

# JOURNAL

de Théorie des Nombres  
de BORDEAUX

*anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*

M'hammed ZIANE

**Sur le groupe des unités de corps de nombres de degré 2 et 4**

Tome 19, n° 3 (2007), p. 799-808.

<[http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB\\_2007\\_\\_19\\_3\\_799\\_0](http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2007__19_3_799_0)>

© Université Bordeaux 1, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://jtnb.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## Sur le groupe des unités de corps de nombres de degré 2 et 4

par M'HAMMED ZIANE

RÉSUMÉ. Nous déterminons sous certaines hypothèses, un système fondamental d'unités du corps non pur  $K = \mathbb{Q}(\omega)$  et de son sous-corps quadratique, où  $\omega$  est solution du polynôme

$$f(X) = X^4 + d^{-2}M_6X^2 - M_4,$$

avec  $M_6 = D^6 + 6D^4d + 9D^2d^2 + 2d^3$ ,  $M_4 = D^4 + 4D^2d + 2d^2$ ,  $d|D$ ,  $d, D \in \mathbb{N}$ , non nuls.

ABSTRACT. We give under certain hypotheses, a fundamental system of units of the field  $K = \mathbb{Q}(\omega)$  and its quadratic subfield, where  $\omega$  is a root of the polynomial

$$f(X) = X^4 + d^{-2}M_6X^2 - M_4,$$

with  $M_6 = D^6 + 6D^4d + 9D^2d^2 + 2d^3$ ,  $M_4 = D^4 + 4D^2d + 2d^2$ ,  $d, D \in \mathbb{N}$ ,  $d|D$ .

### 1. Introduction.

Si  $K$  est une extension algébrique de degré  $n = r + 2s$  sur le corps  $\mathbb{Q}$  des rationnels, où  $r$  est le nombre de plongements réels et  $2s$  le nombre de plongements complexes de  $K$  dans le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, Dirichlet a établi que le groupe  $U_K$  des unités de  $K$  est engendré par  $r + s - 1$  unités. Le groupe  $U_K$  est dit alors de rang  $r + s - 1$ . Un ensemble de générateurs  $S = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r+s-1}\}$  forme ce qu'on appelle un système fondamental d'unités du corps  $K$ . W. Ljunggren [6] a donné une procédure pour construire un système fondamental d'unités d'un corps quartique pur. Nous généralisons aisément ses résultats à tout corps  $K = \mathbb{Q}(\omega)$  de degré 4, non pur, ayant un sous-corps quadratique réel  $K^*$  et dont le groupe des unités est de rang 2. Pour tout élément  $\xi$  de  $K$ , appelons  $\xi^{(1)}$  le conjugué de  $\xi$ , la notation “(1)” dénotant l'opération “conjugaison” laissant fixe  $K^*$ .

**Théorème 1.1.** *Soit  $K$  un corps quartique réel dont le groupe des unités est de rang 2 et qui admet un sous-corps quadratique. Soit  $\varepsilon_0$  la plus petite*

---

Manuscrit reçu le 9 juin 2004.

Thèmes dans le cadre du projet de recherche CNRST/CNRS entre Oujda et Limoges.

unité supérieure strictement à 1 de  $K$  vérifiant  $\varepsilon_0\varepsilon_0^{(1)} = 1$ . Si  $\varepsilon_1 > 1$  est une autre unité du corps  $K$  vérifiant  $\varepsilon_1\varepsilon_1^{(1)} = 1$ , alors

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0^q, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

**Théorème 1.2.** *Soit  $K$  un corps quartique réel dont le groupe des unités est de rang 2 et qui admet un sous-corps quadratique. Soit  $\eta$  l'unité fondamentale du sous-corps quadratique réel  $K^*$  de  $K$ ,  $\xi$  une unité de  $K$  telle que  $\xi\xi^{(1)} = \pm\eta$  (ou  $\pm\eta^{-1}$ ), et  $\varepsilon_1$  la plus petite unité de  $K$  supérieure strictement à 1 vérifiant  $\varepsilon_1\varepsilon_1^{(1)} = 1$ . Alors  $\{\xi, \varepsilon_1\}$  est un système fondamental d'unités du corps  $K$ .*

Dans [5], C. Levesque a exhibé une unité du corps quartique  $K = \mathbb{Q}(\omega)$  de la forme

$$\varepsilon = 1 + \frac{D}{d}\omega - \frac{1}{d}\omega^2,$$

où  $\omega$  est solution du polynôme  $f(X) = X^4 + d^{-2}M_6X^2 - M_4$ , avec

$$M_4 = D^4 + 4D^2d + 2d^2 \quad \text{et} \quad M_6 = D^6 + 6D^4d + 9D^2d^2 + 2d^3.$$

Dans cet article, nous déterminons, sous certaines hypothèses, un système fondamental d'unités du corps  $\mathbb{Q}(\omega)$  et l'unité fondamentale de son sous-corps quadratique. Posons  $\Delta = d^{-4}M_6^2 + 4M_4$  et soit  $T = D^2/d$ . Alors

$$\frac{\Delta}{d^2} = T^6 + 12T^5 + 54T^4 + 112T^3 + 109T^2 + 52T + 12.$$

Supposons d'abord que  $T$  est pair :  $T = 2S$ . Alors  $\Delta/d^2 \equiv 0 \pmod{4}$ . Posons

$$M = \frac{\Delta}{4d^2} = 16S^6 + 96S^5 + 216S^4 + 224S^3 + 109S^2 + 26S + 3.$$

Alors  $M \equiv 2$  ou  $3 \pmod{4}$ .

Supposons maintenant que  $T$  est impair :  $T = 2S + 1$ . Nous avons  $\frac{\Delta}{d^2} \equiv 0 \pmod{16}$ . Posons

$$M = \frac{\Delta}{16d^2} = 4S^6 + 36S^5 + 129S^4 + 234S^3 + 226S^2 + 111S + 22.$$

Alors  $M \equiv 0, 1$  ou  $2 \pmod{4}$ .

Nous donnerons tout d'abord le développement en fraction continue de  $\Omega = \sqrt{M}$  et nous utiliserons des résultats donnés dans [1] et [2] pour déterminer l'unité fondamentale de  $K^* = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta}) = \mathbb{Q}(\sqrt{M})$ .

**2. L'unité fondamentale de  $K^*$**

Soit  $T$  pair. Nous avons  $[\sqrt{M}] = 4S^3 + 12S^2 + 9S + 1$ . De plus,

$$\begin{cases} P_0 = 0, \\ Q_0 = 1, \\ b_0 = [\sqrt{\Omega}]. \end{cases} \quad \begin{cases} P_1 = 4S^3 + 12S^2 + 9S + 1, \\ Q_1 = 4S^2 + 8S + 2, \\ b_1 = [x_1] = 2S + 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_2 = 4S^3 + 8S^2 + 3S + 1, \\ Q_2 = 8S^3 + 16S^2 + 6S + 1, \\ b_2 = [x_2] = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} P_3 = 4S^3 + 8S^2 + 3S, \\ Q_3 = 4S^2 + 8S + 3, \\ b_3 = [x_3] = 2S. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_4 = 4S^3 + 8S^2 + 3S, \\ Q_4 = 8S^3 + 16S^2 + 6S + 1, \\ b_4 = [x_4] = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} P_5 = 4S^3 + 8S^2 + 3S + 1, \\ Q_5 = 4S^2 + 8S + 2, \\ b_5 = [x_5] = 2S + 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_6 = 4S^3 + 12S^2 + 9S + 1, \\ Q_6 = 1, \\ b_6 = [x_6]. \end{cases}$$

Comme  $P_3 = P_4$ , le développement en fractions continues de  $\sqrt{M}$ , admet une période de longueur  $l = 6$ .

Soit  $T$  impair. Nous avons  $[\sqrt{M}] = 2S^3 + 9S^2 + 12S + 4$ . De plus,

$$\begin{cases} P_0 = 0, \\ Q_0 = 1, \\ b_0 = [\Omega]. \end{cases} \quad \begin{cases} P_1 = 2S^3 + 9S^2 + 12S + 4, \\ Q_1 = 2S^3 + 10S^2 + 15S + 6, \\ b_1 = [x_1] = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_2 = S^2 + 3S + 2, \\ Q_2 = 2S^3 + 8S^2 + 9S + 3, \\ b_2 = [x_2] = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} P_3 = 2S^3 + 7S^2 + 6S + 1, \\ Q_3 = 4S^2 + 12S + 7, \\ b_3 = [x_3] = S. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_4 = 2S^3 + 5S^2 + S - 1, \\ Q_4 = 4S^3 + 13S^2 + 11S + 3, \\ b_4 = [x_4] = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} P_5 = 2S^3 + 8S^2 + 10S + 4, \\ Q_5 = S^2 + 3S + 2, \\ b_5 = [x_5] = 4S + 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_6 = 2S^3 + 8S^2 + 10S + 4, \\ Q_6 = 4S^3 + 13S^2 + 11S + 3, \\ b_6 = [x_6]. \end{cases}$$

Comme  $P_5 = P_6$ , le développement en fraction continue de  $\sqrt{M}$  admet une période de longueur  $l = 10$ .

**Théorème 2.1.** *Lorsque  $T$  est pair, posons*

$$A = 32S^6 + 192S^5 + 440S^4 + 480S^3 + 256S^2 + 64S + 7,$$

$$B = 8S^3 + 24S^2 + 20S + 4.$$

*Lorsque  $T$  est impair, posons*

$$A = 32S^6 + 288S^5 + 1040S^4 + 1920S^3 + 1906S^2 + 966S + 197,$$

$$B = 16S^3 + 72S^2 + 100S + 42.$$

*Supposons que  $M$  est libre de carrés. Alors l'unité fondamentale du corps quadratique  $K^*$  est*

$$\eta = A + B\sqrt{M} = \left( A + \frac{BM_6}{2d^3} \right) + \frac{B}{d}\omega^2.$$

**Démonstration.** Soit  $T$  pair,  $M \not\equiv 1 \pmod{4}$ . Alors

$$\eta = \prod_{i=1}^l x_i = \prod_{i=1}^6 x_i.$$

Or

$$x_{i-1}x_i = \frac{Q_i + b_{i-1}(\Omega + P_i)}{Q_i}, \quad (i = 2, 4, 6).$$

Donc

$$\eta = \left( \frac{Q_2 + b_1(\Omega + P_2)}{Q_2} \right) \left( \frac{Q_2 + b_3(\Omega + P_4)}{Q_2} \right) \left( \frac{1 + b_1(\Omega + P_1)}{1} \right)$$

$$= \frac{1}{Q_2^2} (Q_2 + b_1(\Omega + P_2)) (Q_2 + b_3(\Omega + P_4)) (1 + b_1(\Omega + P_1)).$$

Or

$$Q_2 + b_1(\Omega + P_2) = 8S^3 + 16S^2 + 6S + 1$$

$$+ (2S + 1)(\Omega + 4S^3 + 8S^2 + 3S + 1),$$

$$Q_2 + b_3(\Omega + P_4) = 8S^3 + 16S^2 + 6S + 1 + (2S)(\Omega + 4S^3 + 8S^2 + 3S),$$

$$1 + b_1(\Omega + P_1) = 1 + (2S + 1)(\Omega + 4S^3 + 12S^2 + 9S + 1).$$

En tenant compte de  $\Omega^2 = M$ , nous aurons le résultat. Si  $T$  est impair, nous avons  $Q_t \neq 4$  pour tout  $t$ , et c'est alors un exercice simple pour trouver, comme précédemment, l'unité fondamentale du corps  $K^*$ .

**3. Sur les entiers d'un corps réel de degré quatre.**

Dans la suite nous nous intéressons au cas où  $T$  est pair. Le polynôme  $f(X)$  est irréductible car

$$(d^{-2}M_6)^2 < d^{-4}M_6^2 + 4M_4 < (d^{-2}M_6 + 1)^2.$$

La résultante cubique de  $f(X)$  est

$$R(X) = (X - (d^{-2}M_6)) (X^2 + 4M_4),$$

dont les racines sont d'une part  $\alpha = d^{-2}M_6$  et d'autre part  $\beta, \gamma$ , deux racines de  $(X^2 + 4M_4)$  qui sont complexes. Donc

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 2.$$

Par conséquent  $\text{Gal}(f(X))$  est soit  $Z_4$ , soit  $D_4$ , voir ([4], page 273). Or les racines de  $f(X)$  sont  $\omega, -\omega, i\theta, -i\theta$  où

(1)

$$\omega = \sqrt{\frac{-d^{-2}M_6 + \sqrt{d^{-4}M_6^2 + 4M_4}}{2}}, \quad \theta = \sqrt{\frac{d^{-2}M_6 + \sqrt{d^{-4}M_6^2 + 4M_4}}{2}},$$

qui ne sont pas toutes réelles donc  $\text{Gal}(f(X))$  est  $D_4$ . De plus le polynôme  $f(X)$  admet deux racines réelles et deux racines complexes; donc le rang du groupe des unités  $U_K$  du corps  $K$  est 2. Nous désignons par

(2)

$$\omega^{(0)} = \omega, \quad \omega^{(1)} = -\omega, \quad \omega^{(2)} = i\theta, \quad \omega^{(3)} = -i\theta,$$

les quatre conjugués de  $\omega$  sur  $\mathbb{Q}$ . Nous reprenons ici une idée de Stender [7] : Soit  $\alpha$  un entier algébrique du corps  $K = \mathbb{Q}(\omega)$ . Comme  $K = K^*(\omega)$ , alors

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2\omega,$$

$$\alpha^{(1)} = \beta_1 - \beta_2\omega \quad \text{où } \beta_i \in K^*.$$

Donc

$$\alpha + \alpha^{(1)} = 2\beta_1 \quad \text{et} \quad \alpha - \alpha^{(1)} = 2\beta_2\omega.$$

Par conséquent  $2\beta_1$  et  $2\beta_2\omega^2$  sont aussi des entiers algébriques de  $K^*$ . Appliquons ceci dans notre cas. Nous avons  $K^* = \mathbb{Q}(\sqrt{M})$ . Comme  $M \not\equiv 1 \pmod{4}$ , alors  $\{1, \sqrt{M}\}$  est une base entière de  $K^*$ . Donc

$$\begin{cases} 2\beta_1 = x_1 + y_1\sqrt{M}, \\ 2\beta_2\omega^2 = x_2 + y_2\sqrt{M}, \end{cases} \quad \text{où } x_i, y_i \in \mathbb{Z};$$

d'où

$$\omega\alpha = \beta_1\omega + \beta_2\omega^2 = \omega \left( \frac{x_1}{2} + \frac{y_1}{2}\sqrt{M} \right) + \frac{x_2}{2} + \frac{y_2}{2}\sqrt{M}.$$

Nous avons

$$\sqrt{M} = \frac{1}{2d}\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2d} (2\omega^2 + d^{-2}M_6).$$

Donc

$$\omega\alpha = \frac{1}{2} \left[ \left( x_2 + \frac{M_6}{2d^3} y_2 \right) + \left( x_1 + \frac{M_6}{2d^3} y_1 \right) \omega \right] + \frac{1}{2} \left[ y_2 \left( \frac{\omega^2}{d} \right) + y_1 \left( \frac{\omega^2}{d} \right) \omega \right]$$

Notons que  $\omega^2/d$  est un entier algébrique car  $\omega^2/d$  est solution du polynôme  $Y^2 + \frac{M_6}{d^3}Y - \frac{M_4}{d^2}$  à coefficients entiers ; notons aussi que  $(2d^3)|M_6$  vu que  $2|(T^3 + T)$ . Donc pour tout entier algébrique  $\alpha$  du corps  $K = \mathbb{Q}(\omega)$ ,  $\omega\alpha$  s'écrit sous la forme

$$(3) \quad \omega\alpha = \frac{1}{2} \left( x_0 + x_1\omega + x_2\left(\frac{\omega^2}{d}\right) + x_3\left(\frac{\omega^3}{d}\right) \right) \quad \text{avec } x_i \in \mathbb{Z}.$$

**Proposition 3.1.** *Si  $\alpha$  est un entier algébrique tel que  $\alpha\alpha^{(1)} = 1$ , alors dans l'égalité (3), nous avons toujours*

$$(4) \quad x_2 \neq 0.$$

**Démonstration.** Pour un entier algébrique  $\alpha$ , nous avons

$$(5) \quad \begin{cases} (\omega\alpha)^{(0)} = \omega\alpha & = \frac{1}{2} \left( x_0 + x_1\omega + x_2\frac{\omega^2}{d} + x_3\frac{\omega^3}{d} \right), \\ (\omega\alpha)^{(1)} = -\omega\alpha^{(1)} & = \frac{1}{2} \left( x_0 - x_1\omega + x_2\frac{\omega^2}{d} - x_3\frac{\omega^3}{d} \right), \\ (\omega\alpha)^{(2)} = i\theta\alpha^{(2)} & = \frac{1}{2} \left( x_0 + x_1i\theta - x_2\frac{\theta^2}{d} - x_3i\frac{\theta^3}{d} \right), \\ (\omega\alpha)^{(3)} = -i\theta\alpha^{(3)} & = \frac{1}{2} \left( x_0 - x_1i\theta - x_2\frac{\theta^2}{d} + x_3i\frac{\theta^3}{d} \right), \end{cases}$$

avec  $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ . De l'équation (5), nous tirons

$$\left( \frac{\omega^2 + \theta^2}{d} \right) x_2 = \omega\alpha - \omega\alpha^{(1)} - i\theta\alpha^{(2)} + i\theta\alpha^{(3)}.$$

Donc

$$(6) \quad |x_2| \leq \frac{d}{\omega^2 + \theta^2} \left( \sum_{i=0}^3 |\omega^{(i)}\alpha^{(i)}| \right).$$

Soit  $\alpha$  un entier algébrique tel que  $\alpha\alpha^{(1)} = 1$ . Alors  $(\omega\alpha)(\omega\alpha)^{(1)} = -\omega^2$ . Donc, en comparant les coefficients de  $\omega^2$ , nous obtenons

$$2dx_0x_2 - 4x_2^2M_6 - d^2x_1^2 + 2d^{-2}x_1x_3M_6 - x_3^2M_4 - d^{-4}x_3^2M_6^2 = -(4d)^2.$$

Si  $x_2 = 0$ , alors  $d^2x_1^2 - 2d^{-1}x_1x_3M_6 + x_3^2M_4 + d^{-4}x_3^2M_6^2 = -4d^2$ , i.e.

$$\left( dx_1 - d^{-2}x_3M_6 \right)^2 = -x_3^2M_4 - 4d^2,$$

ce qui est impossible. Donc si  $\alpha$  est un entier algébrique tel que  $\alpha\alpha^{(1)} = 1$ , alors dans l'égalité (3), nous avons  $x_2 \neq 0$ .

**4. Un système fondamental d'unités de  $\mathbb{Q}(\omega)$ .**

**Lemme 4.1.** *Soit  $\eta$  l'unité fondamentale du sous-corps quadratique  $K^*$  du corps  $K = \mathbb{Q}(\omega)$ . Alors  $\sqrt{\eta} \notin K$ .*

**Démonstration.** Comme la longueur du développement en fraction continue de  $\sqrt{M}$  est paire, nous avons que  $N_{K^*/\mathbb{Q}}(\eta) = 1$ . D'après le théorème 90 de Hilbert (voir ([2], page 171), il existe  $\alpha, \beta \in K^*$  ( $\beta$  étant le conjugué algébrique de  $\alpha$ ) tels que

$$\eta = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2}{c}.$$

Supposons que  $\sqrt{\eta} \in K$ , alors  $\sqrt{c} \in K$ , i.e.  $\sqrt{c} \in K^*$ , et on aurait que  $\frac{\alpha}{\sqrt{c}} \in K^*$ , ce qui est en contradiction avec le fait que  $\frac{\alpha^2}{c}$  est l'unité fondamentale du corps quadratique  $K^*$ .

**Lemme 4.2.** *Soit  $X = 64S^6 + 384S^5 + 880S^4 + 976S^3 + 552S^2 + 152S + 16$ . Alors*

$$0 < \eta < X \quad \text{et} \quad 0 < \varepsilon^2 < 8S.$$

**Démonstration.** D'une part, nous avons

$$\eta = A + B\Omega < A + B \left( \left[ \sqrt{M} \right] + 1 \right) < 2B \left( \left[ \sqrt{M} \right] + 1 \right) = X.$$

D'autre part,

$$\omega = \sqrt{\frac{-d^{-2}M_6 + \sqrt{d^{-4}M_6^2 + 4M_4}}{2}} < \sqrt{\frac{-d^{-2}M_6 + \sqrt{(d^{-2}M_6 + 2)^2}}{2}} < 1.$$

Donc

$$0 < \varepsilon < 1 + \frac{D}{d}\omega < 1 + \frac{D}{d} < 2\frac{D}{d}.$$

□

**Définition.** On dit que le corps  $K$  est de *seconde espèce* s'il existe une unité  $\xi$  de  $K$  telle que

$$\xi\xi^{(1)} = \pm\eta \quad \text{ou} \quad \xi\xi^{(1)} = \pm\eta^{-1}.$$

On dit que le corps  $K$  est de *première espèce* dans le cas contraire.

**Lemme 4.3.** *Le corps  $K = \mathbb{Q}(\omega)$  est toujours de seconde espèce.*

**Démonstration.** Nous avons

$$\varepsilon\varepsilon^{(1)} = \frac{d^2 + M_4}{d^2} - \left( \frac{2d + D^2 + d^{-2}M_6}{d^2} \right) \omega^2.$$



Utilisant

$$\omega^2 = d\sqrt{M} - \frac{d^{-2}M_6}{2}, \quad M_4 = d^2(4S^2 + 8S + 2), \quad M_6 = d^3(8S^3 + 24S^2 + 18S + 2),$$

nous avons

$$(7) \quad N_{K/K^*}(\varepsilon) = \varepsilon\varepsilon^{(1)} = A - B\Omega = \eta^{-1},$$

Donc  $K$  est de seconde espèce. □

**Proposition 4.4.** *L'unité  $\varepsilon_1 = \varepsilon^2\eta$  est la plus petite unité  $> 1$  du corps  $K = \mathbb{Q}(\omega)$  vérifiant  $\varepsilon_1\varepsilon_1^{(1)} = 1$ .*

**Démonstration.** Notons que

$$\varepsilon_1\varepsilon_1^{(1)} = N_{K/K^*}(\varepsilon_1) = (\varepsilon\varepsilon^{(1)})^2\eta^2 = 1.$$

Nous avons  $\varepsilon > \varepsilon^{(1)}$ . Donc  $\varepsilon^2 > \varepsilon\varepsilon^{(1)} = \eta^{-1}$  et  $\varepsilon_1 = \varepsilon^2\eta > 1$ . Montrons que  $\varepsilon_1$  est la plus petite unité  $> 1$  de  $K$  qui vérifie  $\varepsilon_1\varepsilon_1^{(1)} = 1$ . Sinon, soit  $\varepsilon_0$  cette plus petite unité. Alors d'après le théorème 1.1,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0^n$ . Nous avons  $n \neq 2$ , car si  $\sqrt{\varepsilon_1} \in K$ , alors  $\sqrt{\eta} \in K$ , ce qui n'est pas le cas d'après le lemme 4.1. Supposons  $n \geq 3$ . D'après l'équation (3),  $\varepsilon_0$  s'écrit sous la forme

$$\omega\varepsilon_0 = \frac{1}{2d}(x_0 + x_1\omega + x_2\omega^2 + x_3\omega^3), \quad \text{où } x_i \in \mathbb{Z}.$$

D'après l'équation (6), nous avons

$$|x_2| \leq \frac{d}{\omega^2 + \theta^2} \left( \sum_{i=0}^3 |\omega^{(i)}| |\varepsilon_0^{(i)}| \right) = \frac{d}{\omega^2 + \theta^2} \left( \sum_{i=0}^3 |\omega^{(i)}| \sqrt[n]{|\varepsilon_1^{(i)}|} \right).$$

Or

$$|\varepsilon_1^{(1)}| < 1 \quad \text{et} \quad |\varepsilon_1^{(2)}| = |\varepsilon_1^{(3)}| = 1.$$

Alors

$$(8) \quad |x_2| \leq \frac{d}{\omega^2 + \theta^2} \left( 1 + 2\theta + \sqrt[n]{|\varepsilon_1|} \right) \leq \frac{d}{\omega^2 + \theta^2} \left( 1 + 2\theta + \sqrt[3]{|\varepsilon_1|} \right).$$

Posons

$$\begin{cases} Y = 64S^6 + 384S^5 + 864S^4 + 896S^3 + 436S^2 + 104S + 12 \\ Z = 8S^3 + 24S^2 + 18S + 2. \end{cases}$$

Alors

$$\omega^2 + \theta^2 = 2d\sqrt{M} \quad \text{et} \quad \theta = \sqrt{d} \sqrt{\frac{Z + \sqrt{Y}}{2}}.$$

En utilisant le lemme 4.2, nous avons

$$|x_2| \leq \frac{d}{\omega^2 + \theta^2} \left( 1 + 2\theta + \sqrt[3]{|\varepsilon_1|} \right) = \frac{d}{2d\sqrt{M}} \left( 1 + 2\theta + \sqrt[3]{\varepsilon^2\eta} \right) < \frac{1}{2\sqrt{Y}} \left( 1 + 2\theta + \sqrt[3]{8S\sqrt[3]{X}} \right).$$

Pour  $S > 4$ , nous aurons  $|x_2| < 1$ . Donc  $x_2 = 0$ , ce qui est en contradiction avec (4). Le résultat reste vrai pour les autres valeurs de  $S$  car il suffit de remplacer  $S$  directement dans (8).  $\square$

**Théorème 4.5.** Soient  $M_4 = D^4 + 4D^2d + 2d^2$ ,  $M_6 = D^6 + 6D^4d + 9D^2d^2 + 2d^3$ , où  $D, d$ , sont deux entiers naturels non nuls et  $d|D$ . Soient  $\omega$  une racine du polynôme  $f(X) = X^4 + d^{-2}M_6X^2 - M_4$  et  $\eta$  l'unité fondamentale du sous-corps quadratique  $K^*$  du corps  $K = \mathbb{Q}(\omega)$ . On suppose que  $\frac{D^2}{d}$  est pair et que  $M = \frac{d^{-4}M_6^2 + 4M_4}{4d^2}$  est libre de carrés. Alors  $\{\varepsilon, \varepsilon^2\eta\}$  est un système fondamental d'unités du corps  $K = \mathbb{Q}(\omega)$ .

**Démonstration.** D'après la proposition 4.4, nous avons que  $\varepsilon_0 = \varepsilon^2\eta$  est la plus petite unité du corps  $K$  qui vérifie  $\varepsilon_0\varepsilon_0^{(1)} = 1$ . D'après l'équation (7),  $\varepsilon$  est une unité telle que  $\varepsilon\varepsilon^{(1)}$  est l'unité fondamentale du sous-corps quadratique  $K^*$  de  $K$ . D'après la proposition 4.3,  $K$  est de seconde espèce; il suffit alors d'appliquer le théorème 1.2.  $\square$

**Corollaire 4.6.** L'ensemble

$$\{\varepsilon, \varepsilon^{(1)}\}$$

est aussi un système fondamental d'unités du corps  $K = \mathbb{Q}(\omega)$ .

**Démonstration.** Nous avons  $\varepsilon_0 = \varepsilon^2\eta = \varepsilon(\varepsilon^{(1)})^{-1}$ . Comme  $\{\varepsilon, \varepsilon_0\}$  forme un système fondamental d'unités du corps  $K = \mathbb{Q}(\omega)$ , il en est de même pour  $\{\varepsilon, \varepsilon^{(1)}\}$ .  $\square$

### Bibliographie

- [1] L. BERNSTEIN, *Fundamental units and cycles in period of real quadratic number fields*, Part I. Pac. J. Math. **68** No. **1** (1976), 37–61; and J. Number Theory **8** (1976), 446–491.
- [2] L. BERNSTEIN, *Fundamental units and cycles in period of real quadratic number fields*. Part II, Pac. J. Math. **68** No. **1** (1976), 63–78.
- [3] N. BOURBAKI, *Algèbre, chapitre 5, corps commutatifs, (2<sup>ème</sup> édition)*. Hermann, Paris, 1959.
- [4] T. W. HUNGERFORD, *Algebra*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1974.
- [5] C. LEVESQUE, *Truncated units*. J. Number Theory **41** No. **1** (1992), 48–68.
- [6] W. LJUNGGREN, *Über die Lösung einiger unbestimmten Gleichungen vierten Grades*. Avh. Norske Vid.-Akad. Oslo, I. Mat.-Nat. Kl. (1935), 1–35.
- [7] H.-J. STENDER, "Verstumelte" Grundeinheiten für biquadratische und bikubische Zahlkörper. Math. Ann. **232** (1982), 55–64.

M'hammed ZIANE  
Université Mohammed I  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques  
60000 Oujda MAROC  
*E-mail:* `ziane@sciences.univ-oujda.ac.ma`