Journées

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Évian-les-Bains, 5 juin–9 juin 2006

Luc Robbiano et Claude Zuily

Effet de Kato pour un problème extérieur relatif à une équation de Schrödinger avec un potentiel non borné

J. É. D. P. (2006), Exposé n° XI, 7 p.

<http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP_2006____A11_0>

Journées *Équations aux dérivées partielles*
Évian-les-Bains, 5 juin–9 juin 2006
GDR 2434 (CNRS)

Effet de Kato pour un problème extérieur relatif à une équation de Schrödinger avec un potentiel non borné

Luc Robbiano Claude Zuily

Résumé

On montre que les solutions d'une équation de Schrödinger à coefficients variables dont le potentiel est non borné à l'infini dans un domaine extérieur est, localement en temps et en espace, $\frac{1}{2}$ fois plus régulière en espace que la donnée initiale.

1. Introduction

L'effet régularisant de Kato se traduit par le fait que, localement en espace, la solution d'une équation de Schrödinger est $\frac{1}{2}$ fois plus régulière que la donnée initiale. Mathématiquement cela se traduit par l'inégalité suivante.

$$\forall \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\ \exists C > 0, \int_{\mathbb{R}} \|\chi(I-\Delta)^{\frac{1}{4}} e^{-it\Delta} u_0\|_{L^2}^2 dt \leqq C\|u_0\|^2,\ \forall u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

où Δ est le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$. Ce gain inattendu d'une $\frac{1}{2}$ dérivée a été découvert par T. Kato [K] au début des années 1980 sur l' équation de KdV et démontré pour l'équation de Schrödinger à la fin des années 1980, indépendamment par Constantin-Saut [C-S], Sjölin [S], Vega [V]. C'est un outil qui s'est avéré utile dans le traitement des équations non linéaires correspondantes. Initialement démontré dans le cas du Laplacien plat dans $\mathbb{R}^n$, cette inégalité a été étendue dans plusieurs directions en réponse aux questions suivantes : quelles sont les parties principales acceptables ? quelles perturbations d'ordre inférieur sont-elles admises ? peut-on traiter des problèmes avec obstacle ? C'est à ces questions que nous proposons des réponses. Nous commençons par décrire les résultats obtenus puis les comparerons à ceux préexistants.

2. Enoncé des résultats

Soit $\mathcal{K}$ un obstacle compact (éventuellement vide) dont le complémentaire Ω est un ouvert connexe régulier. On considère un opérateur différentiel de la forme

$$P = \sum_{j,k=1}^{n} D_j\Big(a^{jk}(x)D_k\Big) + V(x), \tag{2.1}$$

où les a_{jk} et V sont à valeurs réelles et C^∞ sur $\overline{\Omega}$.
Nous ferons deux types d'hypothèses. Les unes structurelles les autres géométriques. Pour les énoncer il sera commode d'introduire la métrique de Hörmander $g = \dfrac{dx^2}{\langle x\rangle^2} + \dfrac{d\xi^2}{\langle \xi\rangle^2}$ et la classe de symbole correspondante $S_\Omega(M,g)$ composée des fonctions $a \in C^\infty(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n)$ telles que

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leqq C_{\alpha\beta}\ M(x,\xi)\langle x\rangle^{-|\beta|}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|},\ \forall (x,\xi)\in T^*(\overline{\Omega}).$$

1) Hypothèses structurelles

(H1) $(a^{jk}(x)) \geqq C_0 Id, \quad \forall x\in\overline{\Omega}$,

(H2) $a^{jk}\in S_\Omega(1,g)$ et $\nabla a^{jk} = o(\dfrac{1}{|x|}), \quad |x|\to+\infty$,

(H3) $V\in S_\Omega(\langle x\rangle^2, g)$ et $V \geqq -C$.

2) Hypothèses géométriques

Soit Φ_t le flot bicaractéristique généralisé au sens de Melrose-Sjöstrand [M-S]. Sous les hypothèses précédentes il existe pour tout temps $t\in\mathbb{R}$. On supposera,

(H4) Ce flot est non captant i.e.

$$\forall (x,\xi)\in T^*(\overline{\Omega}),\ \lim_{t\to+\infty}|\pi(\Phi_t(x,\xi))| = +\infty.$$

où π désigne la projection de $T^*(\overline{\Omega})$ sur $\overline{\Omega}$.

(H5) Les bicaractéristiques généralisées n'ont pas de point "glancing" d'ordre infini.

Sous les hypothèses structurelles P admet une et une seule extension autoadjointe à partir de $C_0^\infty(\Omega)$ (c'est l'extension de Friedrichs). On la note P_D (D comme Dirichlet). Le problème

$$\begin{cases} i\partial_t u + P_D u = 0 \\ u(0) = u_0 \\ u = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t\times\partial\Omega \end{cases}$$

admet alors, pour $u_0\in L^2(\Omega)$, une et une seule solution $u\in C(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$. Le résultat principal de ce travail est le suivant.

Théorème 2.1. *Soit P défini en (2.1) vérifiant les hypothèses (H1) à (H5). Soit $T>0$ et $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Il existe alors $C>0$ telle que pour tout u_0 dans $L^2(\Omega)$ on a,*

$$\int_0^T \|\chi P_D^{\frac14} e^{-itP_D}u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\ dt \leqq C\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Ici $P_D^{\frac{1}{4}}$ est défini par le calcul fonctionnel des opérateurs autoadjoints.

Remarque 2.2. *1. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, $P = -\Delta + V$ et $V \in L^\infty$, le résultat ci-dessus est dû à Constantin- Saut* [C-S]*, Sjölin* [S]*, Vega*[V] *indépendamment (voir aussi Yajima* [Y]*).*
Toujours lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$ et sous les hypothèses ci-dessus ce théorème est du à Doï [D4] *qui a également montré la nécessité de la condition (H4) (voir aussi* [D1, D2, D3]*).*
Enfin dans le cadre ci-dessus mais avec des hypothèses de décroissance à l'infini sur V ce résultat a été démontré par Burq [B2].
2. Ce résultat peut être étendu au cas où P possède des termes d'ordre un et également au cas où les coefficients de la partie non principale dépendent également de t.
3. On ne peut pas espérer, en général, d'effet régularisant global en temps à cause de la présence possible de valeurs propres de P.

3. Eléments de preuve

La méthode générale de preuve consiste à montrer l'inégalité désirée par l'absurde en utilisant les mesures de défaut semi-classiques. L'idée d'une telle stratégie remonte à Lebeau [L] mais il faut également citer les travaux de Gérard-Leichtnam [G-L], Burq [B3], Burq-Gérard [B-G] et Miller [M].
En fait on montre par l'absurde une version localisée en fréquence de l'inégalité.
Soit $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}\theta \subset \{\frac{1}{2} \leqq t \leqq 2\}$. Soit $T > 0$ et $\chi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$. On montre par l'absurde l'inégalité suivante.

$$\exists h_0 > 0, C > 0, \forall h \in]0, h_0[, \quad \int_0^T \|\chi h^{\frac{1}{2}} \theta(h^2 P_D) e^{-itP_D} u_0\|_{L^2}^2 dt \leqq C \|u_0\|^2. \qquad (3.1)$$

Ici $\theta(h^2 P_D)$ est défini à l'aide du calcul fonctionnel des opérateurs autoadjoints. D'autre part sur le support de θ, $h^{\frac{1}{2}}$ est équivalent à $P_D^{\frac{1}{4}}$. Le théorème se déduit alors de (3.1) et de la théorie de Littlewood-Paley.
Maintenant si (3.1) était fausse, en prenant $h_0 = \frac{1}{k}$ et $C = k$, on trouverait des suites h_k et u_k^0 telles que, en posant $w_k = h_k^{\frac{1}{2}} \theta(h_k^2 P_D) e^{-itP_D} u_k^0$, on ait

$$\int_0^T \|\chi w_k(t)\|_{L^2}^2 dt = 1 \quad \text{et} \quad \|u_k^0\|_{L^2}^2 \leqq \frac{1}{k}. \qquad (3.2)$$

Posons

$$W_k = 1_\Omega 1_{[0,T]} w_k. \qquad (3.3)$$

On a alors le lemme suivant.

Lemme 3.1. *La suite (W_k) est bornée dans $L^2(\mathbb{R}, L^2_{loc}(\mathbb{R}^n))$.*

On en déduit le résultat suivant.

Lemme 3.2. *Il existe une sous-suite $(W_{\sigma(k)})$ et une mesure de Radon μ sur $T^*(\mathbb{R}^{n+1})$ telles que pour toute $a \in C_0^\infty(T^*(\mathbb{R}^{n+1}))$ on ait*

$$\lim_{k\to\infty} \Big(a(x, t, h_{\sigma(k)} D_x, h_{\sigma(k)}^2 D_t) W_{\sigma(k)}, W_{\sigma(k)} \Big) = \int_{T^*(\mathbb{R}^{n+1})} a(x, t, \xi, \tau) d\mu.$$

Posons,

$$\Sigma = \{(x,t,\xi,\tau) \in T^*(\mathbb{R}^{n+1}) : x \in \overline{\Omega},\ t \in [0,T],\ \tau + p(x,\xi) = 0\}.$$

Dès lors la stratégie de la preuve est la suivante. On montre successivement les points ci-dessous.

Point 1. Le support de μ est contenu dans Σ. De plus il est invariant par le flot bicaractéristique généralisé de Melrose-Sjöstrand [M-S].

Point 2. La mesure μ n'est pas identiquement nulle.

Point 3. La mesure μ est nulle près des points "rentrants".

Point 4. Soit $\rho \in \Sigma$. Il existe alors $s_0 > 0$ tel que le point $\Phi_{-s_0}(\rho)$ soit "rentrant", où Φ_t désigne le flot bicaracteristique généralisé.

Les points 1,3,4 impliquant que $\mu = 0$, on obtient une contradiction qui prouve l'estimation (3.1).

Voici quelques indications sur ces différents points.

• Point 1.

Soit $m_0 = (x_0, t_0, \xi_0, \tau_0),\ x_0 \in \Omega,\ t_0 \in [0,T]$, un point tel que $\tau_0 + p(x_0,\xi_0) \neq 0$. On considère la quantité

$$I_k = \Big(a(x, h_k D_x)\chi(t, h_k^2 D_t)\phi h_k^2 (D_t + P(x, D_x) W_k, \phi W_k\Big) \tag{3.4}$$

où ϕ localise au voisinage de x_0, $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ est à support près de x_0 et $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\tau)$. Par le calcul pseudo-différentiel semi-classique on voit que $\lim\limits_{k\to\infty} I_{\sigma(k)} = \langle \mu, (\tau + p)a\phi\rangle$. D'autre part comme $(D_t + P_D)w_k = 0$ on montre que $\lim\limits_{k\to\infty} I_k = 0$. On en déduit que m_0 n'est pas dans le support de μ. Le cas où $x_0 \in \partial\Omega$ est un peu plus délicat mais semblable.

La propagation du support de μ le long du flot bicaractéristique généralisé est plus difficile. Cependant sa preuve est très proche de celle du cas de l'équations des ondes que l'on peut trouver par exemple dans Burq [B1]. Donnons en quelques éléments. Posons $M = \Omega \times \mathbb{R}_t$ puis $T_b^* M = T^*M \setminus \{0\} \cup T^*\partial M \setminus \{0\}$. On écrit suivant Melrose-Sjöstrand, $T^*\partial M \setminus \{0\} = \mathcal{E} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{G}$ où $\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{G}$ sont respectivement les points elliptiques, hyperboliques et "glancing". La propagation dans T^*M n'est pas difficile. On considère l'expression $h_{\sigma(k)}^{-1} I_{\sigma(k)}$ où I_k est défini en (3.4), on commute l'opérateur $D_t + P_D$ avec la quantité $a\chi\phi$, on fait tendre k vers l'infini et on en déduit que la mesure μ vérifie l'équation $H_p\mu = 0$, ce qui prouve que son support, dans T^*M, se propage le long des bicaractéristiques usuelles de p. Pour ce qui concerne les points de $\mathcal{H} \cup \mathcal{G}$, la preuve est beaucoup plus délicate et on utilise les travaux de Gérard-Leichtnam [G-L] et Miller [M]. Pour les détails on renvoie le lecteur à Robbiano-Zuily [R-Z] ou au texte de Burq [B1].

• Point 2.

Le fait que μ soit non identiquement nulle résulte essentiellement de (3.2) qu'il faut localiser en fréquences. Soit $A \geqq 1, R \geqq 1, \Psi_A \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \Phi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\Psi_A = 1$ si $|\tau| \leqq 1, \Phi_R = 1$ si $|t| \leqq 1$. On montre la Proposition suivante.

Proposition 3.3. *Il existe des constantes positives A_0, R_0, k_0 telles que*

$$\int_{\mathbb{R}} \|\Psi_A(h_k^2 D_t)\Phi_R(h_k^2\Delta)\chi W_k(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt \geqq \frac{1}{2},$$

pour tous $A \geqq A_0, R \geqq R_0, k \geqq k_0$.

• Point 3.

On prolonge l'opérateur P à tout $\mathbb{R}^n$ (de manière que $P = -\Delta$ sur une grande boule contenant l'obstacle $\mathcal{K}$). Le fait que μ soit nulle près des points rentrants est exprimé par le résultat suivant.

Théorème 3.4. *Soit* $m_0 = (x_0, t_0, \xi_0, \tau_0) \in T^*(\mathbb{R}^{n+1})$ *tel que* $\xi_0 \neq 0, \tau_0 + p(x_0, \xi_0) = 0, |x_0| \geqq R_0$ *et* $\sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}(x_0)x_{0j}\xi_{0k} \leqq -3\delta|x_0||\xi_0|$ *(pour un certain* $\delta > 0$ *assez petit). Alors* $m_0 \notin \operatorname{supp}\mu$.

Idée de la preuve du théorème

Tout d'abord il est facile de voir que si l'on pose $e_0 = \sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}(x)x_j \frac{\xi_k}{\langle\xi\rangle}$ il existe alors des constantes positives R, C_0, C_1 telles que, $H_p e_0(x,\xi) \geqq C_0|\xi| - C_1$, pour $|x| \geqq R$. En utilisant l'hypothèse de non capture on montre le lemme suivant.

Lemme 3.5. *Il existe* $e \in S(\langle x\rangle, g)$ *et des constantes positives* C, C', R' *telles que*

(i) $H_p e(x,\xi) \geqq C|\xi| - C', \quad \forall (x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n)$,

(ii) $e(x,\xi) = e_0(x,\xi), \quad$ *si* $|x| \geqq R'$.

Le problème que pose cette "fonction fuite" e est que le commutateur de l'opérateur pseudo- différentiel qu'elle définit avec la perturbation quadratique V ne donne pas un opérateur borné sur L^2. Il faut donc en construire une meilleure. On procède de la manière suivante.

Soit $\Psi, \Psi_0, \Psi_1, \chi$ des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ ainsi définies.

$$\begin{cases} \Psi(t) = 1,\ t \geqq 2\varepsilon,\ \operatorname{supp}\Psi \subset [\varepsilon, +\infty[,\ \Psi'(t) \geqq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}, \\ \Psi_0(t) = 1 - \Psi(t) - \Psi(-t) \\ \Psi_1(t) = \Psi(t) - \Psi(-t) \\ \chi(t) = 1,\ t \leqq \frac{\rho}{2},\ \operatorname{supp}\chi \subset]-\infty, \rho],\ \rho \textit{ petit}. \end{cases}$$

Posons alors, pour $\nu > 0$ arbitrairement petit, et M_0 assez grand,

$$-\lambda = \Big(\frac{e}{\langle x\rangle}\Psi_0(\frac{e}{\langle x\rangle}) - (M_0 - \langle e\rangle^{-\nu})\Psi_1(\frac{e}{\langle x\rangle})\Big)\chi\Big(\frac{\langle x\rangle}{\sqrt{(p(x,\xi)}}\Big).$$

On a alors le lemme suivant.

Lemme 3.6. *Il existe un symbole* $\Phi \in S(1,g)$ *tel que* $0 \leqq \Phi \leqq 1$, *et*

(i) $\operatorname{supp}\Phi \subset \{(x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n) : |x| \geqq 2R_0,\ a(x,\xi) \leqq -\frac{\delta}{2}|x||\xi|,\ |\xi| \geqq \frac{|\xi_0|}{4}\}$

(ii) $\{(x,\xi) : |x| \geqq \frac{5R_0}{2},\ a(x,\xi) \leqq -\delta|x||\xi|,\ |\xi| \geqq \frac{|\xi_0|}{2}\} \subset \{(x,\xi) : \Phi(x,\xi) = 1\}$

où $a(x,\xi) = \sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}(x)x_j\xi_k$

(iii) $\Phi(x, h\xi) = \Phi(x,\xi)$ *lorsque* $|h\xi| \geqq \frac{|\xi_0|}{2}$ *et* $0 < h \leqq 1$,

(iv) $H_p\Phi(x,\xi) \leqq 0$ *sur le support de* λ,

(v) $\lambda(x,\xi) \geqq 0$ *sur le support de* Φ

De plus si on pose $\lambda_1 = \lambda\Phi^2$ *on a*

(1) $\lambda_1 \in S(1,g)$

(2) $[P, Op^w(\lambda_1)] - \frac{1}{i} Op^w(H_p\lambda_1) \in Op^w S(1,g)$

(3) Il existe $M_0 > 0$ *tel que pour tout* $\nu > 0$ *il existe des constantes positives* C *et* C' *telles que*

$$- H_p\lambda_1(x,\xi) \geqq C\langle x\rangle^{-1-\nu}\Phi^2(x,\xi)(|x| + |\xi|) - C'\Phi^2(x,\xi). \tag{3.5}$$

Ici $Op^w(a)$ désigne le quantifié de Weyl du symbole a.

Soit alors $b \in C_0^\infty(V_{(x_0,\xi_0)})$ telle que $b(x_0,\xi_0) = 1$. On peut trouver une constante C positive telle que $|b(x, h\xi)| \leqq C\Phi(x,\xi)$, pour tout (x,ξ) dans $T^*(\mathbb{R}^n)$ et tout h dans $]0,1]$. Soit $b_1(x,\xi) = b(x,\xi)|\xi|^{\frac{1}{2}}$. Soit ϕ_0, ψ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}), \phi_1$ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\phi_0(t_0) \neq 0,\ \psi(\tau_0) \neq 0,\ \phi_1(x) = 1, \text{ si } |x| \leqq \frac{4R_0}{3}, \text{ supp}\,\phi_1 \subset \{x : |x| \leqq \frac{3R_0}{2}\}.$$

On a alors le lemme suivant.

Lemme 3.7.

$$\int_{\mathbb{R}} \|\phi_0(t)\psi(h_k^2 D_t) b_1(x, h_k D_x)(1 - \phi_1(x)) W_k(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, dt = o(1)$$

pour $k \to +\infty$.

Il résulte de ce lemme que le point $m_0 = (x_0, t_0, \xi_0, \tau_0)$ n'appartient pas au support de μ, ce qui fournit la preuve du point 3.

• Point 4.

Par hypothèse de non capture on peut trouver s_0 tel que $|x(s)| \geqq 3R_0$, pour $s \leqq s_0$. Pour $s \in]-\infty, s_0]$ posons

$$F_1(s) = \sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}(x(s))x_j(s)\xi_k(s),\ F_2(s) = 3\delta|x(s)||\xi(s)|,\ F(s) = F_1(s) + F_2(s),$$

En calculant la dérivée de la fonction F on voit facilement qu'il existe un point s_1 tel que $(x(s_1), \xi(s_1))$ soit rentrant, ce qui termine la preuve du théorème 2.1.

Références

[B1] Burq, N. : *Mesures semi classiques et mesures de défaut*, Séminaire Bourbaki, Astérisque n°2, 45 (1997) 163,178.

[B2] Burq, N. : *Smoothing effect for Schrödinger boundary value problems*, Duke Math. J. 123 (2004) 403-430.

[B3] Burq, N. : *Semi classical estimates for the resolvent in non trapping geometries*, IMRN n°5 (2002) 221-241.

[B-G] Burq N., Gérard P. : *Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité locale exacte des ondes* CRAS Paris, 325 (1997) 749-752.

[C-S] Constantin, P., Saut, J-C. : *Local smoothing properties of dispersive equations*, Journal American Mathematical Society (1988) 413-439.

[D1] Doï, S. : *Smoothing effects of Schrödinger evolution group on Riemannian manifolds*, Duke Math. J. 82 (1996) 679-706.

[D2] Doï, S. : *Smoothing effects for Schrödinger evolution equation and global behavior of geodesic flow*, Math. Ann. 318 (2000) 355-389.

[D3] Doï, S. : *Remarks on the Cauchy problem for Schrödinger type equations*, Comm. in pde, 21 (1996) 163-178.

[D4] Doï, S. : *Smoothness of solutions for Schrödinger equations with unbounded potential.*, Publ.Res.Inst.Math.Sci 41 (2005), 1, 175-221.

[G-L] Gérard P.- Leichtnam E. : *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem*, Duke Math. J. 71 n°2 (1993) 559-607.

[K] Kato T. : *On the Cauchy problem for the (generalized) KdV equation*, Stud. Appl. Math. Adv. Math. Suppl. Stud. 8 (1983) 93-128.

[L] Lebeau, G. : *Equation des ondes amorties* , Algebraic and Geometric methods in Math. Physics. Math. Phys. Studies, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht 19 (1996) 73-109.

[M-S] Melrose R.B., Sjöstrand J. : *Singularities of boundary value problems I,* Comm.on pure and Appl. Math. 31 n°5 (1978) 593-617.

[M] Miller L. : *Refraction of high frequency waves density by sharp interfaces and semi classical measures at boundary*, J. Math. Pures Appl. (9) 79 n°3 (2000) 227-269.

[R-Z] Robbiano L., Zuily C. : *The Kato smoothing effect for Schrödinger equations with unbounded potentials in exterior domains.* To appear.

[S] Sjölin P. : *Regularity of solution to the Schrödinger equation*, Duke Math. J. 55 (1987) 699-715.

[V] Vega L. : *Schrödinger equations, pointwise convergence to the initial data*, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988) 874-878.

[Y] Yajima K. : *On smoothing property of Schrödinger propagator*, Lectures notes in Math. 1450 Springer Verlag (1990) 20-35.

Mathématiques, Université Paris Sud, F-91405 Orsay
Luc.Robbiano@math.u-psud.fr
claude.zuily@math.u-psud.fr