JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

David ADAM

Fonctions à valeurs entières et module de Carlitz

Tome 22, n^{o} 2 (2010), p. 271-286.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2010__22_2_271_0>

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **22** (2010), 271-286

Fonctions à valeurs entières et module de Carlitz

par David ADAM

Résumé. Soient C le module de Carlitz, H un polynôme de $\mathbb{F}_q[T]$ et $\mathfrak{S}$ l'ensemble $\{C_a(H) \mid a \in \mathbb{F}_q[T]\}$. Nous montrons qu'une fonction entière de type quadratique $< \frac{1}{4 \deg H}$ qui prend des valeurs entières sur $\mathfrak{S}$, est polynomiale. De plus, la borne $\frac{1}{4 \deg H}$ est optimale. Ceci est un analogue en caractéristique finie du théorème de Gel'fond-Pólya.

Abstract. *Integer valued functions and Carlitz module*

Let C be the Carlitz module, let $H \in \mathbb{F}_q[T]$ and let $\mathfrak{S}$ be the set $\{C_a(H) \mid a \in \mathbb{F}_q[T]\}$. in this article, we prove that if an entire function has a quadratic type $< \frac{1}{4 \deg H}$ and takes integer values over $\mathfrak{S}$, then it is a polynomial. The bound $\frac{1}{4 \deg H}$ is optimal. This is an analog for the finite characteristic case of Pólya-Gel'fond's theorem.

1. Introduction

En 1915, Pólya a montré le résultat suivant :

Théorème 1. [11] *Toute fonction entière f sur $\mathbb{C}$, de type exponentiel $< \ln 2$ et telle que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ est un polynôme. De plus, la borne $\ln 2$ est optimale.*

En 1933, Gel'fond a montré un analogue multiplicatif du théorème de Pólya :

Théorème 2. *Soit $r \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Une fonction f entière sur $\mathbb{C}$, de type quadratique $< \frac{1}{4r}$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(r^n) \in \mathbb{Z}$, est un polynôme. De plus, la borne $\frac{1}{4r}$ est optimale.*

Soit $q = p^f$ une puissance d'un nombre premier p. Soit Ω le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q((1/T))$ pour la valuation $1/T$-adique v normalisée par $v(T) = -1$. Pour tout $z \in \Omega$, on note $\deg(z) = -v(z)$.

Manuscrit reçu le 20 novembre 2008, révisé le 23 mars 2009.

L'auteur a bénéficié du programme postdoctoral P05293 de la Japan Society for the Promotion of Science.

L'auteur remercie les membres de la Nihon University pour leur chaleureux accueil, et en particulier le Professeur Hirata-Kohno pour ses nombreux et précieux conseils.

Classification math.. 13F20, 11R58.

Une *fonction entière* f est une fonction de Ω dans lui-même de la forme

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad \text{avec } a_n \in \Omega \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

qui converge pour tout $z \in \Omega$.

Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, le *module de croissance de* f (voir [7]), noté $M(f,r)$, est défini par

$$M(f,r) = \sup_{\substack{z\in\Omega \\ \deg(z)\leq r}} \{\deg(f(z))\}.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Une fonction entière f sur Ω est dite de type quadratique α si

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{M(f,r)}{r^2} = \alpha.$$

Dans [1], nous avons donné un premier analogue du théorème de Gel'fond pour $\mathbb{F}_q[T]$.

Théorème 3. *Soit H un polynôme non-constant de $\mathbb{F}_q[T]$. Si f est une fonction entière sur Ω de type quadratique $< \frac{1}{4\deg H}$ et telle que $f(H^n) \in \mathbb{F}_q[T]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est un polynôme de $\mathbb{F}_q(T)[X]$. De plus, la borne $\frac{1}{4\deg H}$ est optimale*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\tilde{\Phi}_n(X) = X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme de n-division du cercle. On peut reformuler le théorème de Gel'fond de la façon suivante : Soit $r \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Une fonction entière de type quadratique $< \frac{1}{4r}$ qui prend des valeurs entières sur l'ensemble $\{\tilde{\Phi}_n(r) | n \in \mathbb{N}\}$ est un polynôme. De plus, la borne $\frac{1}{4r}$ est optimale. Dans [8], Carlitz a défini de bons analogues des polynômes $\tilde{\Phi}_n$ pour $\mathbb{F}_q[T]$. Pour définir de tels polynômes, notons τ le q-Frobenius. Alors, (voir [12, Chapter X]) il existe un $\mathbb{F}_q$-morphisme d'algèbres noté C (*le module de Carlitz*) entre $\mathbb{F}_q[T]$ et $\mathbb{F}_q(T)\{\tau\}$ (muni des lois d'addition et de composition des applications) défini par

$$\begin{array}{rccc} C: & \mathbb{F}_q[T] & \longrightarrow & \mathbb{F}_q(T)\{\tau\} \\ & T & \longrightarrow & T+\tau \end{array}$$

Classiquement, pour tout $a \in \mathbb{F}_q[T]$, on note C_a la valeur de C en a au lieu de $C(a)$. On a les propriétés suivantes (qui découlent de la définition du module de Carlitz) :

(1) Pour tout $a, b \in \mathbb{F}_q[T]$ et $\xi \in \mathbb{F}_q$, on a $C_{a+\xi b} = C_a + \xi C_b$.

(2) Pour tout $a, b \in \mathbb{F}_q[T]$, on a $C_{ab} = C_a \circ C_b$.

Par exemple, pour $q = 3$, on a

$$C_{T^2+2T} = (T^2 + 2T) + (T^q + T + 2)\tau + \tau^2.$$

Notation :

(1) Dans toute la suite, H désigne un polynôme de $\mathbb{F}_q[T]$ de degré $h \geq 1$ fixé.

(2) Pour tout $a \in \mathbb{F}_q[T]$, C_a est un polynôme en τ à coefficients dans $\mathbb{F}_q(T)$. On définit l'élément $C_a(H)$ de $\mathbb{F}_q(T)$ par $C_a(H) = C_a(\tau)(H)$.

(3) On pose $\mathfrak{S} = \{C_a(H) \mid a \in \mathbb{F}_q[T]\}$

Exemple. On a

$$C_{T^2+2T}(H) = (T^2 + 2T)H + (T^q + T + 2)H^q + H^{q^2}.$$

Remarque 4. Clairement, $C_a(H)$ appartient à $\mathbb{F}_q[T]$ pour tout $a \in \mathbb{F}_q[T]$.

Dans la section 2, nous décrivons l'ensemble des polynômes à valeurs entières sur $\mathfrak{S}$. Cette caractérisation est utilisée dans la section 3 pour montrer un théorème de type Pólya-Gel'fond pour des fonctions entières à valeurs entières sur l'ensemble $\mathfrak{S}$ (théorème 16). Nous montrerons le théorème suivant :

Théorème. *Soit H un polynôme de $\mathbb{F}_q[T]$ tel que $q^{\deg H} \geq 3$. Si f est une fonction entière sur Ω de type quadratique $< \frac{1}{4 \deg H}$ et telle que $f(C_a(H)) \in \mathbb{F}_q[T]$ pour tout $a \in \mathbb{F}_q[T]$, alors f est un polynôme de $\mathbb{F}_q(T)[X]$. De plus, la borne $\frac{1}{4 \deg H}$ est optimale.*

2. Polynômes à valeurs entières sur $\mathfrak{S}$

Soit $q = 2$. Si $H = T$, on a $C_T(H) = 0$. Par conséquent, pour tout $a \in \mathbb{F}_q[T]$, $C_a(H) = 0$ et $\mathfrak{S} = \{0, T\}$. Si $H = 1 + T$, on a $C_T(H) = T + 1$. On en déduit que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $C_{T^j}(H) = 1 + T$. Par conséquent, $\mathfrak{S}$ est l'ensemble $\{0, 1 + T\}$.

Hypothèse : Pour éviter les deux cas particuliers mentionnés ci dessus, on supposera dans toute la suite de cet article que $q^h \geq 3$.

Notation :

– Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note A_i l'ensemble des $m \in \mathbb{F}_q[T]$ tels que $\deg m < i$

– et $\Psi_i(X)$ le polynôme

$$\Psi_i(X) = \prod_{m \in A_i} \frac{X - m}{T^i - m}.$$

Rappelons que Carlitz a donné une formule explicite pour les polynômes $C_a(X)$ (voir [8]) : pour tout $a \in \mathbb{F}_q[T]$ non nul, on a

$$C_a(X) = \sum_{j=0}^{\deg a} \Psi_j(a) X^{q^j}. \tag{2.1}$$

Remarque 5. Pour tout $a \in \mathbb{F}_q[T]$ non nul, $C'_a(X) \neq 0$. Par conséquent, $C_a(X)$ est un polynôme séparable.

Lemme 6. *On a* $\deg(C_0(H)) = -\infty$ *et pour tout* $a \in \mathbb{F}_q[T]$ *non nul,* $\deg(C_a(H)) = q^{\deg a} h$.

Démonstration. On a $C_0(X) = 0$, d'où $\deg(C_0(H)) = -\infty$. Soit $a \in \mathbb{F}_q[T]$ non nul. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $j \in [0, \deg a]$, on a

$$\deg\left(\Psi_j(a) H^{q^j}\right) = q^j(h + \deg a - j).$$

Le maximum de la fonction $j \to q^j(h + \deg a - j)$ est donné par l'unique valeur $j = \deg a$. Le lemme en découle. $\square$

Remarque 7. Ce lemme prouve que l'ensemble $\mathfrak{S}$ est infini.

On note $\mathcal{M}$ le $\mathbb{F}_q[T]$-module des polynômes à valeurs entières sur $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{M} = \{P \in \mathbb{F}_q(T)[X] \mid P(\mathfrak{S}) \subset \mathbb{F}_q[T]\}.$$

Définition 8. Une base $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ du $\mathbb{F}_q[T]$-module $\mathcal{M}$ est une *base régulière* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\deg P_n(X) = n$.

Dans cette section, nous allons décrire des bases régulières de $\mathcal{M}$.

Convention : Soient $n, k \in \mathbb{N}$, $(n \geq k)$ de développements p-adiques

$$n = n_0 + n_1 p + \cdots + n_s p^s \text{ et } k = k_0 + k_1 p + \cdots + k_l p^l \ (l \leq s).$$

On dit que les p-chiffres de n sont plus grands que les p-chiffres de k, si pour tout $j \in [0, s]$, on a $n_j \geq k_j$.

Rappelons la

Définition 9. [2, Definition 4] Soient D un anneau de caractéristique $p > 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la *p-propriété* si, pour tout $n, k \in \mathbb{N}(n \geq k)$ tels que les p-chiffres de n sont plus grands que les p-chiffres de k, on a

$$u_n = u_k + u_{n-k}.$$

Suivant M. Car (voir [6]), nous construisons une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{F}_q[T]$ de manière suivante : soit ξ un élément primitif de $\mathbb{F}_q$ sur $\mathbb{F}_p$. Pour tout $0 \leq i \leq q - 1$ de développement p-adique

$$i = i_0 + i_1 p + \cdots + i_{f-1} p^{f-1},$$

soit

$$u_i = i_0 + i_1 \xi + \cdots + \cdots + i_{f-1} \xi^{f-1}.$$

On prolonge la suite $(u_i)_{0 \leq i \leq q-1}$ en une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de manière analogue : à tout $i \in \mathbb{N}$ de développement q-adique

$$i = i_0 + i_1 q + \cdots + i_s q^s,$$

on associe

$$u_i = u_{i_0} + u_{i_1}T + \cdots + u_{i_s}T^s.$$

Cette suite d'éléments de $\mathbb{F}_q[T]$ est appelée *suite de Car*. On voit facilement que la suite de Car vérifie la *p-propriété* et, par conséquent, que la suite $(C_{u_n}(H))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie aussi la p-propriété. Soit $(G_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{F}_q(T)[X]$ définis par

$$G_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - C_{u_k}(H)).$$

Lemme 10. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les racines de $G_n(X)$ sont simples. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_{q^n}(X)$ est un polynôme $\mathbb{F}_q$-linéaire.*

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{F}_q[T]$. Par le lemme 6, on a $C_a(H) = 0$ si et seulement si $a = 0$. Soient $a, b \in \mathbb{F}_q[T]$. Par la $\mathbb{F}_q$-linéarité du module de Carlitz, on a $C_a(H) - C_b(H) = C_{a-b}(H)$. Par conséquent, on a l'égalité $C_a(H) = C_b(H)$ si et seulement si $a = b$. Donc, toutes les racines de G_n sont simples.

L'ensemble $\{C_a(H) \mid a \in \mathbb{F}_q[T]\}$ est un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel. Comme G_{q^n} est un polynôme séparable, on en conclut que c'est un polynôme $\mathbb{F}_q$-linéaire [10, Chapitre 1]. □

Introduisons maintenant les factorielles généralisées de Bhargava pour l'ensemble $\mathfrak{S}$ et la suite $(C_{u_n}(H))_{n\in\mathbb{N}}$ (voir [3]).

Notation : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $n!_{\mathfrak{S}} = G_n(C_{u_n}(H))$ et $(n!_{\mathfrak{S}})$ l'idéal de $\mathbb{F}_q[T]$ engendré par $n!_{\mathfrak{S}}$.

Alors, on a la

Proposition 11. *Si $n \in \mathbb{N}$ a pour développement q-adique $n = n_0 + n_1 q + \cdots + n_s q^s$, alors*

$$(n!_{\mathfrak{S}}) = (q^0!_{\mathfrak{S}})^{n_0}(q^1!_{\mathfrak{S}})^{n_1}\cdots(q^s!_{\mathfrak{S}})^{n_s}.$$

Démonstration. On commence par montrer cette proposition dans le cas particulier où n est de la forme $p^l q^s$ $(0 \le l < f)$. On a

$$\begin{aligned}
((p^l q^s)!_{\mathfrak{S}}) &= \left(\prod_{k=0}^{p^l q^s - 1}(C_{u_{p^l}T^s}(H) - C_{u_k}(H))\right)\\
&= \prod_{j=0}^{p^l-1}\prod_{a\in A_s}(C_{u_{p^l}T^s}(H) - C_{u_jT^s+a}(H))\mathbb{F}_q[T]\\
&= \prod_{j=0}^{p^l-1}\prod_{a\in A_s}(C_{(u_{p^l}-u_j)T^s}(H) - C_a(H))\mathbb{F}_q[T]\\
&= G_{q^s}(C_{T^s}(H))^{p^l}\mathbb{F}_q[T]\\
&= (q^s!_{\mathfrak{S}})^{p^l}.
\end{aligned}$$

Nous montrons maintenant la proposition par récurrence sur n. Puisque la suite $(C_{u_n}(H))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la p-propriété, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ [2, proposition 5]

$$G_n(X+Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_{n-k}(Y) G_k(X). \tag{2.2}$$

Soient $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $u_{n-k} = u_n - u_k$. De la relation (2.2), on déduit que

$$G_n(C_{u_n}(H)) = \binom{n}{k} G_{n-k}(C_{u_{n-k}}(H)) G_k(C_{u_k}(H)),$$

c'est-à-dire,

$$\frac{n!_{\mathfrak{S}}}{(n-k)!_{\mathfrak{S}}\, k!_{\mathfrak{S}}} = \binom{n}{k}. \tag{2.3}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ qui n'est pas une puissance de p. Posons $l = \left[\log_p(n_s)\right]$ et $k = p^l q^s$. Alors, les p-chiffres de n sont plus grands que les p-chiffres de k, et donc on a la relation (2.3). Par ailleurs, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$(n-k)!_{\mathfrak{S}} = \prod_{i=0}^{s-1} (q!_{\mathfrak{S}})^{n_i} (q^s!_{\mathfrak{S}})^{n_s - p^l}. \tag{2.4}$$

Des égalités (2.3) et (2.4), on déduit que :

$$(n!_{\mathfrak{S}}) = \prod_{i=0}^{s-1} (q^i!_{\mathfrak{S}})^{n_i} (q^s!_{\mathfrak{S}})^{n_s - p^l} (p^l q^s)!_{\mathfrak{S}}.$$

Comme $(p^l q^s)!_{\mathfrak{S}} = (q^s!_{\mathfrak{S}})^{p^l}$, la proposition est démontrée. □

Définition 12. Soit $a \in \mathbb{F}_q[T]$. On dit que $\rho \in \Omega$ est un *point de a-division* si $C_a(\rho) = 0$.

Nous pouvons maintenant prouver :

Théorème 13. *La suite des polynômes $(G_n(X)/n!_{\mathfrak{S}})_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base régulière du $\mathbb{F}_q[T]$-module $\mathcal{M}$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les polynômes $\frac{G_{q^n}(X)}{q^n!_{\mathfrak{S}}}$ appartiennent à $\mathcal{M}$. Pour tout $B \in \mathbb{F}_q[T]$, on a

$$\frac{G_{q^n}(C_B(H))}{q^n!_{\mathfrak{S}}} = \prod_{a\in A_n} \frac{C_B(H) - C_a(H))}{C_{T^n}(H) - C_a(H)} = \prod_{a\in A_n} \frac{C_{B-a}(H)}{C_{T^n - a}(H)}.$$

Soit $U \in \mathbb{F}_q[T]$ de degré $u \leq n$, et $\rho \in \Omega$ un point de U-division. Comme l'ensemble $\mathcal{L} = \{T^n - a \mid a \in A_n\}$ contient un système complet de représentants de $\mathbb{F}_q[T]/(U)$, il existe un $a_0 \in A_n$ tel que U divise $T^n - a_0$.

L'ensemble des multiples de U dans $\mathcal{L}$ est $\{T^n - a_0 + UQ \mid Q \in A_{n-u}\}$ qui est de cardinal q^{n-u}. De même, le nombre de multiples de U dans $\{B - a \mid a \in A_n\}$ est q^{n-u}. Puisque pour tout $V \in \mathbb{F}_q[T]$, $C_V(X)$ est un polynôme à racines simples et que ρ est une racine de $C_V(X)$ si et seulement si U divise V, ρ est racine de $\prod_{a\in A_n}(C_{T^n-a}(X))$ et de $\prod_{a\in A_n}(C_{B-a}(X))$ d'ordre exactement q^{n-u}. On en déduit que $\prod_{a\in A_n}(C_{T^n-a}(X))$ divise $\prod_{a\in A_n}(C_{B-a}(X))$ dans $\mathbb{F}_q(T)[X]$, et donc dans $\mathbb{F}_q[T][X]$ par le lemme de Gauss. Par conséquent, $\frac{G_{q^n}(C_B(H))}{q^n!_{\mathfrak{S}}} \in \mathbb{F}_q[T]$ et le polynôme $\frac{G_{q^n}(X)}{q^n!_{\mathfrak{S}}}$ appartient à $\mathcal{M}$.

Maintenant, soit $n \in \mathbb{N}$ de développement q-adique $n = n_0 + n_1 q + \cdots + n_s q^s$. Selon la proposition 11, on a

$$\begin{aligned}\frac{G_n(X)}{n!_{\mathfrak{S}}} &= \xi_n \prod_{l=0}^{n_s-1} \frac{\prod_{h\in A_s}(X - C_{u_l T^s + h}(H))}{q^s!_{\mathfrak{S}}} \\ &\quad \times \prod_{l=0}^{n_{s-1}-1} \frac{\prod_{h\in A_{s-1}}(X - C_{u_{n_s}T^s + u_l T^{s-1} + h}(H))}{q^{s-1}!_{\mathfrak{S}}} \cdots \\ &\quad \times \cdots \prod_{l=0}^{n_0-1} \frac{(X - C_{u_{n_s}T^s + u_{s-1}T^{s-1} + \cdots + u_l}(H))}{q^0!_{\mathfrak{S}}},\end{aligned}$$

où $\xi_n \in \mathbb{F}_q^*$. Par $\mathbb{F}_q$-linéarité du module de Carlitz, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{G_n(X)}{n!_{\mathfrak{S}}} &= \xi_n \prod_{l=0}^{n_s-1} \frac{G_{q^s}(X - C_{u_l T^s}(H))}{q^s!_{\mathfrak{S}}} \\ &\quad \times \prod_{l=0}^{n_{s-1}-1} \frac{G_{q^{s-1}}(X - C_{u_{n_s}T^s + u_l T^{s-1}}(H))}{q^{s-1}!_{\mathfrak{S}}} \\ &\quad \times \cdots \prod_{k=0}^{n_0-1} \frac{G_{q^0}(X - C_{u_{n_s}T^s + u_l T^{s-1} + \cdots + u_1 T}(H))}{q^0!_{\mathfrak{S}}}\end{aligned}$$

Puisque les polynômes $G_{q^n}(X)/q^n!_{\mathfrak{S}}$ sont à valeurs entières sur $\mathfrak{S}$, les polynômes $G_n(X)/n!_{\mathfrak{S}}$ le sont aussi. Montrons que les polynômes $G_n(X)/n!_{\mathfrak{S}}$ engendrent $\mathcal{M}$. Soit $P \in \mathcal{M}$ de degré m. Comme les polynômes $G_n(X)$ sont de degrés echelonnés, $P(X)$ peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = a_0 \frac{G_0(X)}{0!_{\mathfrak{S}}} + a_1 \frac{G_1(X)}{1!_{\mathfrak{S}}} + \cdots + a_m \frac{G_m(X)}{m!_{\mathfrak{S}}},$$

où les a_i $(0 \leq i \leq m)$ appartiennent à $\mathbb{F}_q(T)$. Les $(a_i)_{0 \leq i \leq m}$ sont alors solutions du système

$$\begin{cases} P(C_0(H)) = a_0 \\ P(C_{u_1}(H)) = a_0 \frac{G_0(C_{u_1}(H))}{0!_{\mathfrak{S}}} + a_1 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ P(C_{u_m}(H)) = a_0 \frac{G_0(C_{u_m}(H))}{0!_{\mathfrak{S}}} + a_1 \frac{G_1(C_{u_m}(H))}{1!_{\mathfrak{S}}} + \cdots + a_m \end{cases}$$

Comme les $\frac{G_j(C_{u_i}(H))}{j!_{\mathfrak{S}}}$ $(0 \leq i < j \leq m)$ appartiennent à $\mathbb{F}_q[T]$ et que le déterminant de ce système est 1, on en déduit que les a_i $(0 \leq i \leq m)$ appartiennent à $\mathbb{F}_q[T]$. Le théorème est prouvé. □

Formule d'interpolation. Pour faciliter les calculs, on normalise la factorielle de $\mathfrak{S}$ de la façon suivante.
Notations :

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ de développement q-adique $n = n_0 + n_1 q + \cdots + n_s q^s$, on note $\underline{n}!_{\mathfrak{S}}$ le générateur unitaire de l'idéal $(n!_{\mathfrak{S}})$.

(2) On note $\binom{X}{n}_{\mathfrak{S}}$ le polynôme $G_n(X)/\underline{n}!_{\mathfrak{S}}$.

Puisque

$$\binom{X}{n}_{\mathfrak{S}} = \beta_n \frac{G_n(X)}{n!_{\mathfrak{S}}} \text{ avec } \beta_n \in \mathbb{F}_q^*,$$

la famille de polynômes $(\binom{X}{n}_{\mathfrak{S}})_{n \in \mathbb{N}}$ est une base régulière de $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}, \mathbb{F}_q[T])$.

Remarque 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $v_q(n)$ la plus grande puissance de q divisant n. On a alors

$$\frac{\underline{n}!_{\mathfrak{S}}}{\underline{n-1}!_{\mathfrak{S}}} = \frac{\underline{q^{v_q(n)}}!_{\mathfrak{S}}}{\underline{q^{v_q(n)} - 1}!_{\mathfrak{S}}}. \tag{2.5}$$

Soit $P \in \mathbb{F}_q(T)[X]$ un polynôme de degré m. Il existe des éléments $p_i \in \mathbb{F}_q(T)$ $(0 \leq i \leq m)$ tels que

$$P(X) = p_0 \binom{X}{0}_{\mathfrak{S}} + p_1 \binom{X}{1}_{\mathfrak{S}} + \cdots + p_m \binom{X}{m}_{\mathfrak{S}}.$$

Nous allons déterminer les p_i $(0 \leq i \leq m)$ en fonction des valeurs prises par P. La méthode étant identique à celle utilisée par Carlitz (voir [9, §3]), nous ne donnons pas tous les détails. On pose

$$N(X) = \sum_{a \in A_m} P(C_a(H)) \frac{G_{q^m}(X)}{X - C_a(H)}.$$

On a alors $N(X) = (q^m-1)!_{\mathfrak{S}} P(X)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ tel que $0 < j \leq q^m-1$, on a

$$\frac{G_{q^m}(C_{u_j}(H))}{C_{u_j}(H)} = G_{q^e-1}(C_{u_j}(H) - C_{u_{q^m-1}}(H)) = 0,$$

et

$$\begin{aligned}\left.\frac{G_{q^m}(X)}{X}\right|_{X=0} &= \prod_{a\in A_m\setminus\{0\}} C_a(H) = (q^m-1)!_{\mathfrak{S}} \\ &= G_{q^m-1}(C_{u_{q^m-1}}(H)).\end{aligned}$$

En conséquence, on a l'égalité des polynômes :

$$G_{q^m}(X)/X = G_{q^m-1}(X - C_{u_{q^m-1}}(H)).$$

Reprenant mot pour mot la preuve de Carlitz, on obtient le

Théorème 15. *Soit $P(X) \in \mathbb{F}_q(T)[X]$ un polynôme de degré m, decomposé sous la forme*

$$P(X) = p_0\binom{X}{0}_{\mathfrak{S}} + p_1\binom{X}{1}_{\mathfrak{S}} + \cdots + p_m\binom{X}{m}_{\mathfrak{S}}.$$

Alors, pour tout i tel que $0 \leq i \leq m$, on a

$$p_i = \sum_{a\in A_l} \binom{C_a(H)}{q^l - i - 1}_{\mathfrak{S}} P(C_a(H)), \text{ où } l = l(i) = [\log_q(i)] + 1.$$

3. Analogue q-géométrique du théorème de Gel'fond

Nous allons montrer le

Théorème 16. *Soit f une fonction entière sur Ω telle que*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{M(f,r)}{r^2} < \frac{1}{4h} \text{ et } f(\mathfrak{S}) \subset \mathbb{F}_q[T].$$

Alors, $f \in \mathcal{M}$. De plus, la borne $\frac{1}{4h}$ est optimale.

Pour la preuve de ce théorème, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{X}{k}_{\mathfrak{S}}. \tag{3.1}$$

D'après le théorème 15,

$$b_{n,k} = \sum_{a\in A_l} \binom{C_a(H)}{q^l - k - 1}_{\mathfrak{S}} C_a(H)^n \text{ où } l = [\log_q(k)] + 1. \tag{3.2}$$

Posons aussi :

$$E(n) = n!_{\mathfrak{S}}/(n-1)!_{\mathfrak{S}} \text{ et } D(n) = \deg(E(n)). \tag{3.3}$$

Lemme 17. (1) *Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Si $v_q(m) = v_q(n)$, alors*

$$E(m) = E(n).$$

(2) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$D(n) = h\left(\frac{q}{q+1}q^{2v_q(n)} + \frac{1}{q+1}\right).$$

Démonstration. 1) C'est une conséquence immédiate de l'égalité (2.5).

2) Comme on a $\deg(q^n!_{\mathfrak{S}}) = q^{2n}h$, l'égalité (2.5) donne

$$D(n) = q^{2e}h - \sum_{j=0}^{e-1}(q-1)q^{2j}h.$$

Le résultat s'en déduit facilement. □

Lemme 18. *Avec les notations (3.1) et (3.3), pour tout $0 \le k \le n$, on a*

$$b_{n+1,k} = E(k)b_{n,k-1} + C_{u_k}(H)b_{n,k}.$$

Démonstration. Ceci provient de la relation

$$X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_{n-1,k}E(k+1)\binom{X}{k+1}_{\mathfrak{S}} + \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}C_{u_k}(H)\binom{X}{k}_{\mathfrak{S}}.$$

□

Pour tous les $j, n \in \mathbb{N}$, on note $Z_{n,j}$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n divisibles exactement par q^j, c'est-à-dire

$$Z_{n,j} = \#\{l \mid 1 \le l \le n,\ q^j \mid l \text{ et } q^{j+1} \nmid l\}.$$

Proposition 19. *Soient $n, k \in \mathbb{N}$ $(0 \le k \le n)$, et $s \in \mathbb{N}$ tel que $q^s \le k < q^{s+1}$. On a*

$$\deg(b_{n,k}) \le (n-k)hq^s + \sum_{j=0}^{s} Z_{k,j}D(q^j).$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est trivial. Par le lemme 18, on a

$$\deg(b_{n+1,k}) \le \max\left(D(k) + \deg(b_{n,k-1}), \deg(C_{u_k}(H)) + \deg(b_{n,k})\right).$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}, (0 \le j \le s)$, on

$$Z_{k,j} = \begin{cases} Z_{k-1,j} + 1 & \text{si } j = v_q(k) \\ Z_{k-1,j} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque l'on a $D(k) = D(q^{v_q(k)})$ par le lemme 17, on obtient

$$\sum_{j=0}^{s} Z_{k-1,j} D(q^j) + D(k) = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq v_q(k)}}^{s} Z_{k,j} q^j + (Z_{k,v_q(k)} - 1) D(q^{v_q(k)}) + D(q^{v_q(k)})$$
$$= \sum_{j=0}^{s} Z_{k,j} D(q^j).$$

Donc, avec l'hypothèse de récurrence, :

$$D(k) + \deg(b_{n,k-1}) \le (n+1-k)hq^s + \sum_{j=0}^{s} Z_{k,j} D(q^j).$$

Comme $\deg(u_k) = s$, on a $\deg(C_{u_k}(H)) = q^s h$. D'où, avec l'hypothèse de récurrence,

$$\deg(C_{u_k}(H)) + \deg(b_{n,k}) \le q^s h + (n-k)hq^s + \sum_{q=0}^{s} Z_{k,j} D(q^j)$$
$$\le (n+1-k)hq^s + \sum_{q=0}^{s} Z_{k,j} D(q^j).$$

La proposition est prouvée. □

Proposition 20. *Soient $n, k \in \mathbb{N}$ $(0 \le k \le n)$. On a*

$$\deg(b_{n,k}) \le nkh.$$

Démonstration. Soit s l'entier tel que $q^s \le k < q^{s+1}$. Par la proposition 19, on a

$$\deg(b_{n,k}) \le h(n-k)q^s + \sum_{j=1}^{s} Z_{kj} D(q^j).$$

Pour tout entier j $(0 \le j \le s)$,

$$Z_{kj} = \left[\frac{k}{q^j}\right] - \left[\frac{k}{q^{j+1}}\right].$$

Par conséquent,

$$\deg(b_{n,k}) \le (n-k)q^s + \sum_{j=1}^{s} \left(\left[\frac{k}{q^j}\right] - \left[\frac{k}{q^{j+1}}\right]\right) D(q^j)$$
$$\le (n-k)q^s + \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{k}{q^j}\right] \left(D(q^j) - D(q^{j-1})\right).$$

D'après le lemme 17, il vient

$$\begin{aligned}
\deg(b_{n,k}) &\leq (n-k)hq^s + \sum_{j=1}^{s} \frac{k}{q^j} \times \frac{hq}{q+1}\left(q^{2j} - q^{2(j-1)}\right) \\
&\leq (n-k)hq^s + k\frac{qh}{q+1}(q^s + q^{s-1}) \\
&\leq (n-k)hq^s + hkq^s \leq nkh.
\end{aligned}$$

□

Nous donnons maintenant quelques propriétés des polynômes $\binom{X}{n}_{\mathfrak{S}}$.

Proposition 21. *Les polynômes $\binom{X}{n}_{\mathfrak{S}}$ possèdent les propriétés suivantes :*

(1) *Pour tout $x \in \Omega$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \deg(\binom{x}{n}_{\mathfrak{S}}) = -\infty.$$

(2) *Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$M(\binom{X}{q^n}_{\mathfrak{S}}, r) \leq \frac{1}{4h} r^2.$$

Démonstration. La proposition est clairement vraie pour $x = 0$. On suppose donc que $x \neq 0$ et on pose $r = \deg(x)$ et $b = \left[\log_q\left(\frac{r}{h}\right)\right]$.

1) Soient $n \in \mathbb{N}$ $(n > r/h)$ et $s = [\log_q(n)]$. Posons $m = m(n) = q^{s+1} - 1$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ $(n \leq j < m)$, on a

$$\deg(x - C_{u_j}(H)) = s \geq \deg(C_{u_{m-n}}(H) - C_{u_{m-j}}(H)).$$

Par conséquent,

$$\prod_{j=n}^{m-1} \deg(x - C_{u_j}(H)) \geq \deg((m-n)!_{\mathfrak{S}}). \tag{3.4}$$

Les q-chiffres de m étant tous égaux à $q-1$, ils sont plus grands que les q-chiffres de n. Donc, par l'égalité (2.3), on a

$$\deg\left(\frac{m!_{\mathfrak{S}}}{n!_{\mathfrak{S}}(m-n)!_{\mathfrak{S}}}\right) = 0. \tag{3.5}$$

Des inégalités (3.4) et (3.5) et de l'égalité

$$\deg\left(\binom{x}{n}_{\mathfrak{S}}\right) = \deg\left(\binom{x}{m}_{\mathfrak{S}} \times \frac{m!_{\mathfrak{S}}}{n!_{\mathfrak{S}} \times (x - C_{u_n}(H)) \cdots (x - C_{u_{m-1}(H)})}\right),$$

on déduit :

$$\deg\left(\binom{x}{n}_{\mathfrak{S}}\right) \leq \deg\left(\binom{x}{m(n)}_{\mathfrak{S}}\right).$$

De l'égalité

$$\binom{x}{m}_{\mathfrak{S}} = \frac{1}{m!_{\mathfrak{S}}} \prod_{a\in A_{b+1}} (x - C_a(H)) \prod_{a\in A_s\setminus(A_{b+1}\cup\{u_{m-1}\})} (x - C_a(H)),$$

on déduit :

$$\deg\left(\binom{x}{m}_{\mathfrak{S}}\right) \le K + \sum_{j=b+1}^{s} (q-1)q^{2j}h - q^{2s}h - \sum_{j=0}^{s}(q-1)q^{2j}h,$$

où $K = K(q,h,x)$ est une constante ne dépendant que de q, h et x. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \deg\left(\binom{x}{m(n)}_{\mathfrak{S}}\right) = -\infty$. Ceci prouve 1)

2) Soit $i \in \mathbb{N}$.

On suppose que $r \le hq^n$. De l'égalité

$$\binom{x}{q^n}_{\mathfrak{S}} = \frac{1}{\prod\limits_{a\in A_n} (C_{T^n(H)} - C_a(H))} \prod_{\alpha\in A_{b+1}} (x - C_a(H)) \prod_{a\in A_n\setminus A_{b+1}} (x - C_a(H)),$$

et du lemme 6, on déduit :

$$\begin{aligned}\deg\left(\binom{x}{q^n}_{\mathfrak{S}}\right) &\le rq^{b+1} + \sum_{a=b+1}^{n-1} (q-1)q^{2a}h - hq^{2n} \\ &\le rq^{b+1} + h\left(\frac{q^{2n} - q^{2(b+1)}}{q+1} - q^{2n}\right).\end{aligned}$$

Comme la fonction $x \to rx - \frac{h}{q+1}x^2$ est croissante dans l'intervalle $[0, \frac{r(q+1)}{2h}]$, et que $0 \le b \le \log_q(\frac{r}{h}) \le \frac{r(q+1)}{2h}$, on obtient

$$rq^{b+1} - h\frac{q^{2(b+1)}}{q+1} \le rq^{\log_q(\frac{r}{h})+1} - h\frac{q^{2(\log_q(\frac{r}{h})+1)}}{q+1} \le \frac{q}{(q+1)h}r^2.$$

Puisque $q^{2n} \ge \frac{r^2}{h^2}$, on a $\deg\left(\binom{x}{q^n}_{\mathfrak{S}}\right) \le 0$.

On suppose que $r \ge hq^n$. On voit alors facilement que

$$\deg\left(\binom{x}{q^n}_{\mathfrak{S}}\right) \le rq^n - hq^{2n}.$$

Puisque la fonction $x \to rx - hx^2$ est maximale pour $x = \frac{r}{2h}$ de maximum $\frac{r^2}{4h}$, on a $\deg\left(\binom{x}{q^n}_{\mathfrak{S}}\right) \le \frac{r^2}{4h}$. Ceci prouve la proposition. □

Remarque 22. La preuve de cette proposition montre que pour tout $x \in \Omega$ de degré $r = 2hq^n$, on a

$$\deg\left(\binom{x}{q^n}_{\mathfrak{S}}\right) = hq^{2n} = \frac{r^2}{4h} \text{ et } \deg\left(\binom{x}{q^j}_{\mathfrak{S}}\right) < hq^{2n} \quad (j \ne n).$$

Soit f une fonction entière sur Ω,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n.$$

Soit $j \in \mathbb{N}$. Rappelons que les b_{nj} sont les éléments de Ω définis par l'égalité (3.1). Si $\lim_{n \to +\infty} \deg(c_n b_{n,j}) = 0$, on pose

$$\Delta_j(f) = \sum_{n \geq j} c_n b_{n,j},$$

Si f est une fonction polynomiale, on a

$$f(z) = \sum_{j \geq 0} \Delta_j(n) \binom{z}{n}_{\mathfrak{S}}. \tag{3.6}$$

Proposition 23. *Soit f une fonction entière sur Ω de type quadratique $\tau < \frac{1}{4h}$. Alors,*

(1) *pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\Delta_j(f) = \sum_{n \geq 0} c_n b_{n,j}$ existe.*

(2) *Pour tout $z \in \Omega$, la série $\sum_{j \geq 0} \Delta_j(f) \binom{z}{n}_{\mathfrak{S}}$ converge.*

(3) *On a*

$$f(z) = \sum_{j \geq 0} \Delta_j(f) \binom{z}{n}_{\mathfrak{S}}.$$

Démonstration. 1) Selon [1, Proposition 19], il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(c_n) \leq -\frac{n^2}{4\tau}$. Par conséquent, d'après la proposition 20, pour tout $j \in \mathbb{N}$ ($j \leq n$), $n \geq N_0$, $\deg(c_n b_{nj}) \leq njh - \frac{n^2}{4\tau} \leq (h - \frac{1}{4\tau})n^2$.

2) Soient $z \in \Omega$ et j et n deux entiers tels que $n \geq j \geq N_0$. On a

$$\deg(c_n b_{nj}) \leq (h - \frac{1}{4\tau})n^2 \leq (h - \frac{1}{4\tau})j^2. \tag{3.7}$$

Donc, on a $\lim_{j \to +\infty} \Delta_j(f) = -\infty$. On déduit de la proposition 21.1 que $\lim_{j \to +\infty} \deg \left(\Delta_j(f) \binom{z}{j}_{\mathfrak{S}} \right) = -\infty$.

3) Soit $z \in \Omega$. Comme f est une fonction entière sur Ω, on a

$$\lim_{N \to +\infty} \deg \left(\sum_{j \geq 0} c_j z^j - \sum_{j=0}^{N} c_j z^j \right) = -\infty. \tag{3.8}$$

La partie 2) de la proposition montre que

$$\lim_{N \to +\infty} \deg \left(\sum_{j \geq 0} \Delta_j(f) \binom{z}{j}_{\mathfrak{S}} - \sum_{j=0}^{N} \Delta_j(f) \binom{z}{n}_{\mathfrak{S}} \right) = -\infty. \tag{3.9}$$

D'après l'égalité (3.6), on a

$$\sum_{j=0}^{N} c_n z^n = \sum_{j=0}^{N} \Delta'_j \binom{z}{j}_{\mathfrak{S}},$$

où

$$\Delta'_j = \sum_{n \geq j} \tilde{c_n} b_{nj} \qquad \text{et} \qquad \tilde{c_n} = \begin{cases} c_n & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \deg\left(\sum_{j=0}^{N} c_n z^n - \sum_{j=0}^{N} \Delta_j(f) \binom{z}{j}_{\mathfrak{S}}\right) &\leq \deg\left(\sum_{n \geq j} (\tilde{c_n} - c_n) b_{nj} \binom{z}{j}\right) \\ &\leq \deg\left(\sum_{j=0}^{N} \left(\sum_{n \geq N} c_n b_{nj}\right) \binom{z}{j}_{\mathfrak{S}}\right). \end{aligned}$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ $(0 \leq j \leq N)$, on a $\deg\left(\sum_{n \geq N} c_n b_{nj}\right) \leq -\frac{N^2}{4\tau}$. De plus, la suite $\left(\deg\left(\binom{z}{j}_{\mathfrak{S}}\right)\right)_{j \in \mathbb{N}}$ est majorée. Par conséquent,

$$\lim_{N \to +\infty} \deg\left[\sum_{j=0}^{N} c_n z^n - \sum_{j=0}^{N} \Delta_j(f) \binom{z}{j}_{\mathfrak{S}}\right] = -\infty. \tag{3.10}$$

Les égalités (3.8), (3.9) et (3.10) donnent

$$\deg\left[f(z) - \sum_{j \geq 0} \Delta_j(f) \binom{z}{j}_{\mathfrak{S}}\right] = -\infty,$$

c'est-à-dire,

$$f(z) = \sum_{j \geq 0} \Delta_j(f) \binom{z}{j}_{\mathfrak{S}}.$$

□

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 16. Soit f une fonction entière sur Ω de type quadratique $< \frac{1}{4h}$. D'après la proposition 23, on a

$$f(z) = \sum_{j \geq 0} \Delta_j(f) \binom{z}{j}_{\mathfrak{S}}.$$

L'inégalité (3.7) montre que $\lim\limits_{j \to +\infty} \Delta_j(f) = 0$. Comme dans la preuve du Théorème 13, on montre que les $\Delta_j(f)$ appartiennent à $\mathbb{F}_q[T]$. Par conséquent, pour j assez grand, $\Delta_j(f)$ est nul. Ceci prouve que $f \in \mathcal{M}$.

La proposition 21.2 et la remarque 22 montrent que la fonction entière

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{z}{q^n}_{\mathfrak{S}}$$

est de type quadratique $\frac{1}{4h}$. De plus, on a $f(\mathfrak{S}) \subset \mathbb{F}_q[T]$. Ceci prouve l'optimalité de la borne $\frac{1}{4h}$.

Bibliographie

[1] D. Adam, *Car-Pólya and Gel'fond's theorems for $\mathbb{F}_q[T]$*. Acta Arith. **115.3** (2004), 287–303.

[2] D. Adam, *Finite differences in finite characteristic*. J. of Algebra **296.1** (2006), 285–300.

[3] M. Bhargava, *P-orderings and polynomial functions on arbitrary subsets of Dedekind rings*. J. Reine Angew. Math. **490** (1997), 101–127.

[4] M. Bhargava, *The factorial function and generalizations*. The A. Math. Monthly **107.9** (2000), 783–799.

[5] P.J. Cahen, J.L. Chabert, *Integer valued polynomials*. Mathematical Survey and Monographs, vol **48**, American Mathematical Society, Providence, 1997.

[6] M. Car, *Répartition modulo* 1 *dans un corps de série formelle sur un corps fini*. Acta Arith. **69.3** (1995), 229–242.

[7] M. Car, *Pólya's theorem for $\mathbb{F}_q[T]$*. J. Number Theory **66** (1997), 148–171.

[8] L. Carlitz, *On certains functions connected with polynomials in a Galois field*. Duke Math. J. **1** (1935), 137–168.

[9] L. Carlitz, *A set of polynomials*. Duke Math. J. **6** (1940), 486–504.

[10] D. Goss, *Basic Structures of Function Field Arithmetic*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **35**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[11] G. Pólya, *Über ganzwertige ganze Funktionen*. Rend. Circ. Math. Palermo **40** (1915), 1–16.

[12] M. Rosen, *Number Theory in Function Fields*. Graduate Texts in Mathematics **210**, Springer-Verlag, New-York, 2002.

David Adam
LAMFA CNRS UMR 6140
Laboratoire Amiénois de Mathématiques Fondamentales et Appliquées
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
33, rue Saint-Leu, 80039 Amiens Cedex 1
E-mail: david.adam@u-picardie.fr