JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Ahmed AIT-MOKHTAR, Abdelkader NECER et Alain SALINIER

Endomorphismes d'algèbres de suites

Tome 20, n^{o} 1 (2008), p. 1-21.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2008__20_1_1_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **20** (2008), 1-21

Endomorphismes d'algèbres de suites

par Ahmed AIT-MOKHTAR, Abdelkader NECER et Alain SALINIER

Résumé. Cet article traite des endomorphismes de l'algèbre de Hadamard des suites et plus particulièrement de l'algèbre des suites récurrentes linéaires. Il caractérise les endomorphismes continus de l'algèbre des suites et contient, dans le cas d'un corps commutatif de caractéristique nulle, une détermination complète des endomorphismes continus de l'algèbre des suites récurrentes linéaires grâce à la notion nouvelle d'application semi-affine de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Abstract. This paper deals with endomorphisms of the Hadamard algebra of sequences and more specifically of the algebra of linear recurrence sequences. Continuous endomorphisms of the algebra of sequences are characterized and, in the case of a commutative field of zero characteristic, we determine all continuous endomorphisms of the algebra of linear recurrence sequences by using the new notion of a semi-affine map from $\mathbb{N}$ to $\mathbb{N}$.

Introduction

Soit K un anneau commutatif unifère et I un ensemble non vide quelconque. On peut alors construire l'algèbre produit $S_I(K) = K^I$ dont les éléments sont les suites d'éléments de K indexées par I. Cet article se propose d'étudier les endomorphismes de sous-algèbres de cette algèbre. Nous considérons presque exclusivement les endomorphismes qui sont continus pour la topologie induite par la topologie produit des topologies discrètes sur K. Le cas qui nous intéresse surtout est celui où existe sur l'ensemble des indices une structure de monoïde libre, permettant de définir une notion de suites reconnaissables [2], de sorte que ces suites reconnaissables forment une sous-algèbre de l'algèbre des suites. Lorsque K est un corps de caractéristique nulle et que $I = \mathbb{N}$, nous sommes en mesure de décrire complètement les endomorphismes continus de l'algèbre des suites reconnaissables, autrement nommée l'algèbre de Hadamard rationnelle. Plus précisément, nous montrons (voir théorème 3.9) que ces endomorphismes continus sont obtenus par substitution à l'indice $n \in \mathbb{N}$ d'un indice

Manuscrit reçu le 7 mars 2007.

$\varphi(n) \in \mathbb{N}$, où la suite $(\varphi(n))_{n\geq 0}$ est, à un nombre fini de termes près, un emboîtement de progressions arithmétiques. Nous proposons pour ces changements d'indices le nom d'applications *semi-affines*.

Cette algèbre a fait l'objet de travaux récents [10]. Ses éléments sont plus étudiés sous le nom de suites récurrentes linéaires et notre étude est liée au théorème 1.4 du livre [5] consacré à ces suites récurrentes. Nos résultats montrent d'ailleurs que l'énoncé de ce théorème est invalide (voir la remarque 2.18). Cependant, notre théorème 3.9 confirme pleinement la philosophie de [5, page 5] d'après laquelle l'entrelacement d'un nombre fini de progressions arithmétiques fournit essentiellement les seuls changements d'indices selon lesquelles une suite récurrente linéaire donnée se transforme en une autre suite récurrente linéaire.

On peut remarquer aussi l'analogie profonde de ce résultat avec l'énoncé du théorème de Skolem-Mahler-Lech [7, 8, 12] qui dit que l'ensemble des zéros d'une suite récurrente linéaire sur un corps de caractéristique nulle est réunion d'un ensemble fini d'indices et d'un ensemble fini de progressions arithmétiques. Du rapprochement de nos résultats et de ce théorème nous tirons une conséquence frappante qui souligne cette analogie (remarque 3.10).

L'article est organisé de la façon suivante. Dans la première section, nous considérons le cas où l'ensemble des indices est quelconque et montrons que tout endomorphisme continu de l'algèbre des suites est donné par substitution à l'indice i d'un indice $\varphi(i)$, où φ est une application fixée de I dans I. Dans la deuxième section, on se limite au cas des suites indexées par $\mathbb{N}$; après un bref rappel des définitions et quelques propriétés des suites récurrentes linéaires sur un anneau commutatif unifère, nous étendons les résultats de la première section à l'algèbre des suites reconnaissables (ou récurrentes linéaires), fournissant quelques exemples d'endomorphismes continus, introduisant en particulier la notion de *tressage*. Nous y donnons également un exemple d'endomorphisme continu moins connu de l'algèbre de suites récurrentes linéaires sur un corps commutatif de caractéristique nulle. Dans la troisième section, nous définissons et étudions les applications semi-affines de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. En nous appuyant sur le théorème de Kronecker qui caractérise les racines de l'unité parmi les entiers algébriques, nous sommes en mesure de montrer que ces applications semi-affines sont les seuls changements d'indices transformant les suites reconnaissables sur un corps de caractéristique nulle en suites reconnaissables (théorème 3.9).

1. Algèbre des suites

Dans la suite, tout anneau est supposé unifère, d'unité notée 1.

1.1. L'algèbre topologique des suites.

Dans cette section, on fixe un anneau commutatif unifère K, dont l'unité est notée 1, et un ensemble non vide quelconque I dont les éléments sont appelés *indices*. Soit $S_I(K)$ l'ensemble des suites $u = (u(i))_{i\in I}$ d'éléments de K indexées par I, c'est-à-dire des applications de I dans K. L'ensemble $S_I(K)$ est simplement le produit cartésien K^I de la famille d'ensembles $(K_i)_{i\in I}$, avec $K_i = K$ pour tout $i \in I$. Puisque chaque facteur de ce produit cartésien est muni d'une structure d'anneau, le produit cartésien $S_I(K)$ peut être naturellement muni d'une structure d'anneau. La multiplication ainsi définie sur $S_I(K)$ est appelée le *produit de Hadamard*, et le produit de Hadamard des deux suites u et v est noté $u \odot v$. On peut identifier K à un sous-anneau de $S_I(K)$ par le truchement de l'injection $k \mapsto (k_i = k)_{i\in I}$. L'ensemble $S_I(K)$ est ainsi muni d'une structure de K-algèbre unifère, appelée l'*algèbre des suites*.

Si on considère K comme un espace topologique discret, alors se trouve définie sur $S_I(K) = K^I$ une topologie produit. Rappelons que cette topologie produit est la topologie la moins fine sur $S_I(K)$ qui rende continues toutes les applications π_i $(i \in I)$ de $S_I(K)$ dans K définies par :

$$\forall u \in S_I(K), \quad \pi_i(u) = u(i).$$

Cette topologie est évidemment compatible avec les opérations algébriques de $S_I(K)$ qui devient de ce fait une K-algèbre topologique. Remarquons que cette algèbre topologique est complète par [4, Theorem 8.3.9].

Proposition 1.1. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble préordonné filtrant, $(u_e)_{e\in E}$ une suite généralisée d'éléments de $S_I(K)$ et u un élément de $S_I(K)$. Alors $(u_e)_{e\in E}$ converge vers u dans l'algèbre topologique $S_I(K)$ si et seulement si pour tout $i \in I$, il existe un élément $e_0(i)$ de E tel que $u_e(i) = u(i)$ pour tout $e \geq e_0(i)$.*

Démonstration. Par une propriété connue de la topologie produit [4, 2.3.34], la suite $(u_e)_{e\in E}$ converge vers u si et seulement si la suite $(\pi_i(u_e))_{e\in E}$ converge vers $\pi_i(u)$ dans K pour tout indice $i \in I$. Comme K est un espace topologique discret, le résultat en découle. $\square$

On connaît la notion de *base topologique* de l'algèbre $S_I(K)$: il s'agit d'une famille d'éléments de $S_I(K)$ qui est libre sur K et qui engendre un K-module dense dans $S_I(K)$.

Soit $j \in I$. Définissons la suite $\delta_j = (\delta_j(i))_{i\in I}$ de $S_I(K)$ par :

$$\forall i \in I,\ \delta_j(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Proposition 1.2. *La famille $(\delta_j)_{j\in I}$ est une base topologique de l'algèbre des suites indexées par I à valeurs dans K.*

Démonstration. Pour tout $u \in S_I(K)$ et tout $i \in I$, on a évidemment

$$u(i) = \sum_{j\in I} u(j)\delta_j(i)\ ,$$

c'est-à-dire $u = \lim_e \sum_{j\in e} u(j)\delta_j$ (ici la variable e parcourt l'ensemble préordonné filtrant des parties finies de I, ordonné par inclusion) dans l'algèbre topologique $S_I(K)$ en vertu de la proposition 1.1. D'autre part, si une combinaison linéaire $\sum_{j\in e} u(j)\delta_j$ est nulle dans $S_I(K)$, où e est une partie finie de I, alors c'est une suite qui prend en tout indice la valeur zéro, donc tous les coefficients $u(j)$ sont nuls. □

1.2. Endomorphismes continus de l'algèbre des suites.

1.2.1. *Idempotents de l'algèbre des suites.*

Étant donnée une partie quelconque N de I, on lui associe son *indicatrice* $\chi_N \in S_I(K)$ définie par :

$$\forall i \in I,\ \chi_N(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \in N, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas où l'anneau K est intègre, on décrit alors simplement les idempotents de $S_I(K)$.

Proposition 1.3. *Soit K un anneau commutatif intègre. Un élément de l'algèbre des suites $S_I(K)$ est un idempotent si et seulement si il existe une partie N de I dont il est l'indicatrice.*

Démonstration. Comme l'anneau K est supposé intègre, ses seuls idempotents sont 0 et 1. Si $u \in S_I(K)$ est un idempotent, il en découle que $u(i) \in \{0, 1\}$ pour tout indice i. La suite u est alors l'indicatrice de l'ensemble des indices i tels que $u(i) \neq 0$. La réciproque est évidente. □

Rappelons ci-dessous quelques propriétés qui découlent de la définition de la fonction indicatrice et qui nous seront utiles pour démontrer le théorème 1.5 qui caractérisera les endomorphismes continus de $S_I(K)$.

Lemme 1.4. *Soit N, N_1, N_2 des parties quelconques de I et $(N_x)_{x\in X}$ une famille de parties de I. Alors :*

1. $\chi_N = 0 \Leftrightarrow N = \emptyset$, *2.* $\chi_N = 1 \Leftrightarrow N = I$,

3. $\chi_{N_1} \odot \chi_{N_2} = \chi_{N_1\cap N_2}$, *4. si* $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, *alors* $\chi_{N_1} + \chi_{N_2} = \chi_{N_1\cup N_2}$,

5. Si les termes de la famille de parties $(N_x)_{x\in X}$ sont deux à deux disjoints, alors la suite généralisée $(S_e)_e$ indexée par les parties finies de l'ensemble d'indices X définie par $S_e = \sum_{x\in e} \chi_{N_x}$ converge dans $S_I(K)$ vers $\chi_{\cup_{x\in X} N_x}$.

1.2.2. *Caractérisation des endomorphismes continus.*

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser les endomorphismes continus de l'algèbre des suites.

Théorème 1.5. *Soit K un anneau commutatif intègre et f une application de $S_I(K)$ dans $S_I(K)$. Pour que f soit un endomorphisme continu de l'algèbre des suites, il faut et il suffit qu'il existe une application φ de I dans I telle que, pour tout u dans $S_I(K)$, on ait $f(u) = u \circ \varphi$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une application φ de I dans I telle que l'application f de $S_I(K)$ dans lui-même est définie par $f(u) = u\circ\varphi$. On vérifie immédiatement que f est un endomorphisme de l'algèbre des suites. Pour montrer que f est continue, il suffit de montrer que l'application $\pi_i \circ f$ est continue pour tout $i \in I$. Or $\pi_i \circ f = \pi_{\varphi(i)}$, donc est continue.

Réciproquement, supposons que f est un endomorphisme continu de l'algèbre des suites $S_I(K)$. Pour tout $j \in I$, comme δ_j est un idempotent de $S_I(K)$, il en est de même de $f(\delta_j)$. D'après la proposition 1.3, il existe une partie N_j de I telle que $f(\delta_j) = \chi_{N_j}$. Soit i et j dans I tels que $i \neq j$. En utilisant le (3) du lemme 1.4, on obtient :

$$\chi_{N_i\cap N_j} = \chi_{N_i} \odot \chi_{N_j} = f(\delta_i) \odot f(\delta_j) = f(\delta_i \odot \delta_j) = f(0) = 0.$$

D'après le (1) du lemme 1.4, on déduit que $N_i \cap N_j = \emptyset$.

D'autre part, on sait que dans l'algèbre topologique $S_I(K)$, on a

$$1 = \lim_e \sum_{j\in e} \delta_j \ ,$$

d'où, par continuité et additivité de f, les relations

$$1 = f(1) = \lim_e \sum_{j\in e} f(\delta_j) = \lim_e \sum_{j\in e} \chi_{N_j}.$$

Comme on sait que les parties N_j sont deux à deux disjointes, on est en position d'utiliser le (5) du lemme 1.4, et on obtient :

$$1 = \chi_{\cup N_j} \ ,$$

ce qui donne $\cup_{j\in I} N_j = I$, d'après le (2) du lemme 1.4.

Soit maintenant $i \in I$; il existe alors un unique $\varphi(i)$ dans I tel que i soit élément de $N_{\varphi(i)}$. Ceci définit une application φ de I dans I. Pour tout $u \in S_I(K)$ et tout $i \in I$, on vérifie alors que

$$(f(u))(i) = f\left(\lim_e \sum_{j\in e} u(j)\delta_j\right)(i) = \sum_{j\in I} u(j)(f(\delta_j))(i) \ ,$$

ou encore

$$(f(u))(i) = \sum_{j\in I} u(j)\chi_{N_j}(i) = u(\varphi(i)),$$

comme on le désirait. □

Corollaire 1.6. *Si K est un anneau commutatif intègre et I un ensemble non vide, alors le monoïde* $\mathrm{End}^c(S_I(K))$ *des endomorphismes continus de* *l'algèbre des suites à coefficients dans K indexées par I est isomorphe à l'opposé du monoïde de toutes les applications de I dans I.*

Démonstration. L'antimorphisme de I^I dans $\mathrm{End}^c(S_I(K))$ qui à $\varphi \in I^I$ associe l'endomorphisme continu $u \mapsto u \circ \varphi$ est une bijection en vertu du théorème 1.5. □

Corollaire 1.7. *Soit K un anneau commutatif intègre et I un ensemble non vide.*

1. Tout automorphisme continu de $S_I(K)$ est bicontinu.

2. Le groupe $\mathrm{Aut}^c(S_I(K))$ des automorphismes bicontinus de l'algèbre des suites à coefficients dans K indexées par I est isomorphe à l'opposé du groupe de toutes les permutations de I.

Démonstration. Si $\varphi \in I^I$ n'est pas une surjection, alors il existe $i \in I \setminus \varphi(I)$; on a alors $\delta_i \circ \varphi = 0$, de sorte que l'endomorphisme $u \mapsto u \circ \varphi$ n'est pas injectif. De même, si $\varphi \in I^I$ n'est pas une injection, alors il existe deux éléments i et j distincts dans I tels que $\varphi(i) = \varphi(j)$. Comme il existe des suites $u \in S_I(K)$ telles que $u(i) \neq u(j)$, on voit que l'endomorphisme $u \mapsto u \circ \varphi$ n'est pas surjectif. Par conséquent, l'endomorphisme continu $u \mapsto u \circ \varphi$ est un automorphisme si et seulement si φ est une bijection. Dans ce cas, l'automorphisme réciproque est $u \mapsto u \circ \varphi^{-1}$, donc est continu, ce qui prouve le point 1. Le point 2. résulte immédiatement du corollaire 1.6. □

2. Algèbre des suites récurrentes linéaires

2.1. Préliminaires.

Une structure supplémentaire de l'algèbre des suites apparaît quand l'ensemble des indices est muni d'une opération algébrique qui en fait un monoïde libre. Nous nous plaçons maintenant dans le cas le plus simple où les indices parcourent l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, et nous notons simplement $S(K) = S_{\mathbb{N}}(K)$. Ceci permet de définir l'application *décalage* T de $S(K)$ dans $S(K)$ par :

$$\forall u \in S(K),\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (Tu)(n) = u(n+1)\ .$$

L'application T étant K-linéaire, on peut voir $S(K)$ comme un $K[T]$-module.

Nous adoptons la terminologie du livre [2], à ceci près que nous parlons de *suites* là où ces auteurs parlent de *séries*. Ceci nous autorise à distinguer la suite $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de sa *série génératrice* $f_u = \sum_{n\geq 0} u(n)x^n$ qui est une série entière formelle. Suivant [2], nous appelerons suite *reconnaissable* une suite u telle que le sous-$K[T]$-module de $S(K)$ engendré par u est de type fini sur K. Ces suites seront aussi dites *rationnelles* car la suite u est reconnaissable si et seulement si sa série génératrice f_u est une fraction rationnelle dont le dénominateur est un polynôme à coefficients dans K

ayant un coefficient constant inversible dans K. Il est alors facile de vérifier que la suite u est reconnaissable si et seulement si elle satisfait une relation de récurrence "à coefficient dominant unité", autrement dit si et seulement si existent un entier $h \in \mathbb{N}$, et une famille finie $(p_0, \ldots, p_{h-1})$ d'éléments de K tels que

$$\forall n \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{h-1} p_i u(n+i) + u(n+h) = 0. \tag{2.1}$$

Définition 2.1. Si u satisfait la récurrence (2.1), le polynôme unitaire $\sum_{i=0}^{h-1} p_i T^i + T^h \in K[T]$ est appelé un *polynôme caractéristique* de la suite u.

C'est pourquoi nous utilisons le terme de "suite récurrente linéaire" [3] comme un autre synonyme de "suite reconnaissable". À l'exemple de [1], nous noterons $r(K)$ l'ensemble des suites récurrentes linéaires à valeurs dans K.

Rappelons le cas particulier d'un théorème de Schützenberger [2, page 21] (voir aussi [10]).

Proposition 2.2. *Soit K un anneau commutatif unifère. L'ensemble $r(K)$ des suites récurrentes linéaires à valeurs dans K est une sous-K-algèbre de l'algèbre des suites $S(K)$.*

Définition 2.3. La sous-K-algèbre $r(K)$ de $S(K)$ est appelée *l'algèbre de Hadamard rationnelle.*

Lorsque L/K est une extension de corps, le lemme suivant montre que les suites récurrentes linéaires sur K sont exactement les suites récurrentes linéaires sur L et à valeurs dans K.

Lemme 2.4. *Soit K un corps commutatif et L une K-algèbre commutative. Alors $r(K) = r(L) \cap S(K)$.*

Démonstration. Il est clair que toute suite récurrente linéaire sur K est une suite récurrente linéaire sur L. Donc $r(K) \subseteq r(L) \cap S(K)$.

Montrons maintenant que $r(L) \cap S(K)$ est un sous-ensemble de $r(K)$. Le produit par les éléments de K confère naturellement à l'algèbre L une structure de K-espace vectoriel. Comme K est un corps commutatif, le sous-espace K est facteur direct dans L, de sorte qu'il existe une application K-linéaire ψ de L dans K telle que $\psi(1) = 1$.

Ceci étant, soit $u \in r(L) \cap S(K)$. La suite u vérifie alors une relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(n+h) + p_{h-1}u(n+h-1) + \cdots + p_0 u(n) = 0.$$

où $h \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \{0, \ldots, h-1\}, \quad p_i \in L, \quad \forall n \geq 0, \quad u(n) \in K.$

Par la K-linéarité de ψ, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(n+h) + \sum_{i=0}^{h-1} \psi(p_i) u(n+i) = 0 \, .$$

Puisque $\psi(p_i) \in K$ pour tout indice $i \in \{0, \ldots, h-1\}$, on en conclut que $u \in r(K)$. $\square$

Dans le cas de l'extension d'anneaux $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on a le résultat analogue suivant, dû à Fatou [6] :

Lemme 2.5. *On a :*

$$r(\mathbb{Z}) = r(\mathbb{Q}) \cap S(\mathbb{Z}).$$

2.2. Quelques endomorphismes continus de l'algèbre de Hadamard rationnelle.

2.2.1. *Premières propriétés.*

Soit $\mathrm{End}^c(r(K))$ le monoïde des K-endomorphismes continus de l'algèbre de Hadamard rationnelle (vue comme un sous-espace topologique de $S(K)$). Un exemple d'élément de $\mathrm{End}^c(r(K))$ est la restriction à $r(K)$ du décalage, encore notée T (la continuité de $T \ : S(K) \to S(K)$ découlant du théorème 1.5).

Soit $\mathrm{id}_1 \in S(K)$ la suite identité définie par $\mathrm{id}_1(n) = n$ pour tout entier naturel n. Remarquons que cette suite id_1 satisfait la récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{id}_1(n+2) - 2\mathrm{id}_1(n+1) + \mathrm{id}_1(n) = 0$$

et est donc un élément de $r(K)$. On a le fait général suivant.

Proposition 2.6. *L'application $f \mapsto f(\mathrm{id}_1)$ est un antimorphisme injectif du monoïde $\mathrm{End}^c(r(K))$ dans le monoïde des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Son image est précisément l'ensemble des applications $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant :*

$$(\dagger) \quad \forall u \in r(K), \quad u \circ \varphi \in r(K) \, .$$

Démonstration. La preuve du théorème 1.5 n'utilise pas le fait que $S(K)$ soit complet, mais seulement celui que les δ_i ($i \in \mathbb{N}$) forment une base topologique de cette algèbre. Or cette propriété est partagée par la sous-algèbre $r(K)$. La même démonstration montre donc que tout endomorphisme continu f de $r(K)$ est de la forme $f = f_\varphi$ où on a noté $f_\varphi(u) = u \circ \varphi$ pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. On a alors $f(\mathrm{id}_1) = \varphi$, et bien sûr $f(u) = u \circ \varphi$ est élément de $r(K)$ si $u \in r(K)$. D'autre part, il est immédiat que $f_{\varphi_1 \circ \varphi_2} = f_{\varphi_2} \circ f_{\varphi_1}$.

Réciproquement, on vérifie aisément que, sous l'hypothèse que φ satisfait la condition ($\dagger$), l'application f_φ détermine un endomorphisme continu de l'algèbre de Hadamard rationnelle $r(K)$. $\square$

On voit ainsi que la description du monoïde $\mathrm{End}^c(r(K))$ se réduit à celle des applications $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaisant la propriété (†). On va maintenant donner d'autres exemples importants de telles applications.

2.2.2. *Décimations et emboîtements.*

Définition 2.7. Soit d un entier naturel non nul.

1. L'application θ_d de $S(K)$ dans $S(K)$, qui à toute suite u associe la suite $\theta_d u$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\theta_d u)(n) = u(dn),$$

est appelée *d-décimation* (ou simplement *décimation*).

2. L'application E_d de $S(K)^d$ dans $S(K)$, qui à tout d-uplet $(u_0, \dots, u_{d-1})$ associe la suite u définie par :

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, d-1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u(dn + j) = u_j(n),$$

est appelée *d-emboîtement* (ou simplement *emboîtement*).

Remarque 2.8. Les applications K-linéaires T, θ_d, E_d définies ci-dessus vérifient :

(1) $\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad T \circ \theta_d = \theta_d \circ T^d$.

(2) Plus généralement, soit d un entier naturel non nul ; si on désigne, pour $k \in \mathbb{N}$, par T^k et θ_d^k les k-ièmes itérés de T et θ_d respectivement alors on a :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad T^i \circ \theta_d^j = \theta_{d^j} \circ T^{id^j}.$$

(3) Si $(u_0, \dots, u_{d-1}) \in S(K)^d$, alors on a :

$$(T \circ E_d)(u_0, \dots, u_{d-1}) = E_d(u_1, \dots, u_{d-1}, Tu_0).$$

Ces relations interviennent dans la preuve du théorème suivant (déjà démontré dans [10]) qui va nous permettre de construire des endomorphismes de $r(K)$.

Théorème 2.9. *Soit d un entier naturel non nul.*

1. Si u est une suite reconnaissable, alors sa d-décimée $\theta_d u$ est aussi reconnaissable.

2. Si les d suites $u_0, \dots, u_{d-1}$ sont reconnaissables, alors leur d-emboîtement $E_d(u_0, \dots, u_{d-1})$ est reconnaissable.

Démonstration. 1. Sur l'anneau commutatif unifère K, une suite reconnaissable u admet une représentation linéaire [2], c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel h, une matrice Q carrée d'ordre h, un vecteur colonne v_0 à h composantes, et un vecteur ligne w à h composantes tels qu'on ait

$u(n) = wQ^n v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, pour une suite u reconnaissable, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u(dn) = w(Q^d)^n v_0,$$

ce qui montre que $\theta_d u$ est reconnaissable. On trouvera aussi dans [10] une preuve n'utilisant pas l'écriture explicite du terme général de la suite.

2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. De la propriété (3) de la remarque ci-dessus, on déduit que, pour tout polynôme $p(T) \in K[T]$, on a, pour tout $(u_0, \ldots, u_{d-1}) \in S(K)^d$,

$$p(T^d)E_d(u_0, \ldots, u_{d-1}) = E_d(p(T)u_0, \ldots, p(T)u_{d-1}).$$

Supposons que les suites $u_0, \ldots, u_{d-1}$ sont reconnaissables. Soit $p(T)$ le produit de leurs polynômes caractéristiques. On a alors, d'après cette dernière égalité :

$$p(T^d)E_d(u_0, \ldots, u_{d-1}) = 0.$$

Ce qui montre que $p(T^d)$ est un polynôme caractéristique de l'emboîtement des suites $u_0, \ldots, u_{d-1}$. $\square$

Comme on a $\theta_d(u) = u \circ \phi_d$, où $\phi_d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par l'équation $\phi_d(n) = dn$ pour tout entier naturel n, on voit qu'on a en particulier :

Proposition 2.10. *Pour tout entier naturel non nul d, la d-décimation θ_d est un endomorphisme continu de l'algèbre $r(K)$.*

Remarques 2.11.

(1) Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ et tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, les endomorphismes suivants de $r(K)$:

$$T^i, \quad \theta_d^j, \quad T^i \circ \theta_d^j, \quad \theta_d^j \circ T^i$$

sont continus ; les applications $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui leur correspondent par la proposition 2.6Ê sont définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \varphi_1(n) = n + i, \qquad \varphi_2(n) = d^j n,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \varphi_3(n) = d^j n + id^j, \qquad \varphi_4(n) = d^j n + i.$$

(2) On suppose que K est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, de sorte que tout élément de $r(K)$ est somme d'un polynôme exponentiel [2] (combinaison linéaire des suites $u_{p,\alpha}$ définies pour $(p, \alpha) \in K[X] \times K^*$ par $u_{p,\alpha}(n) = p(n)\alpha^n$ pour tout entier naturel n) et d'une combinaison linéaire des suites $\delta_i, i \in \mathbb{N}$. Pour $a \in K \setminus \mathbb{Z}$, soit f_a l'endomorphisme K-linéaire de $r(K)$ défini par $f_a(u_{p,\alpha})(n) = p(a)\alpha^n$ pour tout $(p, \alpha) \in K[X] \times K^*$ avec de plus $f_a(\delta_i) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, est un exemple d'endomorphisme non continu de $r(K)$.

2.2.3. *Tressages.*
Afin de construire d'autres endomorphismes continus de $r(K)$ nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 2.12. Soit d un entier naturel non nul, $J = (j_0, j_1, \ldots, j_{d-1})$ un élément de $\mathbb{N}^d$ et σ une permutation de $\{0, 1, \ldots, d-1\}$. On définit les applications suivantes :

$$\Delta_d : r(K) \longrightarrow r(K)^d, \qquad \Sigma_\sigma : r(K)^d \longrightarrow r(K)^d,$$
$$\text{et} \quad T_J : r(K)^d \longrightarrow r(K)^d,$$

par :

a) $\forall u \in r(K), \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(\Delta_d u)(n) &= ((\theta_d u)(n), (\theta_d \circ T u)(n), \ldots, (\theta_d \circ T^{d-1} u)(n)) \\ &= (u(dn), u(dn+1), \ldots, u(dn+d-1)).\end{aligned}$$

b) $\forall (u_0, \ldots, u_{d-1}) \in r(K)^d$,

$$\Sigma_\sigma(u_0, u_1, \ldots, u_{d-1}) = (u_{\sigma(0)}, u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(d-1)}).$$

c) $\forall (u_0, \ldots, u_{d-1}) \in r(K)^d$,

$$T_J(u_0, \ldots, u_{d-1}) = (T^{j_0} u_0, T^{j_1} u_1, \ldots, T^{j_{d-1}} u_{d-1}).$$

Remarques 2.13. (1) Les applications données ci-dessus sont bien définies en vertu du théorème 2.9.

(2) L'application Δ_d est une bijection dont la réciproque est la restriction à $r(K)^d$ de l'emboîtement E_d.

Définition 2.14. L'application $E_d \circ \Sigma_\sigma \circ T_J \circ \Delta_d$, notée $\psi_{d,J,\sigma}$ est appelée *tressage*.

En utilisant le théorème 2.9, on a immédiatement la proposition qui suit.

Proposition 2.15. *L'image par un tressage d'une suite reconnaissable est une suite reconnaissable.*

Soit x un nombre réel. Rappelons les notations $[x]$ pour la partie entière de x et $\{x\} = x - [x]$ pour sa partie fractionnaire. On observe que le tressage $\psi_{d,J,\sigma}$ s'écrit $\psi_{d,J,\sigma}(u) = u \circ \varphi$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) = d\left(\left[\frac{n}{d}\right] + j_{\sigma(d\{\frac{n}{d}\})}\right) + \sigma\left(d\left\{\frac{n}{d}\right\}\right). \tag{2.2}$$

Les propositions 2.6 et 2.15 montrent donc l'énoncé suivant.

Proposition 2.16. *Pour tout entier naturel non nul d, pour tout d-uple J d'entiers naturels et pour toute permutation σ de l'ensemble $\{0, \ldots, d-1\}$, le tressage $\psi_{d,J,\sigma}$ est un endomorphisme continu de l'algèbre $r(K)$.*

On a de plus la caractérisation suivante des tressages bijectifs.

Proposition 2.17. *Un tressage $\psi_{d,J,\sigma}$ est un automorphisme de $r(K)$ si et seulement si $J = (0, \dots, 0)$.*

Démonstration. Si $J = (0, \dots, 0)$, alors T_J est l'identité, de sorte que $\psi_{d,J,\sigma}$ est une bijection comme composée de bijections.

Si $J = (j_0, \dots, j_{d-1}) \neq (0, \dots, 0)$, alors il existe un indice $r \in \{0, \dots, d-1\}$ tel que $j_r \neq 0$. On vérifie alors que $\psi_{d,J,\sigma}(\delta_r) = 0$, de sorte que le tressage $\psi_{d,J,\sigma}$ n'est pas injectif. $\square$

On verra dans la section suivante qu'il existe d'autres automorphismes de $r(K)$ que les tressages bijectifs.

Remarque 2.18. Pour un tressage bijectif, la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de (2.2) n'est pas en général croissante, et ceci invalide l'énoncé 1.4 de [5].

Lemme 2.19. *Si $D = de$ pour un entier $e \geq 1$, alors il existe une permutation τ de $\{0, \dots, D-1\}$ telle que les tressages bijectifs $\psi_{d,(0,\dots,0),\sigma}$ et $\psi_{D,(0,\dots,0),\tau}$ coïncident.*

Démonstration. Pour $r \in \{0, \dots, D-1\}$, on pose

$$\tau(r) = d\left[\frac{r}{d}\right] + \sigma\left(d\left\{\frac{r}{d}\right\}\right)$$

et on vérifie que τ est une permutation de l'ensemble $\{0, \dots, D-1\}$ d'inverse

$$\tau^{-1}(r) = d\left[\frac{r}{d}\right] + \sigma^{-1}\left(d\left\{\frac{r}{d}\right\}\right).$$

Il est facile de voir par la formule (2.2) que les deux tressages $\psi_{d,(0,\dots,0),\sigma}$ et $\psi_{D,(0,\dots,0),\tau}$ coïncident. $\square$

Proposition 2.20. *Les tressages bijectifs forment un sous-groupe du groupe des automorphismes bicontinus de l'algèbre de Hadamard rationnelle.*

Démonstration. La bijection réciproque du tressage bijectif $\psi_{d,(0,\dots,0),\sigma}$ est le tressage bijectif $\psi_{d,(0,\dots,0),\sigma^{-1}}$, ce qui fait voir que tout tressage bijectif est un automorphisme bicontinu de $r(K)$. Pour montrer que les tressages bijectifs forment un sous-groupe, il reste seulement à voir que le composé de deux tressages bijectifs est un tressage bijectif. En vertu du lemme 2.19, on a seulement à montrer que $\psi_{d,(0,\dots,0),\sigma} \circ \psi_{d,(0,\dots,0),\tau}$ est un tressage bijectif pour tous les choix de deux permutations σ et τ de l'ensemble $\{0, \dots, d-1\}$. Or par la formule (2.2), on vérifie aisément que

$$\psi_{d,(0,\dots,0),\sigma} \circ \psi_{d,(0,\dots,0),\tau} = \psi_{d,(0,\dots,0),\sigma\tau}\ .$$

$\square$

3. Endomorphismes continus de l'algèbre de Hadamard rationnelle

Dans cette section, nous déterminons tous les endomorphismes continus de l'algèbre de Hadamard rationnelle $r(K)$, lorsque K est un corps commutatif de caractéristique nulle.

3.1. Applications semi-affines.

Définition 3.1. Soit $(d,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $(a_i)_{0\le i<d} \in \mathbb{N}^d$, $(b_i)_{0\le i<d} \in \mathbb{Z}^d$ et $c = (c_l)_{0\le l<dt} \in \mathbb{N}^{dt}$. On suppose ces données assujetties aux conditions $a_i t + b_i \ge 0$ pour tout entier naturel $i \in \{0,\dots,d-1\}$. On définit l'application $\varphi_{(d,a,b,c,t)}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \varphi_{(d,a,b,c,t)}(n) = \begin{cases} c_n & \text{si } n < dt, \\ a_r \left[\dfrac{n}{d}\right] + b_r & \text{si } n \ge dt \end{cases}$$

où on a posé $r = d\left\{\dfrac{n}{d}\right\}$.

Les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ de la forme $\varphi_{(d,a,b,c,t)}$ sont dites *semi-affines*. Nous notons Φ l'ensemble des applications semi-affines.

Nous caractérisons maintenant ces applications semi-affines comme solutions de certaines récurrences.

Proposition 3.2. *Soit $(d,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ et φ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1. il existe des suites finies $(a_i)_{0\le i<d} \in \mathbb{N}^d$, $(b_i)_{0\le i<d} \in \mathbb{Z}^d$ et $c = (c_l)_{0\le l<dt} \in \mathbb{N}^{dt}$ vérifiant $a_i t + b_i \ge 0$ pour tout entier naturel $i \in \{0,\dots,d-1\}$ telles que $\varphi = \varphi_{(d,a,b,c,t)}$,
2. pour tout entier naturel $n \ge dt$, on a $\varphi(n+2d) - 2\varphi(n+d) + \varphi(n) = 0$.

Démonstration. Il est facile de vérifier que pour tout $n \ge dt$, on a :

$$a_r \left[\frac{n+2d}{d}\right] + b_r - 2(a_r \left[\frac{n+d}{d}\right] + b_r) + a_r \left[\frac{n}{d}\right] + b_r = 0,$$

de sorte que la propriété (1) entraîne effectivement la propriété (2).

Réciproquement, supposant la validité de (2), on va montrer (1). Fixons $r \in \{0,\dots,d-1\}$ et soit $n_r = dt + r$ le plus petit entier au moins égal à dt et congru à r modulo d. Soit $v \in S(\mathbb{Q})$ la suite (dépendant de r) définie par $v(n) = \varphi(n_r + dn)$. Par hypothèse, pour tout entier naturel n, on a la relation

$$(\star) \qquad\qquad v(n+2) - 2v(n+1) + v(n) = 0\ .$$

On voit donc que la suite $(v(n+1) - v(n))_{n\ge 0}$ est constante. Soit a_r la constante telle que $v(n+1) - v(n) = a_r$ pour tout entier naturel n ; puisque la suite v ne prend que des valeurs entières, on a forcément $a_r \in \mathbb{Z}$. En additionnant les relations $v(n+1)-v(n) = a_r$, on trouve $v(n)-v(0) = a_r n$, d'où $v(n) = a_r(n+t)+b_r$ en posant $b_r = v(0)-a_r t$; on observe que $b_r \in \mathbb{Z}$ comme différence de deux entiers. Puisque la suite v ne prend que des valeurs positives, on voit que nécessairement $a_r \in \mathbb{N}$ et $a_r t + b_r = v(0) \geq 0$. On pose de plus $c_\ell = \varphi(\ell)$ pour tout entier naturel $\ell < dt$. On vérifie alors immédiatement que $\varphi = \varphi_{(d,a,b,c,t)}$. □

Proposition 3.3. *L'ensemble Φ des applications semi-affines est un sous-monoïde du monoïde de toutes les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Démonstration. Soit φ et ψ deux applications semi-affines. Par définition de Φ et par le lemme 3.2, il existe des entiers naturels $d > 0, e > 0$, et t, u tels que

$$\varphi(n+2d) - 2\varphi(n+d) + \varphi(n) = 0$$

pour tout entier naturel $n \geq dt$, et

$$\psi(n+2e) - 2\psi(n+e) + \psi(n) = 0$$

pour tout entier naturel $n \geq eu$.

Fixons $n \geq (t+u)de$. On a alors $n \geq ue$, de sorte que pour tout entier naturel $m \geq 1$, on peut écrire

$$\psi(n+me) - \psi(n+(m-1)e) = \cdots = \psi(n+e) - \psi(n) \ ,$$

ce qui implique que :

$$\psi(n+me) = \psi(n) + mB(n,e),$$

en posant $B(n,e) = \psi(n+e) - \psi(n)$.

On distinguera alors deux cas selon la valeur de $B(n,e)$. Si tout d'abord $B(n,e) = 0$, alors on a $\psi(n+me) = \psi(n)$ pour tout entier naturel m, donc en particulier $\psi(n+2de) = \psi(n+de) = \psi(n)$, d'où

$$(\varphi\circ\psi)(n+2de) - 2(\varphi\circ\psi)(n+de) + (\varphi\circ\psi)(n) = 0 \ . \tag{3.1}$$

Si au contraire $B(n,e) \neq 0$, alors l'inégalité $\psi(n+me) \geq 0$, valable pour tout entier naturel m, entraîne que $B(n,e)$ est un entier ≥ 1. Posons $n' = n - det$, de sorte que $n' \geq ude \geq ue$. Comme n et n' sont congrus modulo e, on a $\psi(n) = \psi(n') + dtB(n,e) \geq dt$. L'application φ vérifiant donc les relations

$$\varphi(\psi(n)+kd) - \varphi(\psi(n)+(k-1)d) = \cdots = \varphi(\psi(n)+d) - \varphi(\psi(n))$$

pour tout entier naturel $k \geq 1$, on obtient $\varphi(\psi(n)+kd) = \varphi(\psi(n))+kA(n,d)$ pour tout entier naturel $k \geq 1$, où $A(n,d) = \varphi(\psi(n)+d) - \varphi(\psi(n))$. On en déduit que

$$(\varphi\circ\psi)(n+2de) = \varphi(\psi(n+(2d)e)) = \varphi(\psi(n)+2dB(n,e))$$

s'exprime sous la forme

$$(\varphi\circ\psi)(n+2de) = \varphi(\psi(n)) + 2B(n,e)A(n,d).$$

De même

$$(\varphi \circ \psi)(n + de) = \varphi(\psi(n + (d)e)) = \varphi(\psi(n) + dB(n, e))$$

est encore donné par

$$(\varphi \circ \psi)(n + de) = \varphi(\psi(n)) + B(n, e)A(n, d) .$$

On en conclut à la validité de l'équation (3.1) dans ce deuxième cas.

Pour tout $n \geq (t + u)de$, on a (3.1). Donc, en vertu du lemme 3.2, l'application $\varphi \circ \psi$ est aussi élément de Φ. □

Proposition 3.4. *Soit φ une application semi-affine de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et u une suite reconnaissable à valeurs dans un anneau commutatif unifère K. Alors la suite $u \circ \varphi$ est reconnaissable.*

Démonstration. Écrivons $\varphi = \varphi_{(d,a,b,c,t)}$ et soit $u \in r(K)$.

Pour montrer que $u \circ \varphi \in r(K)$, il suffit de montrer que $T^{dt}(u \circ \varphi) \in r(K)$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(T^{dt}(u \circ \varphi))(n) = (u \circ \varphi)(n + dt) = u(\varphi(n + dt)) .$$

Or, puisque $n + dt \geq dt$, on a, en posant $r = \left\{\dfrac{n}{d}\right\}$, l'égalité

$$\varphi(n + dt) = a_r \left[\frac{n + dt}{d}\right] + b_r = a_r \left[\frac{n}{d}\right] + a_r t + b_r ,$$

avec $a_r t + b_r \geq 0$. Par conséquent la suite $T^{dt}(u \circ \varphi)$ est l'emboîtement des suites u_r, $(0 \leq r < d)$ définies par

$$u_r(n) = u(a_r n + a_r t + b_r), \quad 0 \leq r < d .$$

Par le théorème 2.9, on conclut que $T^{dt}(u \circ \varphi) \in r(K)$, et par conséquent, on a $u \circ \varphi \in r(K)$. □

En vertu de la proposition 2.6, on en déduit :

Corollaire 3.5. *Si φ est une application semi-affine de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et si K est un anneau commutatif unifère, l'application, qui à toute suite u associe la suite $u \circ \varphi$, est un endomorphisme continu de $r(K)$.*

Remarque 3.6. Il existe des bijections semi-affines qui ne sont pas données par la formule (2.2), par exemple l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi(3k) = 2k, \quad \varphi(3k + 1) = 4k + 1, \quad \varphi(3k + 2) = 4k + 3.$$

Ainsi donc le groupe des tressages bijectifs est un sous-groupe propre du groupe des automorphismes bicontinus de $r(K)$.

3.2. Quelques lemmes.

On se restreint dorénavant au cas où K est un corps de caractéristique nulle. En vue de montrer que, dans ce cas, tout endomorphisme continu de l'algèbre $r(K)$ provient d'une application semi-affine, nous nous appuierons sur les deux lemmes suivants.

Lemme 3.7. *Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle et φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ une application. Si, pour toute suite $u \in r(K)$, $u \circ \varphi$ est élément de $r(K)$, alors la suite $\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ est bornée.*

Démonstration. On peut supposer que $\mathbb{Q} \subseteq K$. Considérons la suite géométrique u de $r(\mathbb{Q}) \subseteq r(K)$ définie par $u(n) = 2^n$ pour tout entier naturel n. Par hypothèse, on sait que la suite $u \circ \varphi$ est une suite récurrente linéaire. Donc, par le théorème 1 de [2, page 73] (voir aussi [11]), il existe un entier naturel n_0, un entier naturel $h > 0$, des polynômes $p_i \quad (1 \leq i \leq h)$ à coefficients complexes et des nombres complexes $\alpha_i \quad (1 \leq i \leq h)$ tels que :

$$(\forall n \geq n_0), \qquad 2^{\varphi(n)} = \sum_{i=1}^{h} p_i(n)\alpha_i^n \ .$$

En posant $c = \max_{1\leq i\leq h} |\alpha_i|$, on a alors :

$$(\forall n \geq n_0), \qquad 2^{\varphi(n)} \leq c^n \sum_{i=1}^{h} |p_i(n)| \, .$$

En prenant le logarithme en base 2, on en déduit :

$$(\forall n \geq n_0), \qquad \frac{\varphi(n)}{n} \leq \log_2 c + \frac{\log_2(\sum_{i=1}^{h} |p_i(n)|)}{n}.$$

La suite $\frac{\log_2(\sum_{i=1}^{h} |p_i(n)|)}{n}$, tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$, est bornée par une constante c_1, d'où

$$(\forall n \geq n_0), \qquad \frac{\varphi(n)}{n} \leq \log_2 c + c_1.$$

Par conséquent, on obtient, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\frac{\varphi(n)}{n} \leq \max\left\{\log_2 c + c_1, \max_{j<n_0}\left(\frac{\varphi(j)}{j}\right)\right\}.$$

$\square$

Lemme 3.8. *Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} \varphi(n)x^n$ une série entière formelle dans $\mathbb{C}[[x]]$. On suppose que $Q(x)f(x) = P(x)$, où P et Q sont deux polynômes à coefficients complexes premiers entre eux et que le rayon de convergence de* *la série entière f est supérieur ou égal à 1. Si $\alpha_i, (i = 1, \ldots, s)$, sont les racines du polynôme réciproque Q^* de Q alors :*

$$\forall i \in \{1, \ldots, s\}, \ |\alpha_i| \leq 1.$$

Démonstration. Soient $\beta_i (i = 1, \ldots, s)$ les racines de Q dans $\mathbb{C}$. Par définition ce sont les inverses des nombres α_i. Supposons qu'il existe un indice $i_0 \in \{1, \ldots, s\}$, avec $|\beta_{i_0}| < 1$. Comme les séries formelles $P(x), f(x), Q(x)$ convergent pour $|x| < 1$, on a, pour tout nombre complexe x de module moindre que 1, la relation $Q(x)f(x) = P(x)$. En particulier, on trouve :

$$P(\beta_{i_0}) = Q(\beta_{i_0}) f(\beta_{i_0}) = 0.$$

Donc β_{i_0} est une racine commune des polynômes P et Q, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle ils sont premiers entre eux. Par suite on a :

$$\forall i \in \{1, \ldots, s\}, |\beta_i| \geq 1$$

d'où

$$\forall i \in \{1, \ldots, s\}, |\alpha_i| \leq 1.$$

□

3.3. Caractérisation des endomorphismes continus.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le théorème caractérisant les endomorphismes continus de $r(K)$ lorsque K est un corps de caractéristique nulle.

Théorème 3.9. *Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle et f une application de $r(K)$ dans $r(K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *l'application f est un endomorphisme continu de $r(K)$*
(2) *il existe une application semi-affine φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout u dans $r(K)$, on ait $f(u) = u \circ \varphi$.*

Démonstration. D'après le corollaire 3.5, seule l'implication $1 \Rightarrow 2$ reste à démontrer. Soit donc f un endomorphisme continu de $r(K)$. En vertu de la proposition 2.6, il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que l'on ait :

$$\forall u \in r(K), \quad f(u) = u \circ \varphi.$$

On va montrer que φ est une application semi-affine. On sait en particulier que $\varphi = f(\mathrm{id}_1)$ est une suite récurrente linéaire à coefficients dans K. D'après le lemme 2.4, on voit donc que $\varphi \in r(K) \cap S(\mathbb{Q}) = r(\mathbb{Q})$.

Par le théorème 1 de [2, page 73], il va exister deux entiers naturels n_0 et h strictement positifs, des nombres complexes α_i deux à deux distincts, et des polynômes p_i à coefficients complexes, tels que :

$$(\forall n \geq n_0), \qquad \varphi(n) = \sum_{i=1}^{h} p_i(n) \alpha_i^n \ .$$

D'autre part, la proposition 1 de [2, page 67] assure que la série génératrice $f(x) = \sum_{n\geq 0} \varphi(n)x^n$ peut être mise sous la forme d'une fraction rationnelle normalisée, c'est-à-dire qu'il existe deux polynômes P et Q à coefficients rationnels, premiers entre eux, avec $Q(0) = 1$, tels que $f(x)Q(x) = P(x)$ dans l'anneau $\mathbb{Q}[[x]]$ des séries entières formelles à coefficients rationnels. De plus, en vertu de la proposition 2 de [2, page 68], le polynôme Q est le polynôme réciproque du polynôme minimal de la suite récurrente linéaire φ, de sorte que les nombres α_i sont les racines du polynôme Q^* réciproque de Q ; ainsi on peut écrire $Q(x) = \prod_{i=1}^{h}(1 - \alpha_i x)^{m_i}$ pour certaines multiplicités $m_i \in \mathbb{N}^*$. D'après le lemme 2.5 de Fatou, la suite φ est récurrente linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de sorte que le polynôme unitaire Q^* est à coefficients entiers et que les nombres α_i, $(i = 1, \ldots, s)$, sont des entiers algébriques. La suite $\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ étant bornée par le lemme 3.7, il existe alors une constante c strictement positive telle que :

$$(\ddagger) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ , \qquad |\varphi(n)| \leq cn\ .$$

Par conséquent, le rayon de convergence de la série génératrice $f(x)$ est au moins égal à 1. Par le lemme 3.8, on en déduit :

$$\forall i \in \{1, \ldots, h\}\ ,\ |\alpha_i| \leq 1.$$

Tout conjugué sur $\mathbb{Q}$ d'un nombre α_i est une racine du polynôme Q^*, donc est un autre $\alpha_{i'}$. Par conséquent, tous les nombres complexes qui sont des conjugués sur $\mathbb{Q}$ de α_i ont un module ≤ 1. D'après un théorème de Kronecker [9, theorem 2.1, page 46], on en conclut que les entiers algébriques α_i sont des racines de l'unité.

Maintenant, on va montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, h\}$, le polynôme p_i est de degré inférieur ou égal à 1. On a vu que

$$\sum_{n\geq 0} \varphi(n)x^n = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^{h}(1 - \alpha_i x)^{m_i}}$$

où les polynômes $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ sont premiers entre eux, avec $d^\circ p_i \leq m_i - 1$ et m_i non nul, pour tout $i \in \{1, \ldots, h\}$. On va montrer que $m_i \leq 2$, pour tout $i \in \{1, \ldots, h\}$. Supposons au contraire qu'il existe $k \in \{1, \ldots, h\}$ tel que $m_k > 2$. Puisque les deux membres sont deux séries entières formelles de rayon de convergence au moins 1, on a, pour tout nombre complexe x tel que $|x| < 1$, l'égalité :

$$(1 - \alpha_k x)^{m_k} \sum_{n\geq 0} \varphi(n)x^n = \frac{P(x)}{\prod_{i\neq k}(1 - \alpha_i x)^{m_i}}.$$

Pour t réel, élément de $]0,1[$, on a $\left|\dfrac{t}{\alpha_k}\right| = t < 1$, donc on peut poser $x = \dfrac{1}{\alpha_k}t$ dans cette dernière identité, on obtient alors :

$$(\star\,\star) \qquad (1-t)^{m_k}\sum_{n\geq 0}\varphi(n)\frac{t^n}{\alpha_k^n} = \frac{P(\frac{t}{\alpha_k})}{\prod_{i\neq k}(1-\frac{\alpha_i}{\alpha_k}t)^{m_i}}.$$

Quand t tend vers 1, d'une part, les polynômes P et Q étant premiers entre eux, le membre de droite de $(\star\,\star)$ tend vers une limite finie non nulle, alors que, d'autre part, en vertu de la relation $(\ddagger)$, et du fait que $|\alpha_k| = 1$, on a :

$$\begin{aligned}\left|(1-t)^{m_k}\sum_{n\geq 0}\varphi(n)\frac{t^n}{\alpha_k^n}\right| &= |1-t|^{m_k}\left|\sum_{n\geq 0}\varphi(n)\frac{t^n}{\alpha_k^n}\right| \\ &\leq |1-t|^{m_k}\sum_{n\geq 0}cnt^n \\ &\leq (1-t)^{m_k-2}ct.\end{aligned}$$

Comme $m_k > 2$ alors $(1-t)^{m_k-2}ct$ tend vers 0 quand t tend vers 1, d'où contradiction. On conclut donc que :

$$\forall i \in \{1,\ldots,h\}, \quad m_i \leq 2.$$

Par suite pour tout $i \in \{1,\ldots,h\}$, on a comme annoncé $d^\circ p_i \leq 1$. On écrit

$$p_i(x) = A_i x + B_i,$$

où A_i et B_i sont deux constantes complexes.

Soit maintenant ξ une racine complexe de l'unité d'ordre exactement égal au plus petit commun multiple d des ordres des racines α_i, $(1 \leq i \leq h)$. Pour tout $i \in \{1,\ldots,h\}$, il existe un entier naturel k_i tel que $\alpha_i = \xi^{k_i}$. On a alors, pour tout entier naturel $n \geq n_0$:

$$\varphi(n) = \sum_{i=1}^{h}(A_i n + B_i)\xi^{k_i n}.$$

On voit ainsi qu'un polynôme caractéristique de la suite récurrente linéaire $(\varphi(n_0+n))_{n\geq 0}$ est $(x^d-1)^2$. Par conséquent, en choisissant un entier naturel t supérieur ou égal à $\dfrac{n_0}{d}$, la suite φ vérifie la récurrence suivante :

$$\forall n \geq dt,\ \varphi(n+2d) - 2\varphi(n+d) + \varphi(n) = 0.$$

D'après la proposition 3.2, on en conclut que φ est semi-affine. $\square$

Remarque 3.10. À toute suite $u \in K^{\mathbb{N}}$ associons la suite

$$c(u) : \mathbb{N} \to \{0,1\} \subset K$$

telle que $c(u)(n) = 0$ si et seulement si $u(n) = 0$. Alors nous allons montrer que le théorème de Skolem-Mahler-Lech équivaut à dire que si u est récurrente linéaire, alors $c(u)$ est aussi récurrente linéaire.

En effet, d'une part si ce théorème est vrai, alors $c(u)(n)$ est égal à zéro si et seulement si n appartient à un ensemble réunion d'un ensemble fini et d'une réunion finie de progressions arithmétiques. Par conséquent $c(u)$ est une suite récurrente linéaire.

Réciproquement, on vérifie facilement que, pour toute suite $v \in K^{\mathbb{N}}$, on a :

$$v \circ c(u) = v(0) + (v(1) - v(0))c(u).$$

Il en résulte que la substitution $v \mapsto v \circ c(u)$ transforme les suites récurrentes linéaires en suites récurrentes linéaires si et seulement si $c(u)$ est elle-même récurrente linéaire. Maintenant, notre théorème 3.9 nous dit que si la substitution $v \mapsto v \circ c(u)$ transforme les suites récurrentes linéaires en suites récurrentes linéaires, alors $c(u)$ est semi-affine. Ainsi la suite $c(u)$ est, à un nombre fini de termes près, un emboîtement d'un nombre fini d'applications affines et ces applications seront toutes constantes parce que $c(u)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Ainsi les zéros de u sont, à un ensemble fini près, les éléments d'un nombre fini de progressions arithmétiques.

L'énoncé auquel se trouve ainsi ramené le théorème de Skolem-Mahler-Lech se rattache à des questions abordées en théorie des langages. Plus précisément, avec le vocabulaire de [2], il signifie que le support d'une série rationnelle en une variable sur un corps commutatif de caractéristique nulle est un langage rationnel.

Références

[1] B. BENZAGHOU, *Algèbre de Hadamard*. Bull. Soc. Math. France **98** (1970), 209–252.

[2] J. BERSTEL, C. REUTENAUER, *Les séries rationnelles et leurs langages*. Études et recherches en informatique, Masson, Paris, 1984.

[3] L. CERLIENCO, M. MIGNOTTE, F. PIRAS, *Suites récurrentes linéaires : propriétés algébriques arithmétiques*. Enseig. Math. **33** (1987), 67–108.

[4] R. ENGELKING, *General Topology*. Monografie Matematyczne **60**, Polska Akademia Nauk, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.

[5] G. EVEREST, A. VAN DER POORTEN, I. SHPARLINSKI, T. WARD, *Recurrence sequences*. Mathematical Surveys and Monographs **104**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xiv+318 pp.

[6] P. FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*. Acta Math, Uppsala **30** (1906), 335–400.

[7] C. LECH, *A note on recurring series*. Ark. Mat. **2** (1953), 417–421.

[8] K. MAHLER, *On the coefficients of rational functions*. Proc.Cambridge Phil. Soc. **52** (1956), 39–48.

[9] W. NARKIEWICZ, *Elementary and analytic theory of algebric numbers*, Second edition. Springer-Verlag, Berlin ; PWN—Polish Scientific Publishers, Varsovie, 1990. xiv+746 pp.

[10] A. NECER, *Suites récurrentes linéaires et séries formelles en plusieurs variables*. Thèse de Doctorat de l'université de Limoges, 1998.

[11] C. Pisot, *Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques.* Montréal, Les presses de l'université de Montréal, 1963 (Séminaire de Mathématiques Supérieures, Eté 1963,5).

[12] T. Skolem, *Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen.* Comptes rendus du congrès des mathématiciens scandinaves, Stockholm, 1934 (1935), 163–188.

Ahmed Ait-Mokhtar
Département Mathématiques
École Normale Supérieure
BP 92, Kouba
Alger, Algérie
E-mail: `a_aitmokhtar@yahoo.fr`

Abdelkader Necer
Département de Mathématiques et Informatique,
XLIM (UMR CNRS 6172), Université de Limoges
123, avenue Albert Thomas 87060 Limoges Cedex, France
E-mail: `anec@unilim.fr`

Alain Salinier
Département de Mathématiques et Informatique,
XLIM (UMR CNRS 6172), Université de Limoges
123, avenue Albert Thomas 87060 Limoges Cedex, France
E-mail: `alain.salinier@unilim.fr`