JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Pierre BEL

Irrationalité des valeurs de $\zeta_p(4, x)$

Tome 31, nº 1 (2019), p. 81-99.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2019__31_1_81_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **31** (2019), 81–99

Irrationalité des valeurs de $\zeta_p(4, x)$

par Pierre BEL

Résumé. Nous donnons un condition suffisante sur un rationnel α pour que le nombre $\zeta_p(4, \alpha)$ soit irrationnel. En particulier, pour tout nombre premier $p \geq 19$, le nombre $\zeta_p(4, \frac{1}{p})$ est irrationnel. Si cette condition est remplie, nous donnons de plus une borne pour la mesure d'irrationalité de $\zeta_p(4, \alpha)$.

Abstract. We give a sufficient condition on a rational α to get the irrationality of $\zeta_p(4, \alpha)$. In particular, for a prime $p \geq 19$, the number $\zeta_p(4, \frac{1}{p})$ is irrational. If this condition is satisfied, we give a bound for the irrationality measure of $\zeta_p(4, \alpha)$.

1. Introduction

L'irrationalité des valeurs de la fonction Zêta aux points entiers est connue pour les entiers pairs. Pour les entiers impairs, cela est beaucoup plus ouvert, même si les travaux récents (Apéry, Ball, Rivoal en particulier cf. [1, 2]) ont fait de belles percées.

Dans l'analogue p-adique, les connaissances actuelles sont pauvres.

Les premiers résultats sont obtenus par F. Calegari et F. Beukers. (cf. [4, 5]), ils obtiennent des résultats d'irrationalité. Par exemple, les nombres $\zeta_2(3)$ et $\zeta_3(3)$ sont irrationnels.

L'auteur a obtenu des résultats d'irrationalité sur les valeurs de la fonction Zêta de Hurwitz p-adique, cela permet de prouver l'existence de valeurs de fonctions L p-adique irrationnelles. (cf. [3])

Une introduction aux fonctions Zêta de Hurwitz p-adiques est fournie dans les annexes.

On rappelle que q_p est définie par $q_p = p$ si p impair et $q_2 = 4$.

De plus, si $|x|_p = 1$ alors $\omega(x)$ est définie comme l'unique racine $(p-1)$-ème de l'unité telle que $|x - \omega(x)|_p \leq q_p$ et on prolonge pour $x \in \mathbb{Q}_p^*$ par $\omega(x) = p^{\mathrm{val}_p(x)} \omega(x\, p^{-\mathrm{val}_p(x)})$.

On rappelle de plus la définition de la mesure d'irrationalité :

Manuscrit reçu le 12 janvier 2018, accepté le 16 janvier 2018.
Classification Mathématique (2010). 11J72, 11J82, 11M35.
Mots-clefs. Irrationality, p-adic Hurwitz zeta function, measure.

Définition 1.1. Un réel μ est une mesure d'irrationalité d'un nombre irrationnel p-adique α, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C_\epsilon > 0$ tel que

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right|_p \geq \frac{C_\epsilon}{\max(|a|, |b|)^{\mu+\epsilon}},$$

pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

On définit la mesure d'irrationalité $\mu(\alpha)$ de α comme l'inf des réels μ vérifiant cette propriété.

On se propose ici de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.2. *Soient p un nombre premier et x un nombre rationnel de forme réduite $\frac{a}{b}$ tel que $|x|_p \geq q_p$, si*

$$4 \log |b| + 6 \log |b|_p + 4 \sum_{\substack{q|b \\ q \text{ premier}}} \frac{\log q}{q-1} + 5 < 0$$

alors $\omega(x)^{-3} \zeta_p(4, x)$ est irrationnel et sa mesure d'irrationalité est majorée par

$$\frac{6 \log |b|_p}{6 \log |b|_p + 4 \log |b| + 4 \sum_{\substack{q|b \\ q \text{ premier}}} \frac{\log q}{q-1} + 5}.$$

Corollaire 1.3. *Si $p \geq 19$ est premier, alors $\zeta_p(4, \frac{1}{p})$ est irrationnel et sa mesure d'irrationalité est majorée par*

$$\frac{6 \log p}{2 \log p - 4 \frac{\log p}{p-1} - 5} := g(p).$$

On remarque en particulier que la fonction g est décroissante de limite 3, alors que la mesure d'irrationalité conjecturée est 2 pour toutes les valeurs $\zeta_p(4, \frac{1}{p})$.

Le résultat obtenu dans le corollaire est meilleur que celui donné dans ([3]), en particulier on obtient ici que si $p \geq 19$, alors $\zeta_p(4, \frac{1}{p})$ est irrationnel (le résultat antérieur de l'auteur donnait 582360139111, avec toutefois un résultat plus fort d'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ de

$$1, \quad \zeta_p\left(2, \frac{1}{p}\right), \quad \zeta_p\left(3, \frac{1}{p}\right), \quad \zeta_p\left(4, \frac{1}{p}\right).$$

La démarche de la démonstration se découpe en quatre étapes.

La première étape est la construction d'approximants de type Padé de $\zeta(4, x)$ dans un cadre archimédien en utilisant des séries hypergéométriques, la démonstration de ce résultat n'est pas détaillée, car issu de [10].

La deuxième étape est l'étude du comportement arithmétique et asymptotique des coefficients de ces approximations.

La troisième étape est de démontrer la non nullité d'un déterminant associé aux approximations obtenues à la deuxième étape, cette hypothèse étant nécessaire à l'application du critère d'irrationalité dans la quatrième étape.

La quatrième étape est de transférer ces approximants dans un cadre p-adique en utilisant les séries formelles pour pouvoir leur appliquer un critère d'irrationalité.

La fraction rationnelle introduite pour la construction des approximants de type Padé permet aussi de donner une suite de combinaisons linéaires à coefficients rationnels $\zeta_p(3,x)$ et de 1, mais celle-ci n'a pas de bonnes propriétés de convergence, on ne peut pas en déduire un critère d'irrationalité. (cf. [10] pour le problème de convergence).

La fraction rationnelle utilisée a un lien avec les travaux précédents de T. Rivoal (cf. [9]) et ceux de F. Beukers (cf. [4]). On détaille en dernière partie le lien entre les approximations obtenues dans ce texte avec les travaux précédents. On explicitera, de plus, les mesures d'irrationalité de $\zeta(3,x)$ que l'on peut obtenir au moyen des résultats du texte de F. Beukers.

Remerciements. Je tiens à remercier Tanguy Rivoal pour son aide et son soutien et le referee, pour ses nombreuses propositions qui ont permis d'améliorer le texte initial.

2. Une série hypergéométrique auxiliaire

Le symbole de Pochhammer est défini pour un nombre α et un entier naturel n par

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1).$$

Dans [10], pour tout entier naturel n, T. Rivoal introduit la fraction rationnelle de variables complexes k et x

$$R_n(k,x) = \left(k+x+\frac{n}{2}\right)\frac{(k+1)_n^2(k+2x)_n^2}{(k+x)_{n+1}^4}$$

et la série

$$S_n(x) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}R(k,x)$$

qui converge si x n'est pas un entier négatif.

Le développement en éléments simples par rapport à la variable k de la fraction $R_n(k,x)$ donne

$$R_n(k,x) = \sum_{s=1}^{4}\sum_{j=0}^{n}\frac{E_{j,n,s}(x)}{(k+x)^s}.$$

De plus, pour $j \in [1, n]$ et $s \in [1, 4]$, on a

$$E_{j,n,s}(x) = \frac{1}{(4-s)!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\right)^{4-s} \left[R(k)(k+j+x)^4\right]_{|k=-j-x}.$$

T. Rivoal montre le résultat suivant qui permet d'obtenir de bons approximants de type Padé de $\zeta(4, x)$. Il utilise pour cela un développement en éléments simples de la fraction pour obtenir un approximant de type Padé de $(\zeta(3, x), \zeta(4, x), \zeta(5, x))$.

Le fait que la série soit équilibrée (c'est-à-dire $R_n(k) = -R_n(-k-2x-n)$) permet de montrer que les coefficients devant les quantités $\zeta(3, x)$ et $\zeta(5, x)$) sont nuls. (cf. [11] pour plus de détails sur la notion d'équilibrage)

Proposition 2.1 (Rivoal)**.** *On a*

$$S_n(x) = 3Q_{0,n}(x)\zeta(4, x) + Q_{2,n}(x) = O\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

quand $x \to \infty$ dans un secteur angulaire $|\arg(x)| < \pi - \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ fixé, avec

$$Q_{0,n}(x) = \sum_{j=0}^{n} E_{j,n,3}(x), \quad \textit{et} \quad Q_{2,n}(x) = -\sum_{s=1}^{4}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j-1} \frac{sE_{j,n,s}(x)}{(k+x)^{s+1}}.$$

De plus, on a

$$Q_{0,n}(x), Q_{2,n}(x) \in \mathbb{Q}_{4n}[x].$$

3. Notations et résultats auxiliaires

On pose pour tout entier b non nul et pour tout entier positif n

$$\mu_n(b) = b^n \prod_{\substack{q|b \\ q \text{ premier}}} q^{\lfloor \frac{n}{q-1} \rfloor}.$$

et $d_n = \mathrm{ppcm}(1, \ldots, n)$.

Pour $\alpha \in \mathbb{Q}_p$, on note $|\alpha|_p$ la valeur absolue p-adique usuelle, c'est-à-dire $|\alpha|_p = p^{-\mathrm{val}_p(\alpha)}$.

On rappelle que $d_n = e^{n+o(n)}$.

On a par ailleurs (cf. [3]) :

Lemme 3.1. *Si x est un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ $(b > 0)$ et k un entier appartenant à l'intervalle $[0, n]$, alors les nombres*

$$\frac{(x)_n}{n!}\mu_n(b) \quad \textit{et} \quad \frac{(x)_{n+1}}{n!(x+k)}\mu_n(b)d_n$$

sont des entiers et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log(\mu_n(b)) = \log|b| + \sum_{\substack{q|b \\ q \text{ premier}}} \frac{\log q}{q-1}. \tag{3.1}$$

De plus, si p est un nombre premier divisant b, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log|\mu_n(b)|_p=\log|b|_p+\frac{\log p}{p-1}. \tag{3.2}$$

Le transfert des approximants de type Padé obtenus par T. Rivoal dans un cadre p-adique permet d'obtenir de bonnes approximations rationnelles de $\zeta_p(4,x)$ et on peut alors appliquer le critère d'irrationalité suivant :

Lemme 3.2. *Soient $\alpha\in\mathbb{Q}_p$ et $(u_n)_{n\geq 0}=(a_n,b_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{Z}^2$, $\rho\in\,]0,1[$ et $A\in\,]1,+\infty[$ vérifiant*

(1) $\max(|a_n|,|b_n|)\leq A^{n+o(n)}$
(2) $|a_n-b_n\alpha|_p\leq\rho^{n+o(n)}$
(3) *pour tout n,* $\det(u_n,u_{n+1})\neq 0$.

alors si $A\rho<1$, α est irrationnel et sa mesure d'irrationalité est au plus

$$\frac{\log\rho}{\log\rho+\log A}.$$

Démonstration. Montrons, dans un premier temps, l'irrationalité. Raisonnons par l'absurde en supposant que $A\rho<1$ et $\alpha=\frac{x}{y}\in\mathbb{Q}$ avec $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$.

Comme $\det(u_n,u_{n+1})\neq 0$, il existe une infinité de n tel que

$$\det\left(u_n,\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\neq 0.$$

Comme $D_n=\det(u_n,\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})\in\mathbb{Z}$, pour tout n tel que

$$\det\left(u_n,\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\neq 0,$$

on a

$$1\leq|D_n|\,|D_n|_p. \tag{3.3}$$

Or, pour la place infinie, on a

$$|D_n|\leq(|x|+|y|)A^{n+o(n)}, \tag{3.4}$$

puis pour la place p, on a

$$D_n=\begin{vmatrix}a_n & x\\ b_n & y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_n-\alpha b_n & x-\alpha y\\ b_n & y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_n-\alpha b_n & 0\\ b_n & y\end{vmatrix},$$

comme $y\in\mathbb{Z}^*$, on obtient donc

$$|D_n|_p\leq\rho^{n+o(n)}. \tag{3.5}$$

En regroupant les équations (3.3), (3.4) et (3.5), pour n tel que

$$\det\left(u_n,\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\neq 0,$$

on obtient

$$1 \leq (|x| + |y|) A^{n+o(n)} \rho^{n+o(n)}.$$

Comme cette inégalité est vraie pour une infinité d'entiers n, on passe à la puissance $\frac{1}{n}$ et à la limite et on obtient alors

$$1 \leq A\rho,$$

ce qui est contradictoire, donc α est irrationnel.

Supposons que $\eta > 0$ et $M > 0$, tel qu'il existe une infinité de couples d'entiers (x, y) tel que

$$0 < \left|\alpha - \frac{x}{y}\right|_p \leq \frac{M}{(\max(|x|, |y|))^\eta}. \tag{3.6}$$

Soit (x_k, y_k) une suite de couples d'entiers solutions de l'inégalité (3.6), tels que (x_k, y_k) tend vers l'infini. Sans perdre de généralité, on peut supposer que pour tout k, les entiers x_k et y_k sont premier entre eux. On pourra alors supposer, que, pour tout k, on a

$$0 < |x_k - y_k\alpha|_p \leq \frac{\widetilde{M}}{(\max(|x_k|, |y_k|))^\eta}, \tag{3.7}$$

où $\widetilde{M}$ est une nouvelle constante indépendante de k. Comme $A\rho < 1$ et grâce aux hypothèses (1) et (2) sur (u_n), pour tout $\epsilon > 0$, tel que

(a) $(A + \epsilon)(\rho + \epsilon) < 1$,

il existe $M_1 > 1$ et $M_2 > 1$, tel que, pour tout n,

(b) $\max(|a_n|, |b_n|) \leq M_1(A + \epsilon)^n$
(c) $|a_n - b_n\alpha|_p \leq M_2(\rho + \epsilon)^n$.

Fixons k, soit n_k le plus petit entier tel que

$$|a_{n_k} - b_{n_k}\alpha|_p < |x_k - y_k\alpha|_p.$$

Grâce à (c), on sait que $n_k \leq \frac{\log|x_k - y_k\alpha|_p}{\log(\rho+\epsilon)} + 1$. On en déduit que

$$\max(|a_{n_k}|, |b_{n_k}|) \leq M_1(A + \epsilon)^{\frac{\log|x_k - y_k\alpha|_p}{\log(\rho+\epsilon)} + 1} = M_1' \, |x_k - y_k\alpha|_p^{\frac{\log(A+\epsilon)}{\log(\rho+\epsilon)}}, \tag{3.8}$$

où M_1' est une constante indépendante de k.

Supposons que $\det(u_{n_k}, \binom{x_k}{y_k}) \neq 0$ (si ce n'est pas le cas pour n_k, grâce à l'hypothèse (3), ce sera vrai en remplaçant n_k par $n_k + 1$ et les majorations resteront vraies à des constantes multiplicatives près indépendantes de k).

Comme les coefficients sont entiers, on a alors

$$1 \leq \left|\det\left(u_{n_k}, \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}\right)\right| \cdot \left|\det\left(u_{n_k}, \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}\right)\right|_p. \tag{3.9}$$

En utilisant la même manipulation que précédemment, on a

$$\begin{vmatrix} a_{n_k} & x_k \\ b_{n_k} & y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{n_k} - \alpha b_{n_k} & x_k - \alpha y_k \\ b_{n_k} & y_k \end{vmatrix}.$$

Comme $|a_{n_k} - b_{n_k}\alpha|_p < |x_k - y_k\alpha|_p$ et que b_{n_k} et y_k sont des entiers, on en déduit

$$\left|\det\left(u_{n_k}, \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}\right)\right|_p \leq |x_k - y_k\alpha|_p \,. \tag{3.10}$$

Puis

$$\left|\det\left(u_{n_k}, \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}\right)\right| \leq 2\max(|a_{n_k}|, |b_{n_k}|)\max(|x_k|, |y_k|). \tag{3.11}$$

En regroupant les équations (3.9), (3.10) et (3.11), on a

$$1 \leq 2\max(|a_{n_k}|, |b_{n_k}|)\max(|x_k|, |y_k|)\, |x_k - y_k\alpha|_p \,.$$

Soit, en utilisant l'équation (3.8),

$$1 \leq 2M_1' \max(|x_k|, |y_k|)\, |x_k - y_k\alpha|_p^{1+\frac{\log(A+\epsilon)}{\log(\rho+\epsilon)}} \,.$$

Comme $(A+\epsilon)(\rho+\epsilon) < 1$, on a $0 < 1 + \frac{\log(A+\epsilon)}{\log(\rho+\epsilon)}$, donc, en utilisant (3.7),

$$1 \leq 2M_1' \max(|x_k|, |y_k|)\left(\frac{\widetilde{M}}{(\max(|x_k|, |y_k|))^\eta}\right)_p^{1+\frac{\log(A+\epsilon)}{\log(\rho+\epsilon)}}.$$

En passant à la limite en k, on en déduit qu'on doit avoir

$$0 \leq 1 - \eta\left(1 + \frac{\log(A+\epsilon)}{\log(\rho+\epsilon)}\right),$$

soit

$$\eta \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{\log(A+\epsilon)}{\log(\rho+\epsilon)}\right)} = \frac{\log(\rho+\epsilon)}{\log(\rho+\epsilon) + \log(A+\epsilon)}.$$

Cela étant vrai pour tout $\epsilon > 0$ tel que $(A+\epsilon)(\rho+\epsilon) < 1$, on a donc

$$\eta \leq \frac{\log(\rho)}{\log\rho + \log A}.$$

On déduit donc que si $\eta > \frac{\log(\rho)}{\log\rho + \log A}$, il existe M tel que

$$0 < \left|\alpha - \frac{x}{y}\right|_p \leq \frac{M}{(\max(|x|, |y|))^\eta}.$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, il existe donc M' tel que

$$0 < \left|\alpha - \frac{x}{y}\right|_p \leq \frac{M'}{(\max(|x|, |y|))^\eta}.$$

n'admet aucune solution $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ et on conclut

$$\eta(\alpha)\le\frac{\log(\rho)}{\log\rho+\log A}.$$

□

4. Propriétés arithmétiques des polynômes $Q_{i,n}$

Proposition 4.1. *Pour $n\in\mathbb{N}$ et $i\in\{0,2\}$, on a*

$$2p^{4\lfloor\frac{n}{p-1}\rfloor}d_n^5Q_{i,n}(x)\in\mathbb{Z}_p[x].$$

En spécialisant en $\frac{a}{b}$, où $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, on a alors

$$2\mu_n(b)^4b\,d_n^5Q_{i,n}\left(\frac{a}{b}\right)\in\mathbb{Z}.$$

Le texte de F. Beukers, ainsi que les différents travaux (cf. [7]) sur la recherche de dénominateurs communs dans les approximants de type Padé nous font conjecturer que d_n^4 devrait suffire à la place de d_n^5, ce qui permettrait d'améliorer les bornes dans le théorème et dans son corollaire (On aurait en particulier $\zeta_{13}(4,\frac{1}{13})$ irrationnel).

Démontrons dans un premier temps, le cas $i=0$.

Lemme 4.2. *Pour $n\in\mathbb{N}$, $j\in[0,n]$, $s\in[1,4]$ et $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, on a*

$$2p^{4\lfloor\frac{n}{p-1}\rfloor}d_n^{4-s}E_{j,n,s}(x)\in\mathbb{Z}_p[x]$$

et

$$2\mu_n(b)^4b\,d_n^{4-s}E_{j,n,s}\left(\frac{a}{b}\right)\in\mathbb{Z}.$$

Démonstration. En écrivant $R_n(k)$ sous forme d'un produit, on obtient

$$\begin{aligned}R_n(k)(k+j+x)^4&=\left(k+x+\frac{n}{2}\right)\frac{(k+1)_n^2(k+2x)_n^2}{(k+x)_{n+1}^4}(k+j+x)^4\\&=H(k)G_1(k)^2G_2(k)^2\end{aligned}$$

où

$$H(k)=\left(k+x+\frac{n}{2}\right),\qquad G_1(k)=\frac{(k+1)_n}{\prod_{\substack{0\le\ell\le n\\ \ell\ne j}}(k+x+\ell)}$$

et

$$G_2(k)=\frac{(k+2x)_n}{\prod_{\substack{0\le\ell\le n\\ \ell\ne j}}(k+x+\ell)}.$$

En développant $G_1(k)$ et $G_2(k)$ en éléments simples, on obtient

$$G_1(k)=1+\sum_{\substack{0\le\ell\le n\\ \ell\ne j}}\frac{(j-\ell)\alpha_{1,\ell}}{k+\ell+x}\quad\text{et}\quad G_2(k)=1+\sum_{\substack{0\le\ell\le n\\ \ell\ne j}}\frac{(j-\ell)\alpha_{2,\ell}}{k+\ell+x}$$

où

$$\alpha_{1,\ell}(x) = (-1)^\ell \frac{(-x-\ell+1)_n}{n!}\binom{n}{\ell} \quad \text{et} \quad \alpha_{2,\ell}(x) = (-1)^\ell \frac{(x-\ell)_n}{n!}\binom{n}{\ell}$$

On obtient donc que $n!\alpha_{1,\ell}(x), n!\alpha_{2,\ell}(x) \in \mathbb{Z}[x]$, d'où

$$p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}\alpha_{1,\ell}(x) \quad \text{et} \quad p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}\alpha_{2,\ell}(x) \in \mathbb{Z}_p[x].$$

De plus le lemme 3.1 implique que pour $x = \frac{a}{b}$, les nombre

$$\mu_n(b)\alpha_{1,\ell}\left(\frac{a}{b}\right) \quad \text{et} \quad \mu_n(b)\alpha_{2,\ell}\left(\frac{a}{b}\right)$$

sont des entiers. On note $D_\lambda = \frac{1}{\lambda!}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k})^\lambda$, on a alors pour tout entier $\lambda \in [0,3]$ et $t \in [1,2]$:

$$(D_\lambda G_t(k))_{|k=-j-x} = \delta_{0,\lambda} - \sum_{\substack{\ell \neq j \\ 0 \leq \ell \leq n}} \frac{\alpha_{t,\ell}(x)}{(j-\ell)^\lambda}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} &d_n^\lambda p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}(D_\lambda G_t(k))_{|k=-j-x} \\ &\qquad = d_n^\lambda p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}\delta_{0,\lambda} - \sum_{\substack{\ell \neq j \\ 0 \leq \ell \leq n}} \left(\frac{d_n}{j-\ell}\right)^\lambda p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}\alpha_{t,\ell}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]. \end{aligned}$$

En spécialisant en $x = \frac{a}{b}$, on obtient

$$\begin{aligned} &d_n^\lambda \mu_n(b)(D_\lambda G_t(k))_{|k=-j-x} \\ &\qquad = d_n^\lambda \mu(b)\delta_{0,\lambda} - \sum_{\substack{\ell \neq j \\ 0 \leq \ell \leq n}} \left(\frac{d_n}{j-\ell}\right)^\lambda \mu_n(b)\alpha_{t,\ell}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$,

$$2D_\lambda(H(k))_{k=-j-x} \in \mathbb{Z}_p[x] \quad \text{et} \quad 2b\left[D_\lambda(H(k))_{k=-j-x}\right]_{x=\frac{a}{b}} \in \mathbb{Z}.$$

En utilisant la formule de Leibniz généralisée, on a

$$\begin{aligned} E_{j,n,s}(x) &= D_{4-s}\left[R(k)(k+j+x)^4\right]_{|k=-j-x} \\ &= \left[\sum_\nu D_{\nu_1}(H(k))D_{\nu_2}(G_1(k))D_{\nu_3}(G_1(k))D_{\nu_4}(G_2(k))D_{\nu_5}(G_2(k))\right]_{|k=-j-x}, \end{aligned}$$

où ν parcourt les quintuplets d'entiers naturels de somme égale à $4-s$, on en déduit alors que $2p^{4\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}d_n^3 E_{j,n,s}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ et $2\mu_n(b)^4 b\, d_n^3 E_{j,n,s}(\frac{a}{b}) \in \mathbb{Z}$.

Par sommation, on en déduit que

$$2p^{4\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}d_n^3 Q_{0,n}(x) \in \mathbb{Z}_p[x] \quad \text{et} \quad 2\mu_n(b)^4 b\, d_n^3 Q_{0,n}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Traitons maintenant le cas $i = 2$.

On utilise l'expression du polynôme $Q_{2,n}$ sous forme de dérivée 3-ème (cf. [10] pour la preuve). On a

$$Q_{2,n}(x) = -\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}m^3}\left(\frac{R(m)(m+j+x)^4}{(k-m-j)^2}\right)_{|m=-j-x}.$$

On utilise de nouveau un développement en éléments simples sur

$$\frac{R(m)(m+j+x)^4}{(k-m-j)^2} = H(m)\widetilde{G}_1(m)^2 G_2(m)^2$$

où G_2 et H sont définis comme précédemment et $\widetilde{G}_1$ est défini par

$$\widetilde{G}_1(m) = \frac{(m+1)_n}{(k-m-j)\prod_{\substack{0\le\ell\le n\\ \ell\neq j}}(m+x+\ell)}.$$

On obtient alors

$$\widetilde{G}_1(m) = \sum_{\substack{0\le\ell\le n\\ \ell\neq j}}\frac{(j-\ell)\widetilde{\alpha}_{1,\ell}(x)}{m+\ell+x},$$

où $\widetilde{\alpha}_{1,\ell}(x) = \frac{\alpha_{1,\ell}(x)}{l-j+x} = (-1)^\ell\frac{(-x-\ell+1)_n}{n!(k+(l-j)+x)}\binom{n}{\ell}$. Le lemme 3.1 permet d'obtenir le résultat en utilisant la même démarche que pour $Q_{0,n}(x)$. □

5. Comportement asymptotique des polynômes $Q_{i,n}$

Proposition 5.1. *Pour $x \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ fixé et $i \in \{0, 2\}$, on a*

$$\limsup_{n\to+\infty}|Q_{i,n}(x)|^{\frac{1}{n}} \le 1.$$

Démonstration. Grâce aux expressions des polynômes $Q_{i,n}$ données dans la partie 1, il suffit de démontrer que

$$\limsup_{n\to+\infty}|E_{j,n,s}(x)|^{\frac{1}{n}} \le 1,$$

uniformément par rapport à j. La formule des résidus donne

$$E_{j,n,s}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z+j+x|=\frac{1}{2}}\left(z+x+\frac{n}{2}\right)\frac{(z+1)_n^2(z+2x)_n^2}{(z+x)_{n+1}^4}(j+x+z)^{s-1}\mathrm{d}z.$$

On en déduit que

$$|E_{j,n,s}| \le 2^{-s}\max_{|z+j+x|=\frac{1}{2}}\left|z+x+\frac{n}{2}\right|\left|\frac{(z+1)_n^2(z+2x)_n^2}{(z+x)_{n+1}^4}\right|.$$

Soit un entier m tel que $|x|+\frac{3}{2}\leq m$, on a

$$\begin{aligned}(5.1)\quad |(z+1)_n| = \prod_{k=0}^{n-1}|z+1+k| &= \prod_{k=0}^{n-1}|z+j+x+1+k-x-j| \\ &\leq \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}+1+|k-j|+|x|\right) \\ &\leq \prod_{k=0}^{n-1}(|k-j|+m) \leq \prod_{k=0}^{n}(|k-j|+m)\,.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}(5.2)\quad |(z+1)_n| &\leq \left(\prod_{k=0}^{j}(m+k)\right)\left(\prod_{k=1}^{n-j}(m+k)\right) \\ &\leq (m+j)!(m+n-j)!.\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}(5.3)\quad |(z+2x)_n| = \prod_{k=0}^{n-1}|z+2x+k| &= \prod_{k=0}^{n-1}|z+j+x+k+x-j| \\ &\leq \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}+|k-j|+|x|\right) \\ &\leq \prod_{k=0}^{n-1}(|k-j|+m) \leq \prod_{k=0}^{n}(|k-j|+m)\,.\end{aligned}$$

D'où

$$(5.4)\quad |(z+2x)_n| \leq \left(\prod_{k=0}^{j}(m+k)\right)\left(\prod_{k=1}^{n-j}(m+k)\right) \leq (m+j)!(m+n-j)!.$$

Puis

$$\begin{aligned}|(z+x)_{n+1}| = \prod_{k=0}^{n}|z+x+k| &= \prod_{k=0}^{n}|z+j+x+k-j| \\ &\geq \prod_{k=0}^{n}\left|-\frac{1}{2}+|k-j|\right|\end{aligned}$$

En minorant $\left||k-j|-\frac{1}{2}\right|$ par $|k-j|-1$ si $|k-j|>1$, et par $\frac{1}{2}$ sinon, on obtient, dans tous les cas

$$(5.5)\qquad |(z+x)_n| \geq \frac{1}{8n^3}j!(n-j)!.$$

En regroupant (5.2), (5.4) et (5.5), on obtient finalement

$$\begin{aligned}|E_{j,n,s}(x)| \leq &\left(\frac{8n^3((m+j)!(m+n-j)!)}{j!(n-j)!}\right)^4\\ &= 8^4 n^{12}\left(\prod_{k=1}^{m}(j+k)\prod_{k=1}^{m}(n-j+1)\right)^4\\ &\leq 8^4 n^{12}(n+m)^{4m}(n+m+1)^{4m}.\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\limsup_{n\to+\infty} |E_{j,n,s}|^{\frac{1}{n}} \leq 1,$$

uniformément par rapport à j. □

6. Indépendance linéaire de deux termes consécutifs de la suite $(Q_{0,n}, Q_{2,n})_{n\geq 0}$

Proposition 6.1. *Soit x un nombre qui n'est pas un entier ou un demi-entier alors, on a*

$$Q_{0,n+1}(x)Q_{2,n}(x) - Q_{0,n}(x)Q_{2,n+1}(x) \neq 0.$$

Démonstration. En utilisant Maple, l'algorithme de Zeilberger[1] nous permet de montrer que les suites $(Q_{0,n}(x))$ et $(Q_{2,n}(x))$ vérifient la relation de récurrence

$$W(n+2) + \frac{2n+3}{(n+2)^5}P_x(n)W(n+1) + \frac{T_x(n)}{(n+2)^5}W(n) = 0,$$

où

$$P_x(n) = -n^4 - 6n^3 + (2x^2 - 2x + 14)n^2 + (6x^2 - 6x - 15)n + 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 6x - 6$$

et

$$T_x(n) = (n+1)^3(n+2x)(n+2-2x).$$

On pose alors $A_n(x) = Q_{0,n+1}(x)Q_{2,n}(x) - Q_{0,n}(x)Q_{2,n+1}(x)$ et les relations sur les récurrences linéaires d'ordre 2 nous donnent alors

$$A_{n+1}(x) = \underbrace{\frac{(n+1)^3(n+2x)(n+2-2x)}{(n+2)^5}}_{\neq 0 \quad \text{grâce à l'hypothèse sur } x} A_n(x).$$

Comme $A_0(x) = -3(2x-1) \neq 0$, on conclut que $A_n(x) \neq 0$, pour tout n. □

[1]cf. [8], l'algorithme est implémenté dans Mathematica et dans Maple

7. Démonstration du théorème 1.2

Dans cette partie, on fixe un nombre premier p.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{C}_p$ tel que $|x|_p \geq q_p$, on définit la quantité

$$V_n(x) = 2p^{4\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} d_n^5 \left(3Q_{0,n}(x)\zeta_p(4,x)\omega(x)^{-3} + Q_{2,n}(x) \right).$$

Lemme 7.1. *Soit $n \geq 0$, la fonction V_n admet le développement en série de Laurent*

$$V_n(x) = \sum_{k=2n+1}^{\infty} v_{n,k} x^{-k},$$

où $(v_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres rationnels vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|v_{n,k}|_p \leq p.$$

Démonstration. En utilisant les développements convergents des fonctions Zêta de Hurwitz p-adiques, on a

$$\zeta_p(4,x)\omega(x)^{-3} = \frac{x^{-3}}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-3}{j} B_j x^{-j}.$$

Comme les polynômes $Q_{n,i}$ sont de degré au plus $4n$ et que les séries sont convergentes, on en déduit que la fonction V_n admet le développement de Laurent

$$V_n(x) = \sum_{k=-4n+3}^{\infty} v_{n,k} x^{-k}.$$

Dans le cas archimédien, on a, pour $s > 1$, le développement asymptotique

$$\zeta(s,x) = \frac{x^{1-s}}{s-1} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{1-s}{j} B_j x^{-j} + O(x^{-1-k}) \right),$$

quand $x \to \infty$ dans un secteur angulaire $|\arg(x)| < \pi - \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ fixé.

Ce développement n'est pas convergent, mais il permet d'obtenir une série formelle de $\mathbb{Q}[[x]]$ associée à $\zeta(4,x)$ qui est exactement la même que la série de Laurent de $\zeta_p(4,x)\omega(x)^{-3}$.

Par unicité des développements asymptotiques, la série de Laurent associée à $V_n(x)$ est donc égale à la série formelle associée au développement asymptotique de $S_n(x)$, or la proposition 2.1 nous donne

$$S_n(x) = O(x^{-2n-1}).$$

On en déduit que $v_{n,k} = 0$ pour $k < 2n+1$, on obtient donc la première partie du résultat.

En revanche $2p^{4\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} d_n^5 Q_{0,n}(x)$ et $2p^{4\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} d_n^5 Q_{2,n}(x)$ sont des éléments de $\mathbb{Z}_p[x]$ par la proposition 4.1 et que le nombre $\binom{-3}{j} B_j$ est majoré en valeur absolue p-adique par p en utilisant le théorème de Clausen–von Staudt (cf. [6, Theorem 9.5.14, p. 63]), on a bien le deuxième point. $\square$

On a en particulier.

Corollaire 7.2. *Sous les mêmes hypothèses que le lemme précédent,*

$$|V_n(x)|_p \leq p\,|x|_p^{-2n-1}.$$

Soit $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ un rationnel sous forme réduite avec $\left|\frac{a}{b}\right|_p \geq q_p$, considérons

$$\mathcal{V}_n = 2\mu_n(b)^4 b\, d_n^5 \left(3Q_{0,n}\left(\frac{a}{b}\right)\zeta_p\left(4,\frac{a}{b}\right)\omega\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} + Q_{2,n}\left(\frac{a}{b}\right)\right).$$

Proposition 7.3. *On a*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|\mathcal{V}_n|_p \leq 6\log|b|_p.$$

Démonstration. On a

$$\mathcal{V}_n = 2\left(b^n \prod_{\substack{q|b\\ q \text{ premier}}} q^{\left\lfloor \frac{n}{q-1}\right\rfloor}\right)^4 b\, d_n^5 \left(3Q_{0,n}\left(\frac{a}{b}\right)\zeta_p\left(4,\frac{a}{b}\right) + Q_{2,n}\left(\frac{a}{b}\right)\right),$$

que l'on peut reformuler en

$$\mathcal{V}_n = \left(b^n \prod_{\substack{q|b\\ q \text{ premier}\\ q\neq p}} q^{\left\lfloor \frac{n}{q-1}\right\rfloor}\right)^4 b\, V_n\left(\frac{a}{b}\right).$$

Il en résulte, en utilisant le corollaire 7.2,

$$|\mathcal{V}_n|_p = |b|_p^{4n+1}\left|V_n\left(\frac{a}{b}\right)\right|_p \leq |b|_p^{4n+1}\, p\left|\frac{a}{b}\right|_p^{-2n-1} = p\,|b|_p^{6n+2}.$$

On peut donc conclure. $\square$

Fin de la preuve du théorème 1.2. Grâce à la proposition 4.1, on a

$$2\mu_n(b)^4 b\, d_n^5 Q_{0,n}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad 2\mu_n(b)^4 b\, d_n^5 Q_{2,n}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}.$$

En utilisant le lemme 3.1 et la proposition 5.1, pour $i \in \{0,2\}$, on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\left|2\mu_n(b)^4 b\, d_n^5 Q_{i,n}\left(\frac{a}{b}\right)\right| \leq 4\log|b| + 4\sum_{\substack{q|b\\ q \text{ premier}}} \frac{\log q}{q-1} + 5.$$

On en déduit donc que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\left[\max\left(\left|6\mu_n(b)^4 b\, d_n^5 Q_{0,n}\left(\frac{a}{b}\right)\right|, \left|2\mu_n(b)^4 b\, d_n^5 Q_{2,n}\left(\frac{a}{b}\right)\right|\right)|\mathcal{V}_n|_p\right]$$
$$\leq 4\log|b| + 6\log|b|_p + 4 \sum_{\substack{q|b \\ q \text{ premier}}} \frac{\log q}{q-1} + 5.$$

Grâce à la proposition 6.1, comme $|x| \geq q_p$ implique que x n'est pas un entier ou un demi-entier, on a donc l'indépendance linéaire de deux termes successifs de la suite $(Q_{0,n}(x), Q_{2,n}(x))_{n\geq 0}$. En utilisant le critère d'irrationalité du lemme 3.2, on voit que si

$$4\log|b| + 6\log|b|_p + 4 \sum_{\substack{q|b \\ q \text{ premier}}} \frac{\log q}{q-1} + 5 < 0$$

alors $\zeta_p(4, \frac{a}{b})\omega(\frac{a}{b})^{-3}$ est irrationnel. Si cette condition est vérifiée, comme on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|\mathcal{V}_n| \leq -6\log|b|_p$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\left|2\mu_n(b)^4 b\, d_n^5 Q_{i,n}\left(\frac{a}{b}\right)\right| \leq 4\log|b| + 4 \sum_{\substack{q|b \\ q \text{ premier}}} \frac{\log q}{q-1} + 5.$$

la mesure d'irrationalité de $\zeta_p(4, \frac{a}{b})\omega(\frac{a}{b})^{-3}$ est majorée par

$$\frac{6\log|b|_p}{6\log|b|_p + 4\log|b| + 4\sum_{\substack{q|b \\ q \text{ premier}}} \frac{\log q}{q-1} + 5}.$$

On a donc démontré le théorème 1.2

8. Lien avec les travaux de F. Beukers

Dans [4], F. Beukers introduit la série formelle suivante

$$T(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix},$$

où $\left[\begin{smallmatrix} k \\ x \end{smallmatrix}\right] = \frac{k!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+k)}$.

Il démontre que cette série converge p-adiquement pour $x \in \mathbb{Q}_p$ tel que $|x|_p > 1$ et alors on a

$$T(x) = \omega(x)^{-2}\zeta_p(3,x).$$

Il obtient des approximants de type Padé de $\zeta(3,x)$:

Proposition 8.1 (Beukers). *Pour $x \in \mathbb{Q}_p$ avec $|x|_p > 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$p_n(x) - q_n(x)T(x) = T(n,x) = O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right),$$

où

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j^3} \frac{\binom{k-x}{k-j}\binom{-x-j}{k-j}}{\binom{k}{j}^2},$$

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\binom{-x}{k}\binom{-x+k}{k}$$

et

$$T(n,x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{(k+1)(k+2)\dots(k+n+1)} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1-x \end{bmatrix}.$$

T. Rivoal construit (cf. [9]) la série hypergéométrique

$$\sum_{k=0}^{\infty} (n!)^2 (k + x + \frac{n}{2}) \frac{(k+1)_n (k+2x)_n}{(k+x)_{n+1}^4}$$

et justifie qu'elle donne les mêmes approximants de type Padé que ceux de F. Beukers. L'absence du carré au numérateur de la fraction rationnelle utilisée par rapport à celle qu'introduit T. Rivoal dans [10] permet de démontrer la convergence des approximations rationnelles de $\zeta(3,x)$ en utilisant les séries formelles. La présence de ce carré est nécessaire pour pouvoir dériver et obtenir de bonnes approximations de $\zeta(4,x)$. (cf. [10] pour plus de détail sur ce problème)

Par sa méthode, F. Beukers obtient la proposition :

Proposition 8.2 (Beukers). *Sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente, si $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, on a alors*

(1) $\mu_n(b)^2 q_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$
(2) $d_n^3 \mu_n(b)^2 q_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$
(3) $\limsup_{n\to+\infty} \max(|p_n(x)|, |q_n(x)|)^{\frac{1}{n}} \leq 1$
(4) $\limsup_{n\to+\infty} |p_n(x) - q_n(x)T(x)|^{\frac{1}{n}} \leq |b|_p^2 p^{-\frac{2}{p-1}}$
(5) *pour tout n, $p_n(x)q_{n+1}(x) - q_n(x)p_{n+1}(x) \neq 0$.*

On peut remarquer que par sa méthode, F. Beukers obtient d_n^3 pour le dénominateur, là où la méthode de T. Rivoal sur les séries hypergéométriques ne donnerait que d_n^4.

On a alors toutes les hypothèses pour appliquer le critère du lemme 3.2 et on obtient

Proposition 8.3 (Beukers). *Si $x \in \mathbb{Q}$ de forme réduite $x = \frac{a}{b}$ tel que*

$$2\log|b| + 2\sum_{\substack{q|b \\ q\ premier}} \frac{\log q}{q-1} + 3 + 4\log|b|_p - 4\frac{\log(p)}{p-1} < 0,$$

alors $\omega(x)^{-2}\zeta_p(3,x)$ et sa mesure d'irrationalité est au plus

$$\frac{4\log|b|_p}{2\log|b| + 4\log|b|_p + 2\sum_{\substack{q|b \\ q\ premier}} \frac{\log q}{q-1} + 3}.$$

La condition d'irrationalité est celle obtenue par F. Beukers, en revanche, il ne donne pas la mesure d'irrationalité dans son texte.

On en déduit

Corollaire 8.4. *Soit un nombre premier $p \geq 3$, le nombre $\zeta_p(3, \frac{1}{p})$ est irrationnel et sa mesure d'irrationalité est au plus*

$$\frac{4\log p}{2\log p + 2\frac{\log p}{p-1} - 3} := h(p).$$

On remarque que la fonction h est décroissante de limite 2 en $+\infty$ qui est la valeur conjecturée pour la mesure d'irrationalité $\zeta_p(3, \frac{1}{p})$ pour tout p.

Annexe A. Fonctions Zêta de Hurwitz p-adique

Pour avoir une vision très complète sur les fonctions L p-adiques, on pourra se référer à l'ouvrage de H. Cohen ([6]).

A.1. Quelques notations p-adiques. Pour p premier, on définit q_p par $q_p = p$, si p impair et $q_2 = 4$.

Si $x \in \mathbb{Q}_p$ tel que $|x|_p = 1$, on définit $\omega(x)$ comme l'unique racine $(p-1)$-ème de l'unité si p impair ou l'unique racine carrée de 1 si $p = 2$ (c'est un élément élément de $\mathbb{Q}_p$) telle que $|x - \omega(x)|_p \leq q_p$.

On étend la définition de ω pour $x \in \mathbb{Q}_p^*$ par $\omega(x) = x^{\mathrm{val}_p(x)}\omega(x \cdot p^{-\mathrm{val}_p(x)})$, où val_p est la valuation p-adique.

On définit pour $x \in \mathbb{Q}_p^*$, $\langle x \rangle = \frac{x}{\omega(x)}$.

A.2. Fonction Zêta de Hurwitz p-adique. La fonction Zêta de Hurwitz, dans le cas archimédien, peut-être définie pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > 1$ et $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ par

$$\zeta(s,x) = \sum_{k=0}^{\infty} = \frac{1}{(k+x)^s}.$$

En utilisant la formule d'Euler Mac-Laurin, on obtient, pour x réel, le développement asymptotique

$$\zeta(s,x)=\frac{x^{1-s}}{s-1}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{1-s}{j}B_jx^{-j}+O(x^{-1-k})\right).$$

quand $x\to\infty$ dans un secteur angulaire $|\arg(x)|<\pi-\epsilon$ avec $\epsilon>0$ fixé.

Ce développement n'est pas convergent.

On prolonge analytiquement cette fonction à $\mathbb{C}\setminus\{1\}\times(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a alors

$$\zeta(1-n,x)=B_n(x),$$

où B_n est le n-ème polynôme de Bernoulli que l'on peut obtenir par la série génératrice :

$$\frac{t\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(x)}{k!}t^k.$$

On peut définir analytiquement les fonctions Zêta de Hurwitz p-adiques pour $x\in\mathbb{Q}_p$ tel que $|x|_p\le q_p$ et $s\in\mathbb{Q}_p$ tel que $|s|_p\le q_pp^{-\frac{1}{p-1}}$ par

$$\zeta_p(s,x)=\frac{\langle x\rangle^{1-s}}{s-1}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{1-s}{j}B_jx^{-j}.$$

Ce développement converge p-adiquement et on a, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\zeta_p(1-k,x)=w(x)^{-k}B_k(x).$$

Bibliographie

[1] R. Apéry, « Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ », in *Journees arithmétiques de Luminy (1978)*, Astérisque, vol. 61, Société Mathématique de France, 1979, p. 11-13.

[2] K. Ball & T. Rivoal, « Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs », *Invent. Math.* **146** (2001), n° 1, p. 193-207.

[3] P. Bel, « Fonction L p-adique et irrationalité », *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.* **9** (2010), n° 1, p. 189-227.

[4] F. Beukers, « Irrationality of some p-adic L-values », *Acta Math. Sin.* **24** (2008), n° 4, p. 663-686.

[5] F. Calegari, « Irrationality of certain p-adic periods for small p », *Int. Math. Res. Not.* **2005** (2005), n° 20, p. 1235-1249.

[6] H. Cohen, *Number theory. Vol. II. Analytic and modern tools*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 240, Springer, 2007.

[7] C. Krattenthaler & T. Rivoal, « Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann », *Mem. Am. Math. Soc.* **875** (2007).

[8] M. Petkovšek, H. S. Wilf & D. Zeilberger, $A=B$, A. K. Peters, 1996, with foreword by Donald E. Knuth.

[9] T. Rivoal, « Simultaneous polynomial approximations of the Lerch function », *Can. J. Math.* **61** (2009), n° 6, p. 1341-1356.

[10] ———, « Padé type approximants of Hurwitz zeta functions $\zeta(4,x)$ », `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01584731`, 2017.

[11] L. J. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press, 1966.

Pierre Bel
75 Rue Saint-Pierre
89450 Vézelay, France
E-mail: `pierre.bel1@free.fr`