopie  $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_r)$  de lacets  $(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbf{t}$  basés en un point  $t_0 \notin \mathbf{t}$  vérifiant certaines conditions techniques (voir par exemple [5] section 1.1) lesquelles entraînent la propriété importante suivante : le  $r$ -uplet  $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_r)$  engendre le groupe fondamental topologique  $\pi_1^{\text{top}}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbf{t}, t_0)$  avec l'unique relation  $\Gamma_1 \dots \Gamma_r = 1$ . On a alors :

$$\Upsilon(\mathcal{Q}_i)(\Gamma_1, \dots, \Gamma_r) = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_{i-1}, \Gamma_{i+1}, \Gamma_{i+1}^{-1} \Gamma_i \Gamma_{i+1}, \Gamma_{i+2}, \dots, \Gamma_r).$$

D'autre part, la donnée d'un  $G$ -revêtement algébrique complexe  $f$  est équivalente à la donnée des points de branchement et d'un morphisme surjectif  $\phi_f : \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbf{t}, t_0) \rightarrow G$ , elle-même équivalente à la donnée des points de ramification, du choix d'un bouquet topologique et d'un  $r$ -uplet  $(g_1, \dots, g_r) \in G^r$  vérifiant les deux conditions suivantes :

- le  $r$ -uplet  $(g_1, \dots, g_r)$  engendre le groupe  $G$ ,
- le produit  $g_1 \dots g_r$  vaut 1.

L'ensemble des  $r$ -uplets vérifiant ces deux conditions sera noté  $\text{ni}_r^*(G)$ . Deux  $G$ -revêtements sont isomorphes si et seulement s'ils ont mêmes points de branchement et les  $r$ -uplets correspondants, calculés relativement à un même bouquet topologique, sont conjugués par un élément de  $G$ . L'ensemble  $\text{ni}_r^*(G)$  quotienté par la relation de conjugaison est appelé l'ensemble des classes de Nielsen et on le note  $\text{ni}_r(G)$ . Explicitement

$$\text{ni}_r(G) = \left\{ (g_1, \dots, g_r) \in G^r \mid \begin{array}{l} \langle g_1, \dots, g_r \rangle = G \\ g_1 \dots g_r = 1 \end{array} \right\} / \text{conj.}$$

où par "conj." nous entendons la conjugaison composante par composante par un même élément de  $G$ . Un bouquet topologique  $\Gamma$  induit donc une bijection que l'on note  $\text{BCD}_\Gamma$  entre la fibre de  $\Phi_{r,G}$  au-dessus de  $\mathbf{t}$  et l'ensemble  $\text{ni}_r(G)$  des classes de Nielsen.

L'action de monodromie de  $\pi_1(U_r(\mathbb{C}), \mathbf{t})$  sur  $\Phi_{r,G}^{-1}(\mathbf{t})$  est donnée par l'action du groupe des tresses : un  $G$ -revêtement  $f$  ayant pour description  $\text{BCD}_\Gamma(f) = (g_1, \dots, g_r)$  est transformé, par la tresse  $\mathcal{Q}_i$ , en un  $G$ -revêtement  $g$  ayant pour description  $\text{BCD}_{\Gamma(\mathcal{Q}_i)(\Gamma)}(g) = (g_1, \dots, g_r)$ . Un simple calcul nous donne :

$$\text{BCD}_\Gamma(g) = (g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1} g_i^{-1}, g_i, \dots, g_r).$$

En identifiant, *via*  $\text{BCD}_\Gamma$ , la fibre de  $\Phi_{r,G}$  au-dessus de  $\mathbf{t}$  et l'ensemble  $\text{ni}_r(G)$  des classes de Nielsen, on obtient une action du groupe des tresses  $H_r$  sur l'ensemble  $\text{ni}_r(G)$  qui est déterminée par les formules suivantes, pour les générateurs  $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_{r-1}$  de  $H_r$  : pour  $i = 1, \dots, r - 1$ ,

$$\mathcal{Q}_i(g_1, \dots, g_r) = (g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1} g_i^{-1}, g_i, \dots, g_r).$$

Par la théorie des revêtements topologiques les orbites de  $\text{ni}_r(G)$  sont en correspondance bijective avec les composantes connexes de  $H_r(G)(\mathbb{C})$ . Par les théorèmes "G.A.G.A.", les composantes connexes (topologie transcendante) de  $H_r(G)(\mathbb{C})$  sont en correspondance bijective avec les composantes connexes du schéma  $H_r(G)_\mathbb{C}$ . Comme  $H_r(G)_\mathbb{C}$  est normal, ses composantes connexes sont aussi ses composantes irréductibles. On en déduit le fait suivant : les composantes géométriquement irréductibles de  $H_r(G)$  sont en bijection avec les orbites de  $\text{ni}_r(G)$  sous l'action du groupe des tresses  $H_r$ .

De manière plus précise, soient  $\mathbf{t} \in U_r(\mathbb{C})$  et  $\Gamma$  un bouquet topologique pour  $\mathbf{t}$ . On considère l'application qui à un élément  $\mathbf{g}$  de  $\text{ni}_r(G)$  fait correspondre la composante irréductible du revêtement déterminé par  $(\mathbf{t}, \mathbf{g}, \Gamma)$ . On montre que cette application ne dépend ni du choix du bouquet topologique ni de  $\mathbf{t}$ . Elle nous permet l'identification canonique entre composantes géométriquement irréductibles de  $H_r(G)$  et orbites de l'action du groupe des tresses sur  $\text{ni}_r(G)$ . Nous identifierons toujours ces deux points de vue dans la suite. Pour insister encore sur ce fait, deux  $G$ -revêtements topologiques  $f$  et  $g$  de la droite projective complexe sont dans une même composante d'un espace de Hurwitz si et seulement si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

- (a) Il existe deux bouquets topologiques  $\Gamma_f$  et  $\Gamma_g$ , respectivement pour leurs diviseurs de branchement  $\mathbf{t}_f$  et  $\mathbf{t}_g$ , telle que  $\text{BCD}_{\Gamma_f}(f) = \text{BCD}_{\Gamma_g}(g)$ .
- (b) Pour tous bouquets topologiques  $\Gamma_f$  et  $\Gamma_g$ , il existe une tresse  $\mathcal{Q} \in H_r$  telle que  $\mathcal{Q}(\text{BCD}_{\Gamma_f}(f)) = \text{BCD}_{\Gamma_g}(g)$ .

Nous dirons qu'un  $r$ -uplet  $(g_1, \dots, g_r) \in G^r$  appartient à une composante géométriquement irréductible  $M$  de l'espace de Hurwitz  $H_r(G)$  lorsqu'il existe un  $G$ -revêtement  $f$  appartenant à la composante  $M$  et un bouquet topologique  $\Gamma_f$  pour  $\mathbf{t}_f$  tels que  $\text{BCD}_{\Gamma_f}(f) = (g_1, \dots, g_r)$ . Les propriétés

équivalentes (a) et (b) montrent qu'un  $r$ -uplet  $(g_1, \dots, g_r)$  appartient, au plus, à une composante  $M$  d'un espace de Hurwitz.

Pour conclure cette section on introduit quelques définitions utiles pour les applications en vue.

*Définition 2.1.* Soient  $G$  un groupe fini,  $r$  un entier et  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$  un  $r$ -uplet non ordonné de classes de conjugaison non triviales (*i.e.* différentes de la classe  $\{1\}$ ) de  $G$ . Nous noterons  $H_r(G, \mathbf{C})$  le sous-espace fermé de  $H_r(G)$  correspondant au sous-ensemble de  $\text{ni}_r(G)$  défini par :

$$\text{ni}_r(G, \mathbf{C}) = \left\{ (g_1, \dots, g_r) \in G^r \left| \begin{array}{l} \langle g_1, \dots, g_r \rangle = G \\ g_1 \dots g_r = 1 \\ \exists \sigma \in S_r, g_i \in C_{\sigma(i)} \end{array} \right. \right\} / \text{conj.}$$

L'espace de Hurwitz  $H_r(G)$  est la réunion disjointe des espaces  $H_r(G, \mathbf{C})$  où  $\mathbf{C}$  décrit les  $r$ -uplets non ordonnés de classes de conjugaison non triviales de  $G$ . Un revêtement  $f$  de  $H_r(G)$  appartient donc à un unique espace  $H_r(G, \mathbf{C})$ . Nous dirons que  $\mathbf{C}$  est l'invariant canonique de l'inertie de  $f$ ; en fait  $\mathbf{C}$  est le  $r$ -uplet non-ordonné de classes de conjugaison de  $G$  correspondant au  $r$ -uplet  $\text{BCD}_\Gamma(f)$  où  $\Gamma$  est un bouquet topologique quelconque adapté à  $f$ .

Le lemme suivant est très classique et est connu sous le nom de *Branch cycle lemma*. Il permet de calculer le corps de définition de  $H_r(G, \mathbf{C})$ .

**Lemme 2.2.** *Soit  $f$  un  $G$ -revêtement de groupe de Galois  $G$  défini sur la clôture algébrique  $\bar{k}$  d'un corps  $k$  et d'invariant canonique de l'inertie  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$ . Alors le revêtement  $f^\sigma$  image de  $f$  par un élément  $\sigma \in G_k$  a pour invariant canonique de l'inertie  $(C_1^{\chi(\sigma)^{-1}}, \dots, C_r^{\chi(\sigma)^{-1}})$ , où  $\chi(\sigma)^{-1}$  est l'inverse dans  $\mathbb{Z}/\text{card}(G)\mathbb{Z}$  du caractère cyclotomique  $\chi(\sigma)$ .*

Pour chaque  $r$ -uplet  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$  non ordonné de classes de conjugaison de  $G$ , l'espace  $H_r(G, \mathbf{C})$  est défini sur le corps fixé par le sous-groupe d'indice fini de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$  des automorphismes  $\tau$  tel que  $\mathbf{C}^{\chi(\tau)} = \mathbf{C}$ ; on le note  $\mathbb{Q}_{\mathbf{C}}$ .

*Définition 2.3.* Soient  $G$  un groupe fini,  $C$  une classe de conjugaison et  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$  un  $r$ -uplet de classes de conjugaison.

- La classe de conjugaison  $C$  est dite *rationnelle* lorsque pour tout entier  $a$  premier au cardinal de  $G$  on a :  $C^a = C$ .
- Le  $r$ -uplet de classes de conjugaison  $\mathbf{C}$  est dit *globalement rationnel* lorsque pour tout  $a$  premier au cardinal de  $G$  il existe une permutation  $\tau \in S_r$  telle que pour tout entier  $i = 1, \dots, r$ , on a :  $C_i^a = C_{\tau(i)}$ .

Ainsi on a  $\mathbb{Q}_{\mathbf{C}} = \mathbb{Q}$  si  $\mathbf{C}$  est globalement rationnel. Pour finir rappelons la définition relative à la situation de rigidité.

*Définition 2.4.* En conservant les notations de la définition précédente, notons  $\text{sni}_r(G, \mathbf{C})$  le sous-ensemble de  $\text{ni}_r(G)$  défini par

$$\text{sni}_r(G, \mathbf{C}) = \left\{ (g_1, \dots, g_r) \in G^r \left| \begin{array}{l} \langle g_1, \dots, g_r \rangle = G \\ g_1 \dots g_r = 1 \\ g_i \in C_i \end{array} \right. \right\} / \text{conj.}$$

Le  $r$ -uplet de classes de conjugaison  $\mathbf{C}$  est dit *rigide* lorsque le cardinal de  $\text{sni}_r(G, \mathbf{C})$  est égal à 1.

## 2.2. Les $\Delta$ -composantes.

**2.2.1. Définitions.** Soient  $G$  un groupe fini et  $(G_1, \dots, G_s)$  un  $s$ -uplet de sous-groupes de  $G$ . Pour chaque sous-groupe  $G_i$ , on fixe un entier  $r_i$  et une composante irréductible  $M_i$  de  $\text{H}_{r_i}(G_i)$ . L'ensemble de ces données sera noté

$$\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$$

et appelé *une structure de dégénérescence*. Notons également  $r = r_1 + \dots + r_s$ .

Une structure de dégénérescence permet de créer des composantes particulières de l'espace de Hurwitz  $\text{H}_r(G)$  que l'on appelle  $\Delta$ -composante.

*Définition 2.5.* Soient  $G$  un groupe et  $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$  une structure de dégénérescence. Un  $\Delta$ -représentant est un  $r$ -uplet d'éléments de  $G$  de la forme :

$$\underbrace{(g_{1,1}, \dots, g_{1,r_1})}_{\mathbf{g}_1}, \dots, \underbrace{(g_{i,1}, \dots, g_{i,r_i})}_{\mathbf{g}_i}, \dots, \underbrace{(g_{s,1}, \dots, g_{s,r_s})}_{\mathbf{g}_s}$$

vérifiant la condition suivante :

(A) il existe  $h_1, \dots, h_s \in G$  tels que le  $r_i$ -uplet  $\mathbf{g}_i^{h_i} = (h_i g_{i,1} h_i^{-1}, \dots, h_i g_{i,r_i} h_i^{-1})$  appartient à la composante  $M_i$  de  $\text{H}_{r_i}(G_i)$ <sup>1</sup>.

Un point complexe  $f$  de  $\text{H}_r(G)$  est appelé  $\Delta$ -revêtement lorsqu'il existe un bouquet topologique  $\Gamma$  tel que :

$$\text{BCD}_\Gamma(f) \text{ est un } \Delta\text{-représentant.}$$

La composante d'un  $\Delta$ -revêtement (ou l'orbite d'un  $\Delta$ -représentant) est appelée une  $\Delta$ -composante. On note  $\text{ni}(\Delta)$  la réunion des  $\Delta$ -composantes.

*Exemple 2.6.* Soient  $G$  un groupe fini et  $\mathbf{C} = (C_1, C_1^{-1}, \dots, C_s, C_s^{-1})$  un  $2s$ -uplet de classes de conjugaison  $G$  de type HM selon la terminologie de Fried [9]. Choisissons un  $s$ -uplet  $(g_1, \dots, g_s)$  d'éléments des classes  $(C_1, \dots, C_s)$ .

---

1. En particulier, le  $r_i$ -uplet  $\{h_i g_{i,1} h_i^{-1}, \dots, h_i g_{i,r_i} h_i^{-1}\}$  engendre le sous-groupe  $G_i$  avec la relation  $\prod_{k=1}^{r_i} g_{i,k} = 1$ .

On note :

- $G_i = \langle g_i \rangle$ ,
- $\mathfrak{C}_i = \{g_i\}$ ,
- $M_i = H_2(G_i, \{\mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_i^{-1}\})$ ,
- $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$ .

Alors  $\Delta$  est une structure de dégénérescence, que l'on appellera structure HM. Dans ce cas les  $\Delta$ -composantes sont les composantes qui correspondent à des  $2s$ -uplets de la forme  $(g_1, g_1^{-1}, \dots, g_s, g_s^{-1})$  où  $g_i \in C_i$  pour  $i = 1, \dots, s$ . Il s'agit exactement des composantes HM introduites par Fried [9]. Les composantes HM ont été étudiées par Dèbes, Emsalem et Fried ; ils ont montré qu'elles sont permutées par l'action du groupe de Galois absolu de  $\mathbb{Q}_C$  [5] ; nous reviendrons plus en détails sur cette question dans la partie 3.

L'ensemble  $ni(\Delta)$  est une donnée importante dans le contexte de l'article. Nous introduisons une relation d'équivalence sur les structures de dégénérescence :  $\Delta \equiv \Delta'$  si et seulement si  $ni(\Delta) = ni(\Delta')$ .

**Proposition 2.7.** *Soient  $G$  un groupe fini et  $\Delta = (G, G_i, (M_i)_i)$  une structure de dégénérescence.*

- (i) *Si  $\sigma \in S_s$  et  $\Delta_\sigma$  désigne la structure de dégénérescence  $(G, G_{\sigma(i)}, (M_{\sigma(i)})_i)$ , alors  $\Delta \equiv \Delta_\sigma$ .*
- (ii) *Si  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s)$  est un  $s$ -uplet d'éléments de  $G$  et  $\Delta^{\mathbf{k}}$  désigne la structure de dégénérescence  $(G, (G_i^{k_i})_i, (M_i^{k_i}))$ , alors  $\Delta \equiv \Delta^{\mathbf{k}}$ .*

*Ici  $G_i^{k_i} := k_i G_i k_i^{-1}$  et  $M_i^{k_i}$  est la composante correspondant à la composante  $M_i$  dans l'espace de Hurwitz  $H_{r_i}(G_i^{k_i})$  via l'isomorphisme  $f_{k_i} : G_i \mapsto G_i^{k_i}$  qui envoie  $x$  sur  $x^{k_i} := k_i x k_i^{-1}$ .*

**Démonstration.** Pour (i) il suffit de montrer que si  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s)$  est un  $\Delta$ -représentant alors il existe une tresse  $\mathcal{T}$  telle que :

$$\mathcal{T}\mathbf{g} = (\mathbf{g}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{g}_{\sigma(s)}).$$

On peut aussi supposer que  $\sigma$  est une transposition, par exemple  $\sigma = (1\ 2)$ . On doit alors montrer qu'il existe une tresse  $\mathcal{T}$  telle que :

$$\mathcal{T}\mathbf{g} = (\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1, \dots).$$

On va utiliser le lemme suivant.

**Lemme 2.8.** *Soient  $G$  un groupe fini et  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_r) \in G^r$  tels que le produit  $g_1 \dots g_r$  soit égal à 1. S'il existe des entiers  $k$  et  $i$  tels que le produit  $g_k \dots g_{k+i}$  soit égal à 1, alors il existe une tresse  $\mathcal{T}$  telle que :*

$$\mathcal{T}\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_{k-1}, g_{k+i}, g_k, \dots, g_{k+i-1}, g_{k+i+1}, \dots, g_r).$$

**Démonstration du lemme.** Il s'agit d'un simple calcul de tresses. On vérifie sans peine que

$$Q_k \dots Q_{k+i-1} \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_{k-1}, g_{k+i}^t, g_k, \dots, g_{k+i-1}, g_{k+i+1}, \dots, g_r)$$

où  $t = g_k \dots g_{k+i} = 1$ , ce qui permet de conclure. □

Les éléments de  $\mathbf{g}_1$  et  $\mathbf{g}_2$  ont pour produit 1, donc le produit

$$g_{1,1} \dots g_{1,r_1} g_{2,1} \dots g_{2,r_2}$$

vaut également 1. On peut utiliser le lemme 2.8 à  $r_2$  reprises et obtenir le résultat désiré.

Pour (ii), si  $\mathbf{g}$  est un  $\Delta$ -représentant et  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_s)$  un  $s$ -uplet vérifiant la condition (A) de la définition 2.5 pour la structure de dégénérescence  $\Delta$ , alors le  $s$ -uplet  $\mathbf{h.k} := (h_1 k_1, \dots, h_s k_s)$  vérifie la condition (A) pour la structure de dégénérescence  $\Delta^{\mathbf{k}}$ . On en déduit que  $\mathbf{g}$  est un  $\Delta^{\mathbf{k}}$ -représentant. □

*Exemple 2.9.* La structure HM introduite dans l'exemple 2.6 ne dépend pas, à équivalence de structure près, du choix du  $s$ -uplet  $(g_1, \dots, g_s)$  d'éléments des classes  $(C_1, \dots, C_s)$ .

**2.2.2. Construction de composantes par concaténation.** Etant donné un entier positif  $s$  et un  $s$ -uplet  $(r_1, \dots, r_s)$  d'entiers, nous noterons  $r$  la somme  $r_1 + \dots + r_s$ . Soient maintenant  $G$  un groupe fini,  $\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_s)$  un  $s$ -uplet de sous-groupes de  $G$  engendrant  $G$  et pour chaque entier  $i = 1, \dots, s$ , un  $r_i$ -uplet  $\mathbf{g}_i = (g_{i,1}, \dots, g_{i,r_i})$  de  $\text{ni}_{r_i}^*(G_i)$ . On définit  $\Phi^*(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s)$  comme étant le  $r$ -uplet de  $\text{ni}_r^*(G)$  obtenu en concaténant les  $r_i$ -uplets  $\mathbf{g}_i$ . De façon explicite, l'application  $\Phi^*$  est définie ainsi :

$$\begin{aligned} \Phi^* : \text{ni}_{r_1}^*(G_1) \times \dots \times \text{ni}_{r_s}^*(G_s) &\longrightarrow \text{ni}_r^*(G) \\ ((g_{1,1}, \dots, g_{1,r_1}), \dots, (g_{s,1}, \dots, g_{s,r_s})) &\longmapsto (g_{1,1}, \dots, g_{1,r_1}, \dots, g_{s,1}, \dots, g_{s,r_s}) \end{aligned}$$

Nous allons montrer que l'application  $\Phi^*$  composée avec l'application  $\text{ni}_r^*(G) \rightarrow \text{Comp}(H_r(G))$  passe au quotient en une application

$$\Phi : \text{Comp}(H_{r_1}(G_1)) \times \dots \times \text{Comp}(H_{r_s}(G_s)) \rightarrow \text{Comp}(H_r(G))$$

rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{ni}_{r_1}^*(G_1) \times \dots \times \text{ni}_{r_s}^*(G_s) & \xrightarrow{\Phi^*} & \text{ni}_r^*(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Comp}(H_{r_1}(G_1)) \times \dots \times \text{Comp}(H_{r_s}(G_s)) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Comp}(H_r(G)) \end{array}$$

En effet, de façon générale, si l'on note  $B_r$  le groupe des tresses du plan, le morphisme surjectif  $\lambda : \text{ni}_r^*(G) \rightarrow \text{ni}_r(G)$  est compatible aux actions respectives de  $B_r$  et  $\pi_1(U_r(\mathbf{C}))$  via le passage au quotient  $\ell : B_r \rightarrow \pi_1(U_r(\mathbf{C}))$ .

On en déduit une flèche  $B_r \setminus \text{ni}_r^*(G) \rightarrow \pi_1(U_r(\mathbf{C})) \setminus \text{ni}_r(G)$ . Cette flèche est surjective car  $\lambda$  l'est. L'injectivité découle du fait que toute conjugaison par un élément de  $G$  sur  $\text{ni}_r^*(G)$  est réalisée par l'action d'une tresse appartenant au noyau de  $\ell$ . Il en résulte que l'ensemble  $\text{Comp}(H_r(G))$ , qui s'identifie à l'ensemble  $\pi_1(U_r(\mathbf{C})) \setminus \text{ni}_r(G)$  des orbites de  $\pi_1(U_r(\mathbf{C}))$  sur  $\text{ni}_r(G)$ , est aussi l'ensemble des orbites de  $B_r$  sur  $\text{ni}_r^*(G)$ .

Or on dispose d'un morphisme de concaténation

$$B_{r_1} \times \cdots \times B_{r_s} \rightarrow B_r$$

défini sur les générateurs d'Artin  $Q_i$  de la façon suivante

$$(Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_s}) \rightarrow Q_{i_1} Q_{i_2+r_1}, \dots, Q_{i_s+r_1+\dots+r_{s-1}}.$$

L'application  $\Phi^*$  définie ci-dessus est clairement compatible aux actions de  $B_{r_1} \times \cdots \times B_{r_s}$  et  $B_r$  sur  $\text{ni}_{r_1}^*(G_1) \times \cdots \times \text{ni}_{r_s}^*(G_s)$  et  $\text{ni}_r^*(G)$  respectivement via le morphisme de concaténation. Il s'ensuit que si deux représentants  $(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s)$  et  $(\mathbf{g}'_1, \dots, \mathbf{g}'_s)$  dans  $\text{ni}_{r_1}^*(G_1) \times \cdots \times \text{ni}_{r_s}^*(G_s)$  sont dans la même orbite sous l'action de  $B_{r_1} \times \cdots \times B_{r_s}$ , leurs images par  $\Phi^*$  sont dans la même orbite sous l'action de  $B_r$ . D'où l'application annoncée

$$\Phi : \text{Comp}(H_{r_1}(G_1)) \times \cdots \times \text{Comp}(H_{r_s}(G_s)) \longrightarrow \text{Comp}(H_r(G))$$

$$(M_1, \dots, M_s) \longmapsto M_1 \star \cdots \star M_s.$$

rendant le diagramme ci-dessus commutatif.

De la même manière que pour la preuve de la partie (i) de la proposition 2.7, on montre que pour toute permutation  $\sigma \in S_s$

$$(2.1) \quad M_1 \star \cdots \star M_s = M_{\sigma(1)} \star \cdots \star M_{\sigma(s)}.$$

La composante  $M_1 \star \cdots \star M_s$  est, de manière évidente, une  $\Delta$ -composante où  $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$ . Lorsque l'ensemble  $\text{ni}(\Delta)$  est irréductible (*i.e.* lorsque le groupe de tresses agit de manière transitive sur les  $\Delta$ -représentants), on a l'égalité :

$$\text{ni}(\Delta) = M_1 \star \cdots \star M_s.$$

**2.3. Critère d'irréductibilité de  $\text{ni}(\Delta)$ .** Soient  $G$  un groupe et  $\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_s)$  un  $s$ -uplet de sous-groupes de  $G$ . Nous dirons que  $\mathbf{G}$  est un *système complet de sous-groupes*, lorsque quels que soient  $i = 1, \dots, s$  et  $h_1, \dots, h_s \in G$ , le groupe  $G$  est engendré par les sous-groupes

$$\{G_1^{h_1}, \dots, G_{i-1}^{h_{i-1}}, G_{i+1}^{h_{i+1}}, \dots, G_s^{h_s}\}.$$

Si  $\mathbf{G}$  est attaché à une structure de dégénérescence  $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$ , nous dirons que la structure de dégénérescence est complète lorsque  $\mathbf{G}$  l'est.

**Proposition 2.10.** *Soient  $G$  un groupe fini et  $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$  une structure de dégénérescence complète. Alors il existe une unique  $\Delta$ -composante dans l'espace de Hurwitz  $H_r(G)$ . Autrement dit l'ensemble  $\text{ni}(\Delta)$  est irréductible et égal à la composante  $M_1 \star \dots \star M_s$ .*

**Démonstration.** Il s'agit de démontrer que si  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_r)$  et  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$  sont deux  $\Delta$ -représentants, il existe une tresse  $\mathcal{T}$  telle que

$$\mathcal{T}\mathbf{g} = \mathbf{u}.$$

Par définition, il existe  $h_1, \dots, h_s$  telle que  $\mathbf{g}_i^{h_i} \in M_i$ . En utilisant le lemme 2.11 ci-dessous à  $s$  reprises (sous l'hypothèse de complétude), on obtient une tresse  $\mathcal{T}$  telle que :

$$\mathcal{T}\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1^{h_1}, \dots, \mathbf{g}_r^{h_s}).$$

De même pour le  $\Delta$ -représentant  $\mathbf{u}$ . On peut donc supposer pour démontrer l'énoncé que les éléments  $h_i$  de la condition (A) de la définition 2.5 pour  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{u}$  sont égaux à 1. Maintenant  $\mathbf{g}_i$  et  $\mathbf{u}_i$  sont dans la même composante  $M_i$ , il existe donc une tresse  $\mathcal{F}_i \in \pi_1(U_{r_i}(\mathbf{C}))$  permettant de passer de  $\mathbf{g}_i$  à  $\mathbf{u}_i$ . En concaténant des tresses  $\tilde{\mathcal{F}}_i \in B_{r_i}$  au-dessus de  $\mathcal{F}_i$  on obtient le résultat voulu. □

Le lemme technique utilisé dans la preuve ci-dessus est le suivant ; il est présent dans [11] sous une forme un peu différente.

**Lemme 2.11.** *Soient  $G$  un groupe fini et  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_r) \in G^r$ . Supposons qu'il existe des entiers  $i$  et  $k$  tel que  $g_k \dots g_{k+i} = 1$ . Soit  $t$  un élément du groupe engendré soit par (i)  $\{g_1, \dots, g_r\} \setminus \{g_k, \dots, g_{k+i}\}$  soit par (ii)  $\{g_k, \dots, g_{k+i}\}$ . Alors il existe une tresse  $\mathcal{Q}$  telle que :*

$$\mathcal{Q}(g_1, \dots, g_r) = (g_1, \dots, g_{k-1}, g_k^t, \dots, g_{k+i}^t, g_{k+i+1}, \dots, g_r).$$

*Démonstration.* Nous commençons par le cas de (ii). On peut supposer que  $t$  est un élément  $g_n$  avec  $n = k, \dots, k + i$ . On utilise alors la tresse  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{Q}_n \dots \mathcal{Q}_{k+i-1}$  :

$$\mathcal{T}_1\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k, \dots, g_{n-1}, g_n^{g_n}, \dots, g_{k+i}^{g_n}, g_n, g_{k+i+1}, \dots, g_r).$$

On remarque ensuite que le produit  $g_k \dots g_{n-1} g_n g_{n+1} g_n^{-1} \dots g_n g_{k+i} g_n^{-1} g_n$  vaut 1 ce qui permet d'utiliser le lemme 2.8 pour mettre  $g_n$  en position  $k$  dans le  $r$ -uplet. On obtient ainsi une tresse  $\mathcal{T}_2$  vérifiant

$$\mathcal{T}_2\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_{k-1}, g_n, g_k, \dots, g_{n-1}, g_n^{g_n}, \dots, g_{k+i}^{g_n}, g_{k+i+1}, \dots, g_r).$$

On applique enfin la tresse  $\mathcal{T}_3 := \mathcal{Q}_k \dots \mathcal{Q}_{n-1}$  sur le  $r$ -uplet  $\mathcal{T}_2\mathbf{g}$  :

$$\mathcal{T}_3\mathcal{T}_2\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_{k-1}, g_k^{g_n}, \dots, g_{n-1}^{g_n}, g_n, g_n^{g_n}, \dots, g_n g_{k+i} g_n^{-1}, g_{k+i+1}, \dots, g_r).$$

Cela donne le résultat voulu.

Pour le cas de figure (i), on remarque que l'inverse  $t^{-1}$  appartient aussi au groupe engendré par  $\{g_1, \dots, g_r\} \setminus \{g_k, \dots, g_{k+i}\}$ . La partie (ii) montre qu'il existe une tresse  $\mathcal{T}_4$  vérifiant

$$\mathcal{Q}(g_1, \dots, g_r) = (g_1^{t^{-1}}, \dots, g_{k-1}^{t^{-1}}, g_k, \dots, g_{k+i}, g_{k+i+1}^{t^{-1}}, \dots, g_r^{t^{-1}}).$$

Maintenant le produit  $g_1^{t^{-1}} \dots g_{k-1}^{t^{-1}} g_k \dots g_{k+i} g_{k+i+1}^{t^{-1}} \dots g_r^{t^{-1}}$  vaut 1 et  $t$  appartient au groupe engendré par ses éléments (ce groupe est simplement  $G$ ). Ceci nous permet d'appliquer de nouveau la partie (ii) avec  $k = 1$  et  $i = r$  pour obtenir la tresse voulue.  $\square$

*Exemple 2.12.* Lorsque  $\Delta$  est la structure HM de l'exemple 2.6, la proposition 2.10 est classique : en reprenant la terminologie de Fried [9] et les notations de l'exemple 2.6, si  $\mathbf{C}$  est HM-g-complet<sup>2</sup> alors il existe une unique composante HM dans l'espace de Hurwitz  $H_r(G, \mathbf{C})$ .

*Exemple 2.13.* Soient  $G$  un groupe fini et  $r$  un entier supérieur à 2. Notons  $M_1, \dots, M_s$  les différentes composantes de  $H_r(G)$  et  $\Delta := (G, (G)_i, (M_i)_i)$  (les sous-groupes  $G_i$  sont tous égaux au groupe  $G$ ). Lorsque  $s$  est supérieur ou égal à 2, la structure  $\Delta$  est complète.

### 3. Contrôle du corps de définition d'une $\Delta$ -composante

Nous passons au point de vue arithmétique de notre étude des  $\Delta$ -composantes : nous allons nous intéresser à l'action de Galois sur les structures de dégénérescence et sur les  $\Delta$ -composantes, et notamment à la question suivante : *quel est le corps de définition d'une  $\Delta$ -composante ?*

#### 3.1. Résultats principaux.

*Définition 3.1.* Soient  $G$  un groupe et  $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$  une structure de dégénérescence. Si  $\mathbb{K}$  est un corps de nombres, on définit une action du groupe de Galois absolu  $G_{\mathbb{K}}$  sur  $\Delta$  par la formule suivante :

$$\Delta^\sigma := (G, (G_i)_i, (M_i)^\sigma)_i.$$

On dit que  $\Delta$  est définie sur un corps de nombres  $\mathbb{K}$  lorsque :

$$\Delta \equiv \Delta^\sigma$$

pour tout  $\sigma \in G_{\mathbb{K}}$ .

Le théorème suivant montre que cette action correspond à l'action de  $G_{\mathbb{K}}$  sur les  $\Delta$ -composantes. Nous le démontrons plus bas ; voir proposition 3.9 et la partie 3.3.

---

2. La condition HM-g-complet revient à dire que la structure de dégénérescence associée est complète.

**Théorème 3.2.** *Soient  $G$  un groupe fini et  $\Delta$  une structure de dégénérescence. Si  $\mathbb{K}$  est un corps de nombres et  $\sigma \in G_{\mathbb{K}}$  alors*

$$\text{ni}(\Delta)^\sigma = \text{ni}(\Delta^\sigma).$$

*Si on suppose que  $\Delta$  est complète et définie sur un corps de nombres  $\mathbb{K}$  alors l'unique  $\Delta$ -composante  $M_1 \star \dots \star M_s$  est définie sur  $\mathbb{K}$ .*

*Exemple 3.3.* Lorsque  $\Delta$  est la structure HM des exemples 2.6 et 2.12, on obtient le théorème principal de [5] : si  $G$  est un groupe fini et  $\mathbf{C} = (C_1, C_1^{-1}, \dots, C_s, C_s^{-1})$  un  $2s$ -uplet de classes de conjugaison de type HM et globalement rationnel, alors les HM-composantes sont permutées par  $G_{\mathbb{Q}}$ . Cela découle immédiatement du théorème 3.2 et du fait suivant.

**Fait :** *Si le  $2s$ -uplet  $\mathbf{C} = (C_1, C_1^{-1}, \dots, C_s, C_s^{-1})$  est globalement rationnel alors la structure HM de l'exemple 2.6 est définie sur  $\mathbb{Q}$ .*

*Preuve du fait.* Sous l'hypothèse, pour tout  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  il existe  $\tau \in S_s$  tel que

$$C_i^{\chi(\sigma)} = C_{\tau(i)} \text{ ou } C_i^{\chi(\sigma)} = C_{\tau(i)}^{-1}, \quad i = 1, \dots, s$$

où  $\chi$  désigne le caractère cyclotomique. Supposons que l'on ait  $C_i^{\chi(\sigma)} = C_{\tau(i)}$  (l'autre cas est similaire). Il existe alors  $h_i \in G$  tel que  $g_i^{\chi(\sigma)} = h_i g_{\tau(i)} h_i^{-1}$ . Comme  $H_2(G_i, \{\mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_i^{-1}\})^\sigma = H_2(G_i, \{\mathfrak{C}_i^{\chi(\sigma)}, \mathfrak{C}_i^{-\chi(\sigma)}\})$ , on en déduit

$$H_2(G_i, \{\mathfrak{C}_i^{\chi(\sigma)}, \mathfrak{C}_i^{-\chi(\sigma)}\}) = H_2(G_{\tau(i)}, \{\mathfrak{C}_{\tau(i)}, \mathfrak{C}_{\tau(i)}^{-1}\})^{h_i}.$$

Si on note  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_s)$ , on a donc  $(\Delta_\tau)^\mathbf{h} = \Delta^\sigma$ . La proposition 2.7 permet de conclure que  $\Delta$  et  $\Delta^\sigma$  sont équivalentes.

**3.2. Corps de définition des composantes obtenues par concaténation.** La proposition 2.10 nous dit que si  $\Delta$  est une structure complète alors la sous-variété  $\text{ni}(\Delta)$  est égale à la composante  $M_1 \star \dots \star M_s$ . Le théorème 3.2 entraîne la formule suivante :

$$(M_1 \star \dots \star M_s)^\sigma = M_1^\sigma \star \dots \star M_s^\sigma.$$

Ce formalisme conduit de façon simple aux conclusions suivantes.

**Corollaire 3.4.** *Soient  $G$  un groupe fini et  $\Delta$  une structure de dégénérescence complète.*

- (i) *Si les composantes  $M_i$  sont permutées par  $G_{\mathbb{Q}}$  alors la composante  $M = M_1 \star \dots \star M_s$  est définie sur  $\mathbb{Q}$ . En particulier, si les composantes  $M_i$  sont définies sur  $\mathbb{Q}$  alors la composante  $M = M_1 \star \dots \star M_s$  est définie sur  $\mathbb{Q}$ .*
- (ii) *Si  $s$  désigne le nombre de composantes irréductibles de  $H_r(G)$ , alors l'espace de Hurwitz  $H_{sr}(G)$  contient une  $\mathbb{Q}$ -composante irréductible.*

**Démonstration.** Pour (i), pour tout  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ , on applique la formule

$$(M_1 \star \cdots \star M_s)^\sigma = M_1^\sigma \star \cdots \star M_s^\sigma.$$

Or les composantes  $M_i$  sont permutées par  $G_{\mathbb{Q}}$ . La commutativité de  $\star$  (équation 2.1 de la partie 2.2.2) permet de conclure que  $M = M^\sigma$  pour tout  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ . Pour (ii), notons  $\mathbf{G}$  le système complet de sous-groupes de  $G$  défini par  $G_i = G$  pour  $i = 1, \dots, s$  et  $M_1, \dots, M_s$  les différentes composantes irréductibles de  $H_r(G)$ . La composante  $M = M_1 \star \cdots \star M_s$  est définie sur  $\mathbb{Q}$ . En effet, dire que l'espace  $H_r(G)$  est défini sur  $\mathbb{Q}$  revient à dire que les composantes  $M_i$  sont permutées par l'action de Galois. La partie (i) permet de conclure.  $\square$

Par exemple, on peut utiliser le corollaire 3.4 dans le cas où les composantes  $M_1, \dots, M_s$  sont des espaces de Hurwitz correspondant à des situations rigides.

Rappelons la conclusion suivante du théorème de rigidité (voir par exemple [4] section 4.2) : si  $G$  est un groupe de centre trivial,  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$  un  $r$ -uplet rigide (définition 2.4) de classes de conjugaison rationnelles (définition 2.3) de  $G$ , alors l'espace de Hurwitz  $H_r(G, \mathbf{C})$  est irréductible, défini sur  $\mathbb{Q}$  et birationnel à  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^r$  (et contient donc des  $\mathbb{Q}$ -points).

**Théorème 3.5.** *Soient  $G = K \rtimes L$  un produit semi-direct de deux groupes et  $r_k$  et  $r_l$  des entiers. S'il existe un  $r_l$ -uplet rigide  $\mathbf{C}_L$  de classes de conjugaison rationnelles de  $L$  et un  $r_k$ -uplet rigide  $\mathbf{C}_K$  de classes de conjugaison de  $K$ , alors la composante*

$$M = H_{r_k}(K, \mathbf{C}_K) \star H_{r_k}(K, \mathbf{C}_K) \star H_{r_l}(L, \mathbf{C}_L) \star H_{r_l}(L, \mathbf{C}_L)$$

*de l'espace  $H_{2(r_k+r_l)}(G)$  est définie sur  $\mathbb{Q}$ . De plus, pour tout nombre premier  $\ell$  ne divisant pas l'ordre de  $G$ , la composante  $M$  contient des  $\mathbb{Q}_\ell$ -points.*

**Démonstration.** Pour la première partie, il suffit de constater que les composantes  $H_{r_k}(K, \mathbf{C}_K)$  et  $H_{r_l}(L, \mathbf{C}_L)$  sont définies sur  $\mathbb{Q}$  et que le système de sous-groupes  $(K, K, L, L)$  est complet. Fixons-nous ensuite un nombre premier  $\ell$  ne divisant pas l'ordre de  $G$ . La présence de  $\mathbb{Q}$ -points dans les espaces de Hurwitz  $H_{r_k}(K, \mathbf{C}_K)$  et  $H_{r_l}(L, \mathbf{C}_L)$  fournit (par extension des scalaires) des  $\mathbb{Q}_\ell$ -points. La méthode de patching [13] permet alors de recoller ces  $\mathbb{Q}_\ell$ -points pour construire un  $\mathbb{Q}_\ell$ -point dans l'espace de Hurwitz  $H_{2(r_k+r_l)}(G)$ . En reprenant les arguments de [5] section 2.3, on montre que, pour tout  $\ell$ , ce point appartient à la composante  $M$ .  $\square$

On peut par exemple utiliser ce théorème pour les groupes symétriques  $S_n$ , pour lesquels on connaît des triplets rigides ; notons  $\mathbf{C}_n$  l'un d'eux. Formons un produit semi-direct quelconque  $G = S_n \rtimes S_m$ . D'après le théorème 3.5, la composante

$$M = H_3(S_n, \mathbf{C}_n) \star H_3(S_n, \mathbf{C}_n) \star H_3(S_m, \mathbf{C}_m) \star H_3(S_m, \mathbf{C}_m)$$

de l'espace  $H_{12}(G)$  est définie sur  $\mathbb{Q}$ . Notons que Dèbes-Emsalem [5] et Deschamps [6] ont déjà construit, pour tout groupe  $G$ , des composantes irréductibles possédant des  $\mathbb{Q}_\ell$ -points. La méthode exposée ici permet une construction explicite avec un faible nombre de points de branchement, qui conduit à des variétés de dimension plus petite. Dans le cas ci-dessus, pour  $n = m = 3$  et  $S_3$  agissant sur lui-même par conjugaison, la méthode de [5] permet de construire une variété de dimension 32 possédant des points  $\ell$ -adiques pour tout premier  $\ell$  ne divisant pas l'ordre de  $G$ . Avec notre méthode la variété est de dimension 12.

**3.3. Compactification de Wewers de l'espace de Hurwitz et  $\Delta$ -revêtements admissibles.** Dans cette partie, nous décrivons rapidement la compactification de l'espace de Hurwitz due à Wewers. Nous renvoyons à [14] pour plus de détails. Nous définirons ensuite la notion centrale de  $\Delta$ -revêtement admissible et nous expliquerons la stratégie pour la preuve du théorème 3.2.

**3.3.1. Compactification de l'espace de Hurwitz.** Etant donné un groupe fini  $G$  et un entier  $r \geq 3$ , S. Wewers a construit une compactification de  $H_r(G)$  comme schéma sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/|G|])$ . Le revêtement étale  $\Theta : H_r(G) \rightarrow U_r$  s'étend en un morphisme ramifié que l'on note

$$\overline{\Theta} : \overline{H_r(G)} \rightarrow \overline{U_r}.$$

Les points géométriques du bord de l'espace  $\overline{U_r}$  correspondent à des arbres stables de droites projectives à  $r$  points marqués et à racine distinguée (voir par exemple [7]). Dans la suite nous utilisons uniquement un cas particulier de telles courbes.

*Définition 3.6.* Soit  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_s)$  un  $s$ -uplet d'entiers supérieurs à 2, notons  $r = r_1 + \dots + r_s$ . Un  $\mathbf{r}$ -peigne  $\mathcal{P}$  sur un corps algébriquement clos  $k$  est un  $k$ -arbre stable de genre 0 marqué en  $r$  points, composé d'une racine  $\mathcal{P}_0$  de genre 0 à laquelle sont attachées  $s$   $k$ -courbes de genre 0, que l'on note  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s$  et que l'on appelle composantes finales. Chaque composante finale  $\mathcal{P}_i$  est marquée par  $r_i$  points notés  $\bar{x}_i^1, \dots, \bar{x}_i^{r_i}$ ; on note aussi  $\bar{a}_i$  l'intersection de  $\mathcal{P}_i$  avec la racine  $\mathcal{P}_0$ .

Les peignes de [5] sont des cas particuliers : il s'agit de  $(2, \dots, 2)$ -peignes.

Les points de  $\overline{H_r(G)} \setminus H_r(G)$  au-dessus d'un  $\mathbf{r}$ -peigne  $\mathcal{P}$  représentent des *revêtements admissibles* de  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire des revêtements de  $\mathcal{P}$  modérément ramifiés aux points marqués et aux points singuliers vérifiant la propriété suivante : un générateur de l'inertie au-dessus d'un point singulier (*i.e.* intersection de deux branches) le long d'une branche est égal à l'inverse d'un générateur de l'inertie le long de l'autre branche.

Rappelons aussi que les composantes irréductibles de  $H_r(G)$  ont des bords disjoints dans  $\overline{H_r(G)}$ ; en particulier on ne change pas de composante irréductible de  $\overline{H_r(G)}$  quand on déforme un  $G$ -revêtement admissible.

**3.3.2.  $\Delta$ -revêtement admissible.** Soient  $G$  un groupe fini et  $\Delta$  une structure de dégénérescence. On note  $\mathbf{r}$  le  $s$ -uplet d'entiers  $(r_1, \dots, r_s)$  provenant de la structure de dégénérescence (*i.e.* pour tout  $i = 1, \dots, s$  l'entier  $r_i$  est égal au nombre de points de ramification des  $G$ -revêtements de groupe  $G_i$  appartenant à la composante  $M_i$ ). Considérons un  $\mathbf{r}$ -peigne  $\mathcal{P}$  (nous dirons que ce peigne est attaché à  $\Delta$ ) et un revêtement admissible  $\mathcal{F}$  sur un corps algébriquement clos  $k$ . Dans la suite nous utilisons des  $G$ -revêtements admissibles non ramifiés aux points singuliers. Cette hypothèse nous permet de parler du groupe fondamental étale du  $\mathbf{r}$ -peigne  $\mathcal{P}$  privé des points marqués.

Notons  $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \setminus \{\overline{x}_i^j, i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, r_i\}$  et pour  $i = 1, \dots, s$ ,  $\mathcal{P}_i^* = \mathcal{P}_i \setminus \{\overline{x}_i^j; j = 1, \dots, r_i\}$ . Notons également  $\mathcal{P}_i^* \rightarrow \mathcal{P}^*$  les différentes inclusions des composantes irréductibles du peigne. Par functorialité du  $\pi_1$ , on obtient des morphismes

$$\pi_1(\mathcal{P}_i^*, a) \rightarrow \pi_1(\mathcal{P}^*, b)$$

où  $a$  et  $b$  sont des points-base. Le revêtement admissible  $\mathcal{F}$  correspond à un morphisme surjectif  $\Phi : \pi_1(\mathcal{P}^*, b) \rightarrow G$ . On obtient pour chaque  $i = 1, \dots, s$  un morphisme qui correspond à la restriction du revêtement admissible  $\mathcal{F}$  à la composante  $\mathcal{P}_i$  :

$$\Phi_i : \pi_1(\mathcal{P}_i^*, a) \rightarrow G.$$

*Définition 3.7.* Nous dirons que  $\mathcal{F}$  est un  $\Delta$ -revêtement admissible lorsque

- le morphisme  $\Phi_0$  est trivial,
- pour chaque  $i = 1, \dots, s$ , il existe  $c_i \in G$  tel que le morphisme  $c_i \Phi_i c_i^{-1}$  a pour image  $G_i$  et représente un point de la composante  $M_i \subset \overline{H_{r_i}(G_i)}$ .

*Exemple 3.8.* Lorsque  $\Delta$  est une structure HM, un  $\Delta$ -revêtement admissible est un HM-revêtement admissible (cf. [5]).

Le théorème 3.2 se déduit du résultat suivant dont nous démontrerons les deux assertions dans les deux parties suivantes.

**Proposition 3.9.** *Soient  $G$  un groupe fini,  $\Delta$  une structure de dégénérescence et  $\mathbb{K}$  un corps de nombres.*

- (i) *Les  $\Delta$ -composantes d'un espace de Hurwitz sont les composantes qui contiennent un  $\Delta$ -revêtement admissible sur leur bord.*
- (ii) *Soient  $\sigma \in G_{\mathbb{K}}$  et  $\mathcal{F}$  un  $\Delta$ -revêtement admissible de groupe  $G$  défini sur  $\overline{\mathbb{K}}$ . L'image par  $\sigma$  de  $\mathcal{F}$  est un  $\Delta^\sigma$ -revêtement admissible.*

**Addendum.** Dans (i) le revêtement admissible dont la présence sur le bord caractérise une  $\Delta$ -composante peut être défini sur un corps de caractéristique  $p > 0$ . L'argument suivant permettra de se ramener à la caractéristique nulle et même de construire un  $\Delta$ -revêtement admissible défini sur  $\overline{\mathbb{K}}$ .

Soient  $G$  un groupe fini et  $\mathcal{C}$  une composante contenant sur son bord un  $\Delta$ -revêtement admissible  $\phi$  défini sur un corps  $\kappa$  algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ . Soit  $k$  un corps hensélien de caractéristique nulle de corps résiduel  $\kappa$ . Notons  $\mathcal{O}$  son anneau d'entiers. On peut prendre par exemple l'anneau des vecteurs de Witt de  $\kappa$ .

L'espace de base du revêtement  $\phi$  est un  $\mathbf{r}$ -peigne  $\mathcal{P}$  défini sur  $\kappa$ , il est constitué de la racine  $\mathcal{P}_0$  marquée en  $s$  points  $a_1, \dots, a_s$  où sont attachées  $s$   $\kappa$ -courbes  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s$  de genre 0 marquées ; pour chaque entier  $i = 1, \dots, s$ , la courbe  $\mathcal{P}_i$  est marquée par  $r_i$  points. On choisit une déformation de la courbe marquée  $\mathcal{P}_0$  sur l'anneau  $\mathcal{O}$  : c'est une droite projective  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}}^1$  marquée par  $s$  sections  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_s$  se spécialisant en  $a_1, \dots, a_s$ . Pour chaque section  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_s$ , on attache une copie de  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}}^1$  marquée par  $r_i$  points. On obtient ainsi une déformation  $\tilde{\mathcal{P}}$  du  $\mathbf{r}$ -peigne  $\mathcal{P}$  sur l'anneau  $\mathcal{O}$ .

Pour chaque entier  $i = 1, \dots, s$ , la restriction  $\phi_i$  de  $\phi$  à la composante  $\mathcal{P}_i$  est un revêtement appartenant à la composante  $M_i$  de l'espace de Hurwitz  $H_{r_i}(G_i)$ . Le théorème de spécialisation de Grothendieck permet d'étendre le revêtement modéré  $\phi_i$  en un  $\mathcal{O}$ -revêtement dont la fibre générique géométrique appartient encore à la composante  $M_i$  de l'espace de Hurwitz  $H_{r_i}(G_i)$ . La restriction de  $\phi$  à la racine est un revêtement trivial qui s'étend en un revêtement trivial sur l'anneau  $\mathcal{O}$ . Les données de recollement s'étendent en données de recollement. On obtient ainsi une déformation du revêtement admissible  $\phi$  sur l'anneau  $\mathcal{O}$  dont la fibre générique géométrique est un  $\Delta$ -revêtement admissible défini sur une clôture algébrique  $\bar{k}$  de  $k$  et appartenant au bord de la composante  $\mathcal{C}$ .

Ce revêtement admissible peut en fait être défini sur la clôture algébrique  $\bar{k}_0 \subset \bar{k}$  du corps de définition des points marqués, et même sur  $\mathbb{C}$  si l'on se fixe une inclusion  $\bar{k}_0 \subset \mathbb{C}$ . Une autre déformation permet alors de choisir les points marqués dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Le  $\Delta$ -revêtement admissible obtenu par cette dernière déformation est donc défini sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  et appartient encore au bord de la composante  $\mathcal{C}$ .

**Démonstration du théorème 3.2.** Si  $M$  est une  $\Delta$ -composante définie sur  $\overline{\mathbb{K}}$ , alors elle contient un  $\Delta$ -revêtement admissible sur son bord. L'image par  $\sigma \in G_{\overline{\mathbb{K}}}$  de ce  $\Delta$ -revêtement admissible est un  $\Delta^\sigma$ -revêtement admissible (proposition 3.9 (ii)) qui est sur le bord de la composante  $M^\sigma$ . On en déduit

que  $M^\sigma$  est une  $\Delta^\sigma$ -composante. Si  $\Delta$  est définie sur  $\mathbb{K}$ , l'image d'une  $\Delta$ -composante par un élément de  $G_{\mathbb{Q}}$  est une  $\Delta$ -composante. Si en plus  $\Delta$  est complète alors l'unique  $\Delta$ -composante est définie sur  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

**3.4. Démonstration de la proposition 3.9.** Les deux sections suivantes sont consacrées aux démonstrations des deux parties de la proposition 3.9.

**3.4.1. Caractérisation des  $\Delta$ -composantes.** Dans un premier temps, nous construisons une déformation, paramétrée par l'intervalle  $[0, 1]$  d'une sphère privée de certains points vers un peigne, le but étant de pouvoir définir et suivre un bouquet topologique le long de la déformation. Notre construction est *ad hoc* mais son résultat peut être vu comme une conséquence d'un énoncé plus général (voir [8]).

**Construction d'une déformation.** Soit  $s \geq 3$  un entier, et  $r_1, \dots, r_s$  des entiers supérieurs ou égaux à 2. Soit  $b_1, \dots, b_s$  des points équidistants sur le cercle de centre 0 et de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\}$  (qui sera identifié au plan complexe). Considérons  $s$  disques disjoints de centres respectifs  $b_1, \dots, b_s$  et de rayon  $\rho > 0$ .

On peut construire une famille de sphères marquées de  $r = r_1 + \dots + r_s$  points et paramétrée par  $t \in D$  (où  $D$  est le disque unité du plan complexe) de la façon suivante : pour tous entiers  $i$  et  $j$ ,  $1 \leq i \leq s$  et  $1 \leq j \leq r_i$ , définissons les marques  $x_{i,j}(t) = b_i + \frac{1}{2}\rho|t|e^{\frac{2\pi i}{r_i}j}$  qui sont  $r_i$  points équidistants sur le cercle de centre  $b_i$  et de rayon  $\frac{\rho|t|}{2}$  de  $\mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\}$ . On notera  $a_i(t)$  le point d'intersection du segment  $[0, b_i]$  avec le cercle de centre  $b_i$  et de rayon  $\frac{3}{4}\rho|t|$  (figure 3.1).

Lorsque  $t$  tend vers 0, les points  $x_{i,j}(t)$ ,  $1 \leq j \leq r_i$ , tendent vers  $b_i$ . Par des éclatements en  $(t, y) = (0, b_i)$ , d'équations locales  $vt = u(y - b_i)$  (où  $(u, v)$  sont des coordonnées homogènes), on complète la famille en une famille  $X \rightarrow D$ , dont la fibre en  $t = 0$  de  $X$  est notée  $\mathcal{P}$ ; elle est constituée de  $s$  fibres exceptionnelles  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s$ , isomorphes à des sphères attachées en des points  $x_1, \dots, x_s$  à une sphère principale  $\mathcal{P}_0$  (le point  $x_i \in \mathcal{P}_i$  étant confondu avec le point  $b_i \in \mathcal{P}_0$ ). La courbe  $\mathcal{P}$  est un  $\mathbf{r}$ -peigne. Les points  $x_{i,j}(t)$ ,  $1 \leq j \leq r_i$  se spécialisent, lorsque  $t$  tend vers 0, en  $r_i$  points sur un cercle  $B_i$  tracé sur  $\mathcal{P}_i$  centré en  $x_i$  : leurs coordonnées sur la fibre exceptionnelle sont données par les formules  $v_{i,j}(t) = \frac{1}{2}u_{i,j}(t)\rho e^{\frac{2\pi i}{r_i}j}$ , soit en coordonnées affines  $\frac{v_{i,j}}{u_{i,j}} = \frac{1}{2}\rho e^{\frac{2\pi i}{r_i}j}$ . Le cercle de centre  $b_i$  et de rayon  $\rho|t|$  se spécialise, lorsque  $t$  tend vers 0, en un cercle  $C_i$  sur  $\mathcal{P}_i$ , concentrique au précédent (dans les coordonnées affines  $\frac{v}{u}$ ,  $C_i$  est le cercle de centre  $x_i$  et de rayon  $\rho$ ).

Le cercle  $C'_i$  de centre  $b_i$  et de rayon  $\rho$  dans  $X_t$  se spécialise quant à lui, lorsque  $t$  tend vers 0, en lui-même sur  $\mathcal{P}_0$ . La couronne  $E_i(t)$  définie par les inégalités  $\rho|t| \leq |b_i - y| \leq \rho$ , se spécialise en l'union de deux disques fermés,

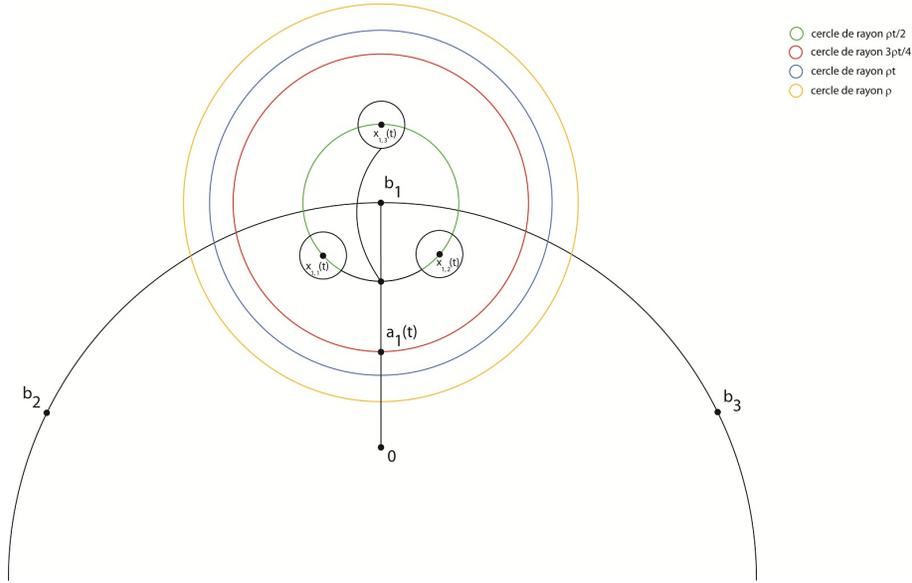


FIGURE 3.1.

l'un  $D_i$  sur  $\mathcal{P}_i$  de centre  $x_i$  et de bord  $C_i$ , l'autre  $D'_i$  sur  $\mathcal{P}_0$  de centre  $b_i$  et de bord  $C'_i$ .

Pour tout  $t \in D \setminus \{0\}$ , ôtons à la fibre  $X_t$  les couronnes  $E_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq s$ , et, pour  $t = 0$ , ôtons à  $X_0$  l'union  $D_i \cup D'_i$ . Le sous-espace marqué  $X' \subset X$  ainsi obtenu est muni d'une fibration  $X' \rightarrow D$  qui est localement triviale. La fibre en  $t$  est constituée de  $s$  disques ouverts disjoints  $\Delta_1(t), \dots, \Delta_s(t)$ , le disque  $\Delta_i(t)$  étant marqué par les  $r_i$  points  $S_i(t) := \{x_{i,1}(t), \dots, x_{i,r_i}(t)\}$  équirépartis sur un cercle concentrique au bord de  $\Delta_i(t)$ , et d'une sphère constante privée des  $s$  disques fermés de centre  $b_i$  et rayon  $\rho$ .

Les groupes fondamentaux de  $\Delta_i(t) \setminus S_i(t)$  basés en  $a_i(t)$  sont constants. On en déduit l'isomorphisme

$$\pi_1(\Delta_i(0) \setminus S_i(0); a_i(0)) \simeq \pi_1(\Delta_i(1) \setminus S_i(1); a_i(1)).$$

D'autre part en notant  $S_i := S_i(0) \cup \{x_i\}$ , on remarque que  $\Delta_i(0) \setminus S_i(0)$  est homotope à  $\mathcal{P}_i \setminus S_i$ , ce qui conduit à un isomorphisme

$$\pi_1(\mathcal{P}_i \setminus S_i; a_i(0)) \simeq \pi_1(\Delta_i(1) \setminus S_i(1); a_i(1))$$

et l'inclusion  $\Delta_i(1) \setminus S_i(1) \hookrightarrow X_1 \setminus S$  conduit à un morphisme  $\psi'_i : \pi_1(\mathcal{P}_i \setminus S_i; a_i(0)) \rightarrow \pi_1(X_1 \setminus S, a_i(1))$ , où  $S$  est la réunion  $\bigcup_{i=1}^s S_i(1)$ .

On dispose de même d'un morphisme

$$\psi_0 : \pi_1(\mathcal{P}_0 \setminus S_0, 0) \rightarrow \pi_1(X_1 \setminus S, 0).$$

Ici  $S_0 := \{b_0, \dots, b_s\}$ .

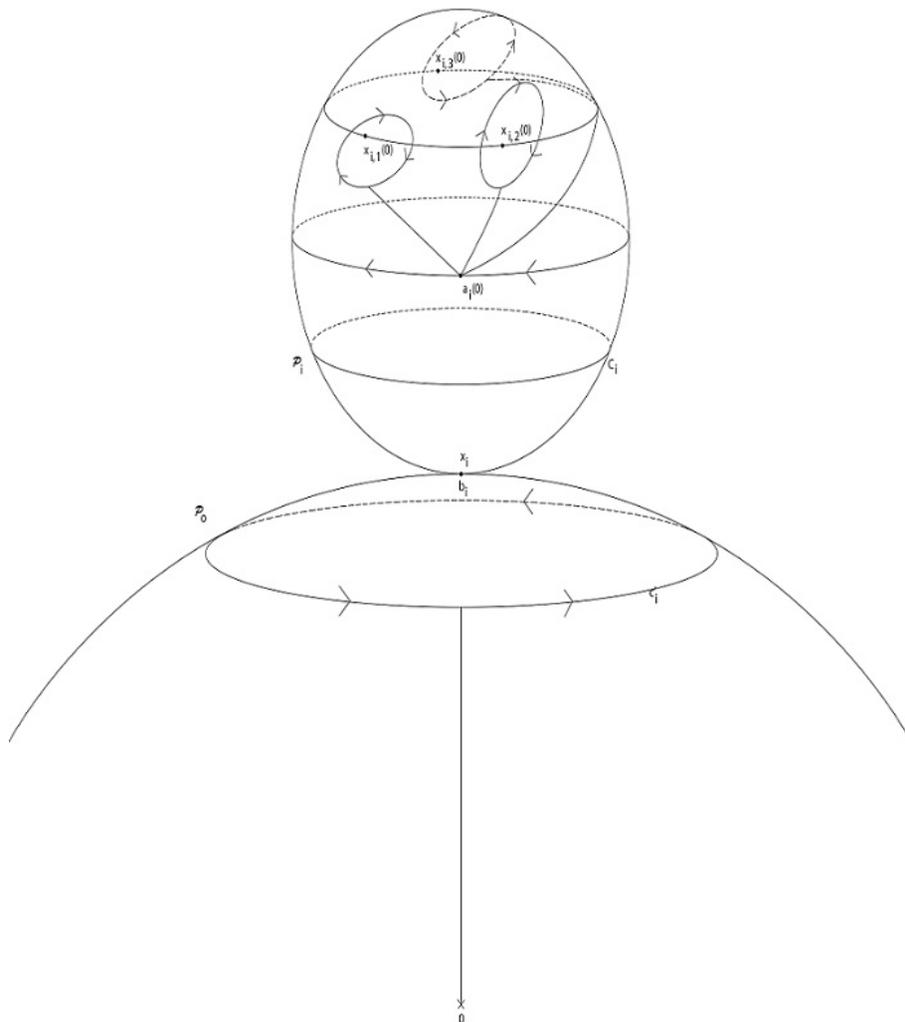


FIGURE 3.2.

Considérons pour chaque  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , un bouquet topologique sur  $\mathcal{P}_i$  basé en  $a_i(0)$  autour des points  $x_{i,1}(0), \dots, x_{i,s}(0), x_i$ , le dernier lacet étant le cercle de centre  $x_i$  passant par  $a_i(0)$  parcouru dans le sens positif vu de  $x_i$ . On note  $\Gamma_i := (\gamma_{i,1}, \dots, \gamma_{i,r_i}, \gamma_i)$  l'ensemble des classes d'homotopie de ces lacets. Ils vérifient les deux propriétés suivantes :

- le  $r + 1$ -uplet  $(\gamma_{i,1}, \dots, \gamma_{i,r_i}, \gamma_i)$  engendre le groupe  $\pi_1(\mathcal{P}_i \setminus S_i; a_i(0))$ ,
- le produit  $\gamma_{i,1} \dots \gamma_{i,r_i} \gamma_i$  vaut 1.

Notons de même  $\Gamma_0 = (\delta_1, \dots, \delta_s)$  un bouquet topologique sur  $\mathcal{P}_0 \setminus S_0$  basé en  $0$ , chaque  $\delta_i$  tournant une fois autour de  $b_i$  dans le sens positif vu de  $b_i$ .

Les segments joignant 0 à  $a_i(1)$  permettent de passer des points-base  $a_i(1)$  au point-base commun 0 et définissent des isomorphismes  $\pi_1(X_1 \setminus S, a_i(1)) \simeq \pi_1(X_1 \setminus S, 0)$ . Notons  $\psi_i : \pi_1(\mathcal{P}_i \setminus S_i; a_i(0)) \rightarrow \pi_1(X_1 \setminus S, 0)$  le composé de  $\psi'_i$  avec cet isomorphisme.

On constate que

$$\psi_i(\gamma_i)\psi_0(\delta_i) = 1$$

et donc que

$$\psi_i(\gamma_{i,1}) \dots \psi_i(\gamma_{i,r_i}) = \psi_0(\delta_i).$$

De la relation  $\delta_1 \dots \delta_s = 1$ , on déduit alors

$$\psi_1(\gamma_{1,1}) \dots \psi_1(\gamma_{1,r_1}) \dots \psi_s(\gamma_{s,1}) \dots \psi_s(\gamma_{s,r_s}) = 1.$$

On vérifie que les lacets précédents constituent un bouquet topologique basé en 0 pour  $X_1 \setminus S$  que l'on note  $\Gamma$ .

Dans la suite nous considérerons la restriction au segment  $[0, 1]$  de la famille  $X \rightarrow D$  que nous noterons  $Y \rightarrow [0, 1]$ . Par la propriété modulaire, il lui correspond un chemin  $c : [0, 1] \rightarrow \overline{U}_r(\mathbf{C})$ .

**Démonstration du théorème 3.9 (i).** On conserve les notations de la partie ci-dessus.

Soient  $G$  un groupe fini et  $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$  une structure de dégénérescence. Soient  $M$  une  $\Delta$ -composante de  $H_r(G)$  et  $\mathbf{g} = (g_{i,k})_{i,k}$  un  $\Delta$ -représentant de la composante  $M$ .

On considère le revêtement  $f$  de  $X_1 \setminus S$  associé au morphisme surjectif défini par  $\Phi(\psi_i(\gamma_{i,k})) = g_{i,k}$ , *i.e.*

$$\text{BCD}_\Gamma(f) = (g_{1,1}, \dots, g_{1,r_1}, \dots, g_{s,1}, \dots, g_{s,r_s}).$$

Il s'agit d'un  $\Delta$ -revêtement appartenant à la composante  $M$ , représenté par un point  $h \in H_r(G)$  au-dessus du point  $c(1) \in U_r(\mathbf{C})$ , qui représente  $X_1 \setminus S$ . Le morphisme  $\overline{H}_r(G) \rightarrow \overline{U}_r(\mathbf{C})$  étant propre, le chemin  $c$  se relève en un chemin  $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow \overline{H}_r(G)$ , qui représente un revêtement de  $Y$ , dont la spécialisation en 0 est un revêtement admissible  $F \rightarrow X_0$ . Pour chaque entier  $i = 0, \dots, s$ , on considère sa restriction  $f_i$  à la composante  $\mathcal{P}_i$  de  $\mathcal{P}$ . Le morphisme  $\Phi : \pi_1(X_1 \setminus S, 0) \rightarrow G$  définissant  $f$  permet de déduire le morphisme  $\Phi_i : \pi_1(\mathcal{P}_i \setminus S_i; a_i(0)) \rightarrow G$  définissant  $f_i$ ; on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{P}_i \setminus S_i; a_i(0)) & \xrightarrow{\psi_i} & \pi_1(X_1 \setminus S, 0) \\ & \searrow \Phi_i & \downarrow \Phi \\ & & G \end{array}$$

Nous allons montrer que les morphismes  $\Phi_0, \dots, \Phi_s$  vérifient les conditions de la définition 3.7 de  $\Delta$ -revêtement admissible. Pour cela nous allons calculer les différentes descriptions combinatoires  $\text{BCD}_{\Gamma_i}(f_i)$  des revêtements  $f_i$  par rapport aux bouquets topologiques  $\Gamma_i$  introduits ci-dessus.

Pour tout  $i \geq 1$  et  $k = 1, \dots, r_i$

$$\Phi_i(\gamma_{i,k}) = \Phi(\psi_i(\gamma_{i,k})) = g_{i,k}$$

et

$$\Phi_i(\gamma_i) = \prod_{k \neq 0} (\Phi_i(\gamma_{i,k}))^{-1} = \prod_{k=1}^{r_i} g_{i,k} = 1.$$

Ainsi le revêtement  $f_i$  est non ramifié en  $x_i$  et l'inertie au-dessus de  $x_{i,k}$  est égal à  $g_{i,k}$ , c'est-à-dire :

$$\text{BCD}_{\Gamma_i}(f_i) = (g_{i,1}, \dots, g_{i,r_i}, 1).$$

Par définition de  $\Delta$ -représentant, le revêtement  $f_i$  appartient à la composante  $M_i$  (à conjugaison près).

D'autre part, la relation  $\psi_0(\delta_i)\psi_i(\gamma_i) = 1$  montre que :

$$\Phi_0(\delta_i) = \Phi(\psi_0(\delta_i)) = \Phi(\psi_i(\gamma_i))^{-1} = (\Phi_i(\gamma_i))^{-1} = 1.$$

C'est-à-dire que la restriction à la racine  $\mathcal{P}_0$  est triviale. La composante  $M$  contient donc un  $\Delta$ -revêtement admissible sur son bord.

Réciproquement, partons d'un  $\Delta$ -revêtement admissible sur un  $r$ -peigne  $\mathcal{P}$  que l'on note  $Z_0 \rightarrow \mathcal{P}$ . Quitte à effectuer une déformation sur le bord de  $\overline{U_r(\mathbf{C})}$ , nous pouvons supposer que  $\mathcal{P} = X_0$ . Soit  $\overline{H}$  la composante connexe de  $\overline{H_r(G)}$  contenant le point représentant le revêtement admissible  $Z_0 \rightarrow X_0$ . L'espace  $\overline{H_r(G)}$  étant normal,  $\overline{H}$  est l'adhérence dans  $\overline{H_r(G)}$  d'une unique composante connexe  $H$  de  $H_r(G)$ . Le chemin  $c : [0, 1] \rightarrow \overline{U_r(\mathbf{C})}$  qui représente  $Y$  se relève en un chemin  $c' : [0, 1] \rightarrow \overline{H_r(G)}$  tel que  $c'(0)$  représente  $Z_0 \rightarrow X_0$ . Les calculs précédents montrent que  $c'(1) \in H$  représente un  $\Delta$ -revêtement (sa description  $\text{BCD}_{\Gamma}$  par rapport au bouquet  $\Gamma$  est un  $\Delta$ -représentant). □

*Remarque 3.10.* Dans la partie directe de la preuve, le revêtement admissible construit est topologique. Néanmoins on peut passer à des revêtements admissibles définis sur  $\mathbb{Q}$ . En effet, on peut d'abord algébriser le revêtement admissible en utilisant les principes G.A.G.A. sur chaque restriction du revêtement pour former un revêtement admissible algébrique complexe et ensuite descendre le corps de définition en remarquant que les points marqués de chaque composante  $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_s$  du  $r$ -peigne  $\mathcal{P}$  sont dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

**3.4.2. Action de Galois sur les  $\Delta$ -revêtements admissibles.** Nous passons à la démonstration de la partie (ii) de la proposition 3.9.

**Proposition 3.11.** *Soient :*

- $G$  un groupe fini et  $\Delta$  une structure de dégénérescence,
- $k$  un corps,  $\bar{k}$  une clôture séparable de  $k$  et  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}|k)$ ,
- $\mathcal{F}$  un  $\Delta$ -revêtement admissible de groupe  $G$  défini sur  $\bar{k}$ .

Alors l'image par  $\sigma$  de  $\mathcal{F}$  est un  $\Delta^\sigma$ -revêtement admissible.

**Démonstration.** Considérons un morphisme entre  $\bar{k}$ -schémas  $g : Y \rightarrow X$ ,  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}|k)$  et notons  $X^\sigma$  et  $Y^\sigma$  les images galoisiennes respectives de  $X$  et  $Y$ , c'est-à-dire le produit fibré de  $X \rightarrow \text{Spec}(\bar{k})$  par l'automorphisme de  $\text{Spec}(\bar{k})$  induit par  $\sigma$ . On choisit un point géométrique  $\underline{a} \in Y$ , on note  $a$  son image par  $f$ ,  $\underline{a}^\sigma$  son image par  $\sigma$  et  $a^\sigma$  l'image de  $a$  par  $\sigma$ .

Par functorialité du groupe fondamental étale, noté  $\pi_1^{\text{ét}}$ , on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\text{ét}}(Y^\sigma, \underline{a}^\sigma) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{ét}}(X^\sigma, a^\sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1^{\text{ét}}(Y, \underline{a}) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{ét}}(X, a) \end{array}$$

Considérons maintenant un  $G$ -revêtement  $f$  de  $X$ . Il lui correspond un morphisme surjectif  $\Phi : \pi_1^{\text{ét}}(X, a) \rightarrow G$  et on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\text{ét}}(Y^\sigma, \underline{a}^\sigma) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{ét}}(X^\sigma, a^\sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1^{\text{ét}}(Y, \underline{a}) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{ét}}(X, a) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & G \end{array}$$

Les différentes flèches à valeurs dans  $G$  du diagramme précédent ont une interprétation géométrique :

- l'image par  $\sigma$  du  $G$ -revêtement  $f$  correspond à la flèche  $\pi_1^{\text{ét}}(X^\sigma, a^\sigma) \rightarrow G$ ,
- le morphisme  $\pi_1^{\text{ét}}(Y, \underline{a}) \rightarrow G$  correspond au revêtement (non nécessairement connexe) obtenu à partir de  $f$  par le changement de base  $Y \rightarrow X$ ,
- le morphisme  $\pi_1^{\text{ét}}(Y^\sigma, \underline{a}^\sigma) \rightarrow G$  correspond à l'image galoisienne, par  $\sigma$ , de ce dernier.

Comme cas particulier, on considère l'inclusion  $\Phi_i : \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}$  d'une composante irréductible d'un  $\mathbf{r}$ -peigne, et comme  $G$ -revêtement de  $\mathcal{P}$  le  $\Delta$ -revêtement admissible  $\mathcal{F}$ . Par définition, le morphisme  $\pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{P}_i, \underline{a}) \rightarrow G$  a

pour image  $G_i$ ; on en déduit qu'il en est de même pour  $\pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{P}_i^\sigma, \underline{a}^\sigma) \rightarrow G$ . De plus, chaque  $\mathcal{P}_i$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1$  et le morphisme  $\pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{P}_i, \underline{a}) \rightarrow G$  correspond à un point de  $M_i$ , son image galoisienne  $\pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{P}_i^\sigma, \underline{a}^\sigma) \rightarrow G$  correspond donc à un point de  $M_i^\sigma$ .  $\square$

#### 4. Les $\Delta$ -composantes dans la tour modulaire

Dans cette partie nous nous intéressons au relèvement des  $\Delta$ -composantes dans une tour d'espaces de Hurwitz : la tour modulaire, qui a été introduite par M. Fried [9] et qui généralise la tour des courbes modulaires  $Y_0(p^n)$ . Elle est construite à partir des données suivantes :

- un groupe fini  $G$ ,
- un diviseur  $p$  du cardinal de  $G$ ,
- un  $r$ -uplet  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$  de  $p'$ -classes de conjugaison (c'est-à-dire dont l'ordre n'est pas divisible par  $p$ ).

Nous rappelons rapidement la construction; pour plus de détails voir [9], [3] ou [10]. L'ingrédient principal est la notion de revêtement de Frattini.

*Définition 4.1.* Un épimorphisme de groupe  $\Phi : G_1 \rightarrow G$  est dit revêtement de Frattini lorsque pour tout sous-groupe  $H$  de  $G_1$  :

$$\Phi(H) = G \iff H = G_1.$$

De plus, nous dirons que  $\Phi$  est un  $p$ -revêtement de Frattini quand  $\ker(\Phi)$  est un  $p$ -groupe.

Nous noterons  ${}_p\Phi : {}_p\tilde{G} \rightarrow G$  le  $p$ -revêtement universel de Frattini de  $G$ ; c'est le plus grand  $p$ -revêtement de Frattini ou le plus petit revêtement  $p$ -projectif de  $G$  [10, §22]. On définit ensuite une suite de sous-groupes caractéristiques à partir du noyau du morphisme  ${}_p\Phi : {}_p\tilde{G} \rightarrow G$  :

$$\ker_0 = \ker, \ker_1 = \ker_0^p[\ker_0, \ker_0], \dots, \ker_n = \ker_{n-1}^p[\ker_{n-1}, \ker_{n-1}], \dots$$

Ceci permet de réaliser le groupe profini  ${}_p\tilde{G}$  comme limite projective de groupe finis : pour chaque  $n \geq 0$ , si on note  ${}^n\tilde{G}$  le quotient  ${}_p\tilde{G}/\ker_n$ , on a

$${}_p\tilde{G} = \varprojlim_p {}^n\tilde{G}.$$

Le lemme suivant est généralement énoncé dans le cas où  $K$  est cyclique. Nous aurons besoin de cette version plus générale. Outre son rôle habituel dans la définition des tours modulaires (voir définition 4.3), le lemme 4.2 servira ici à relever à tous les étages de la tour une structure de dégénérescence donnée au niveau 0.

**Lemme 4.2.** *Soient  $p$  un nombre premier et  $\Phi : G' \rightarrow G$  un  $p$ -revêtement de Frattini. Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$  d'ordre  $\rho$  premier à  $p$ , alors il existe un relèvement  $H'$  de  $H$  en un sous-groupe de  $G'$  d'ordre  $\rho$ . De plus si*

$H'_1$  est un autre relèvement de  $H$  d'ordre  $\rho$ , il existe un élément  $h' \in \ker(\Phi)$  tel que

$$H'_1 = (H')^{h'}$$

*Démonstration.* La restriction  $\Psi$  du morphisme  $\Phi$  au sous-groupe  $\mathfrak{H} := \Phi^{-1}(H)$  permet de construire la suite exacte :

$$(4.1) \quad 1 \rightarrow \ker(\Psi) \rightarrow \mathfrak{H} \rightarrow H \rightarrow 1.$$

Les sections de cette suite correspondent aux relèvements de  $H$  de même ordre. D'autre part, les groupes  $H$  et  $\ker(\Psi)$  sont d'ordres premiers entre eux, ce qui nous permet d'utiliser le lemme de Schur-Zassenhaus : la suite se scinde et les sections sont toutes conjuguées entre elles par un élément de  $\ker(\Psi)$ . □

*Définition 4.3.* Soient  $G$  un groupe fini,  $p$  un diviseur premier du cardinal de  $G$  et  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$  un  $r$ -uplet de classes de conjugaison d'ordre premier à  $p$  (nous dirons  $p'$ ). A l'aide du lemme nous pouvons créer un  $r$ -uplet  $\mathbf{C}^n = (C_1^n, \dots, C_r^n)$  de classes de conjugaison de  ${}^n\tilde{G}$ . Notons  $H_n = H_r({}^n\tilde{G}, \mathbf{C}^n)$  et  $\varphi_n : H_{n+1} \rightarrow H_n$  le morphisme naturellement induit par  ${}^{n+1}\tilde{G} \rightarrow {}^n\tilde{G}$  au niveau des espaces de Hurwitz. La collection des espaces  $H_n$  et des morphismes  $\varphi_n$  est appelée *tour modulaire* associée au triplet  $(G, \mathbf{C}, p)$ .

Nous allons nous intéresser aux relèvements des  $\Delta$ -composantes dans la tour modulaire. L'objectif est, comme dans le contexte HM de [5], de trouver des tours de composantes irréductibles définies sur  $\mathbb{Q}$ .

Soit  $\Delta = (G, (M_i), (G_i))$  une structure de dégénérescence. Nous allons la relever dans la tour modulaire. On suppose que les sous-groupes  $G_i$  sont des  $p'$ -groupes (nous dirons que la structure  $\Delta$  est  $p'$ ). Le lemme 4.2 nous permet de relever les groupes  $G_i$  à tous les étages de la tour modulaire. On note  $G_i^n$  ces relèvements. L'isomorphisme<sup>3</sup> entre  $G_i$  et  $G_i^n$  permet de transporter  $(G_i, M_i)$  en  $(G_i^n, M_i^n)$ ; la structure  $\Delta$  se relève en la structure  $\Delta^n = ({}^n\tilde{G}, G_i^n, M_i^n)$ .

**Théorème 4.4.** *Soient  $G, p$  et  $\mathbf{C}$  comme au début du §4,  $\Delta$  une structure de dégénérescence que l'on suppose  $p'$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $\Delta^n$  la structure de dégénérescence relevée au niveau  $n$  de la tour modulaire associée à  $G, p$  et  $\mathbf{C}$ . Si  $\Delta$  est complète alors, pour tout  $n \geq 0$ ,  $\Delta^n$  est complète et il existe une unique  $\Delta^n$ -composante. De plus, si on suppose  $\Delta$  définie sur un corps de nombres  $\mathbb{K}$  alors la tour de ces composantes est définie sur  $\mathbb{K}$ .*

---

3. L'isomorphisme est défini à conjugaison près, donc la structure est bien définie à équivalence de structure près.

**Démonstration.** Soit  $n \geq 0$  un entier. Il s'agit de montrer que  $\Delta^n$  est complète. Soient  $i = 1, \dots, s$  et  $h_1, \dots, h_s \in {}^n_p\tilde{G}$ . Par la propriété de Frattini, dire que le groupe  ${}^n_p\tilde{G}$  est engendré par les sous-groupes

$$(G_1^n)^{h_1}, \dots, (G_{i-1}^n)^{h_{i-1}}, (G_{i+1}^n)^{h_{i+1}}, \dots, (G_s^n)^{h_s}$$

revient à dire que  $G$  est engendré par les sous-groupes

$$G_1^{t_1}, \dots, G_{i-1}^{t_{i-1}}, G_{i+1}^{t_{i+1}}, \dots, G_s^{t_s}$$

où  $t_i$  est l'image de  $h_i$  par le morphisme de Frattini  ${}^n_p\tilde{G} \rightarrow G$ . Cette seconde condition sur  $G$  correspond à l'hypothèse de complétude de  $\Delta$ .  $\square$

### Bibliographie

- [1] J. BERTIN ET M. ROMAGNY, *Champs de Hurwitz*. A paraître aux Mémoires de la SMF.
- [2] J. S. BIRMANN, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1975.
- [3] P. DÈBES, *Arithmétique et espaces de modules de revêtements*. Proceedings of the Number Theory conference in Zakopane, (K. Gyory, H. Iwaniec and J. Urbanowicz ed.), Walter de Gruyter, (1999), 75–102.
- [4] P. DÈBES, *Arithmétique des revêtements de la droite*. Notes de cours DEA/Master, chapitres 1–8, 275 pages, 2009. <http://math.univ-lille1.fr/~pde/pub.html>
- [5] P. DÈBES AND M. EMSALEM, *Harbater-Mumford components and towers of moduli spaces*. J. Math. Inst. Jussieu **5/03** (2006), 351–371.
- [6] B. DESCHAMPS, *Existence de points  $p$ -adiques pour tout  $p$  sur un espace de Hurwitz*. In Recent Developments in the Inverse Galois Problem Contemporary Math **186** (1995), 217–238.
- [7] M. EMSALEM, *Espaces de Hurwitz*. In Arithmétique des revêtements algébriques, Proceedings des Journées " Revêtements " (St-Etienne (2000)), Séminaires et Congrès **5** (2001), 63–99.
- [8] M. EMSALEM, *Groupeïde fondamentale de courbes stables*. Preprint.
- [9] M. FRIED, *Introduction to modular towers*. In Recent Developments in the Inverse Galois Problem, Contemporary Math. **186** (1995), 111–171.
- [10] M. FRIED AND M. JARDEN, *Field arithmetic*. Ergeb. der Math. **3**. Folge, Band 11, Springer Verlag, 2004.
- [11] M. FRIED AND R. BIGGERS, *Moduli Spaces of Covers of  $\mathbb{P}^1$  and Representations of the Hurwitz Monodromy Group*. J. für die reine und angew. Math **335** (1982), 87–121.
- [12] M. FRIED AND H. VÖLKLIN, *The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces*. Math. Annalen **290** (1991), 771–800.
- [13] D. HARBATER, *Patching and Galois theory*. MSRI Publications series **41**, 313–424, Cambridge University Press, 2003.
- [14] S. WEWERS, *Construction of Hurwitz spaces*. PhD Thesis, Essen, 1998.

Orlando CAU  
 Laboratoire Paul Painlevé, Mathématiques  
 Université Lille 1  
 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France  
 E-mail: cau.orlando@hotmail.fr