Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Samuel PILON et Damien ROY

Construction de nombres extrémaux pour le problème de l'approximation simultanée d'un nombre et de son carré

Tome 30, nº 3 (2018), p. 873-877.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2018__30_3_873_0>

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **30** (2018), 873–877

Construction de nombres extrémaux pour le problème de l'approximation simultanée d'un nombre et de son carré

par Samuel PILON et Damien ROY

Résumé. Nous considérons le problème de l'approximation simultanée d'un nombre et de son carré dans un cadre général qui englobe aussi bien les corps quadratiques imaginaires que les corps de fonctions rationnelles en une variable. Dans ce contexte, nous construisons de nouveaux nombres extrémaux.

Abstract. We consider the problem of simultaneous approximation to a number and to its square in a general framework that encompasses imaginary quadratic number fields and fields of rational functions in one variable. In this context, we construct new extremal numbers.

Le problème de l'approximation simultanée d'un nombre et de son carré a été initialement considéré par Davenport et Schmidt comme outil pour l'approximation des nombres réels par les entiers algébriques cubiques. En 2013, Bel a étendu le cadre de ce problème à un corps de nombres K quelconque.

Pour son résultat principal, Bel choisit, pour chaque place v de K, la valeur absolue $|\cdot|_v$ qui étend la valeur absolue usuelle de $\mathbb{Q}$ si v est archimédienne, ou sa valeur absolue p-adique usuelle si v est au-dessus d'un nombre premier p (on a alors $|p|_v = p^{-1}$). Il fixe aussi une place w de K et désigne par K_w le complété de K pour cette valeur absolue et par $\mathcal{O}_{K,w}$ l'ensemble des éléments x de K tels que $|x|_v \leq 1$ pour toute place v de K distincte de w. En notant par $\gamma = (1+\sqrt{5})/2$ le nombre d'or, le théorème 1.1 de [1] s'énonce ainsi.

Théorème 1 (Bel). *Soient K et w comme ci-dessus.*

(a) *Pour chaque $\xi \in K_w$ tel que $1, \xi, \xi^2$ soient linéairement indépendants sur K, il existe une constante $c > 0$ telle que les conditions*

$$|x_0|_w \leq X \quad et \quad \max\{|x_0\xi - x_1|_w, |x_0\xi^2 - x_2|_w\} \leq cX^{-1/\gamma}$$

Manuscrit reçu le 28 avril 2017, accepté le 16 juin 2017.

Classification Mathématique (2010). 11J13, 11J61.

Mots-clefs. approximation simultanée, géométrie des nombres, corps de fonctions, nombres extrémaux.

Les auteurs remercient le CRSNG pour son appui financier à cette recherche, en particulier pour la bourse de recherche de premier cycle accordée au premier auteur.

n'admettent pas de solution non nulle $(x_0, x_1, x_2) \in \mathcal{O}_{K,w}^3$ *pour des nombres réels* X *arbitrairement grands.*

(b) *Pour chaque* $\epsilon > 0$*, il existe un nombre* $\xi \in K_w$ *qui est transcendant sur* K *tel que les conditions*

$$|x_0|_w \le X \quad \textit{et} \quad \max\{|x_0\xi - x_1|_w, |x_0\xi^2 - x_2|_w\} \le X^{-1/\gamma+\epsilon}$$

admettent une solution non nulle $(x_0, x_1, x_2) \in \mathcal{O}_{K,w}^3$ *pour tout nombre réel* X *assez grand.*

Dans les travaux antérieurs à Bel, on n'avait considéré que le corps $K = \mathbb{Q}$. Dans ce cas, si $w = \infty$ on a $K_w = \mathbb{R}$ et $\mathcal{O}_{K,w} = \mathbb{Z}$. La partie (a) du théorème reprend alors le contenu du théorème 1a de [3], tandis que la partie (b) est démontrée sous une forme plus forte au théorème 1.1 de [4], avec la borne $X^{-1/\gamma+\epsilon}$ remplacée par $c'X^{-1/\gamma}$ pour un $c' > 0$, les nombres réels ξ qui réalisent cette borne étant dits *extrémaux*.

Si on prend pour w la place de $\mathbb{Q}$ associée à un nombre premier p, on a $K_w = \mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{O}_{K,w} = \mathbb{Z}[1/p] \cap [-1, 1]$. La partie (a) est alors équivalente au cas $n = 3$ du théorème 2 de [6], tandis que la partie (b) est prouvée indépendamment par Zelo au théorème 1.3.4 de [7] et par Bugeaud dans [2]. Dans ce cas, on ne connait pas de nombres extrémaux et on doute de leur existence.

Le but de cet article est de présenter de nouvelles situations pour lesquelles il existe des nombres extrémaux, en conséquence du résultat suivant.

Théorème 2. *Soient* A *un anneau intègre et* K *son corps des fractions. On suppose qu'il existe une valeur absolue non triviale* $|\cdot|$ *sur* K *telle que* $|a| \ge 1$ *pour tout* $a \in A \setminus \{0\}$*, et on note* $\overline{K}$ *le complété de* K *pour cette valeur absolue.*

(a) *Supposons que* A *soit un anneau à factorisation unique. Alors, pour tout* $\xi \in \overline{K}$ *tel que 1,* ξ *et* ξ^2 *sont linéairement indépendants sur* K*, il existe une constante* $c_1 > 0$ *et des nombres réels* X *arbitrairement grands tels que les inégalités*

$$|x_0| \le X \quad \textit{et} \quad L(\boldsymbol{x}) := \max\{|x_0\xi - x_1|, |x_0\xi^2 - x_2|\} \le c_1 X^{-1/\gamma} \tag{1}$$

ne possèdent aucune solution non nulle $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2) \in A^3$.

(b) *Il existe* $\xi \in \overline{K}$ *tel que 1,* ξ *et* ξ^2 *sont linéairement indépendants sur* K *et une constante* $c_2 > 0$ *telle que pour tout* X *assez grand les inégalités*

$$|x_0| \le X \quad \textit{et} \quad L(\boldsymbol{x}) := \max\{|x_0\xi - x_1|, |x_0\xi^2 - x_2|\} \le c_2 X^{-1/\gamma} \tag{2}$$

possèdent une solution non nulle $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2) \in A^3$.

Par exemple, on peut prendre pour A l'anneau des polynômes $F[u]$ en une indéterminée sur un corps quelconque F. En munissant cet anneau de la valeur absolue $|p| = e^{\deg(p)}$ et en étendant cette dernière au corps

$K = F(u)$, on obtient pour complété $\overline{K} = F((1/u))$. Alors le théorème montre l'existence de séries $\xi \in F((1/u))$ avec une propriété d'approximation extrémale.

Lorsque K est un corps de nombres, la condition $|a| \geq 1$ pour tout $a \in A$ implique que K ne possède qu'une place archimédienne w, que $|\cdot|$ est une valeur absolue associée à cette place et que A est contenu dans l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_{K,w}$ de K. Alors, selon la partie (a) du théorème de Bel cité précédemment, le théorème 2 (a) demeure vrai sans supposer que A soit à factorisation unique. Donc le théorème 2 (b) montre l'existence de nombres complexes extrémaux sur l'anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire donné, par exemple sur $\mathbb{Z}[i]$ ou sur $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Démonstration de la partie (a). On reprend la démonstration de [3, Theorem 1a] en supposant que les inégalités (1) admettent une solution non-nulle $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2)$ dans A^3 pour tout X assez grand, disons pour tout $X \geq X_0$. En vertu des hypothèses sur A, on peut se restreindre aux solutions *primitives*, c'est-à-dire celles pour lesquelles $\operatorname{pgcd}(x_0, x_1, x_2) = 1$. Le but est de montrer que $c_1 > c(\xi) > 0$. Cela permet de supposer que $c_1 < 6^{-1/2}$ et que $X_0 \geq 1$.

Pour chaque $X \geq X_0$, on note $\mathcal{S}(X)$ l'ensemble non vide des solutions primitives de (1) dans A^3, et on pose $\ell(X) = \inf\{L(\boldsymbol{x})\,;\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}(X)\}$. Comme $L(\boldsymbol{x}) < (6X)^{-1/2}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}(X)$, les estimations de [3, Lemma 4] montrent que le déterminant de n'importe quels trois points de $\mathcal{S}(X)$ est en valeur absolue inférieur à 1, donc nul. Ainsi, $\mathcal{S}(X)$ est contenu dans un sous-K-espace vectoriel V de K^3 de dimension au plus 2 et l'argument de [3, Lemma 5] permet de conclure que $\ell(X) > 0$. On peut donc construire récursivement une suite de points primitifs $(\boldsymbol{x}_i)_{i\geq 1}$ dans A^3 en choisissant, pour chaque $i \geq 1$,

$$\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{S}(\widetilde{X}_{i-1}) \quad \text{tel que} \quad L(\boldsymbol{x}_i) < 2\ell(\widetilde{X}_{i-1})$$

où $\widetilde{X}_{i-1} = X_0$ si $i = 1$ et $\widetilde{X}_{i-1} = \big(2c_1/L(\boldsymbol{x}_{i-1})\big)^{\gamma}$ si $i > 1$. Alors, en posant $X_i = |x_{i,0}|$ et $L_i = L(\boldsymbol{x}_i)$ pour tout $i \geq 1$, on obtient

$$(3) \qquad L_i \leq 2c_1 X_{i+1}^{-1/\gamma}, \quad L_{i+1} \leq L_i/2 \quad \text{et} \quad X_i \leq X_{i+1} \quad (i \geq 1).$$

En effet, comme $\boldsymbol{x}_{i+1} \in \mathcal{S}(\widetilde{X}_i)$, on a $X_{i+1} \leq \widetilde{X}_i$, donc $L_i = 2c_1\widetilde{X}_i^{-1/\gamma} \leq 2c_1 X_{i+1}^{-1/\gamma}$. Comme $\boldsymbol{x}_{i+1} \in \mathcal{S}(\widetilde{X}_i)$, on a aussi $L_{i+1} \leq c_1\widetilde{X}_i^{-1/\gamma} = L_i/2$. Enfin, puisque $L_i < 2\ell(\widetilde{X}_{i-1})$, cette dernière inégalité implique $L_{i+1} < \ell(\widetilde{X}_{i-1})$, donc $\boldsymbol{x}_{i+1} \notin \mathcal{S}(\widetilde{X}_{i-1})$, et par suite $X_{i+1} > \widetilde{X}_{i-1} \geq X_i$.

Les inégalités (3) impliquent que $\lim_{i\to\infty} X_i = \infty$ car si la suite $(X_i)_{i\geq 1}$ était bornée supérieurement par un nombre réel X, on aurait $\ell(X) \leq L_i$ pour tout $i \geq 1$, donc $\ell(X) = 0$, ce qui est impossible. Comme $L_i \neq L_{i+1}$, on observe aussi que les points $\boldsymbol{x}_i$ et $\boldsymbol{x}_{i+1}$ sont linéairement indépendants sur

K pour tout $i \geq 1$. Partant de là, on conclut en reprenant, avec des changements mineurs, le reste de l'argument de Davenport et Schmidt dans [3, §3]. Par exemple si, pour un entier $i \geq 1$, on a $x_{i,0}x_{i,2} - x_{i,1}^2 = 0$, alors $\boldsymbol{x}_i = a(m^2, mn, n^2)$ pour une unité a de A et un point non nul (m, n) de A^2. Comme $|a| = 1$, on en déduit que $|m| = X_i^{1/2}$ et que $|m\xi - n| \leq X_i^{-1/2} L_i$.

Démonstration de la partie (b). Soit $\rho > 1$ et soit $(a_j)_{j \geq 1}$ une suite d'éléments de A avec $|a_j| \geq 1 + \rho$ pour tout $j \geq 1$. On peut donner un sens à la fraction continue $\xi = [0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ comme limite dans $\overline{K}$ des quotients p_j/q_j où $(p_j)_{j\geq 0}$ et $(q_j)_{j\geq 0}$ sont les suites d'éléments de A caractérisées par

$$\begin{pmatrix} q_j & q_{j-1} \\ p_j & p_{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (j \geq 1).$$

En effet, on vérifie que $|q_{j+1}| \geq \rho |q_j|$ et que $|p_{j+1}/q_{j+1} - p_j/q_j| = 1/|q_j q_{j+1}|$ pour tout $j \geq 1$. On en déduit que $(p_j/q_j)_{j\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans K qui converge vers un élément ξ de $\overline{K}$ avec $|\xi - p_j/q_j| \leq c_0 |q_j|^{-2}$ pour tout $j \geq 1$, où $c_0 = \rho/(\rho^2 - 1)$.

Comme dans [4, §2], on choisit a et b dans A distincts ayant $|a|, |b| \geq 1 + \rho$, et on prend $\xi = [0, w] = [0, a, b, a, a, b, \dots]$ où $w = abaab\dots$ est le mot de Fibonacci sur $\{a, b\}$, limite de la suite de mots $(w_i)_{i\geq 1}$ définie récursivement par $w_1 = a$, $w_2 = ab$ et $w_i = w_{i-1}w_{i-2}$ pour $i \geq 3$ dans le monoïde E^* des mots sur $\{a, b\}$. On applique ensuite le résultat de Berstel suivant lequel, pour tout $i \geq 1$, le mot w_{i+2} privé de ses deux dernières lettres est un palindrome m_i. Son image sous le morphisme de monoïdes $\Phi\colon E^* \to \mathrm{GL}_2(A)$ qui applique a sur $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et b sur $\left(\begin{smallmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est donc une matrice symétrique qui s'écrit

$$M_i = \Phi(m_i) = \begin{pmatrix} x_{i,0} & x_{i,1} \\ x_{i,1} & x_{i,2} \end{pmatrix}$$

pour un triplet $\boldsymbol{x}_i = (x_{i,0}, x_{i,1}, x_{i,2}) \in A^3$. En vertu des considérations initiales, on en déduit, pour tout $i \geq 1$, les inégalités $|x_{i,0}\xi - x_{i,1}| \leq c_3 |x_{i,0}|^{-1}$ et $|x_{i,1}\xi - x_{i,2}| \leq c_3 |x_{i,1}|^{-1}$, donc $L(\boldsymbol{x}_i) \leq c_3 X_i^{-1}$ en posant $X_i = |x_{i,0}|$ et $c_3 = (1 + |\xi|)c_0$.

Soient $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $S = \left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. D'après [4, Lemme 2.1], on a $M_{i+1} = M_i S_i M_{i-1}$ pour tout $i \geq 2$, où $S_i = S$ si i est pair et $S_i = S^t$ sinon. Grâce aux formules de [5, §2], on en déduit que

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}) &= -\operatorname{trace}(J M_i J M_{i+1} J M_{i-1}) \\ &= \det(M_{i-1} M_i) \det(S_i J) = \pm(a - b) \neq 0. \end{aligned}$$

Comme $x_{i,0}^{-1}\boldsymbol{x}_i$ converge dans $\overline{K}$ vers le point $(1, \xi, \xi^2)$, on conclut que 1, ξ et ξ^2 sont linéairement indépendants sur K (voir la preuve de [5, Theorem 5.1]).

Partant de là, on reprend l'argument de [4, Théorème 2.2]. On trouve que $X_i/(X_{i-2}X_{i-1})$ converge vers $|\theta|$ avec $\theta = \xi^2 + (a+b)\xi + (ab+1) \neq 0$, puis qu'il existe des constantes $c_5 > c_4 > 0$ telles que les rapports $r_i = X_i/X_{i-1}^{\gamma}$ satisfassent $c_4 r_{i-1}^{-1/\gamma} \leq r_i \leq c_5 r_{i-1}^{-1/\gamma}$ pour tout $i \geq 3$. En choisissant c_4 assez petit et c_5 assez grand de sorte que $c_4^{\gamma}/c_5 \leq r_2 \leq c_5^{\gamma}/c_4$, on en déduit par récurrence que $c_4^{\gamma}/c_5 \leq r_i \leq c_5^{\gamma}/c_4$ pour tout $i \geq 2$. Cela corrige une erreur à la fin de la démonstration de [4, Théorème 2.2] et montre en particulier que $X_{i+1} \leq (c_5^{\gamma}/c_4)X_i^{\gamma}$ pour tout $i \geq 1$, donc $L(\boldsymbol{x}_i) \leq c_3 X_i^{-1} \leq c_2 X_{i+1}^{-1/\gamma}$ pour $i \geq 1$, avec $c_2 = c_3 c_4^{1/\gamma}/c_5$. Enfin, pour tout $X \in \mathbb{R}$ avec $X \geq X_1$, il existe un indice $i \geq 1$ tel que $X_i \leq X \leq X_{i+1}$ et alors le point $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_i$ satisfait les inégalités (2). Donc ξ possède les propriétés requises.

Bibliographie

[1] P. Bel, « Approximation simultanée d'un nombre v-adique et de son carré par des nombres algébriques », *J. Number Theory* **133** (2013), n° 10, p. 3362-3380.

[2] Y. Bugeaud, « On simultaneous uniform approximation to a p-adic number and its square », *Proc. Am. Math. Soc.* **138** (2010), n° 11, p. 3821-3826.

[3] H. Davenport & W. M. Schmidt, « Approximation to real numbers by algebraic integers », *Acta Arith.* **15** (1969), p. 393-416.

[4] D. Roy, « Approximation simultanée d'un nombre et de son carré », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **336** (2003), n° 1, p. 1-6.

[5] ———, « Approximation to real numbers by cubic algebraic integers I », *Proc. Lond. Math. Soc.* **88** (2004), p. 42-62.

[6] O. Teulié, « Approximation d'un nombre p-adique par des nombres algébriques », *Acta Arith.* **102** (2002), n° 2, p. 137-155.

[7] D. Zelo, « Simultaneous approximation to real and p-adic numbers », Thèse, Université d'Ottawa (Canada), 2009, `https://arxiv.org/abs/0903.0086`.

Samuel Pilon
Département de mathématiques et de statistique
Université d'Ottawa
150 Louis Pasteur
Ottawa, Ontario K1N 6N5, Canada
E-mail: `spilo077@uottawa.ca`

Damien Roy
Département de mathématiques et de statistique
Université d'Ottawa
150 Louis Pasteur
Ottawa, Ontario K1N 6N5, Canada
E-mail: `droy@uottawa.ca`
URL: `http://aix1.uottawa.ca/~droy`